Übungen zu Funktionalanalysis 3 SS20, 4. Übung

1. Sei $T : [0,+\infty) \to L_b(X)$ eine Halbgruppe von Operatoren und $\delta > 0$. Zeigen Sie, dass die schwache Stetigkeit von $T|_{[0,+\delta]}$ wie in der in der Vorlesung definiert zur Stetigkeit von $T|_{[0,+\delta]} : [0,+\delta] \to L_b(X)$ äquivalent ist, wobei hier $L_b(X)$ mit der schwachen Operator-Topologie versehen ist; siehe Fana1!

2. Sei X ein Banachraum, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g : \Omega \to X$ derart, dass $f(\Omega)$ und $g(\Omega)$ separabel sind. Führen Sie im Detail aus, dass dann auch für $(\alpha f + \beta g) : \Omega \to X$ gilt, dass $(\alpha f + \beta g)(\Omega)$ separabel ist.

   Weiters führe man genau aus, dass für eine Folge $f_n : \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$, mit separablen $f_n(\Omega)$ derart, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$ für alle ω in X existiert, auch $f(\Omega)$ separabel ist.

3. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, X ein Banachraum und $p \in (1,\infty]$. Zeigen Sie, dass $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, X)$, definiert als die Menge aller schwach messbaren $f : \Omega \to X$ mit separablen Bildbereich und $\| \|f\|_X \|_p < +\infty$ ($\|.\|_p$ ist hier die übliche p-Norm für $\mathbb{R}$-wertige Funktionen), mit der punktweisen Addition und punktweisen skalaren Multiplikation, mit $\|f\|_p := \| \|f\|_X \|_p$ einen Banachraum abgibt, wobei zwei Funktionen f_1 und f_2 identifiziert werden, wenn $\|f_1 - f_2\|_p = 0$ oder, äquivalent dazu, wenn $f_1 = f_2$ μ-fast überall.

   Hinweis: Für die Vollständigkeit gehe man ähnlich wie für $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu, X)$ vor!

4. Sei X ein Banachraum, $a_m \in X$, $m \in M$, und $\sum_{m\in M} a_m$ unbedingt konvergent. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum_{m\in M} \delta_m \cdot a_m$ für jede Abbildung $\delta : M \to \{-1,+1\}$ und auch für jede Abbildung $\delta : M \to \{-1,0,+1\}$ unbedingt konvergiert.

5. Man zeige ohne Zuhilfenahme der Ergebnisse aus dem Video 17, dass die konvexe Hülle der Vektoren $x \in \mathbb{R}^p$ von der Bauart $x = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)^T$, wobei $\epsilon_j \in \{-1,+1\}$ für $j = 1,\ldots,p$, mit der abgeschlossenen Einheitskugel $K_1^{\|.\|_\infty}(0)$ bezüglich der Maximumsnorm übereinstimmt.

   Hinweis: Induktion nach p.

6. Führen Sie aus, dass eine Banachraumwertige messbare Treppenfunktion eine Darstellung der Form $\sum_{j=1}^N \mathbb{1}_{A_j} x_j$ mit paarweise disjunkten Mengen A_j und verschiedenen und nicht verschwindenden x_j aus dem Banachraum hat.