Übungen zu Topologie SS17, 5. Übung

1. Mit der Notation aus dem Beispiel 3 der vierten Übung sei $(X, \mathcal{T})$ kompakt und $(T2)$, und sei $R = C(X, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass dann das Bild von ϕ genau die Menge aller maximalen Ideal von R ist, und dass $\phi : X \to \phi(X)$ ein Homöomorphismus ist.

   Hinweis: Für $f_1, \ldots, f_n \in I$ (I maximales Ideal) zeige man, dass $\bigcap_{j=1,\ldots,n} f_j^{-1}\{0\}$ nicht leer ist, indem man aus dem Gegenteil die Existenz einer Nullstellenfreien Funktion aus I herleitet. Nun verwende die Kompaktheit, um auf $I \in \phi(X)$ schließen zu können. Für den 2ten Teil zeige $\overline{\phi(A)} \subseteq \phi(\overline{A})$.

2. Zeigen Sie, dass eine topologische Gruppe $(G, \mathcal{T})$ genau dann metrisierbar ist, wenn der Umgebungsfilter $\mathfrak{U}(e)$ des neutralen Elements eine abzählbare Basis hat und $\bigcap_{V \in \mathfrak{U}(e)} V = \{e\}$ erfüllt.

   Zeigen Sie weiters, dass es in dem Fall eine mit $\mathcal{T}$ verträgliche Metrik gibt, die links invariant ist, dh. $d(gx, gy) = d(x, y)$ für alle $x, y, g \in G$ erfüllt.

3. Man gebe einen Homöomorphismus an, der die kantorschen Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ auf $K \times K$ abbildet, wobei die rechte Seite mit der Produkttopologie versehen ist.

   Mit Hilfe dieses Homöomorphismuses und der Abbildung aus dem vorletzten Beispiel der vierten Übung baue man eine surjektive und stetige Abbildung von $[0, 1]$ auf $[0, 1] \times [0, 1]$ (versehen mit der Produkttopologie). Kann eine derartige Abbildung injektiv sein? Begründung!

4. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Hausdorffraum mit einer Basis $\mathcal{B}$ der Topologie. Zeigen Sie, dass X dann stetiges Bild einer abgeschlossenen Teilmenge A von $\{0, 1\}^{\mathcal{B}}$ ist.

   Hinweis: Setze $C(0, B) = \overline{B}$ und $C(1, B) = X \setminus B = B^c$ für $B \in \mathcal{B}$. Für $(\xi_B)_{B \in \mathcal{B}} \in \{0, 1\}^{\mathcal{B}}$ definiere $\phi((\xi_B)_{B \in \mathcal{B}}) := \bigcap_{B \in \mathcal{B}} C(\xi_B, B)$. Zeigen Sie mit Hilfe der kompaktheit von X, dass $A := \{(\xi_B)_{B \in \mathcal{B}} \in \{0, 1\}^{\mathcal{B}} : \phi((\xi_B)_{B \in \mathcal{B}}) \neq \emptyset\}$ abgeschlossen in $\{0, 1\}^{\mathcal{B}}$ ist. Zeigen Sie auch, dass $\phi((\xi_B)_{B \in \mathcal{B}})$ höchstens einpunktig ist, indem Sie $x \neq y$ aus dieser Menge auf einen Widerspruch führen. Nun definiere man $f : A \to X$ geeignet, sodass f stetig wird.

5. Zeigen Sie, dass jeder kompakte metrische Raum stetiges Bild der Kantorschen Menge K ist.

   Anmerkung: Daraus und aus der Funktionalanalysis leitet man unschwer her, dass jeder separable Banachraum Y isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von $C(K)$ ist. In der Tat ist die abgeschlossene Einheitskugel $K_1^{Y'}(0)$ des Dualraumes von Y bzgl. der schwach* Topologie kompakt und metrisierbar, also das stetige Bild $f(K)$ der Kantorschen Menge. Zudem ist gemäß Hahn-Banach $y \mapsto (y' \mapsto y'(y))$ eine lineare Isometrie von Y nach $C(K_1^{Y'}(0))$. Schließlich ist dann $y \mapsto (t \mapsto f(t)(y))$ eine lineare Isometrie von Y nach $C(K)$.

6. Seien M, N nichtleere Mengen und $\mathcal{U}$ eine Uniformität auf M und $\mathcal{V}$ eine solche auf N. Weiters seien $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ bzw. $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ die von diesen Uniformitäten auf M bzw. N erzeugten Topologien. Schließlich sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

Zeigen Sie, dass wenn $f : (M, \mathcal{T}(\mathcal{U})) \to (N, \mathcal{T}(\mathcal{V}))$ stetig ist und wenn $(M, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$ kompakt ist, dann f sogar gleichmäßig stetig ist.

Was bedeutet das für $f = \mathrm{id}$, wenn $M = N$ und $T(\mathcal{U}) = \mathcal{T}(\mathcal{V})$?

7. Sei $(M, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Wie könnte man sinnvoll den Begriff einer total beschränkten Teilmenge definieren, sodass dieser dem bekannten Begriff im metrischen Fall entspricht. Zeigen Sie, dass dann alle bzgl. $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ kompakten Teilmengen total beschränkt und, versehen mit der Spur-uniformen Struktur, vollständig sind.