Übungen zu Funktionalanalysis 3 SS20, 5. Übung

1. Sei X ein Banachraum und $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Man zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

   (i) Für alle $x' \in X'$ konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{N}} x'(x_n)$ unbedingt.

   (ii) $S(x') := (x'(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine auf ganz X' definierte, lineare und beschränkte Abbildung von nach ℓ_1.

   (iii) Es gibt ein $c \geq 0$ derart, dass für $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$
   $$\sup_{N\in\mathbb{N}} \| \sum_{n=1}^{N} t_n x_n \| \leq c \|(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty .$$

   (iv) Es gibt einen linearen und beschränkten Operator $T : c_0 \to X$ mit $T(e_k) = x_k$, wobei $e_k = (\delta_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$.

   Zeigen Sie unter den Bedingungen (i) bis (iv) auch, dass $T' = S$.

   Hinweis für $(i) \Rightarrow (ii)$: Satz vom abgeschlossenen Graphen. Hinweis für $(ii) \Rightarrow (iii)$: Für $z = \sum_{n=1}^{N} t_n x_n$ gilt $\|z\| = \|\iota(z)\| = \sup_{x' \in K_1^{X'}(0)} |x'(z)|$.

   Anmerkung: Wenn die Bedingungen hier erfüllt sind, impliziert das im Allgemeinen nicht, dass $\lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} \sum_{n\in\mathbb{A}} x_n$ bezüglich der schwachen Topologie auf X konvergiert.

2. Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel gelte (i) bis (iv). Man zeige: $\lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N})} \sum_{n\in\mathbb{A}} \lambda_n x_n$ konvergiert bezüglich der schwachen Topologie auf X für alle $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ genau dann, wenn $T : c_0 \to X$ schwach kompakt ist.

3. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, X ein Banachraum und $f : \Omega \to X$ Bochner-integrierbar. Zeigen Sie, dass für $A \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < +\infty$ der Ausdrück
   $$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu$$
   im Abschluss der Konvexen Hülle von $f(A)$ enthalten ist.

   Hinweis: Widerspruchsbeweis unter Zuhilfenahme der Geometrische Version von Hahn-Banach.

4. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und X ein Banachraum. Eine schwach messbare Abbildung $f : \Omega \to X$ heißt schwach integrierbar, wenn $x' \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ für alle $x' \in X'$ integrierbar ist. Zeigen Sie, dass es dann ein $z'' \in X''$ gibt mit $z''(x') = \int_\Omega x' \circ f \, d\mu$ für alle $x' \in X'$. Für z'' schreibt man auch $D - \int_\Omega f \, d\mu$ und bezeichnet diesen Ausdruck als Dunford Integral von f.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass $T : x' \to L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $T(x')(t) = x' \circ f(t)$ einen abgeschlossenen Graphen hat.

5. Mit der Notation aus dem vorletzten Beispiel der dritten Übung seien zusätzlich $L_{l,m} \in L_b(X_m, X_l)$ für alle $l, m \in M$ mit $l \preceq m$. Man zeige, dass
   $$c(M, (L_{l,m})_{l\preceq m}, (L_m)_{m\in M}) := \{(x_m)_{m\in M} \in c(M, (L_m)_{m\in M}) : L_{l,m} x_m = x_l \text{ für alle } l \preceq m\}$$

ein abgeschlossener Teilraum von $c(M,(L_m)_{m\in M})$ ist. Zeigen Sie auch, dass lineare Abbildungen $L_{l,m} : X_m \to X_l$ automatisch beschränkt sind, wenn alle X_m endlich dimensional sind.

Zeigen Sie schließlic, dass im Falle der Bijektivität von $L|_{c(M,(L_{l,m})_{l\leq m},(L_m)_{m\in M})} : c(M,(L_{l,m})_{l\leq m},(L_m)_{m\in M}) \to X$ diese Abbildung sogar in beide Richtungen beschränkt, also ein Homöomorphismus ist.