Analysis und Maßtheorie auf Topologischen Räumen

SS 2013, Version vom 24.6.2013

Michael Kaltenbäck

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Reguläre Maße

1.1 Topologie und Messbarkeit

Wir wollen hier kurz einige Tatsachen aus der Maßtheorie wiederholen und auch einen Begriff einführen, die Messbarkeit und Topologie in Verbindung bringen.

1.1.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Die σ-Algebra $A_\sigma(\mathcal{T})$, die von $\mathcal{T}$ erzeugt wird, wollen wir mit $\mathfrak{B}(\mathcal{T})$ bzw. $\mathfrak{B}$ bezeichnen und die Mengen in $\mathfrak{B}$ als *Borelmengen* auf X benennen.

1.1.2 Fakta.

1. Ist $\mathbb{R}^d$ mit der euklidischen Topologie versehen, dh. mit der von der euklidischen Metrik induzierten Topologie $\mathcal{T}_p$, so ist aus der Maßtheorie (Lemma 2.59 in [K]) bekannt, dass $\mathfrak{B}(\mathcal{T}_p)$ mit $\mathfrak{B}_d$, dh. mit der durch die d-dimensionalen halboffenen Rechtecke
$$R = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d], \quad a_1, \dots, a_d, \ b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$
erzeugt σ-Algebra, übereinstimmt.

2. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$, so versehen wir Y mit der Spurtopologie $\mathcal{T}|_Y = \mathcal{T} \cap Y = \iota_Y^{-1}(\mathcal{T})$, wobei $\iota_Y : Y \to X$ die Einbettungsabbildung ist.

   Wegen Satz 7.40 in [K] gilt nun $A_\sigma(\iota_Y^{-1}(\mathcal{T})) = \iota_Y^{-1}(A_\sigma(\mathcal{T}))$ und damit $\mathfrak{B}(\mathcal{T}|_Y) = \mathfrak{B}(\mathcal{T}) \cap Y$.

3. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$, so gilt im Fall $Y \in \mathfrak{B}(\mathcal{T})$ – also insbesondere im Fall eines offenen oder abgeschlossenen Y – immer $\mathfrak{B}(\mathcal{T}|_Y) = \mathfrak{B}(\mathcal{T}) \cap Y \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{T})$ und daher
$$\mathfrak{B}(\mathcal{T}|_Y) = \{B \in \mathfrak{B}(\mathcal{T}) : B \subseteq Y\}.$$

4. Sind $(X, \mathcal{T})$ und $(Z, \mathcal{O})$ topologische Räume, und $f : X \to Z$ stetig, so ist f immer $\mathfrak{B}(\mathcal{T})$-$\mathfrak{B}(\mathcal{O})$-messbar, denn die Urbilder von offenen Mengen sind offen und somit in $\mathfrak{B}(\mathcal{T})$. Da $\mathfrak{B}(\mathcal{O})$ von den offenen Mengen erzeugt wird, folgt die Messbarkeit von f aus Satz 7.7 in [K].

1.2 Reguläre Maße

1.2.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Topologischer Raum, und bezeichne $\mathfrak{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen, dh. $\mathfrak{B} = A_\sigma(\mathcal{T})$. Ein Maß $\mu : \mathfrak{B} \to [0, +\infty]$ heißt *Borelmaß*, wenn $\mu(K) < +\infty$ für alle kompakten Teilmengen $K \subseteq X$[1].

Eine Borelmenge $A \in \mathfrak{B}$ heißt *von innen regulär*, falls

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A,\ K \text{ ist kompakt}\},$$

und sie heißt *von außen regulär*, wenn

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : O \supseteq A,\ O \text{ ist offen}\}.$$

Ist $A \in \mathfrak{B}$ sowohl von innen als auch von außen regulär, so heißt A regulär.

Ein Borelmaß heißt (von innen, von außen) regulär, wenn alle $A \in \mathfrak{B}$ (von innen, von außen) regulär sind.

1.2.2 Bemerkung. Man sieht unmittelbar, dass ein A mit $\mu(A) < +\infty$ genau dann regulär ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein kompaktes $K \subseteq A$ und ein offenes $O \supseteq A$, sodass $\mu(O \setminus K) < \epsilon$.

Trivialerweise sind alle offenen Teilmengen von X von außen und alle kompakten Teilmengen von X von innen regulär. Die leere Menge ist damit regulär.

1.2.3 Lemma. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Die Menge $\mathcal{T}_{<\infty}$ aller komplexwertigen (reellwertigen) integrierbaren Treppenfunktionen[2] $f : \Omega \to \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum von $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$ (von $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$).*

Für $p < +\infty$ ist $\mathcal{T}_{<\infty}$ dicht in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$ (in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$) bezüglich $\|.\|_p$, d.h. $\overline{\mathcal{T}_{<\infty}} = L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.

Schließlich ist die Menge $\mathcal{T}^+_{<\infty}$ aller nichtnegativen und integrierbaren Treppenfunktionen dicht in

$$\{f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R}) : f \geq 0\}\,,$$

d.h. $\overline{\mathcal{T}^+_{<\infty}} = \{f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R}) : f \geq 0\ \mu - \text{fast überall}\}$.

Setzt man zusätzlich $\mu(\Omega) < +\infty$ voraus, so gilt obige Aussage auch für $p = \infty$.

Beweis. Da eine Linearkombination von Treppenfunktionen wieder eine solche ist und da $f \in \mathcal{T}_{<\infty} \Leftrightarrow |f|^p \in \mathcal{T}_{<\infty}$, bildet die Menge $\mathcal{T}_{<\infty}$ aller komplexwertigen (reellwertigen) integrierbaren Treppenfunktionen mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation einen in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$ (in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$) enthaltenen Vektorraum.

Sei nun $f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$. Die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von reellwertigen und messbaren Treppenfunktionen definiert durch (vgl. Satz 7.30 in [K])

$$g_n := -n \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(-\infty, -n]} + \sum_{j=-n2^n+1}^{-1} \frac{j}{2^n} \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]} + \sum_{j=1}^{n2^n-1} \frac{j}{2^n} \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})} + n \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}[n, +\infty)}$$

erfüllt

$$\max(g_n, 0) \nearrow \max(f, 0),\ \ -\min(g_n, 0) \nearrow -\min(f, 0),\ |g_n| \leq |f|\,.$$

[1] Man beachte, dass in Hausdorffräumen alle kompakten Teilmengen abgeschlossen sind und damit in $\mathfrak{B}$ liegen.

[2] Also genau solche Funktionen, sodass $f(\Omega)$ endlich mit $\mu(f^{-1}(\{0\})^c) < +\infty$ ist.

Falls $p < +\infty$, so gilt $|g_n|^p \leq |f|^p$. Also sind die g_n integrierbar, dh. $g_n \in \mathcal{T}_{<\infty}$, und mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz folgt $\|g_n - f\|_p \to 0$.

Ist $p = +\infty$ und $\mu(\Omega) < +\infty$, so sind die g_n ohnehin integrierbar. Außerdem gilt für $\|f\|_\infty < n$ $(\in \mathbb{N})$, dass $\{x : f(x) \leq -n\}$ und $\{x : f(x) \geq n\}$ Nullmengen sind. Somit gilt $\|f - g_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$.

Also ist in jedem Fall jedes $f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$ Grenzwert einer Folge aus $\mathcal{T}_{<\infty}$, und somit $\overline{\mathcal{T}_{<\infty}} = L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$.

Ist $f \geq 0$, so gilt klarerweise auch $g_n \geq 0$, und somit ist jedes nichtnegative $f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$ Grenzwert einer Folge aus $\mathcal{T}^+_{<\infty}$. Umgekehrt ist $\{f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R}) : f \geq 0 \ \mu - \text{fast überall}\}$ wegen Satz 13.15 in [K] abgeschlossen.

Ist $f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$, so folgt $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R})$. Wegen dem schon gezeigten gibt es zwei Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}, (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellwertigen, integrierbaren Treppenfunktionen, sodass $\|g_n - \operatorname{Re} f\|_p \to 0$, $\|h_n - \operatorname{Im} f\|_p \to 0$. Somit folgt $\|(g_n + ih_n) - f\|_p \to 0$, wobei $(g_n + ih_n)$ eine Folge von komplexwertigen, integrierbaren Treppenfunktionen ist.

❑

1.2.4 Korollar. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Besteht $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$ aus Mengen von endlichem Maß, sodass es für jedes $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < +\infty$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $C \in \mathfrak{C}$ mit*[3] *$\mu(A \triangle C) \leq \epsilon$ gibt, so ist die Menge aller Treppenfunktionen der Form*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{C_j}, \tag{1.2}$$

mit $C_j \in \mathfrak{C}$ und $\alpha_j \in \mathbb{C}$ dicht in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$ für $p \in [1, +\infty)$.

Die entsprechende Aussage gilt auch im reellwertigen Fall, wobei die Menge aller nichtnegativen Treppenfunktionen der Form (1.2) dicht in $\{h \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R}) : h \geq 0\}$ ist.

Beweis. Sei $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \in \mathcal{T}_{<\infty}$. Da f integrierbar ist, gilt $\mu(A_j) < +\infty$. Also gibt es zu $\epsilon > 0$ nach Voraussetzung Mengen $C_j \in \mathfrak{C}$, sodass $\mu(A_j \triangle C_j) \leq \epsilon$. Aus der Dreiecksungleichung und wegen $\mathbb{1}_{A_j}(x) - \mathbb{1}_{C_j}(x) \in \{-1, 0, 1\}$ folgt

$$\left(\int_\Omega |f - \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{C_j}|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \left(\int_{A_j \cup C_j} |\mathbb{1}_{A_j} - \mathbb{1}_{C_j}| \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_j| \cdot \mu(A_j \triangle C_j)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon^{\frac{1}{p}} \sum_{j=1}^n |\alpha_j|.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, lässt sich f durch Funktionen erwähnten Typs approximieren, und da $\mathcal{T}_{<\infty}$ seinerseits dicht in $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$ ist, ist auch die Menge aller Funktionen dieses Typs dicht.

Den Fall von reellwertigen Funktionen beweist man genauso. Darüber hinaus lässt sich jede Funktion $h \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R}), h \geq 0$, gemäß Lemma 1.2.3 beliebig gut durch nichtnegative Treppenfunktionen f approximieren. Die oben konstruierte Approximation von f ist dann auch nichtnegativ. Also ist die Menge aller nichtnegativen Treppenfunktionen der Form (1.2) dicht in $\{h \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R}) : h \geq 0\}$.

❑

[3] $A \triangle C$ ist die symmetrische Differenz $(A \setminus C) \cup (C \setminus A)$.

1.2.5 Korollar. *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein Topologischer Raum, und ist ein Borelmaß μ von innen regulär auf allen $A \in \mathfrak{B}$ mit $\mu(A) < +\infty$, so ist die Menge aller Treppenfunktionen der Form*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{K_j},$$

mit kompakten Mengen K_j und $\alpha_j \in \mathbb{C}$ dicht in $L^p(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathbb{C})$ für $p \in [1, +\infty)$.

Dieselbe Aussage gilt auch im reellwertigen Fall, wobei die Menge aller nichtnegativen Treppenfunktionen obiger Form dicht in $\{h \in L^p(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathbb{R}) : h \geq 0\}$ ist.

Beweis. Sei $\mathfrak{C}$ die Menge aller kompakten Teilmengen von X. Für $A \in \mathfrak{B}$, $\mu(A) < +\infty$ gibt es wegen der vorausgesetzten Regularität von innen ein $K \in \mathfrak{C}$, sodass $K \subseteq A$ und $\mu(A \triangle K) = \mu(A \setminus K) < \epsilon$. Also sind die Voraussetzungen von Korollar 1.2.4 erfüllt. ❑

1.2.6 Beispiel. Bekannterweise ist das Lebesguemaß λ regulär. Also können wir Korollar 1.2.5 anwenden.

1.2.7 Lemma. *Sei $\mu : \mathfrak{B} \to [0, +\infty]$ ein Borelmaß auf einem Hausdorffraum $(X, \mathcal{T})$. Die Menge $\mathfrak{R}_\mu$ aller $A \in \mathfrak{B}$ mit $\mu(A) < +\infty$, die regulär sind, ist ein Ring, sodass zusätzlich*

$$A_n \in \mathfrak{R}_\mu,\ n \in \mathbb{N},\ \ \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) < +\infty \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}_\mu. \tag{1.3}$$

Insbesondere ist $\mathfrak{R}_\mu$ ein σ-Ring, wenn μ ein endliches Maß ist. Falls sogar $X \in \mathfrak{R}_\mu$, dann ist $\mathfrak{R}_\mu$ eine σ-Algebra.

Beweis. Seien $A, B \in \mathfrak{R}_\mu$. Zunächst gibt es wegen der Endlichkeit von μ und der vorausgesetzten Regularität von A und B zu jedem $\epsilon > 0$ kompakte Mengen K_A, K_B und offene Mengen O_A, O_B, sodass

$$K_A \subseteq A \subseteq O_A, K_B \subseteq B \subseteq O_B,\ \mu(O_A \setminus K_A) < \epsilon,\ \mu(O_B \setminus K_B) < \epsilon.$$

Es folgt $K_A \setminus O_B \subseteq A \setminus B \subseteq O_A \setminus K_B$, wobei die linke Menge kompakt und die rechte offen ist. Nun ist

$$(O_A \setminus K_B) \setminus (K_A \setminus O_B) = (O_A \setminus K_A) \setminus K_B \cup (O_B \setminus K_B) \cap O_A \subseteq (O_A \setminus K_A) \cup (O_B \setminus K_B),$$

und damit $\mu((O_A \setminus K_B) \setminus (K_A \setminus O_B)) < 2\epsilon$. Also ist $A \setminus B \in \mathfrak{R}_\mu$. Wegen $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ ist auch $A \cap B \in \mathfrak{R}_\mu$.

Seien $A_n \in \mathfrak{R}_\mu,\ n \in \mathbb{N}$. Um zu zeigen, dass die Vereinigung dieser Mengen wieder in $\mathfrak{R}_\mu$ liegt, können wir annehmen, dass diese disjunkt sind, weil wir schon wissen, dass $\mathfrak{R}_\mu$ unter der Bildung von Mengendifferenzen abgeschlossen ist.

