Übungen zu Funktionalanalysis 3 SS20, 6. Übung

1. Für einen normierten Raum X heißt eine Folge $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Schauderbasis, wenn es zu jedem $x \in X$ eine eindeutige Folge $(\xi_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bzw. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (je nachdem, was der Skalarkörper von X ist) gibt mit
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(x) e_k \,,$$
wobei diese Reihe im klassischen Sinne konvergiert.

   Zeigen Sie, dass $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig ist und dass $\xi_k : X \to \mathbb{R}$ bzw. $\xi_k : X \to \mathbb{C}$ linear für alle $k \in \mathbb{N}$ ist. Zeigen Sie auch, dass $P_n : X \to X$ definiert durch $P_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \xi_k(x) e_k$ eine lineare Projektion abgibt, die $\dim P_n(X) = n$, $P_n P_m = P_m P_n = P_{\min(m,n)}$ und $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = x$ erfüllt.

2. Für einen Banachraum X und eine Schauderbasis $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zeige man mit Hilfe der letzten Aufgabe der fünften Übung und mit der Notation der vorherigen Übungsaufgabe, dass $P_n \in L_b(X)$ und $\xi_n \in X'$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|P_k\| < +\infty$ und $\|\xi_n\| \cdot \|e_n\| \le 2 \sup_{k\in\mathbb{N}} \|P_k\|$.

3. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, X ein Banachraum und $f : \Omega \to X$ schwach integrierbar wie in Übungsaufgabe 4 der fünften Übung. Weiters sei f sogar Pettis integrierbar, also $D - \int_\Omega \mathbb{1}_A \cdot f \, d\mu \in \iota(X)$ für alle $A \in \mathcal{A}$, wobei $\iota : X \to X''$ die kanonische Einbettungs bezeichnet. Das Pettis-Integral ist dann definiert durch
$$P - \int_\Omega \mathbb{1}_A \cdot f \, d\mu := \iota^{-1}(D - \int_\Omega \mathbb{1}_A \cdot f \, d\mu)$$
für alle $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass dann $x'(P - \int_\Omega \mathbb{1}_A \cdot f \, d\mu) = \int_\Omega x' \circ (\mathbb{1}_A \cdot f) \, d\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und $x' \in X'$. Zeigen Sie weiters, dass $F : \mathcal{A} \to X$ definiert durch $F(A) := P - \int_\Omega \mathbb{1}_A \cdot f \, d\mu$ eine Banachraumwertiges Maß abgibt.

4. Sei $[0,1]$ ($\subseteq \mathbb{R}$) versehen mit der σ-Algebra der Borelmengen $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\{(a,b] \cap [0,1] : -\infty < a < b < +\infty\})$ und mit dem darauf eingeschränkten Lebesgue-Maß $\lambda : \mathcal{A} \to [0,1]$. Zeigen Sie, dass man für $B \in \mathcal{A}$ mit $\lambda(B) > 0$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in [0,1]$ mit $\sum_j \alpha_j = 1$ paarweise disjunkte Teilmengen $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{A}$ von B findet mit $B_1 \cup \dots \cup B_m = B$ und $\lambda(B_j) = \alpha_j \cdot \lambda(B)$.

5. Sei $[-\pi, +\pi]$ ($\subseteq \mathbb{R}$) versehen mit der σ-Algebra der Borelmengen $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\{(a,b] \cap [-\pi,+\pi] : -\infty < a < b < +\infty\})$ und mit dem darauf eingeschränkten Lebesgue-Maß $\lambda : \mathcal{A} \to [0, 2\pi]$. Weiters Sei $F : \mathcal{A} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definiert durch $F(A) := (\int_A \exp(it(n-1)) \, d\lambda(t))_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass $F(A) \in c_0(\mathbb{C}, \mathbb{N})$ und dass $F : \mathcal{A} \to c_0(\mathbb{C}, \mathbb{N})$ ein Banachraumwertiges Maß mit beschränkter Variation abgibt. Bestimmen Sie $\|F\|(A)$, zeigen Sie $F << \lambda$ und zeigen Sie $\|\frac{1}{\lambda(B)} F(B)\|_\infty \le 1$ für alle $B \in \mathcal{A}$ mit $\lambda(B) > 0$. Hat $c_0(\mathbb{C}, \mathbb{N})$ die Radon-Nikodym Eigenschaft?

   Hinweis für die letzte Aussage: Für $g : [-\pi, +\pi] \to c_0(\mathbb{C}, \mathbb{N})$ mit $\int_A g \, d\lambda = F(A)$ wie müsste $\pi_n \circ g : [-\pi, +\pi] \to \mathbb{C}$ dann ausschauen, wobei $\pi_n : c_0(\mathbb{C}, \mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ die Projektion auf die n-te Komponente ist?