Übungen zu Funktionalanalysis 3 SS20, 1. Übung

1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Hausdorffraum mit einer Basis $\mathcal{B}$ der Topologie. Zeigen Sie, dass X dann stetiges Bild einer abgeschlossenen Teilmenge A von $\{0,1\}^{\mathcal{B}}$ ist, wobei $\{0,1\}$ mit der diskreten und $\{0,1\}^{\mathcal{B}}$ mit der entsprechenden Produkttopologie versehen ist.

   Hinweis: Setze $C(0,B) = \overline{B}$ und $C(1,B) = X \setminus B = B^c$ für $B \in \mathcal{B}$. Für $(\xi_B)_{B\in\mathcal{B}} \in \{0,1\}^{\mathcal{B}}$ definiere $\phi((\xi_B)_{B\in\mathcal{B}}) := \bigcap_{B\in\mathcal{B}} C(\xi_B, B)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Charakterisierung der Kompaktheit von X über die endlichen Durchschnittseigenschaft, dass für $A := \{(\xi_B)_{B\in\mathcal{B}} \in \{0,1\}^{\mathcal{B}} : \phi((\xi_B)_{B\in\mathcal{B}}) \neq \emptyset\}$ die Menge A^c offen in $\{0,1\}^{\mathcal{B}}$ ist. Zeigen Sie auch, dass $\phi((\xi_B)_{B\in\mathcal{B}})$ höchstens einpunktig ist, indem Sie $x \neq y$ aus dieser Menge auf einen Widerspruch führen. Nun definiere man $f : A \to X$ geeignet und zeigen, dass f stetig ist.

2. Sei $A \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}} =: X$ abgeschlossen ($\{0,1\}$ versehen mit der diskreten Topologie). Zeigen Sie, dass es ein stetiges $f : X \to A$ mit $f|_A = \mathrm{id}_A$ gibt. Das heißt, dass jede abgeschlossene Teilmenge von X ein Retrakt ist.

   Hinweis: Versehen sie X mit einer Metrik d, welche mit der Produkttopologie verträglich ist und welche die Eigenschaft
   $$d(x,y) = d(x,z) \Rightarrow y = z$$
   hat. Zu $x \in X$ betrachte man dann das stetige $x \mapsto d(x,A)$ und suche $y \in A$ mit $d(x,A) = d(x,y)$.....

3. Zeigen Sie, dass jeder kompakte metrische Raum stetiges Bild von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist.

4. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Man zeige, dass die Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(x)$ um die Punkte $x \in X$ folgende drei Eigenschaften haben:

   (a) Für jedes $x \in X$ ist $\mathfrak{U}(x)$ ein Filter.

   (b) Für jedes $x \in X$ und jedes $U \in \mathfrak{U}(x)$ gilt $x \in U$.

   (c) Für jedes $x \in X$ und jedes $U \in \mathfrak{U}(x)$ gibt es ein $W \in \mathfrak{U}(x)$ mit $W \subseteq U$, sodass für alle $y \in W$ gilt, dass $U \in \mathfrak{U}(y)$.

   Zeigen Sie auch umgekehrt, dass wenn für alle $x \in X$ ein Mengensystem $\mathfrak{U}(x)$ mit obigen Eigenschaften gegeben ist, es eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}$ auf X gibt, sodass die $\mathfrak{U}(x)$ genau die Umgebungsfilter sind.

   Hinweis für die Umkehrung: Definieren Sie $\mathcal{T}$ als die Menge aller Mengen O mit $O \in \mathfrak{U}(x)$ für alle $x \in O$. Zeigen Sie auch, dass für $U \in \mathfrak{U}(x)$ die Menge $\{z \in U : U \in \mathfrak{U}(z)\}$ offen ist.

5. Man betrachte $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Weiters bezeichne $\mathcal{U}((x,y))$ für $(x,y) \in X$ mit $y > 0$ den von der Filterbasis $\{U_\epsilon((x,y)) : 0 < \epsilon < y\}$ erzeugte Filter auf X, wobei $U_\epsilon((x,y))$ für die offene ϵ-Kugel bezüglich $\|.\|_2$ steht. Für $(x,y) \in X$ mit $y = 0$ sei $\mathcal{U}((x,y))$ der von der Filterbasis $\{\{(x,y)\} \cup U_\epsilon((x,\epsilon)) : 0 < \epsilon\}$ erzeugte Filter auf X.

   Zeigen Sie, dass die gemäß des vorherigen Übungsbeispieles erzeugte Topologie $\mathcal{T}$ Hausdorffsch und X bezüglich dieser Topologie separabel ist. Man zeige auch, dass $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ mit $Y = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ nicht separabel ist. Kann $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar sein?