Nun gibt es zu gegebenen $\epsilon > 0$ kompakte K_n und offene O_n mit $K_n \subseteq A_n \subseteq O_n$ und $\mu(O_n \setminus K_n) < 2^{-n}\epsilon$. Zunächst folgt aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(O_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \epsilon = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + \epsilon < +\infty,$$

die Existenz eines Index $N \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(O_n) < \epsilon$. Setzen wir $K = \bigcup_{n=1}^{N} K_n$ und $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$, so folgt

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq O,\ \ O \setminus K = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n \setminus K \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} (O_n \setminus K_n) \cup \bigcup_{n=N+1}^{\infty} O_n,$$

und wegen der σ-Subadditivität $\mu(O \setminus K) \leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\epsilon + \epsilon < 2\epsilon$. Also ist auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{R}_\mu$.

❑

1.2.8 Korollar. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum, und $\mu : \mathfrak{B} \to [0, +\infty]$ ein Borelmaß.*

(i) *Ist μ endlich, sodass jedes offene $P \subseteq X$ von innen regulär ist, dann ist μ regulär.*

(ii) *Ist O eine offene Menge mit endlichem Maß, sodass alle offenen $P \subseteq O$ von innen regulär sind, so sind alle $A \in \mathfrak{B}$ mit $A \subseteq O$ regulär.*

(iii) *Ist jedes offene $O \subseteq X$ mit $\mu(O) < +\infty$ von innen regulär und gibt es eine Folge von offenen O_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $\mu(O_n) < +\infty$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n = X$, so ist μ regulär.*

(iv) *Hat $(X, \mathcal{T})$ eine abzählbare Basis $\mathcal{G}$, sodass alle $G \in \mathcal{G}$ von innen regulär und von endlichem Maß sind, dann ist μ regulär.*

(v) *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorffraum und hat er eine abzählbare Basis, so ist μ regulär.*

Beweis.

(i) Nach Voraussetzung ist jede offene Teilmenge von X von innen regulär. Trivialerweise ist jede offene Teilmenge auch von außen regulär, also $\mathcal{T} \subseteq \mathfrak{R}_\mu$. Insbesondere ist auch $X \in \mathfrak{R}_\mu$. Damit erhält man aus Lemma 1.2.7, dass $\mathfrak{R}_\mu$ eine σ-Algebra ist, die $\mathcal{T}$ enthält. Aus der Definition von $\mathfrak{B}$ folgt $\mathfrak{R}_\mu = \mathfrak{B}$.

(ii) Man betrachte O versehen mit der Spurtopologie $\mathcal{T}|_O$. Wegen $O \in \mathfrak{B}$ gilt (siehe Fakta 1.1.2)
$$B \in \mathfrak{B}(O, \mathcal{T}|_O) \Leftrightarrow B \in \mathfrak{B} \text{ und } B \subseteq O.$$
Betrachten wir die Einschränkung $\mu|_{\mathfrak{B}(O,\mathcal{T}|_O)} : \mathfrak{B}(O, \mathcal{T}|_O) \to [0, +\infty]$, so erhalten wir ein Borelmaß auf $(O, \mathcal{T}|_O)$, welches voraussetzungsgemäß endlich ist. Außerdem ist jedes offene $P \in \mathcal{T}|_O$ auch in $\mathcal{T}$ und damit laut Voraussetzung von innen regulär. Aus (i) folgt nun, dass alle $A \in \mathfrak{B}(O, \mathcal{T}|_O)$, d.h. dass alle $A \in \mathfrak{B}, A \subseteq O$, regulär sind.

(iii) Nach (ii) ist wegen der Voraussetzung jedes $A \in \mathfrak{B}$, das in einem $O \in \mathcal{T}$ mit $\mu(O) < +\infty$ enthalten ist, regulär. Für ein beliebiges $A \in \mathfrak{B}$ gilt
$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A \cap (O_1 \cup \cdots \cup O_n). \tag{1.4}$$
Dabei ist die Mengenfolge $A \cap (O_1 \cup \cdots \cup O_n), n \in \mathbb{N}$, monoton wachsend, und jede dieser Mengen ist in der offenen Menge $O_1 \cup \cdots \cup O_n$, welche endliches Maß hat, enthalten. Also sind die Mengen $A \cap (O_1 \cup \cdots \cup O_n)$ regulär.

Um die Regularität von A zu zeigen, nehmen wir zunächst $\mu(A) < +\infty$ an. Dann folgt aus (1.4) und (1.3), dass A regulär ist.

Ist $\mu(A) = +\infty$, so ist A trivialerweise von außen regulär. Für die Regularität von A von innen sei $\alpha < \mu(A)$. Wegen (1.4) gilt
$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A \cap (O_1 \cup \cdots \cup O_n)),$$

und somit gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\alpha < \mu(A \cap (O_1 \cup \cdots \cup O_n)) \leq \mu(A)$. Wegen der Regularität von $A \cap (O_1 \cup \cdots \cup O_n)$ gibt es ein kompaktes $K \subseteq A \cap (O_1 \cup \cdots \cup O_n) \subseteq A$, sodass

$$\alpha < \mu(K) \leq \mu(A \cap (O_1 \cup \cdots \cup O_n)) \leq \mu(A).$$

Also $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A,\ K \text{ kompakt}\}$.

(*iv*) Da die Mengen $G \in \mathcal{G}$ offen und von endlichen Maß sind, sind sie sogar in $\mathfrak{R}_\mu$. Ist O eine offene Menge mit endlichen Maß, so läßt sie sich als Vereinigung gewisser und klarerweise höchstens abzählbar vieler $G \in \mathcal{G}$ schreiben. Aus (1.3) folgt $O \in \mathfrak{R}_\mu$.

Also ist die erste Voraussetzung von (iii) erfüllt, und wegen $X = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$ auch die zweite. Also ist μ regulär.

(*v*) Sei $\mathcal{G}$ eine abzählbare Basis und $\mathcal{G}' = \{G \in \mathcal{G} : \mu(G) < +\infty\}$.

Ist O eine offene Menge und x in O, so folgt aus der Lokalkompaktheit die Existenz einer offenen Menge V_x mit kompakten Abschluss, sodass $x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq O$. Da $\mathcal{G}$ Basis ist, gibt es sogar ein $G_x \in \mathcal{G}$, sodass $x \in G_x \subseteq V_x$.

Also ist auch $\overline{G_x} \subseteq \overline{V_x}$ kompakt. Da μ ein Borelmaß ist, folgt $\mu(G_x) \leq \mu(\overline{G_x}) < +\infty$, und daher $G_x \in \mathcal{G}'$.

Es folgt $O = \bigcup_{x \in O} \overline{G_x} = \bigcup_{x \in O} G_x$. Somit ist auch $\mathcal{G}'$ eine abzählbare Basis. Ist nun O selber in $\mathcal{G}'$, so bedeutet diese Gleichheit auch, dass O als Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Mengen $K_n = \overline{G_{x_n}}$, $n \in \mathbb{N}$, geschrieben werden kann, und daher

$$\mu(O) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n\right) = \lim_{N \to \infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} K_n\right).$$

Da alle Mengen $\bigcup_{n=1}^{N} K_n$ kompakt sind, ist O somit von innen regulär. Nun können wir (iv) anwenden.

❑

1.2.9 Beispiel. Ist μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$ oder allgemeiner auf $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, so ist μ nach Korollar 1.2.8, (v), immer regulär. Eine abzählbare Basis ist dabei etwa die Menge aller offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten bzw. die Menge aller offenen d-dimensionale Rechtecke mit rationalen Eckpunkten.

1.2.10 Korollar. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum, und sei $\mu : \mathfrak{B} \to [0, +\infty]$ ein Borelmaß, sodass alle $B \in \mathfrak{B}$ mit $\mu(B) < +\infty$ von innen regulär sind.*

Ist $f : X \to [0, +\infty]$ integrierbar bzgl. μ, so ist das endliche Maß $\omega : \mathfrak{B} \to [0, +\infty)$

$$\omega(B) := \int_B f \, d\mu$$

ein reguläres Maß.

Beweis. Wegen der Integrierbarkeit ist ω offensichtlich endlich. Nach Korollar 1.2.8, (i), genügt es zu zeigen, dass ω von innen regulär ist. Wir nehmen zunächst an, dass $\mu\{x \in X : f(x) > 0\} < +\infty$.

Sei $B \in \mathfrak{B}$. Dann existiert nach Voraussetzung zu beliebigen $n \in \mathbb{N}$ ein kompaktes $K_n \subseteq \{x \in B : f(x) > 0\}$ mit $\mu\{x \in B : f(x) > 0\} - \mu(K_n) < \frac{1}{n}$. Indem wir K_n durch $K_1 \cup \cdots \cup K_n$ ersetzen, können wir die K_n auch als monoton wachsend voraussetzen. Nun folgt

$$\mu(\{x \in B : f(x) > 0\} \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j) = 0,$$

und weiter wegen dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\omega(K_n) = \int_{K_n} f \, d\mu \nearrow \int_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j} f \, d\mu = \int_{\{x \in B : f(x) > 0\}} f \, d\mu = \omega(B).$$

Also ist ω von innen regulär.

Gilt aber $\mu\{x \in X : f(x) > 0\} = +\infty$, so folgt aus

$$+\infty > \int_{\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}} f \, d\mu \geq \frac{1}{n} \cdot \mu\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\},$$

dass zumindest $\mu\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\} < +\infty$. Setzen wir für $B \in \mathfrak{B}$

$$\omega_n(B) := \int_B f \cdot \mathbb{1}_{\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}} \, d\mu,$$

so wissen wir schon, dass die ω_n von innen regulär sind. Wegen $\omega(B) = \int_{\{x \in B : f(x) > 0\}} f \, d\mu$ und wegen $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\} = \{x \in B : f(x) > 0\}$ folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass $\omega_n(B) \nearrow \omega(B)$ für $n \to \infty$.

Ist nun $B \in \mathfrak{B}$ fest und $\eta < \omega(B)$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\eta < \omega_n(B) \leq \omega(B)$. Aus der Regularität von innen des Maßes ω_n und aus $\omega_n(B) = \omega_n(\{x \in B : f(x) \geq \frac{1}{n}\})$ folgt die Existenz eines kompakten $K \subseteq \{x \in B : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ mit

$$\eta < \omega(K) = \omega_n(K) \leq \omega_n(B) \leq \omega(B).$$

Also ist auch in diesem Fall ω von innen regulär.

❑

Unser folgendes Ziel ist es, zu zeigen, dass in lokalkompakten Hausdorffräumen die Menge $C_{00}(X)$ aller stetigen reell- bzw. komplexwertigen Funktionen, die außerhalb einer kompakten Menge verschwinden bzw. äquivalent die einen kompakten *Träger*

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

haben, ebenfalls dicht in den $L^p(X, \mathfrak{B}, \mu)$ ist, wenn μ regulär auf allen $A \in \mathfrak{B}$, $\mu(A) < +\infty$ ist, wobei $p \in [1, +\infty)$. Dazu benötigen wir folgendes Ergebnis, welches von seiner Natur her rein topologisch ist.

1.2.11 Lemma. *Sei $M_k = \{\frac{l}{2^k} : l = 0, \dots, 2^k\}$ und $M = \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k$. Weiters sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Angenommen jedem $r \in M$ ist eine offene Menge $O_r \in \mathcal{T}$ zugeordnet, sodass $r, s \in M, r < s \Rightarrow \overline{O_r} \subseteq O_s$ und $O_0 = \emptyset, O_1 = X$.*

Ist dann $f : X \to [0, 1]$ definiert durch

$$f(x) = \inf\{r \in M : \; x \in O_r\},$$

so ist f stetig, wobei f auf $\bigcap_{r \in M, r > 0} O_r$ den Wert Null und auf $X \setminus \bigcup_{r \in M, r < 1} O_r$ den Wert Eins annimmt.

Beweis. Wegen $O_1 = X$ ist $\{r \in M : x \in O_r\}$ für jedes $x \in X$ eine nichtleere Teilmenge von $[0,1]$, wodurch $f(x)$ ein Element von $[0,1]$ ist. Wegen $O_0 = \emptyset$ ist $\{r \in M : x \in \overline{O_r}^c\}$ für jedes $x \in X$ ebenfalls eine nichtleere Teilmenge von $[0,1]$, womit

$$g(x) := \sup\{r \in M : x \in \overline{O_r}^c\}$$

auch in $[0,1]$ liegt.

Aus $s \in \{r \in M : x \in \overline{O_r}^c\}$ und $t \in \{r \in M : x \in O_r\}$ folgt $s < t$, da $s \geq t$ die Beziehung $x \in \overline{O_s}^c \cap O_t \subseteq \overline{O_s}^c \cap O_s = \emptyset$ nach sich ziehen würde. Also folgt $g(x) \leq f(x)$.

Wäre aber $g(x) < f(x)$, so folgt aus der Dichtheit von M in $[0,1]$, dass $g(x) < r < s < f(x)$ für zwei $s, r \in M$. Wegen $\overline{O_r} \subseteq O_s$ gilt für ein festes $x \in X$, dass $x \in O_s$ oder $x \in O_s^c \subseteq \overline{O_r}^c$, und damit $f(x) \leq s$ oder $g(x) \geq r$. Das ist in jedem Fall ein Widerspruch; also $f(x) = g(x)$.

Die Stetigkeit von $f : X \to [0,1]$ ist äquivalent zur Stetigkeit von f als Funktion nach $\mathbb{R}$ hinein. Zudem reicht es, nachzuweisen, dass alle Urbilder einer Subbasis der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$ offen in X sind.

Da die Mengen der Bauart $(t, +\infty)$ und $(-\infty, t)$ für $t \in \mathbb{R}$ eine Subbasis der Topologie auf $\mathbb{R}$ sind, reicht es $f^{-1}(t, +\infty), f^{-1}(-\infty, t) \in \mathcal{T}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ zu zeigen. Dafür zeigen wir für $t \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}(-\infty, t) = \bigcup_{r \in M, r<t} O_r \ (\in \mathcal{T}), \quad \text{und} \quad f^{-1}(t, +\infty) = \bigcup_{r \in M, r>t} \overline{O_r}^c \ (\in \mathcal{T}),$$

womit wir die Stetigkeit nachgewiesen hätten. In der Tat ist

$$f(x) = \inf\{r \in M : x \in O_r\} < t \Leftrightarrow \exists r \in M, r < t, x \in O_r \Leftrightarrow x \in \bigcup_{r \in M, r<t} O_r.$$

Außerdem gilt

$$f(x) = g(x) = \sup\{r \in M : x \in \overline{O_r}^c\} > t \Leftrightarrow \exists r \in M, r < t, x \in \overline{O_r}^c \Leftrightarrow x \in \bigcup_{r \in M, r>t} \overline{O_r}^c.$$

Schließlich folgt $f(\bigcap_{r \in M, r>0} O_r) \subseteq \{0\}$ und $f(X \setminus \bigcup_{r \in M, r<1} O_r) \subseteq \{1\}$ unmittelbar aus der Definition von f.

