Übungen zu Funktionalanalysis 3 SS20, 2. Übung

1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$ und $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X. Zeigen Sie, dass x genau dann Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$ ist, wenn $\lim_{j\in J} x_{i(j)} = x$ für ein gewisses Teilnetz von $(x_{i(j)})_{j\in J}$ von $(x_i)_{i\in I}$.

2. Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume, $f : X \to Y$ stetig und $A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass wenn A die Eigenschaft hat, dass jede Folge aus A einen Häufungspunkt in X hat, dann auch jede Folge aus $f(A)$ einen Häufungspunkt in Y hat.

   Zudem gebe mam alle Teilmengen A von $\mathbb{R}^p$ (mit Euklidischer Topologie) an, die die Eigenschaft haben, dass jede Folge aus A einen Häufungspunkt in $\mathbb{R}^p$ hat.

3. Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum und $A \subseteq X$ abzählbar. Zeigen Sie, dass der Abschluss Y der linearen Hülle von A eine separable Teilmenge von X ist.

4. Zeigen Sie, dass $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} a_k$ stetig und injektiv ist, wobei $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie versehen ist.

   Man zeige auch, dass $f(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}([0,1] \setminus U_n)$ übereinstimmt, wobei $U_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ und $(n \geq 2)$

   $$U_n = U_{n-1} \cup \bigcup_{j=1}^{\frac{3^{n}-1}{2}} (\frac{2j-1}{3^n}, \frac{2j}{3^n}).$$

   Somit ist $f(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ die Kantorsche Menge C und $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$ ist ein Homöomorphismus. Warum?

5. Zeigen Sie, dass für einen Banachraum X und die kanonische Einbettung $\iota : X \to X''$, die einem x das Punktauswertungsfunktional $X' \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ zuweist,

   $$\sigma(X'', X')|_{\iota(X)} = \sigma(X'', X''')|_{\iota(X)}\,.$$