Übungen zu Analysis 2, 2. Übung

1. Man berechne die Ableitung folgender Funktionen auf $(0, +\infty)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x^\alpha, \quad x^x, \quad (x^x)^x, \quad x^{x^x}, \quad \ln(x + \cos^2(\frac{1}{x^2}))\,.$$

2. Berechnen Sie ($n \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x^2 - 1}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos nx}{\sin(n^2 x^2)}\,.$$

3. Bestimmen Sie

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{1 + \frac{1}{\cos x}}{1 + \tan x}, \quad \lim_{x \to 0+} (1 + x)^{\frac{1}{x}}\,.$$

   Bei der Verwendung der Regel von de L'Hospital geben Sie genau an, welche Facette derselben Sie verwenden. Überprüfen Sie auch, ob alle Voraussetzungen dieser Facette erfüllt sind.

4. Führen Sie bei der auf $\mathbb{R}$ definierten reellwertigen Funktion $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$, und $f(0) = 0$ eine Kurvendiskussion durch.

   Geben Sie also an, wie oft f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Begründung! Bestimmen Sie Nullstellen, lokale (globale Extrema), auf welchen Teilintervallen die Funktion (streng) monoton wachsend bzw. fallend ist, Wendepunkte, also Stellen, wo die erste Ableitung der Funktion ein lokales Extremum hat.

5. Man begründe die Ableitbarkeit und berechne die Ableitung der Umkehrfunktion $\arcsin : (-1, 1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ von $\sin : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-1, 1)$ sowie der Umkehrfunktion $\operatorname{areasinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

6. Die Funktion $\tan x$ ist für alle $x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ definiert als $\frac{\sin x}{\cos x}$. Man berechne die erste und die zweite Ableitung dieser Funktion. Weiters bestimme man die Nullstellen der Funktion, und zeige, dass sie streng monoton wachsend auf jedem in $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ enthaltenem Intervall ist. Skizze!

   Schließlich zeige man $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}-} \tan t = +\infty$, $\lim_{t \to -\frac{\pi}{2}+} \tan t = -\infty$ und damit, dass tan das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet, und berechne man die Ableitung der Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (Arcustangens).

7. Sei $f : (-\infty, 2] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = (x - 1)^{x-1}$ für $x \in (1, 2]$ und durch $f(x) = c + xe^{-x}$ für $x \leq 1$ und mit einem $c \in \mathbb{R}$ derart, dass f stetig ist.

   Geben Sie c an! Skizzieren Sie die Funktion! Wo ist f differenzierbar? Suchen Sie die Nullstellen der Ableitung dort, wo die Funktion ableitbar ist! Geben Sie an, auf welchen Teilintervallen von $(-\infty, 2]$ die Funktion (streng) monoton wächst und wo sie (streng) monoton fällt. Bestimmen Sie auch alle lokalen Extrema, sowie das globale Maximum und Minimum (falls vorhanden)!

8. Die Exponentialfunktion hat eine in der Theorie der Differentialgleichungen wichtige Eigenschaft. Es gilt nämlich

$$(\mathrm{e}^{ax})' = a\mathrm{e}^{ax}\,.$$

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ irgendeine differenzierbare Funktion auf einem reellen Intervall I mit mehr als einem Punkt, die $f'(x) = af(x)$ erfüllt. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = c\mathrm{e}^{ax}$, $x \in I$, mit einer reellen Konstanten c, indem Sie $f(x)\mathrm{e}^{-ax}$ differenzieren!

9. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = x^n(1 - x)^2$. Bestimmen Sie $\|g\|_\infty$ mit Hilfe von Lemma 7.2.2. Begründen Sie genau, warum der Kandidat für die Extremalstelle tatsächlich Maximum bzw. Minimum ist.