❑

Als Folgerung erhält man das in der Literatur als *Lemma von Urysohn* bezeichnete Ergebnis.

1.2.12 Korollar. *Erfüllt $(X, \mathcal{T})$ das vierte Trennungsaxiom $(T4)$, so sind je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen A, B durch eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ trennbar, d.h. $f(A) \subseteq \{0\}, f(B) \subseteq \{1\}$.*

Beweis. Sind A, B zwei abgeschlossene und disjunkte Teilmengen von X, so gibt es wegen dem $(T4)$ zwei disjunkte offene Teilmengen $O \supseteq A, P \supseteq B$. Daraus folgt $A \subseteq O \subseteq \overline{O} \subseteq P^c \subseteq B^c$. Wir setzen $O_0 := O$ und $O_1 := B^c$. Aus obiger Gleichung folgt $\overline{O_r} \subseteq O_s$ für alle $r < s,\ r, s \in M_0 = \{0, 1\}$.

Angenommen wir haben offene O_r definiert, sodass $\overline{O_r} \subseteq O_s$ für alle $r < s,\ r, s \in M_k$, so definiere man für $t = \frac{l}{2^{k+1}} \in M_{k+1} \setminus M_k$, d.h. $l \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N},\ l < 2^{k+1}$, die Menge O_t folgendermaßen:

Wegen $r := \frac{l-1}{2^{k+1}}, s := \frac{l+1}{2^{k+1}} \in M_k$ folgt aus $\overline{O_r} \subseteq O_s$, dass die abgeschlossenen Mengen $\overline{O_r}, O_s^c$ disjunkt sind, und wie oben wegen dem $(T4)$ die Existenz einer offenen Menge O_t, sodass $\overline{O_r} \subseteq O_t \subseteq \overline{O_t} \subseteq O_s$.

Also haben wir induktiv für alle $r \in M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$ offene Mengen definiert, sodass $\overline{O_r} \subseteq O_s$ für alle $r < s,\ r, s \in M$. Definieren wir nun noch O_0 und O_1 um, indem wir $O_0 := \emptyset$ sowie $O_1 := X$ setzen, so sind alle Voraussetzungen von Lemma 1.2.11 erfüllt.

Wegen $A \subseteq \bigcap_{r\in M, r>0} O_r$ erfüllt die stetige Funktion aus diesem Lemma $f(A) \subseteq \{0\}$ und wegen $O_r \subseteq B^c,\ r < 1, r \in M$ bzw. $B \subseteq X \setminus \bigcup_{r\in M, r<1} O_r$, die Beziehung $f(B) \subseteq \{1\}$.

❑

1.2.13 Korollar. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorffraum. Ist $K \subseteq X$ kompakt und $O \supseteq K$ offen, so gibt es ein stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$, sodass $f(K) \subseteq \{1\}$ und sodass der Träger* $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ *von f kompakt und in O enthalten ist.*

Beweis. Wegen der Lokalkompaktheit von $(X, \mathcal{T})$ gibt es zu jedem $x \in K$ eine offene Umgebung O_x, sodass $x \in O_x \subseteq \overline{O_x} \subseteq O$, wobei $\overline{O_x}$ ebenfalls kompakt ist.

Da $(O_x)_{x\in K}$ eine offene Überdeckung von K ist, gibt es aufgrund der Kompaktheit von K endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in K$, sodass

$$K \subseteq \underbrace{\bigcup_{j=1}^{n} O_{x_j}}_{=:R} \subseteq \underbrace{\bigcup_{j=1}^{n} \overline{O_{x_j}}}_{=\overline{R}} \subseteq O.$$

Dabei ist $\overline{R} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{O_{x_j}}$ als Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen wieder kompakt.

Somit ist $(\overline{R}, \mathcal{T}|_{\overline{R}})$ ein kompakter Hausdorffraum, und daher auch ein normaler Raum. Die Menge K und $\overline{R} \setminus R$ sind darin zwei disjunkte abgeschlossene Mengen. Also gibt es nach Korollar 1.2.12 ein stetiges $g : \overline{R} \to [0, 1]$ mit

$$g(K) \subseteq \{1\}, \quad g(\overline{R} \setminus R) \subseteq \{0\}.$$

Ist $h : X \setminus R \to [0, 1]$ die konstante Nullfunktion, so stimmen g und h am Schnitt ihrer Definitionsbereiche $X \setminus R \cap \overline{R} = \overline{R} \setminus R$ überein. Nach Lemma 1.2.15 ist $f := g \cup h$ stetig, und erfüllt offensichtlich $f(K) \subseteq \{1\}$. Wegen $\{x : f(x) \neq 0\} \subseteq \overline{R} \subseteq O$ ist der Träger von f kompakt und in O enthalten.

❑

1.2.14 Bemerkung. Aus dem Beweis von Korollar 1.2.13 wollen wir für lokalkompakte Hausdorffräume $(X, \mathcal{T})$ noch herausstellen, dass es zu jedem kompakten $K \subseteq X$ eine offene Obermenge R gibt, die kompakten Abschluss hat.

1.2.15 Lemma. *Seien $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{O})$ topologische Räume und $A, B \subseteq X$ mit $A \cup B = X$, wobei entweder A und B beide abgeschlossen oder beide offen sind.*

Sind $f : A \to Y$ und $g : B \to Y$ zwei stetige Funktionen, wobei A bzw. B beide mit der Spurtopologie versehen sind, sodass f und g auf $A \cap B$ übereinstimmen, dann ist auch die Funktion $f \cup g : X \to Y$[4] stetig.

Beweis. Seien A, B beide abgeschlossen. Der offene Fall ist ähnlich zu beweisen. Ist $F \subseteq Y$ abgeschlossen, so ist

$$(f \cup g)^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F).$$

[4] Das ist die Funktion, die auf A mit f und auf B mit g übereinstimmt.

Wegen der Stetigkeit von $f : A \to Y$ ist $f^{-1}(F)$ abgeschlossen in der Spurtopologie $\mathcal{T}|_A$, und somit von der Bauart $C \cap A$ für eine in X abgeschlossene Menge C. Als Schnitt zweier in X abgeschlossener Mengen ist $f^{-1}(F)$ in X abgeschlossen.

Genauso zeigt man, dass $g^{-1}(F)$ in X abgeschlossen ist. Als Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist dann auch $(f \cup g)^{-1}(F)$ abgeschlossen. Da F beliebig war, ist damit $f \cup g$ stetig.

❑

1.2.16 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorffraum und sei $\mathfrak{B}$ die von $\mathcal{T}$ erzeugte σ-Algebra der Borelmengen.*

Ist μ ein Borelmaß, das auf allen Mengen mit endlichem Maß regulär ist, so ist $C_{00}(X, \mathbb{C})$ dicht in $L^p(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathbb{C})$ bzgl. $\|.\|_p$ für $p \in [1, +\infty)$.

Dieselbe Aussage gilt auch im reellwertigen Fall, wobei die Menge aller nichtnegativen Funktionen aus $C_{00}(X, \mathbb{R})$ dicht in $\{h \in L^p(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathbb{R}) : h \geq 0\}$ ist.

Beweis. Nach Korollar 1.2.5 ist die Menge aller Treppenfunktionen

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{K_j},$$

mit kompakten Mengen K_j und $\alpha_j \in \mathbb{C}$ ($\alpha_j \in \mathbb{R}$ bzw. $\alpha_j \geq 0$) dicht in $L^p(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathbb{C})$ ($L^p(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathbb{R})$ bzw. $\{h \in L^p(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathbb{R}) : h \geq 0\}$).

Es genügt also zu zeigen, dass $\mathbb{1}_K$ mit kompakten K beliebig gut durch eine nichtnegative Funktion aus $C_{00}(X, \mathbb{R})$ bzgl. $\|.\|_p$ approximiert werden kann.

Zunächst ist μ ein Borelmaß und daher $\mu(K) < +\infty$. Nach Voraussetzung gilt

$$\mu(K) = \inf\{\mu(O) : O \supseteq K,\ O \text{ ist offen}\}.$$

Also gibt es zu $\epsilon > 0$ ein offenes $O \supseteq K$ mit $\mu(O \setminus K) = \mu(O) - \mu(K) < \epsilon^p$.

Sei $f : X \to [0, 1]$ stetig wie in Korollar 1.2.13. Diese Funktion nimmt auf K den Wert eins an und hat einen kompakten Träger, der in O enthalten ist. Also folgt $f \in C_{00}(X, \mathbb{R})$, und

$$\|\mathbb{1}_K - f\|_p^p = \int |\mathbb{1}_K - f|^p \, d\mu = \int_{O \setminus K} |f|^p \, d\mu \leq \mu(O \setminus K) < \epsilon^p,$$

und da ϵ beliebig war, ist $\mathbb{1}_K \in \overline{\{f \in C_{00}(X, \mathbb{R}) : f \geq 0\}}^{\|.\|_p}$.

❑

Kapitel 2

Rieszscher Darstellungssatz

2.1 Rieszscher Darstellungssatz

In diesem Abschnitt wollen wir einen oft verwendeten Satz bringen, der weitreichende Anwendung in der höheren Analysis findet. Zur Motivation gehen wir aus von einem lokalkompakten Hausdorffraum $(X, \mathcal{T})$ und bezeichnen wieder mit $\mathfrak{B}$ die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra, vgl. Definition 1.1.1. Weiters sei $\mu : \mathfrak{B} \to [0, +\infty]$ ein Borelmaß, d.h. $\mu(K) < +\infty$ für alle kompakten $K \subseteq X$. Wir nehmen nun zusätzlich an, dass μ auf allen Mengen $B \in \mathfrak{B}$ von außen regulär und auf allen offenen $O \in \mathcal{T}$ von innen regulär ist. Wir wollen solche Maße aus pragmatischen Gründen auch *Riesz-regulär* nennen, obwohl das eine nicht international übliche Benennung ist.

2.1.1 Bemerkung. In Korollar 1.2.8 haben wir gesehen, dass dann μ auf allen $B \in \mathfrak{B}$ von innen regulär ist, die in einer offenen Menge von endlichem Maß enthalten sind. Da μ von außen regulär ist, sind das aber alle $B \in \mathfrak{B}$ mit $\mu(B) < +\infty$.

Also ist μ insbesondere auf allen $B \in \mathfrak{B}$ mit $\mu(B) < +\infty$ regulär, und nach Lemma 1.2.16 sind somit die stetigen Funktionen mit kompakten Träger $C_{00}(X)$ dicht in $L^p(X, \mathfrak{B}, \mu)$ für alle $p \in [1, +\infty)$. Also kann man erwarten, dass zwischen Maß und Integral von $C_{00}(X)$ Funktionen ein enger Zusammenhang besteht.

Betrachten wir nun die Abbildung[1] $\Lambda : C_{00}(X) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Lambda(f) = \int_X f \, d\mu,$$

so sieht man sofort, dass Λ linear und *positiv* ist, d.h. $\Lambda(f) \geq 0$ für alle $f \in C_{00}(X)$ mit $f(x) \geq 0, \ x \in X$.

Das Funktional Λ bestimmt das Maß μ eindeutig. Denn ist $\tilde{\mu}$ ein zweites Borelmaß mit den selben Eigenschaften, wie μ, und gilt

$$\Lambda(f) = \int_X f \, d\mu = \int_X f \, d\tilde{\mu},$$

für alle $f \in C_{00}(X)$ und ist $K \subseteq X$ kompakt, so gibt es wegen der Regularität von außen eine offene Menge $V \supseteq K$ mit $\mu(V) < \mu(K) + \epsilon$. Nach Korollar 1.2.13 gibt es eine

[1] In diesem Abschnitt sei $C_{00}(X)$ $(= C_{00}(X, \mathbb{R}))$ die Menge aller reellwertigen, stetigen Funktionen mit kompaktem Träger.

Funktion $f \in C_{00}(X)$ mit $0 \le f \le 1$ und $f(K) \subseteq \{1\}, f(V^c) \subseteq \{0\}$. Es folgt

$$\tilde{\mu}(K) = \int \mathbb{1}_K \, d\tilde{\mu} \le \int f \, d\tilde{\mu} = \int f \, d\mu \le \int \mathbb{1}_V \, d\mu = \mu(V) < \mu(K) + \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\tilde{\mu}(K) \le \mu(K)$. Die selbe Argumentationsweise kann man anwenden, wenn man μ und $\tilde{\mu}$ vertauscht, um auch die umgekehrte Relation zu erhalten.

Somit stimmen μ und $\tilde{\mu}$ auf den kompakten Teilmengen überein. Wegen der Regularität von innen aller offenen Mengen stimmen sie auch auf diesen überein und wegen der Regularität von außen aller Borel-Mengen folgt $\mu = \tilde{\mu}$.

Es ist Inhalt des Rieszschen Darstellungssatzes, dass diese Zuordnung $\mu \mapsto \Lambda$ nicht nur injektiv, sondern auch surjektiv ist. Ehe wir uns diesem Satz zuwenden, brauchen wir noch ein topologisches Lemma.

2.1.2 Lemma. *Sei K eine kompakte Teilmenge eines lokalkompakten Hausdorffraum $(X, \mathcal{T})$, und sei $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es eine* Zerlegung der Eins*, d.h. endlich viele stetige Funktionen $\chi_1, \dots, \chi_l : X \to [0,1]$, sodass der Träger* $\operatorname{supp}(\chi_j) = \overline{\{x \in X : \chi_j(x) \neq 0\}}$ *einer jeden dieser Funktionen kompakt und in einem $O_{i(j)}$ enthalten ist, und sodass*

$$\mathbb{1}_K(x) \le \sum_{j=1}^{l} \chi_j(x) \le 1, \quad x \in X.$$

Beweis. Wegen der Lokalkompaktheit gibt es zu jedem $x \in K$ eine offene Umgebung U_x von x und ein $i(x) \in I$, sodass die $\overline{U_x}$ kompakt und in $O_{i(x)}$ enthalten ist. Gemäß Korollar 1.2.13 können wir auch stetige Funktionen $f_x : X \to [0,1]$ mit kompakten, in $O_{i(x)}$ enthaltenen Träger wählen, sodass $f_x(\overline{U_x}) \subseteq \{1\}$.

