Übungen zu Analysis 2, 3. Übung

1. Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$
$$\lim_{x \to 0+} \frac{(\sin nx) \ln(\sin x)^2}{x^4 + 1}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos nx}{\sin(n^2 x^2)}.$$
Bei der Verwendung der Regel von de L'Hospital geben Sie genau an, welche Facette derselben Sie verwenden. Überprüfen Sie auch, ob alle Voraussetzungen dieser Facette erfüllt sind.

2. Bestimmen Sie
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x^2 + x + 1)}{x}, \quad \lim_{x \to +\infty} \Big(\frac{x + 2}{x - 1}\Big)^x.$$
Bei der Verwendung der Regel von de L'Hospital geben Sie genau an, welche Facette derselben Sie verwenden. Überprüfen Sie auch, ob alle Voraussetzungen dieser Facette erfüllt sind.

3. Für welchen Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ im ersten Quadranten (daher $a, b > 0$) auf der Parabel $y = 4 - x^2$ besitzt das Dreieck, das von der Tangente in (a, b) an die Parabel und den Koordinatenachsen begrenzt wird, minimalen Flächeninhalt?

   Hinweis: Vergessen Sie nicht zu zeigen, dass der Kandidat fürs lokale Extremum tatsächlich ein Minimum ist!

4. Bekannterweise ist $\sin x$ als Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ entwickelbar. Man verwende das Taylorsche Restglied um folgende Fragestellung zu beantworten:

   Wie groß muss man n wählen, damit die Differenz des n-ten Taylorpolynoms mit Anschlussstelle 0 von $\sin x$ zur Funktion $\sin x$ auf $[-3, 3]$ höchstens 10^{-6} beträgt?

5. Man zeige, dass ($\alpha \in \mathbb{R}$)
$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$
für $0 \leq x < 1$, indem man zeigt, dass das Taylorsche Restglied gegen Null konvergiert.

   Anmerkung: Die Gleichheit gilt auch für $-1 < x < 0$, denn die Potenzreihe $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ hat Konvergenzradius 1 und stimmt für $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $(1 + x)^\alpha$ überein. Nun kann man mit Hilfe des Weierstraß Kriterium zeigen, dass $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ bei festem $x \in (-1, 1)$ stetig in α ist, wenn α in einer beliebigen kompakten Menge der Form $[-K, K]$ läuft. Da $(1 + x)^\alpha$ und $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ stetige Funktionen in α sind und auf der dichten Menge $[-K, K] \cap \mathbb{Q}$ übereinstimmen, müssen sie auf ganz $[-K, K]$ übereinstimmen.

6. Man bestimme
$$\int (x^3 + 2x^2 - 3) e^{2x-4} \quad \text{und} \quad \int x^3 \exp(wx),$$
wobei $w \in \mathbb{C}$ beliebig aber fest ist.

7. Man bestimmte

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} \quad \text{und} \quad \int x^2 \sin x\,.$$

Hinweis: Hat man eine Funktion f der Gestalt $f(x) = R(e^x)$ wobei R eine rationale Funktion ist, so kann man ihr unbestimmtes Integral stets mit Hilfe der Substitution $t = e^x$ auf das unbestimmte Integral einer rationalen Funktion bringen.

8. Eine reellwertige Funktion f, die auf einem Intervall I definiert ist, heißt konvex, wenn sie für beliebige Punkte $x_1, x_2 \in I$ und beliebige $\lambda \in [0,1]$ die Ungleichung

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

erfüllt. Beweisen Sie, dass diese Bedingung zur folgenden äquivalent ist:

Für alle Punkte $x_1, x_2, x \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ gilt:

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)\,.$$

Weiters zeigen Sie, dass diese Ungleichung wiederum äquivalent zu

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}\,.$$

für alle $x, x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ ist.

Was bedeutet die Bedingung konvex zu sein geometrisch? Warum?

Bemerkung: Eine Funktion f heißt konkav, wenn $-f$ konvex ist.

9. Zeigen Sie, dass konvexe Funktionen auf offenen Intervallen I stetig sind!

Hinweis: Für die Stetigkeit in einem Punkt $x \in I$ fixiere man $a, b \in I$ mit $x \in (a,b) \subseteq [a,b] \subseteq I$ und verwenden Sie das vorherige Übungsbeispiel.