Übungen zu Funktionalanalysis 3 SS20, 3. Übung

1. Bezeichne C die Kantorsche Menge und sei $(X, \mathcal{T})$ kompakt und metrisierbar. Zeigen Sie zunächst, dass es einen isometrischen Isomorphismus von $(C_b(X, \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ auf einen abgeschlossenen Unterraum von $(C_b(C, \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ gibt.

   Zeigen Sie anschließend, dass es auch einen isometrischen Isomorphismus von $(C_b(X, \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ auf einen abgeschlossenen Unterraum von $(C_b([0,1], \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ gibt.

   Hinweis: Betten Sie $C_b(C, \mathbb{C})$ isometrisch und linear in $C_b([0,1], \mathbb{C})$ ein, indem Sie ein stetiges $f : C \to \mathbb{C}$ derart zu einem stetigen $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ fortsetzen, dass g auf den $[\frac{2j-1}{3^n}, \frac{2j}{3^n}]$ linear ist; siehe vorletztes Beispiel der zweiten Übung..

2. Sei X ein Banachraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine festgehaltene Nullfolge in X und

   $$T : \ell_1(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to X \quad \text{definiert durch} \quad T((\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \cdot x_n \, .$$

   Zeigen Sie zunächst, dass T ein wohldefinierter (warum ist diese Reihe konvergent?), beschränkter linearer Operator ist. Zeigen Sie weiters, dass nach der Identifizierung von $(\ell_1(\mathbb{N}, \mathbb{C}))'$ mit $\ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ vermöge der Isometrischen Bijektion $\ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \ni (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto ((\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n\beta_n) \in (\ell_1(\mathbb{N}, \mathbb{C}))'$ sich $T' : X' \to \ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ durch $T'(x') = (x'(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschreiben lässt.

   Schließlich zeige man, dass T schwach kompakt ist.

   Hinweis: Für die schwache Kompaktheit beachte man, dass auch

   $$\ell_1(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \ni (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto ((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\beta_n) \in c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})'$$

   ein isometrischer Isomorphismus ist. Die Einbettung $\iota : c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to (c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C}))''$ entspricht bei der Identifizierung von $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})'$ mit $\ell_1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ und von $(\ell_1(\mathbb{N}, \mathbb{C}))'$ mit $\ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ der natürlichen Einbettung von $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ in $\ell_\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

   Eine andere Möglichkeit besteht darin, zu zeigen, dass T sogar kompakt ist.

3. Führen Sie aus, dass für Banachräume $(X_m, \|.\|_m)$, $m \in M$, der Raum $\ell_\infty(M, (X_m)_{m\in M})$ versehen mit $\|(x_m)_{m\in M}\|_\infty = \sup_{m\in M} \|x_m\|_m$ einen Banachraum abgibt und dass $\ell_1(M, (X_m)_{m\in M})'$ mit $\ell_\infty(M, (X'_m)_{m\in M})$ isometrisch isomorph identifizierbar ist.

4. Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel sei zusätzlich angenommen, dass $L_m \in L_b(X_m, X)$ für alle $m \in M$ mit ein und demselben Banachraum X. Weiters sei M durch $\preceq$ gerichtet und es gelte $\|L_m\| \leq d$ für alle $m \in M$ mit einem festen $d \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann

   $$c(M, (L_m)_{m\in M}) := \{(x_m)_{m\in M} \in \ell_\infty(M, (X_m)_{m\in M}) : \lim_{m\in M} L_m(x_m) \text{ existiert in } X\}$$

   ein abgeschlossener Unterraum von $\ell_\infty(M, (X_m)_{m\in M})$ und $L : c(M, (L_m)_{m\in M}) \to X$ mit $L((x_m)_{m\in M}) = \lim_{m\in M} L_m(x_m)$ linear und beschränkt mit $\|L\| \leq d$ ist.

   Hinweis: Limesvertauschungslemma!!

5. Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum und $A \subseteq X$. Zeigen Sie die Kompaktheit von $\overline{\operatorname{conv}(A)}^{\|.\|}$ bzgl. $\|.\|$, wenn A kompakt bzgl. $\|.\|$ ist.

   Hinweis: Zu $\epsilon > 0$ gibt es $a_1, \ldots, a_m \in A$ mit $A \subseteq \{a_1, \ldots, a_m\} + U_\epsilon(0)$ (warum?) und infolge $\operatorname{conv}(A) \subseteq \operatorname{conv}\{a_1, \ldots, a_m\} + U_\epsilon(0)$ (warum?). Stellen Sie anschließend $\operatorname{conv}\{a_1, \ldots, a_m\}$ als stetiges Bild einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ dar.