Klarerweise stellt $(U_x)_{x \in K}$ eine Überdeckung von K dar. Somit überdecken schon endlich viele dieser offenen Mengen $U_{x_1}, \dots, U_{x_l}$ schon K.

Wir definieren nun $\chi_1 = f_{x_1}$ und

$$\chi_{j+1} = f_{x_{j+1}} \prod_{k=1}^{j} (1 - f_{x_k}).$$

Klarerweise haben alle Funktionen χ_j Werte in $[0,1]$, wobei der Träger von χ_j in dem von f_{x_j} und somit in $O_{i(x_j)}$ enthalten ist.

Schließlich zeigt man unschwer durch ein induktives Argument, dass ($j \le l$)

$$\sum_{k=1}^{j} \chi_k = 1 - \prod_{k=1}^{j} (1 - f_{x_k}).$$

Also ist insbesondere $\sum_{k=1}^{l} \chi_k(x) \in [0,1]$. Für $x \in K$ ist x in einem U_{x_k} enthalten, und somit $f_{x_k}(x) = 1$ und weiter $\sum_{k=1}^{l} \chi_k(x) = 1$.

❑

Wir kommen nun zu unserem Hauptsatz. Wir starten also mit einem positiven und linearen Funktional $\Lambda : C_{00}(X) \to \mathbb{R}$, und wollen zeigen, dass es von einem Borelmaß wie eingangs erwähnt erzeugt wird.

2.1.3 Bemerkung. Eine einfache Eigenschaft positiver, linearer Funktionale ist $f, g \in C_{00}(X),\ f \le g \Rightarrow \Lambda(f) \le \Lambda(g)$. In der Tat folgt aus $f \le g$, dass $g - f \ge 0$ und daher $\Lambda(g) - \Lambda(f) = \Lambda(g - f) \geq 0$. Wegen $f, -f \leq |f|$, folgt auch $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$.

Es sei hier auch darauf hingewiesen, dass ein solches Λ im allgemeinen kein beschränktes Funktional ist, wenn man $C_{00}(X)$ mit der Supremumsnorm versieht. Ist jedoch X selbst kompakt, so gilt für die konstante Einsfunktion $\mathbb{1} \in C_{00}(X)$. Damit folgt für $\|f\|_\infty \leq 1$, $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|) \leq \Lambda(\mathbb{1})$. Also ist Λ beschränkt und daher stetig.

2.1.4 Satz (*Darstellungssatz von Riesz*)**.** *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein lokalkompakter Hausdorffraum. Ist* $\Lambda : C_{00}(X) \to \mathbb{R}$ *ein positives lineares Funktional, dann gibt es ein eindeutiges nichtnegatives, Riesz-reguläres Borelmaß* $\mu : \mathfrak{B} \to [0, +\infty]$*, sodass*

$$\Lambda(f) = \int_X f \, d\mu, \quad f \in C_{00}(X).$$

Umgekehrt erzeugt jedes nichtnegative Borelmaß μ *mit obigen Eigenschaften ein positives lineares Funktional.*

Beweis. Die letzte Aussage und die Eindeutigkeit haben wir oben schon abgehandelt. Also sei $\Lambda : C_{00}(X) \to \mathbb{R}$ ein positives lineares Funktional.

Um ein Maß zu konstruieren, definieren wir es zunächst auf allen offenen Mengen $O \in \mathcal{T}$, indem wir alle $f \in C_{00}(X)$ betrachten, die $0 \leq f \leq 1$ erfüllen und deren Träger in dieser offenen Menge enthalten ist

$$\mu(O) := \sup\{\Lambda f : f \in C_{00}(X), 0 \leq f \leq 1, \operatorname{supp} f \subseteq O\}. \tag{2.1}$$

Nun definieren wir μ auf allen Teilmengen $E \subseteq X$ durch

$$\mu(E) := \inf\{\mu(O) : O \in \mathcal{T},\ E \subseteq O\}. \tag{2.2}$$

Ist E selber offen, so stimmt letztere Definition von $\mu(E)$ mit der in (2.1) überein, da der Ausdruck in (2.1) monoton von O abhängt und damit das Infimum in (2.2) sogar ein Minimum mit dem Wert $\mu(E)$ ist.

Wir werden nun einige Eigenschaften von μ herleiten.

(*i*) Man sieht sofort aus (2.2), dass $\mu : \mathfrak{P}(X) \to [0, +\infty]$ monoton ist: $E \subseteq F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$.

Da nur die Nullfunktion einen Träger hat, der in der leeren Menge enthalten ist, folgt aus (2.1) auch unmittelbar, dass $\mu(\emptyset) = 0$.

(*ii*) Ist $P \subseteq X$ offen, so gilt

$$\mu(P) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq P, K \text{ kompakt}\}.$$

Ist nämlich $f \in C_{00}(X), 0 \leq f \leq 1, K := \operatorname{supp} f \subseteq P$, so ist K kompakt, und für jede offene Menge O, die K umfasst, trägt f zur Bildung von $\mu(O)$ (vgl. (2.1)) bei. Somit folgt $\Lambda(f) \leq \mu(O)$, und wegen (2.2) auch $\Lambda(f) \leq \mu(K)$, wobei wegen der Monotonie auch $\mu(K) \leq \mu(P)$. Also folgt

$$\sup\{\Lambda f : f \in C_{00}(X), 0 \leq f \leq 1, \operatorname{supp} f \subseteq P\} \leq$$

$$\sup\{\mu(K) : K \subseteq P, K \text{ kompakt}\} \leq \mu(P),$$

und damit die Behauptung.

(iii) Für ein kompaktes $K \subseteq X$ gilt $\mu(K) < +\infty$ und

$$\mu(K) = \inf\{\Lambda(f) : f \in C_{00}(X), \mathbb{1}_K \leq f \leq 1\}.$$

Dazu sei zunächst $f \in C_{00}(X), \mathbb{1}_K \leq f \leq 1$. Für $\eta \in (0,1)$ ist $f^{-1}(\eta, +\infty)$ eine K enthaltende, offene Teilmenge von X. Ist $g \in C_{00}(X), 0 \leq g \leq 1$ mit $\operatorname{supp} g \subseteq f^{-1}(\eta, +\infty)$, so ist klarerweise $\eta g \leq f$, und somit $\Lambda(g) \leq \eta^{-1}\Lambda(f)$. Wir erhalten

$$\mu(K) \leq \mu\left(f^{-1}(\eta, +\infty)\right) =$$

$$\sup\{\Lambda g : g \in C_{00}(X), 0 \leq g \leq 1, \operatorname{supp} g \subseteq f^{-1}(\eta, +\infty)\} \leq \eta^{-1}\Lambda(f),$$

und mit $\eta \nearrow 1$ sogar $\mu(K) \leq \Lambda(f) < +\infty$.

Ist nun $O \supseteq K$ offen, so gibt es wegen Korollar 1.2.13 ein $f \in C_{00}(X)$ mit $0 \leq f \leq 1,\ f(K) \subseteq \{1\}$ und mit einem Träger, der in O enthalten ist. Also folgt aus (2.1) und aus dem eben gezeigten $\mu(K) \leq \Lambda(f) \leq \mu(O)$. Da O beliebig war folgt die Behauptung aus (2.2).

(iv) μ ist Sub-σ-additiv. Um das zu zeigen, sei zunächst $O_n,\ n \in \mathbb{N}$, eine Folge offener Mengen.

Sei $f \in C_{00}(X), 0 \leq f \leq 1$ mit $K := \operatorname{supp} f \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Nach Lemma 2.1.2 gibt es $\chi_1, \dots, \chi_l \in C_{00}(X)$ mit $0 \leq \chi_j \leq 1,\ \operatorname{supp}\chi_j \subseteq O_{n(j)},\ j = 1, \dots, l$, und $\mathbb{1}_K(x) \leq \sum_{j=1}^l \chi_j(x) \leq 1,\ x \in X$. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$h_n := \begin{cases} 0 & , \quad \text{falls } n \neq n(j),\ j = 1, \dots, l, \\ f \cdot \sum\limits_{\substack{1\leq j\leq l \\ n(j)=n}} \chi_j & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Man beachte dabei, dass zweiter Fall für nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ zutrifft. Ist N der größte solche Index, so erhalten wir

$$0 \leq h_n \leq 1, \operatorname{supp} h_n \subseteq O_n,\ n \in \mathbb{N},\quad \sum_{n=1}^N h_n = f,$$

wobei die letzte Gleichheit für $x \notin K$ wegen $f(x) = 0$ und für $x \in K$ wegen $\sum_{n=1}^N \sum_{\substack{1\leq j\leq l \\ n(j)=n}} \chi_j(x) = \sum_{j=1}^l \chi_j(x) = 1$ folgt. Aus (2.1) erhalten wir

$$\Lambda(f) = \Lambda\left(\sum_{n=1}^N h_n\right) = \sum_{n=1}^N \Lambda(h_n) \leq \sum_{n=1}^N \mu(O_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(O_n).$$

Da f beliebig war, folgt $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(O_n)$.

Sei nun $E_n \subseteq X,\ n \in \mathbb{N}$. Wir müssen

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n)$$

nachweisen. Gilt $\mu(E_n) = +\infty$ für ein n, so stimmt diese Ungleichung sicherlich. Also können wir $\mu(E_n) < +\infty,\ n \in \mathbb{N}$, annehmen und finden daher zu jedem $\epsilon > 0$ offene $O_n \supseteq E_n$ mit $\mu(O_n) < \mu(E_n) + 2^{-n}\epsilon,\ n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(O_n) < \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n) + \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Sub-σ-Additivität.

Zusammen mit (*i*) folgt übrigens, dass $\mu : \mathfrak{P}(X) \to [0, +\infty]$ ein äußeres Maß ist.

(*v*) μ ist additiv auf kompakten Mengen, d.h. sind $K_1, \dots, K_m \subseteq X$ disjunkt und kompakt, so gilt $\mu(K_1 \cup \dots \cup K_m) = \mu(K_1) + \dots + \mu(K_m)$.

Klarerweise genügt es, das für $m = 2$ zu zeigen. Setzen wir $K = K_1$ und $O = K_2^c$, so erhalten wir aus Korollar 1.2.13 ein $f \in C_{00}(X)$ mit $f(K_1) \subseteq \{1\},\ f(K_2) \subseteq \{0\}$. Wegen (*iii*) gibt es außerdem zu jedem $\epsilon > 0$ ein $g \in C_{00}(X)$ mit

$$\mathbb{1}_{K_1 \cup K_2} \leq g \leq 1,\ \Lambda(g) < \mu(K_1 \cup K_2) + \epsilon.$$

Es folgt $fg, (1-f)g \in C_{00}(X)$ mit $\mathbb{1}_{K_1} \leq fg \leq 1,\ \mathbb{1}_{K_2} \leq (1-f)g \leq 1$, und somit wegen (*iii*)

$$\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq \Lambda(fg) + \Lambda((1-f)g) = \Lambda(g) < \mu(K_1 \cup K_2) + \epsilon.$$

Also erhalten wir $\mu(K_1) + \mu(K_2) \leq \mu(K_1 \cup K_2)$ und wegen (*iv*) folgt die behauptete Additivität.

(*vi*) Wir definieren nun die Menge $\mathfrak{R}$ als die Menge aller $E \subseteq X$, sodass $\mu(E) < +\infty$ und

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ kompakt}\}. \tag{2.3}$$

Also ist $\mathfrak{R}$ die Menge aller Teilmengen, die in einem gewissen Sinn regulär sind (vgl. Definition 1.2.1). In einem gewissen Sinn, da wir ja noch nicht wissen, dass wir es mit einem Maß zu tun haben.

Nach (*ii*) sind alle offenen Mengen O mit $\mu(O) < +\infty$ in $\mathfrak{R}$ enthalten, und wegen (*iii*) enthält $\mathfrak{R}$ auch alle kompakten Mengen. Wir behaupten auch, dass für eine Folge $E_n \in \mathfrak{R},\ n \in \mathbb{N}$, bestehend aus disjunkten Mengen folgt, dass

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n), \tag{2.4}$$

und dass, wenn $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) < +\infty$, auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathfrak{R}$.

Zu gegebenen $\epsilon > 0$ gibt es wegen $E_n \in \mathfrak{R}$ kompakte K_n mit $K_n \subseteq E_n$ und $\mu(K_n) > \mu(E_n) - 2^{-n}\epsilon$. Es folgt für jedes $N \in \mathbb{N}$ wegen (*v*)

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \geq \mu(K_1 \cup \dots \cup K_N) = \sum_{j=1}^{N} \mu(K_j) > \sum_{j=1}^{N} \mu(E_j) - \epsilon. \tag{2.5}$$

Lassen wir zuerst $N \to \infty$ streben und dann $\epsilon \searrow 0$, so folgt $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$. Gemeinsam mit (*iv*) folgt daraus (2.4).

Falls $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) < +\infty$, so folgt aus (2.4), dass $\sum_{j=N+1}^{\infty} \mu(E_j) < \epsilon$ für hinreichend großes N, und somit erhalten wir aus (2.5)

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \geq \mu(K_1 \cup \dots \cup K_N) > \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) - 2\epsilon.$$

Da $K_1 \cup \dots \cup K_N$ $(\subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n)$ kompakt ist, folgt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathfrak{R}$.

(*vii*) $\mathfrak{R}$ ist ein Ring, d.h. $A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \setminus B \in \mathfrak{R}$:

Zunächst gibt es wegen (2.3) und (2.2) zu jedem $\epsilon > 0$ kompakte Mengen K_A, K_B und offene Mengen O_A, O_B, sodass $K_A \subseteq A \subseteq O_A, K_B \subseteq B \subseteq O_B$,

$$\mu(O_A) - \epsilon < \mu(A) < \mu(K_A) + \epsilon,\ \mu(O_B) - \epsilon < \mu(B) < \mu(K_B) + \epsilon.$$

Da die kompakte Menge K_A und die offene Menge $O_A \setminus K_A$ beide in $\mathfrak{R}$ liegen, und da diese disjunkt sind, folgt aus (*vi*) $\mu(O_A) = \mu(K_A) + \mu(O_A \setminus K_A)$, und daher $\mu(O_A \setminus K_A) < 2\epsilon$. Genauso sieht man $\mu(O_B \setminus K_B) < 2\epsilon$.

