Übungen zu Funktionalanalysis 3 SS20, 7. Übung

1. Zeigen Sie unter Zuhilfenahme unter anderem des geometrischen Hahn-Banachs, dass folgende Aussagen für einen normierten Raum X über $\mathbb{R}$ und eine beschränkte, abgeschlossene und konvexe Menge C ($\subseteq X$) äquivalent sind (Dentability - Eindellbarkeit):

   (i) Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es $x' \in X'$ und $\alpha > 0$ mit $d(S(C, x', \alpha)) < \epsilon$, wobei $d(\dots)$ den Durchmesser einer Teilmenge von X bezeichnet und $S(C, x', \alpha) := \{x \in C : x'(x) \geq x'(y) - \alpha \text{ für alle } y \in C\}$.

   (ii) Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $x \in C$ mit $x \notin \overline{\operatorname{conv}(C \setminus U_\epsilon(x))}^{\|.\|}$

2. Sei X ein normierter Raum über $\mathbb{R}$ und C ($\subseteq X$) beschränkt, abgeschlossen und konvex, welche nicht dentable mit einem Ausnahme $\epsilon > 0$ für (ii) in der vorherigen Aufgabe ist. Für ein $x \in C$ sei $M_1 := \{x\}$. Sind $M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq C$ definiert, so zeige man für $x \in M_n$ die Existenz einer endlichen Menge $R(x, n+1) \subseteq C \setminus U_\epsilon(x)$ mit $\|x - \sum_{y \in R(x,n+1)} \lambda_y y\| < \frac{1}{n+1}$ für gewisse $\lambda_y \in [0, 1], y \in R(x, n+1)$, mit $\sum_{y \in R(x,n+1)} \lambda_y = 1$. Wir setzen

$$M_{n+1} = \{\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} y_j : y_1, \dots, y_{n+1} \in M_n \cup \bigcup_{x \in M_n} R(x, n+1)\}$$

   und schlussendlich $M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$.

   Zeigen Sie, dass $\overline{\operatorname{conv}(M)}^{\|.\|}$ nicht dentable, separabel und in C enthalten ist.

3. Zeigen Sie mit Hilfe der vorherigen Aufgabe, dass für eine beschränkte, abgeschlossene und konvexe Teilmenge C eines Banachraumes X folgende Aussagen äquivalent sind:

   (i) C hat RNP.

   (ii) Jede nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge von C hat RNP.

   (iii) Jede nichtleere, abgeschlossene konvexe und separable Teilmenge von C hat RNP.

4. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ eine weitere σ-Algebra auf Ω und X ein Banachraum. Bezeichnet $P : L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, X) \to L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu, X)$ die bedingte Erwartungswertsabbildung wie in Vorlesung Video 32, so zeige man, dass für $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, X)$ und $g \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu, X)$ genau dann $Pf = g$, wenn $\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu|_{\mathcal{B}}$ für alle $A \in \mathcal{B}$.

5. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ eine weitere σ-Algebra auf Ω und X ein Banachraum. Weiters bezeichne $P : L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, X) \to L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu, X)$ die bedingte Erwartungswertsabbildung.

   Man zeige, dass $P(\mathbb{1}_B f) = \mathbb{1}_B P(f)$ in $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu, X)$ für alle $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, X)$ und $B \in \mathcal{B}$. Man zeige auch, dass $P(gf) = gP(f)$ in $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu, X)$ für alle $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, X)$ und $g \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu, \mathbb{R})$.

Ist $C \in \mathcal{B}$ mit $\mu(C) > 0$ und $C \cap B \in \{\emptyset, C\}$ für alle $B \in \mathcal{B}$, so zeige man schließlich, dass

$$P(\mathbb{1}_C f) = \mathbb{1}_C P(f) = \frac{1}{\mu(C)} (\int\limits_C f \, d\mu) \cdot \mathbb{1}_C$$

in $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu, X)$ für alle $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, X)$.

6. Mit dem Satz von Krein-Smulian aus dem letzten Video zeige man, dass das Bild der Abbildung Ψ aus dem 13. Video (siehe Bild 13-3) übereinstimmt mit der Menge aller $f \in C_b(K, \mathbb{C})$ (hier ist $K = K_1^{X'}(0)$), die $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in K$ mit $x + y \in K$ und $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ für alle $x \in K$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha x \in K$ erfüllen.