Nun gilt wegen

$$A \setminus B \subseteq O_A \setminus K_B = (K_A \setminus O_B) \cup (K_A \cap O_B \setminus K_B) \cup (O_A \setminus K_A) \setminus K_B \subseteq$$

$$(K_A \setminus O_B) \cup (O_B \setminus K_B) \cup (O_A \setminus K_A),$$

und wegen der Sub-Additivität und der Monotonie von μ die Ungleichung

$$\mu(A \setminus B) \leq \mu(K_A \setminus O_B) + 4\epsilon.$$

Aber $K_A \setminus O_B$ ist eine kompakte Teilmenge von $A \setminus B$, und damit erfüllt auch $A \setminus B$ (2.3). Also $A \setminus B \in \mathfrak{R}$.

Wegen $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ ist auch $A \cap B \in \mathfrak{R}$. Um zu zeigen, dass $\mathfrak{R}$ unter Vereinigungen invariant ist, genügt es jetzt zu wissen, dass es unter disjunkten Vereinigungen invariant ist, weil ja $A \cup B = A \dot\cup (B \setminus A)$. Diese Invarianz folgt aber aus (*vi*).

(*viii*) Bisher haben wir gesehen, dass $\mathfrak{R}$ ein Ring ist, und wegen (*vi*) 'fast' abgeschlossen unter der Bildung abzählbarer Vereinigungen. Um nun eine σ-Algebra zu erhalten, definieren wir

$$\mathfrak{M} := \{E \subseteq X : \forall K \subseteq X, K \text{ kompakt} \Rightarrow E \cap K \in \mathfrak{R}\}.$$

Wir werden also jetzt zeigen, dass $\mathfrak{M}$ ein σ-Algebra ist, die alle Borel-Mengen $\mathfrak{B}$ umfasst.

Da $\mathfrak{R}$ durchschnittsstabil ist und alle kompakten Teilmengen enthält, haben wir $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{M}$. Weiters ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von X mit kompakten Teilmengen wieder kompakt, und daher liegen auch diese in $\mathfrak{M}$.

Für $E \in \mathfrak{M}$ und ein kompaktes K ist $E^c \cap K = K \setminus (K \cap E)$ Differenz zweier Mengen aus $\mathfrak{R}$, und liegt somit in $\mathfrak{R}$. Wir sehen $E^c \in \mathfrak{M}$.

Ist $E_n \in \mathfrak{M},\ n \in \mathbb{N}$, und K kompakt, so definieren wir $B_1 = E_1 \cap K$ und induktiv weiter ($n \geq 2$)

$$B_n = (E_n \cap K) \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1}).$$

Diese Mengen sind disjunkt und wegen $E_n \in \mathfrak{M}$ alle in $\mathfrak{R}$. Außerdem sieht man leicht, dass $K \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} B_n =: B$.

Als Teilmenge der kompakten Menge K erfüllt diese Vereinigung $\mu(B) < +\infty$. Aus (*vi*) folgt somit $B \in \mathfrak{R}$, und wir haben damit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \mathfrak{M}$ gezeigt.

Also haben wir gezeigt, dass $\mathfrak{M}$ eine σ-Algebra ist, die alle abgeschlossenen und somit auch alle offenen Mengen enthält. Da $\mathfrak{B}$ die kleinste solche σ-Algebra ist, folgt $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$.

(ix) $\mathfrak{R} = \{E \in \mathfrak{M} : \mu(E) < +\infty\}$:

In $(viii)$ haben wir $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{M}$ gezeigt, und damit ist die linke in der rechten Seite enthalten.

Ist $E \in \mathfrak{M}, \mu(E) < +\infty$, so gibt es wegen der Definition von μ ein offenes O mit $O \supseteq E, \mu(O) < \mu(E) + \epsilon$ und wegen (ii) ein kompaktes $K_1 \subseteq O, \mu(O) < \mu(K_1) + \epsilon$. Aus $O, K_1 \in \mathfrak{R}$, der Tatsache, dass $\mathfrak{R}$ ein Ring ist, und (vi) folgt $\mu(O) = \mu(K_1) + \mu(O \setminus K_1)$, und weiter $\mu(O \setminus K_1) < \epsilon$.

Weiters ist $E \cap K_1 \in \mathfrak{R}$, und daher gibt es eine weitere kompakte Menge $K_2 \subseteq E \cap K_1$ mit $\mu(E \cap K_1) < \mu(K_2) + \epsilon$.

Nun gilt $E \subseteq (E \cap K_1) \cup (O \setminus K_1)$, und wegen der Sub-Additivität und der Monotonie folgt

$$\mu(E) \leq \mu(E \cap K_1) + \mu(O \setminus K_1) < \mu(K_2) + 2\epsilon,$$

wobei K_2 auch in E enthalten ist. Weil $\epsilon > 0$ beliebig war, sehen wir $E \in \mathfrak{R}$.

(x) μ ist ein Maß auf $\mathfrak{M}$, welches eingeschränkt auf $\mathfrak{B}$ von außen regulär und auf allen offenen Mengen von innen regulär ist:

Um die Maßeigenschaft nachzuweisen, genügt es für eine Folge $E_n,\ n \in \mathbb{N}$,

$$E_n \in \mathfrak{M}, E_n \cap E_m = \emptyset, m \neq n \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

nachzuweisen. Ist $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = +\infty$, so folgt die Gleichheit aus der Sub-σ-Additivität. Anderenfalls gilt auch $\mu(E_n) < +\infty$, und aus (ix) folgt $E_n \in \mathfrak{R}$. Die gewünschte Gleichheit folgt nun aus (vi).

Die postulierten Regularitätseigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition von μ und aus (ii).

(xi) Es fehlt nur noch zu zeigen, dass $\Lambda(f) = \int f\, d\mu$ für alle $f \in C_{00}(X)$. Wegen $f = f_+ - f_-$, wobei $f_+ = \max(f, 0), f_- = \max(-f, 0) \in C_{00}(X)$, und weil Λ und das Integral linear sind, genügt es $\Lambda(f) = \int f\, d\mu$ nur für nichtnegative $f \in C_{00}(X),\ f \not\equiv 0$ zu zeigen:

Wie wir am Anfang der Vorlesung bemerkt haben, ist $\int f\, d\mu$ der Limes einer monoton wachsenden Folge von nichtnegativen Treppenfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Sei

$$u = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} \leq f$$

eine dieser Treppenfunktionen, wobei die $A_j \in \mathfrak{B}$ paarweise disjunkt sind und $\alpha_j > 0$. Weiters sei $\epsilon > 0$ beliebig, sodass $\epsilon < \alpha_j,\ j = 1, \ldots, m$.

Da der Träger K von f kompakt ist, folgt $\mu(A_j) \leq \mu(K) < +\infty$. Wegen (ix) gilt $A_j \in \mathfrak{R}$, und somit gibt es kompakte $K_j \subseteq A_j$ mit $\mu(A_j) < \mu(K_j) + \epsilon$.

Da für $x \in A_j$ sicherlich $f(x) \geq u(x) = \alpha_j > \alpha_j - \epsilon$, ist $K_j \subseteq A_j$ in der offenen Menge $f^{-1}(\alpha_j - \epsilon, +\infty)$ enthalten.

Da jeder lokalkompakte Hausdorffraum als offene Teilemnge eines kompakten Hausdorffraums gesehen werden kann (Einpunkt-Kompaktifizierung), ist $(X, \mathcal{T})$ regulär, und es lassen sich zwei kompakte Mengen immer trennen. Durch vollständige Induktion lässt sich das leicht auf endlich viele Mengen ausdehnen.

Somit gibt es offene und disjunkte $U_1, \dots, U_m$, sodass $K_j \subseteq U_j$, wobei wir offensichtlich auch $U_j \subseteq f^{-1}(\alpha_j - \epsilon, +\infty)$ annehmen können.

Nach Korollar 1.2.13 gibt es $h_j \in C_{00}(X)$ mit Träger in U_j und $\mathbb{1}_{K_j} \leq h_j \leq 1$. Für

$$g := \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j - \epsilon) h_j \in C_{00}(X)$$

gilt wegen $x \in U_j \Rightarrow f(x) > \alpha_j - \epsilon$, dass $g \leq f$. Somit erhalten wir aus (iii)

$$\Lambda(f) \geq \Lambda(g) = \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j - \epsilon)\Lambda(h_j) \geq \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j - \epsilon)\mu(K_j) \geq$$

$$\sum_{j=1}^{m} (\alpha_j - \epsilon)(\mu(A_j) - \epsilon) = \int u \, d\mu - \epsilon \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j + \mu(A_j) - \epsilon).$$

Mit $\epsilon \searrow 0$ folgt $\Lambda(f) \geq \int u \, d\mu$, und lassen wir u durch die f von unten approximierende Folge von Treppenfunktionen laufen, so folgt

$$\Lambda(f) \geq \int f \, d\mu. \tag{2.6}$$

Um nun die Gleichheit zu zeigen, sei $\epsilon > 0$ und $U \supseteq \operatorname{supp} f =: K$ offen so, dass $\mu(U) < \mu(K) + \epsilon$. Wir bemühen abermals Korollar 1.2.13 um die Existenz einer Funktion $h \in C_{00}(X),\ \operatorname{supp} h \subseteq U,\ \mathbb{1}_K \leq h \leq 1$.

Als stetige Funktion auf K hat f ein Maximum $r \in (0, +\infty)$, d.h. $0 \leq f \leq r$. Wir erhalten $rh - f \in C_{00}(X),\ rh - f \geq 0$, und wegen (2.6) angewandt auf $rh - f$ gilt

$$r\Lambda(h) - \Lambda(f) = \Lambda(rh - f) \geq \int (rh - f) \, d\mu = r \int h \, d\mu - \int f \, d\mu.$$

Wegen (2.6), (2.1) und der Wahl von U und h folgt schließlich

$$0 \leq \Lambda(f) - \int f \, d\mu \leq r\Lambda(h) - r \int h \, d\mu \leq r\mu(U) - r\mu(K) < r\epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, haben wir das gewünschte gezeigt.

❑

2.1.5 Bemerkung. Obiger Beweis liefert auch, dass μ ein vollständiges Maß auf $\mathfrak{M}$ ist. Ist nämlich $M \subseteq A$, wobei $A \in \mathfrak{M}$ und $\mu(A) = 0$, so folgt aus Beweisschritt (ix), dass $A \in \mathfrak{N}$.

Da das $0 = \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\}$ bedeutet, gilt sicherlich für alle Teilmengen $M \subseteq A$ auch

$$0 = \sup\{\mu(K) : K \subseteq M, K \text{ kompakt}\}.$$

Andererseits ist wegen der Monotonie (siehe (i)) $0 \leq \mu(M) \leq \mu(A) = 0$, und daher $M \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$.

2.1.6 Bemerkung. Manche Lehrbücher geben eine etwas andere Version von Satz 2.1.4 an:

Sei $(X, \mathcal{T})$ lokalkompakt und Hausdorffsch. Zu jedem positiven linearen Funktional $\Lambda : C_{00}(X) \to \mathbb{R}$ gibt es ein eindeutiges nichtnegatives, *Radonmaß* $\nu : \mathfrak{B} \to [0, +\infty]$, sodass

$$\Lambda(f) = \int_X f \, d\nu, \quad f \in C_{00}(X). \tag{2.7}$$

Umgekehrt erzeugt jedes nichtnegative Radonmaß ν ein positives lineares Funktional.

Dabei ist ein *Radonmaß* ein von innen reguläres Borelmaß. Im allgemeinen sind Radonmaße nicht Riesz-regulär und Riesz-reguläre Borelmaße sind keine Radonmaße. Wann diese Konzepte übereinstimmen, dafür sei auf Korollar 1.2.8 verwiesen.

Diese Version lässt sich aus unserer Version von Satz 2.1.4 herleiten. Ist nämlich μ ein Riesz-reguläres Borelmaße, sodass $\Lambda(f) = \int_X f \, d\nu, \ \ f \in C_{00}(X)$, so setzen wir für $B \in \mathfrak{B}$

$$\nu(B) := \sup\{\mu(K) : K \subseteq B\}.$$

Offensichtlich gilt immer $\nu(B) \leq \mu(B)$. Offensichtlich ist ν auch monoton. Zudem gilt $\nu(B) = \mu(B)$ für alle $B \in \mathfrak{B}$ mit $\mu(B) < +\infty$, vgl. Bemerkung 2.1.1. Insbesondere gilt $\nu(B) = \mu(B)$, wenn B in einer kompakten Menge enthalten ist.

Also gilt $\nu(\emptyset) = 0$. Seien $B_n \in \mathfrak{B}, \ n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt. Wir wollen

$$\nu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(B_n) \tag{2.8}$$

nachweisen. Gilt $\nu(B_n) = +\infty$ für ein n, so folgt (2.8) aus der Monotonie von ν. Andernfalls gibt es zu gegebenem $\epsilon > 0$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ kompakte K_n mit $K_n \subseteq B_n$ und $\mu(K_n) > \nu(B_n) - 2^{-n}\epsilon$. Es folgt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \geq \mu(K_1 \cup \dots \cup K_N) = \sum_{j=1}^{N} \mu(K_j) > \sum_{j=1}^{N} \nu(B_j) - \epsilon.$$

Lassen wir zuerst $N \to \infty$ streben und dann $\epsilon \searrow 0$, so folgt $\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j)$.

Ist andererseits $K \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ kompakt, so gilt sicher immer $\mu(K \cap B_n) < +\infty$ und daher $\mu(K \cap B_n) = \nu(K \cap B_n)$. Es folgt

$$\nu(K) = \mu(K) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(K \cap B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(K \cap B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j).$$

Da K beliebig war, erhalten wir schließlich (2.8). Also ist ν ein Maß, und man sieht sofort, dass es sogar ein Radonmaß ist.

(2.7) folgt sofort aus $\mu(B) = \nu(B)$ für alle $B \in \mathfrak{B}$ mit $B \subseteq \{x : f(x) \neq 0\}$. Letzteres gilt, da der Abschluss von $\{x : f(x) \neq 0\}$ kompakt ist, und somit $\mu(\{x : f(x) \neq 0\}) < +\infty$.

Das Funktional Λ bestimmt das Radonmaß ν eindeutig. Denn ist $K \subseteq X$ kompakt, und $R \supseteq K$ offen mit kompaktem Abschluss, vgl. Bemerkung 1.2.14, so sind nach Korollar 1.2.8 alle Borel-Teilmengen von R regulär. Insbesondere gibt es zu $\epsilon > 0$ eine offene Menge $V \supseteq K$ mit $\nu(V) < \nu(K) + \epsilon$. Nach Korollar 1.2.13 gibt es eine Funktion $f \in C_{00}(X)$ mit $0 \leq f \leq 1$ und $f(K) \subseteq \{1\}, f(V^c) \subseteq \{0\}$. Es folgt

$$\nu(K) = \int \mathbb{1}_K \, d\nu \leq \int f \, d\nu \leq \int \mathbb{1}_V \, d\nu = \nu(V) < \nu(K) + \epsilon,$$

und damit $\nu(K) = \inf\{\Lambda(f) : f \in C_{00}(X), \mathbb{1}_K \leq f\}$. Also bestimmt Λ das Maß ν auf allen kompakten Mengen eindeutig, und wegen der Regularität von innen dann auch ν auf allen Borelmengen.

Fassen wir Satz 2.1.4 und die aktuelle Bemerkung zusammen, so sehen wir, dass Riesz-reguläre Borelmaße μ, positive lineare Funktionale Λ auf $C_{00}(X)$ und Radonmaße ν in bijektiver Beziehung stehen. Dabei stimmen μ und ν auf Borelmengen überein, die in irgendeiner kompakten Mengen enthalten sind.

2.2 Anwendung auf harmonische Funktionen

2.3 Poissonsche Darstellung harmonischer Funktionen

2.3.1 Definition. Ist $g : G \to \mathbb{R}^m$ mit offenem $G \subseteq \mathbb{R}^p$ zweimal stetig differenzierbar, so heißt g *harmonisch*, wenn $\triangle g \equiv 0$, wobei

$$\triangle g(x) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(x).$$

Für reellwertige g gilt $\triangle g(x) = \operatorname{div}(\triangledown g(x))$.

2.3.2 Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{R}^p \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^p$ definiert durch $f(x) = \frac{1}{\|x\|^p} x$ ist als Zusammensetzung von C^1-Funktionen offensichtlich selber stetig differenzierbar, wobei $(j = 1, \ldots, p)$

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(x_j \left(\sum_{k=1}^{p} x_k^2 \right)^{-\frac{p}{2}} \right) = \left(\sum_{k=1}^{p} x_k^2 \right)^{-\frac{p}{2}} - x_j \frac{p}{2} \left(\sum_{k=1}^{p} x_k^2 \right)^{-\frac{p+2}{2}} 2x_j = \frac{1}{\|x\|^{p+2}} \left(\|x^2\| - p x_j^2 \right),$$

und daher $\operatorname{div} f(x) = \frac{1}{\|x\|^{p+2}} \sum_{j=1}^{p} \left(\|x^2\| - p x_j^2 \right) = 0$.

2.3.3 Beispiel.

- Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

  $$g(t) = \ln \|t\| = \frac{1}{2} \ln(t_1^2 + t_2^2), \tag{2.9}$$

  erfüllt $\triangledown g(t) = \frac{1}{\|t\|^2} \cdot t$. Wegen $\triangle g(t) = \operatorname{div}(\triangledown g(t))$ folgt aus Beispiel 2.3.2, dass g harmonisch ist.

- Für $p > 2$ wird die Funktion $g : \mathbb{R}^p \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

  $$g(t) = \frac{1}{2-p} \cdot \|t\|^{2-p} = \frac{1}{2-p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} t_k^2 \right)^{\frac{2-p}{2}} \tag{2.10}$$

  genauso wie die Funktion aus dem letzten Beispiel eine wichtige Rolle spielen. Sie erfüllt auch $\triangledown g(t) = \frac{1}{\|t\|^p} \cdot t$, und wieder wegen Beispiel 2.3.2 ist g harmonisch.

- Ist g wie in (2.9) bzw. (2.10) und ist $y \in \mathbb{R}^p$, so folgt sofort, dass auch die Funktion $g_{-y} : \mathbb{R}^p \setminus \{y\} \to \mathbb{R},\ t \mapsto g(t - u)$ harmonisch ist.

$\rightsquigarrow$ Sei $\hat{g}_0$ die konstante Funktion $\hat{g}_0 = \frac{1}{2-p} \cdot \mathbb{1}_{(2,+\infty)}(p)$ und für $x \neq 0$ sei

$$\hat{g}_{-x} : \ t \mapsto g(\|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x), \ t \in \mathbb{R}^p \setminus \{\frac{1}{\|x\|^2}x\}.$$

Nun gilt $\triangle \hat{g}_{-x}(t) = \|x\|^2(\triangle g)(\|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x) = 0$. Also ist auch diese Funktion harmonisch genauso, wie ($\frac{1}{\|x\|^2}x := \infty \notin \mathbb{R}^p$)

$$w_x(t) = g_{-x}(t) - \hat{g}_{-x}(t), \ t \in \mathbb{R}^p \setminus \{x, \frac{1}{\|x\|^2}x\}.$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$\nabla w_x(t) = \frac{1}{\|t-x\|^p} \cdot (t-x) - \frac{\|x\|}{\left\|\|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x\right\|^p} \cdot (\|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x) \, .$$

Explizit ist für $x \neq 0$ und $t \in \mathbb{R}^p \setminus \{x, \frac{x}{\|x\|^2}\}$

$$w_x(t) = \begin{cases} \ln\|t-x\| - \ln\left\|\|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x\right\| & , p = 2 \\ \frac{1}{2-p} \cdot \left(\|t-x\|^{2-p} - \left\|\|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x\right\|^{2-p}\right) & , p > 2 \end{cases} . \tag{2.11}$$

Für $x = 0$ gilt

$$w_0(t) = \begin{cases} \ln\|t\| & , p = 2 \\ \frac{1}{2-p} \cdot (\|t\|^{2-p} - 1) & , p > 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}, \tag{2.12}$$

2.3.4 Bemerkung. Sind $x, y \in \mathbb{R}^p$ mit $x \neq 0$, so folgt für $\|.\| = \|.\|_2 = (.,.)^{\frac{1}{2}}$ wegen der Bilinearität des Skalarproduktes

$$\left\|\|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x\right\|^2 = \tag{2.13}$$

$$\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x,y) + 1 = \|x\|^2 - 2(x,y) + \|y\|^2 + (\|x\|^2 - 1)(\|y\|^2 - 1) =$$
$$\|x-y\|^2 + (\|x\|^2 - 1)(\|y\|^2 - 1).$$

Insbesondere gilt $\|x - y\| = \left\|\|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x\right\|$, wenn $\|y\| = 1$, und $\|x-y\| < \left\|\|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x\right\|$, wenn $x, y \in U_1(0)$.

Aus dieser Bemerkung folgt, dass die Funktion w_x für festes $x \in U_1(0)$ für $\|t\| = 1$ verschwindet und für $t \in U_1(0) \setminus \{x\}$ negativ ist. Man beachte, dass $K_1(0) \setminus \{x\}$ im Harmonizitätsbereich von w_x enthalten ist.

2.3.5 Bemerkung. Die Funktion $t \mapsto \ln\|t - x\|$ im Fall $p = 2$ bzw. $t \mapsto \|t-x\|^{2-p}$ im Fall $p > 2$ ist für beliebiges $x \in \mathbb{R}^p$ über jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^p$ nach λ_p integrierbar. Dazu sei $R > 0$ so groß, dass $K_R(x)$ das gegebene Kompaktum umfasst. Nun gilt im Fall $p = 2$ mit Transformation auf Polarkoordinaten

$$\int\limits_{K_R(x)} |\ \ln\|t-x\|\ |\, d\lambda_2(t) = \int\limits_{K_R(0)} |\ \ln\|t\|\ |\, d\lambda_2(t) =$$

$$\int\limits_{(0,R]} 2\pi|\ln r| r \, d\lambda(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{R^2}{4}(2\ln R - 1), & R \geq 1 \\ \frac{R^2}{4}(1 - 2\ln R), & R < 1 \end{cases}$$

Im Fall $p > 2$ gilt mit Transformation auf Kugelkoordinaten

$$\int_{K_R(x)} \|t-x\|^{2-p}\, d\lambda_p(t) = \int_{K_R(0)} \|t\|^{2-p}\, d\lambda_p(t) =$$

$$\int_{(0,R]} r^{p-1} \cdot \int_{(0,2\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})^{p-2}} r^{2-p} \cdot \cos\theta_1 \cos^2\theta_2 \dots \cos^{p-2}\theta_{p-2}\, d\lambda_{p-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \theta_1\\ \vdots \\ \theta_{p-2}\end{pmatrix} d\lambda(r) =$$

$$\frac{R^2}{2} \cdot \mu(S^{p-1}).$$

Somit ist w_0 auf $U_1(0)$ nach λ_p integrierbar. Da für festes $x \in U_1(0) \setminus \{0\}$ die Funktion $t \mapsto \ln \left\| \|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x \right\|$ bzw. $t \mapsto \left\| \|x\|t - \frac{1}{\|x\|}x \right\|^{2-p}$ auf $U_1(0)$ beschränkt ist, folgt auch, dass w_x auf $U_1(0)$ nach λ_p integrierbar ist.

2.3.6 Lemma. *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^p$ offen mit $O \supseteq K_1(0)$ und $h : O \to \mathbb{R}$ liege in $C^2(O)$. Dann gilt für alle $x \in U_1(0)$*

$$h(x) = \frac{1}{\mu(S^{p-1})} \int_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot h(y)\, d\mu(y) + \frac{1}{\mu(S^{p-1})} \int_{U_1(0)} w_x(t) \triangle h(t)\, d\lambda_p(t)$$

wobei $\wp(x,y) = \frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^p}$ der Poissonkern *ist und $w_x(t)$ wie in* (2.11) *gegeben ist.*

Beweis. Sei $x \in U_1(0)$ und $0 < \rho$ so klein, dass $K_\rho(x) \subseteq U_1(0)$. Die offene Menge $G = U_1(0) \setminus K_\rho(x)$ erfüllt offenbar $\partial G = S^{p-1} \cup (x + \rho S^{p-1})$, wobei für die äußere Normale gilt

$$\nu(y) = y,\ y \in S^{p-1} \ \text{ und } \ \nu(y) = -\frac{1}{\rho}(y-x),\ y \in x + \rho S^{p-1}.$$

Wenden wir den Greenschen Integralsatz an, so folgt wegen $\triangle w = 0$ auf G

$$-\int_G w_x(t) \triangle h(t)\, d\lambda_p(t) = \int_{\partial G} \Big(h(y) \frac{\partial w_x}{\partial \nu(y)}(y) - w_x(y) \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)\Big)\, d\mu(y) =$$

$$\int_{S^{p-1}} \Big(h(y) \frac{\partial w_x}{\partial \nu(y)}(y) - w_x(y) \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)\Big)\, d\mu(y) + \int_{x+\rho S^{p-1}} \Big(h(y) \frac{\partial w_x}{\partial \nu(y)}(y) - w_x(y) \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)\Big)\, d\mu(y).$$

Da w_x auf S^{p-1} verschwindet, und da für $x \neq 0$ ($y \in S^{p-1}$ und somit $\left\| \|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x \right\| = \|x-y\|$)

$$\frac{\partial w_x}{\partial \nu(y)}(y) = \big(\nabla w_x(y)\big)^T \nu(y) = \Big(\frac{1}{\|y-x\|^p} \cdot (y-x) - \frac{\|x\|}{\left\| \|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x \right\|^p} \cdot (\|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x)\Big)^T y =$$

$$\frac{1}{\|y-x\|^p}\Big((y-x) - (\|x\|^2 y - x)\Big)^T y = \frac{1-\|x\|^2}{\|y-x\|^p} = \wp(x,y),$$

und für $x = 0$ ($y \in S^{p-1}$)

$$\frac{\partial w_0}{\partial \nu(y)}(y) = (\nabla w_0(y))^T \ \nu(y) = \frac{1}{\|y\|^p} \cdot y^T y = 1 = \wp(0, y),$$

folgt

$$\int\limits_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot h(y) \, d\mu(y) + \int\limits_G w_x(t) \triangle h(t) \, d\lambda_p(t) = \tag{2.14}$$

$$- \int\limits_{x+\rho S^{p-1}} (h(y) \frac{\partial w_x}{\partial \nu(y)}(y) - w_x(y) \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)) \, d\mu(y) =$$

$$\underbrace{- \int\limits_{x+\rho S^{p-1}} h(y) \frac{\partial g_{-x}}{\partial \nu(y)}(y) \, d\mu(y)}_{=:I_1} + \underbrace{\int\limits_{x+\rho S^{p-1}} h(y) \frac{\partial \hat{g}_{-x}}{\partial \nu(y)}(y) \, d\mu(y)}_{=:I_2}.$$

$$\underbrace{- \int\limits_{x+\rho S^{p-1}} \hat{g}_{-x}(y) \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y) \, d\mu(y)}_{=:I_3} + \underbrace{\int\limits_{x+\rho S^{p-1}} g_{-x}(y) \frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y) \, d\mu(y)}_{=:I_4}$$

Für $y \in x + \rho S^{p-1}$ gilt

$$\frac{\partial g_{-x}}{\partial \nu(y)}(y) = (\nabla g_{-x})^T \ \nu(y) = -\Big(\frac{1}{\|y - x\|^p} \cdot (y - x)\Big)^T \frac{1}{\rho}(y - x) = -\rho^{1-p}.$$

Da sich die Oberflächenmaße auf S^{p-1} und auf $x + \rho S^{p-1}$ mit dem Faktor ρ^{p-1} entsprechen, gilt

$$I_1 = \int\limits_{x+\rho S^{p-1}} h(y) \frac{\partial g_{-x}}{\partial \nu(y)}(y) \, d\mu(y) = -\rho^{1-p} \int\limits_{x+\rho S^{p-1}} h(y) \, d\mu(y) = -\rho^{1-p} \rho^{p-1} \int\limits_{S^{p-1}} h(x+\rho y) \, d\mu(y).$$

Wegen der Stetigkeit von h bei x konvergiert dieser Ausdruck für $\rho \searrow 0$ nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz gegen $-\mu(S^{p-1}) \, h(x)$.

Da $y \mapsto h(y), y \mapsto \hat{g}_{-x}(y), y \mapsto \nabla h(y), y \mapsto \nabla \hat{g}_{-x}(y)$ alle auf $K_1(0)$ stetig und daher dort beschränkt sind, und da wegen der Cauchy-Schwarzen Ungleichung

$$|\frac{\partial \hat{g}_{-x}}{\partial \nu(y)}(y)| \le \| \nabla \hat{g}_{-x}(y)\|, \ \ |\frac{\partial h}{\partial \nu(y)}(y)| \le \| \nabla h(y)\|,$$

folgt für ein $C > 0$ mit $C \ge \| \nabla h(y)\| \cdot |\hat{g}_{-x}(y)| + \| \nabla \hat{g}_{-x}(y)\| \cdot |h(y)|, \ y \in K_1(0)$,

$$|I_2 - I_3| \le \int\limits_{x+\rho S^{p-1}} C \, d\mu = C\rho^{p-1} \mu(S^{p-1}) \to 0, \ \ \rho \searrow 0.$$

Es bleibt I_4. Auf $x + \rho S^{p-1}$ ist $g(y - x)$ konstant gleich $\ln \rho$ im Fall $p = 2$ und konstant gleich $\frac{1}{2-p}\rho^{2-p}$ im Fall $p > 2$. Somit gilt für ein geeignetes $c > 0$ mit $c \ge \| \nabla h(y)\|, \ y \in K_1(0)$,

$$|I_4| \le c \int\limits_{x+\rho S^{p-1}} |g(y - x)| \, d\mu(y) = c(\rho^{p-1} \mu(S^{p-1})) \cdot \begin{cases} |\ln \rho| & , p = 2 \\ \frac{1}{p-2}\rho^{2-p} & , p > 2 \end{cases} =$$

$$c\mu(S^{p-1}) \cdot \begin{cases} \rho|\ln\rho| & , p = 2 \\ \frac{1}{p-2}\rho & , p > 2 \end{cases} \stackrel{\rho\searrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Für $\rho \searrow 0$ folgt die Aussage des Lemmas nun aus (2.14), da wegen Bemerkung 2.3.5 und dem Satz von der beschränkten Konvergenz

$$\int\limits_G w_x(t)\triangle h(t)\, d\lambda_p(t) \stackrel{\rho\searrow 0}{\longrightarrow} \int\limits_{U_1(0)} w_x(t)\triangle h(t)\, d\lambda_p(t).$$

❑

Im folgenden sei σ das Oberflächenmaß μ auf S^{p-1} multipliziert mit dem Faktor $\frac{1}{\mu(S^{p-1})}$. Somit gilt $\sigma(S^{p-1}) = 1$.

2.3.7 Satz (*Poisson-Darstellung*)**.** *Sei $h : K_1(0) \to \mathbb{R}$ stetig, sodass $h|_{U_1(0)}$ harmonisch ist. Dann gilt für alle $x \in U_1(0)$*

$$h(x) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot h(y)\, d\sigma(y),$$

wobei $\wp(x,y) = \frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^p}$ der Poissonkern ist.

Beweis. Ist h harmonisch auf einer $K_1(0)$ umfassenden offenen Menge, so folgt die Darstellung

$$h(x) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot h(y)\, d\sigma(y),$$

unmittelbar aus Lemma 2.3.6, da $\triangle h = 0$.

Für allgemeines h wie im Satz gefordert gehen wir folgendermaßen vor. Ein stetiges $h : K_1(0) \to \mathbb{R}$ ist wegen der Kompaktheit von $K_1(0)$ sogar gleichmäßig stetig. Insbesondere konvergiert $x \mapsto h(rx),\ x \in S^{p-1}$ gleichmäßig für $r \nearrow 1$ gegen $h|_{S^{p-1}}$. Für $r \in (0,1)$ ist $x \mapsto h(rx)$ auf $U_{\frac{1}{r}}(0)$ harmonisch. Also wissen wir

$$h(rx) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot h(ry)\, d\sigma(y).$$

Wegen dem Satz von der beschränkten Konvergenz geht die rechte Seite für $r \nearrow 1$ gegen $\int_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot h(y)\, d\sigma(y)$ und die linke wegen der Stetigkeit von h gegen $h(x)$.

❑

2.3.8 Korollar (*Mittelwerteigenschaft*)**.** *Sei $h : G \to \mathbb{R}$ harmonisch mit $G \supseteq K_r(a)$ für $r > 0$, so gilt*

$$\int\limits_{S^{p-1}} h(a+ry)\, d\sigma(y) = h(a).$$

Beweis. Wende Satz 2.3.7 mit $x = 0$ auf die ebenfalls harmonische Funktion $u \mapsto h(a+ru)$ an.

❑

2.3.9 Satz. *Sei $h : U_1(0) \to [0, +\infty)$ harmonisch ist. Dann gibt es ein (eindeutiges) nichtnegatives Borelmaß $\nu : \mathfrak{B}(S^{p-1}) \to [0, +\infty)$, sodass für alle $x \in U_1(0)$*

$$h(x) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x, y)\, d\nu(y),$$

wobei $\wp(x, y) = \frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^p}$ der Poissonkern ist.

Beweis. Man weist leicht nach, dass für jedes $r \in (0, 1)$ die Funktion $x \mapsto h(rx)$ auf $U_{\frac{1}{r}} \supseteq K_1(0)$ harmonisch ist. Nach Satz 2.3.7 gilt

$$h(rx) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot h(ry)\, d\sigma(y) = \Lambda_r(\wp(x, .)),$$

wobei $\Lambda_r(f) = \int_{S^{p-1}} f(y) \cdot h(ry)\, d\sigma(y)$ für $f \in C(S^{p-1}, \mathbb{R}) = C_{00}(S^{p-1})$. $C(S^{p-1}, \mathbb{R})$ versehen mit $\|.\|_\infty$ ist ein reeller Banachraum. Offenbar ist $\Lambda_r : C(S^{p-1}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ linear und wegen $h \geq 0$ auch positiv. Für seine Abbildungsnorm gilt wegen Korollar 2.3.8

$$\|\Lambda_r\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |\int\limits_{S^{p-1}} f(y) \cdot h(ry)\, d\sigma(y)| \leq \int\limits_{S^{p-1}} h(ry)\, d\sigma(y) = h(0)\,.$$

Also liegen die Λ_r alle in der abgeschlossenen Kugel mit Radius $h(0)$ um die Null in $C(S^{p-1}, \mathbb{R})'$. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist dieser Kugel w^*-kompakt. Da $(\Lambda_r)_{r\in(0,1)}$ nach 1 hin gerichtet ein Netz ist, gibt es ein w^*-konvergentes Teilnetz $(\Lambda_{r_i})_{i\in I}$ mit Grenzwert $\Lambda \in C(S^{p-1}, \mathbb{R})'$, $\|\Lambda\| \leq h(0)$. Teilnetz bedeutet

$$\forall r \in (0, 1)\ \exists\, i_0 \in I\ :\ \forall i \geq i_0 \Rightarrow r_i \geq r\,,$$

womit $\lim_{I\in I} r_i = 1$. Also folgt für $x \in U_1(0)$

$$h(x) = \lim_{i\in I} h(r_i x) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot h(r_i y)\, d\sigma(y) = \lim_{I\in I} \Lambda_{r_i}(\wp(x, .)) = \Lambda(\wp(x, .))\,.$$

Wegen $\Lambda(\mathbb{1}_{S^{p-1}}) = \lim_{I\in I} \Lambda_{r_i}(\mathbb{1}_{S^{p-1}}) = h(0)$ gilt für jedes $f \geq 0, f \neq 0$ aus $C(S^{p-1}, \mathbb{R})$ wegen $\|\frac{1}{\|f\|_\infty} f - \mathbb{1}_{S^{p-1}}\|_\infty \leq 1$

$$\Lambda(\frac{1}{\|f\|_\infty} f) = \underbrace{\Lambda(\frac{1}{\|f\|_\infty} f - \mathbb{1}_{S^{p-1}})}_{|.|\leq h(0)} + \underbrace{\Lambda(\mathbb{1}_{S^{p-1}})}_{=h(0)} \geq 0\,,$$

womit sich Λ als positiv herausstellt. Also gibt es ein nichtnegatives Borelmaß ν mit $\Lambda(f) = \int_{S^{p-1}} f\, d\nu$. Insbesondere gilt auch

$$h(x) = \Lambda(\wp(x, .)) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x, .)\, d\nu\,.$$

❑

Kapitel 3

Satz von Riesz-Markov

3.1 Komplexe Maße

Wir wollen nun komplexwertige Maße einführen. Diese habe Werte in $\mathbb{C}$. Maße, wie sie bisher bekannt waren, haben ja immer Werte in $[0, +\infty]$ gehabt.

3.1.1 Definition. Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra darauf. Eine Funktion $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ heißt komplexes Maß, wenn für alle paarweise disjunkten Folgen $E_n,\ n \in \mathbb{N}$, von Mengen aus $\mathfrak{A}$ gilt

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \tag{3.1}$$

3.1.2 Bemerkung. Da gemäß (3.1) die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\emptyset)$ konvergiert, muss $\mu(\emptyset) = 0$.

Im Gegensatz zu nichtnegativen Maßen gilt für komplexe Maße im Allgemeinen nicht, dass aus $A \subseteq B$ folgt, dass $|\mu(A)| \leq |\mu(B)|$.

3.1.3 Beispiel. Ist $\sigma : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ irgend ein nichtnegatives Maß auf Ω und $f \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \sigma, \mathbb{C})$, so stellt

$$\mu(A) = \int_A f \, d\sigma$$

offensichtlich ein komplexes Maß dar.

3.1.4 Bemerkung. Sind $\nu_j,\ j = 1, \dots, 4$, endliche und nichtnegative Maße in dem aus der Maßtheorie bekannten Sinne, so ist klarerweise

$$\nu_1 - \nu_2 + i(\nu_3 - \nu_4)$$

ein komplexes Maß. Die Voraussetzung, dass es sich hier um endliche Maße handelt ist wesentlich, da sonst undefinierte Ausdrücke wie $\infty - \infty$ auftreten könnten.

Ist umgekehrt μ ein komplexes Maß, so ist sicher auch $\bar{\mu}$ definiert durch $\bar{\mu}(A) = \overline{\mu(A)}$ ein komplexes Maß und infolge auch $\operatorname{Re}\mu = \frac{\mu+\bar{\mu}}{2}$ sowie $\operatorname{Im}\mu = \frac{\mu-\bar{\mu}}{2i}$, wobei diese beiden letzten Maße offensichtlich reellwertig sind.

$\operatorname{Re}\mu, \operatorname{Im}\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ sind also signierte Maße. Nach dem *Hahnschen Zerlegungssatz* gilt

$$\operatorname{Re}\mu = \mu_{r,+} - \mu_{r,-}, \quad , \operatorname{Im}\mu = \mu_{i,+} - \mu_{i,-}$$

und daher
$$\mu = \mu_{r,+} - \mu_{r,-} + i(\mu_{i,+} - \mu_{i,-})$$
mit nichtnegativen Maßen $\mu_{r,+}, \mu_{r,-}, \mu_{i,+}, \mu_{i,-} : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$. Diese Zerlegungen von $\operatorname{Re}\mu, \operatorname{Im}\mu$ sind eindeutig, wenn man verlangt, dass $\mu_{r,+}$ und $\mu_{r,-}$ bzw. $\mu_{r,+}$ und $\mu_{r,-}$ singulär zu einander sind, daher jeweils ungleich Null nur auf Teilmengen von zwei disjunkten Teilmengen aus $\mathcal{A}$.

Wir wollen nun ausgehend von einem komplexen Maß μ ein endliches nichtnegatives Maß $|\mu|$ konstruieren, das wir als *Variation* von μ bezeichnen. Diese Konstruktion ist verwandt mit der der Weglänge aus der Analysis.

3.1.5 Satz. *Für $E \in \mathfrak{A}$ sei*[1]

$$|\mu|(E) := \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| : A_k \in \mathfrak{A},\ k \in \mathbb{N},\ \sum_{j=1}^{\infty} A_j = E\right\}. \tag{3.2}$$

Dann ist $E \mapsto |\mu|(E)$ ein nichtnegatives Maß auf Ω mit $|\mu|(E) \geq |\mu(E)|$.

Beweis. Klarerweise gilt $|\mu|(E) \in [0, +\infty],\ E \in \mathfrak{A}$, und wegen $\mu(\emptyset) = 0$ folgt unmittelbar aus der Definition $|\mu|(\emptyset) = 0$.

Um die σ-Additivität zu zeigen, sei $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$. Nach Definition gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu beliebigem reellen $t_n < |\mu|(E_n)$ $(\in [0, +\infty])$ eine Partition $E_n = \sum_{j=1}^{\infty} A_{n,j}$ in $\mathfrak{A}$, sodass
$$t_n < \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_{n,j})|.$$
Nun ist klarerweise $E = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{n,j}$ eine Partition von E mit ($N \in \mathbb{N}$ zunächst fest)
$$\sum_{n=1}^{N} t_n \leq \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_{n,j})| \leq |\mu|(E).$$
Da die $t_n < |\mu|(E_n)$ für $n = 1, \dots, N$ beliebig waren, folgt
$$\sum_{n=1}^{N} |\mu|(E_n) \leq |\mu|(E)\ ,$$
und für $N \to \infty$ schließlich $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n) \leq |\mu|(E)$.

Für die umgekehrte Ungleichung sei $\sum_{j=1}^{\infty} A_j = E$ eine Partition von E. Somit ist $E_n = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cap E_n$ ein Partition von E_n und $A_j = \sum_{n=1}^{\infty} A_j \cap E_n$ eine solche von A_j. Wegen (3.1) und der Dreiecksungleichung gilt
$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_j \cap E_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j \cap E_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n),$$
und damit $|\mu|(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n)$.

❑

3.1.6 Bemerkung. Ist μ schon nichtnegativ, so folgt unmittelbar $\mu = |\mu|$.

[1] Bei den Partitionen der Menge E ist nicht ausgeschlossen, dass nur endlich viele A_j nichtleer sind.

Schreiben wir ein komplexes Maß μ mit Hilfe der Hahnschen Zerlegung wie in Bemerkung 3.1.4 als $\mu = \mu_{r,+} - \mu_{r,-} + i(\mu_{i,+} - \mu_{i,-})$, so folgt

$$|\mu|(E) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| : A_k \in \mathfrak{A},\ k \in \mathbb{N},\ \sum_{j=1}^{\infty} A_j = E\right\} \leq$$

$$\sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(\mu_{r,+}(A_j) + \mu_{r,-}(A_j) + \mu_{i,+}(A_j) + \mu_{i,-}(A_j)) : A_k \in \mathfrak{A},\ k \in \mathbb{N},\ \sum_{j=1}^{\infty} A_j = E\right\} =$$

$$\mu_{r,+}(E) + \mu_{r,-}(E) + \mu_{i,+}(E) + \mu_{i,-}(E)\,.$$

Andererseits gilt für $\nu \in \{\mu_{r,+}, \mu_{r,-}, \mu_{i,+}, \mu_{i,-}\}$, $\nu(A) \leq \max(|\operatorname{Re}\mu(A)|, |\operatorname{Im}\mu(A)|) \leq |\mu(A)|$ und somit (vgl. Bemerkung 3.1.6)

$$\nu(E) = |\nu|(E) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) : A_k \in \mathfrak{A},\ k \in \mathbb{N},\ \sum_{j=1}^{\infty} A_j = E\right\} \leq$$

$$\sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| : A_k \in \mathfrak{A},\ k \in \mathbb{N},\ \sum_{j=1}^{\infty} A_j = E\right\} = |\mu|(E)\,.$$

Ist schließlich $\Omega = A \dot\cup B$ eine zur Hahnschen Zerlegung $\operatorname{Re}\mu = \mu_{r,+} - \mu_{r,-}$ gehörige Partition, dh. $\mu_{r,+}(C) = \operatorname{Re}\mu(C), \mu_{r,-}(C) = 0$ und $\mu_{r,-}(D) = -\operatorname{Re}\mu(C), \mu_{r,+}(D) = 0$ für alle $C, D \in \mathcal{A}$ mit $C \subseteq A$ und $D \subseteq B$, so stimmt $\operatorname{Re}\mu$ auf allen messbaren Teilmengen von A (B) mit $\mu_{r,+}$ ($-\mu_{r,-}$) überein. Somit folgt ($R \in \mathcal{A}$)

$$|\operatorname{Re}\mu|(R) = |\operatorname{Re}\mu|(R \cap A) + |\operatorname{Re}\mu|(R \cap B) = \mu_{r,+}(R) + \mu_{r,-}(R)\,,$$

und weiters

$$\mu_{r,\pm}(R) = \frac{|\operatorname{Re}\mu|(R) \pm \operatorname{Re}\mu(R)}{2}\,.$$

Entsprechendes gilt für $\operatorname{Im}\mu$. Somit erhalten wir

3.1.7 Korollar. *Für jedes komplexe Maß μ ist $|\mu|$ ein endliches, nichtnegatives Maß. Weiters gilt für die endlichen, nichtnegativen Maße $\mu_{r,+}, \mu_{r,-}, \mu_{i,+}, \mu_{i,-}$ aus Bemerkung 3.1.4*

$$\mu_{r,\pm} = \frac{|\operatorname{Re}\mu| \pm \operatorname{Re}\mu}{2},\quad \mu_{i,\pm} = \frac{|\operatorname{Im}\mu| \pm \operatorname{Im}\mu}{2} \tag{3.3}$$

sowie

$$\mu_{r,+}, \mu_{r,-}, \mu_{i,+}, \mu_{i,-} \leq |\mu| \leq \mu_{r,+} + \mu_{r,-} + \mu_{i,+} + \mu_{i,-}\,.$$

Man kann auch ohne Hahnschen Zerlegungssatz zeigen, dass $|\mu|$ endlich ist. Der Nachweis dafür verwendet aber eine ähnliche Konstruktion wie im Hahnschen Zerlegungssatz. Der Vollständigkeit halber werde der Nachweis dafür in den beiden folgenden Resultaten geführt.

3.1.8 Lemma (*). *Sind $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, so gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, sodass*

$$\pi\left|\sum_{j\in I} z_j\right| \geq \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

Beweis. Für $\theta \in [0, 2\pi]$ betrachte die Halbebene $H_\theta := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} e^{-i\theta} z > 0\}$. Nun gilt $z = re^{i\alpha} \in H_\theta \Leftrightarrow \cos(\alpha - \theta) > 0$. Somit gilt für die Polardarstellung $z_k = r_k e^{i\alpha_k}$

$$\left| \sum_{z_j \in H_\theta} z_j \right| = \left| \sum_{z_j \in H_\theta} e^{-i\theta} z_j \right| \geq \operatorname{Re} \left(\sum_{z_j \in H_\theta} e^{-i\theta} z_j \right) =$$

$$\sum_{z_j \in H_\theta} \cos(\alpha_j - \theta) r_j = \sum_{j=1}^{n} \max(\cos(\alpha_j - \theta), 0) r_j =: \phi(\theta).$$

Klarerweise hängt ϕ stetig von θ ab. Ist $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ ein Maximum von ϕ, so gilt[2]

$$2\pi\phi(\theta_0) \geq \int_0^{2\pi} \phi(\theta)\, d\theta = \sum_{j=1}^{n} r_j \int_{\alpha_j - \frac{\pi}{2}}^{\alpha_j + \frac{\pi}{2}} \cos(\alpha_j - \theta)\, d\theta = 2 \sum_{j=1}^{n} r_j.$$

Setzt man $I = \{j : z_j \in H_{\theta_0}\}$, so folgt die Behauptung.

❑

3.1.9 Korollar (*). $|\mu|$ *ist ein endliches Maß.*

Beweis.

⇝ Angenommen es würde ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $|\mu|(A) = +\infty$ geben. Nach Definition gibt es zu jedem noch so großen t eine Partition $A_j,\ j \in \mathbb{N}$, von A, sodass

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| > t,$$

und damit ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{j=1}^{n} |\mu(A_j)| > t.$$

Sei nun speziell $t = \pi(1 + |\mu(A)|)$, und wähle $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ wie in Lemma 3.1.8, wobei $z_j = \mu(A_j)$. Mit

$$A' = \bigcup_{n \in I} A_n, \quad B' = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus I} A_n,$$

erhalten wir zwei Mengen mit $A' \dot\cup B' = A$ und

$$|\mu(A')| = \left| \sum_{j \in I} \mu(A_j) \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} |\mu(A_j)| > \frac{t}{\pi} = 1 + |\mu(A)| \geq 1$$

$$|\mu(B')| = |\mu(A) - \mu(A')| \geq |\mu(A')| - |\mu(A)| > 1.$$

[2] Hier geht in der ersten Gleichheit ein, dass $\int_0^{2\pi} h(\theta)\, d\theta = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} h(\theta)\, d\theta$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodisch ist.

$\rightsquigarrow$ Wäre nun $|\mu|(X) = +\infty$, so gibt es nach obigen Beweisschritt Mengen $A_1, B_1 \in \mathfrak{A}$ mit $A_1 \dot\cup B_1 = X$ und $|\mu(A_1)| > 1$, $|\mu(B_1)| > 1$. Da $|\mu|$ additiv ist, muss auch $|\mu|(A_1) = +\infty$ oder $|\mu|(B_1) = +\infty$ gelten. Wir wählen die Benennung so, dass $|\mu|(A_1) = +\infty$.

Wenden wir des Beweises ersten Schritt auf A_1 an, so ergibt das mit der entsprechenden Benennung Mengen $A_2, B_2 \in \mathfrak{A},\ A_2 \dot\cup B_2 = A_1$ mit
$|\mu(A_2)| > 1, |\mu|(A_2) = +\infty, |\mu(B_2)| > 1$.

Setzen wir das rekursiv fort, so erhalten wir eine disjunkte Folge $B_n \in \mathfrak{A},\ n \in \mathbb{N}$, sodass $(|\mu(B_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ sicher keine Nullfolge ist. Wegen der σ-Additivität von μ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in \mathbb{C},$$

woraus man aber schließen würde, dass $(|\mu(B_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ doch eine Nullfolge ist.

❑

3.1.10 Definition. Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra darauf. Mit $M(\Omega, \mathfrak{A})$ wollen wir den Vektorraum aller komplexen Maße $\mu : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ bezeichnen [3]. Für ein $\mu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$ setzen wir

$$\|\mu\| := |\mu|(\Omega),$$

und nennen dies die *totale Variation* des Maßes μ.

3.1.11 Satz. *$(M(\Omega, \mathfrak{A}), \|.\|)$ ist ein Banachraum, wobei + und die skalare Multiplikation mengenweise definiert ist, d.h. $(\mu + \nu)(A) := \mu(A) + \nu(A)$, $(\alpha \cdot \mu)(A) := \alpha \cdot (\mu(A))$ für $\mu, \nu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Außerdem ist mit $\mu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$ auch $\bar\mu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\|\mu\| = \|\bar\mu\|$, wobei $\bar\mu(A) := \overline{\mu(A)}$*

Beweis. $\mu + \nu$ und $\alpha \cdot \mu$ sind offensichtlich σ-additive und komplexwertige Funktionen auf $\mathfrak{A}$. Also $\mu + \nu,\ \alpha \cdot \mu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$, und somit ist $M(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Vektorraum. Die Behauptung über $\bar\mu$ ist auch offensichtlich.

Nun gilt $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) \geq 0$, wobei aus $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) = 0$ wegen $|\mu(A)| \leq |\mu|(A) \leq |\mu|(\Omega)$ folgt, dass $\mu = 0$. Außerdem gilt[4]

$$\|\alpha \cdot \mu\| = \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha \cdot \mu(A_j)| : \sum_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega\right\} =$$

$$\sup\left\{|\alpha| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| : \sum_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega\right\} = |\alpha| \cdot \|\mu\|.$$

Wegen[4]

$$\|\mu + \nu\| = \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j) + \nu(A_j)| : \sum_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega\right\} \leq$$

$$\sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| + \sum_{j=1}^{\infty} |\nu(A_j)| : \sum_{j=1}^{\infty} A_j = \Omega\right\} \leq \|\mu\| + \|\nu\|,$$

[3] Man beachte, dass ein nichtnegatives Maß genau dann in $M(\Omega, \mathfrak{A})$ liegt, wenn es endlich ist.

[4] Die fast gleiche Rechnung zeigt sogar $|\alpha \cdot \mu| = |\alpha| \cdot |\mu|$ bzw. $|\mu + \nu| \leq |\mu| + |\nu|$.

ist $\|.\|$ eine Norm.

Sei nun $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(M(\Omega,\mathfrak{A}),\|.\|)$. Wegen ($\epsilon > 0$)

$$|\mu_n(A) - \mu_m(A)| \leq |\mu_n - \mu_m|(A) \leq \|\mu_n - \mu_m\| \leq \epsilon,\ n, m \geq N(\epsilon), \tag{3.4}$$

für jedes $A \in \mathfrak{A}$ und wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ ist die Mengenfunktion

$$\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) \in \mathbb{C}$$

auf $\mathfrak{A}$ wohldefiniert. Da die Grenzwertbildung additiv ist, ist μ eine endlich additive Mengenfunktion. Für $m \to \infty$ in (3.4) folgt $|\mu_n(A) - \mu(A)| \leq \epsilon,\ n \geq N(\epsilon)$. Also konvergiert die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengenfunktionen gleichmäßig gegen μ.

Ist nun $A = \sum_{j=1}^\infty A_j$, so folgt aus der σ-Additivität der μ_n einem bekannten Limesvertauschungslemma aus der Analysis

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \mu_n(\sum_{j=1}^k A_j) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mu_n(\sum_{j=1}^k A_j) = \lim_{k\to\infty} \mu(\sum_{j=1}^k A_j).$$

Wegen der endlichen Additivität von μ folgt $\mu(A) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)$, d.h. $\mu \in M(\Omega,\mathfrak{A})$. Es bleibt $\|\mu_n - \mu\| \to 0$ zu zeigen. Dazu sei $\Omega = \sum_{j=1}^\infty E_j$ eine Partition und $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Es folgt

$$\sum_{j=1}^N |\mu_n(E_j) - \mu(E_j)| = \sum_{j=1}^N |\mu_n(E_j) - \lim_{m\to\infty} \mu_m(E_j)| =$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^N |\mu_n(E_j) - \mu_m(E_j)| \leq \limsup_{m\to\infty} \|\mu_n - \mu_m\|.$$

Dieser Ausdruck ist für n hinreichend groß, d.h. $n \geq N(\epsilon)$, kleiner oder gleich ϵ, vgl. (3.4). Lässt man N gegen ∞ streben, und nimmt das Supremum über alle Partitionen $\Omega = \sum_{j=1}^\infty E_j$, so folgt auch $\|\mu_n - \mu\| \leq \epsilon,\ n \geq N(\epsilon)$.

❏

3.1.12 Bemerkung. Es sei hier nur kurz erwähnt, dass man ähnlich wie von $L^1(\mathbb{R})$ Funktionen auch von komplexen Borel-Maßen auf $\mathbb{R}$ die *Fouriertransformation* definieren kann. Diese ergibt im Allgemeinen zwar keine C_0-Funktion, aber zumindest eine auf $\mathbb{R}$ beschränkte und stetige Funktion.

Weiters kann man die Faltung zweier komplexer Maße auf $\mathbb{R}$ definieren und erhält wieder ein komplexes Maß.

3.2 Satz von Radon-Nikodym

Zunächst wollen wir an den Begriff der absoluten Stetigkeit eines Maßes bzgl. eines anderen erinnern und auf komplexe Maße ausdehnen.

3.2.1 Definition. Sei $\mu : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ ein nichtnegatives Maß. Weiters sei $\nu : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ auch ein nichtnegatives Maß oder $\nu \in M(\Omega,\mathfrak{A})$. Dann heißt ν *absolut stetig* bzgl. μ, in Zeichen $\nu \ll \mu$, falls aus $A \in \mathfrak{A},\ \mu(A) = 0$ folgt, dass $\nu(A) = 0$.

Gilt für beide Maße $\mu, \nu \in M(\Omega,\mathfrak{A})$, so heißt ν absolut stetig bzgl. μ $(\nu \ll \mu)$, falls $\nu \ll |\mu|$.

3.2.2 Bemerkung. Ist $\nu \ll \mu$, $\nu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$ und $A \in \mathfrak{A}$, $\mu(A) = 0$, so folgt für jede Partition $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von A, dass auch $0 \le \mu(A_j) \le \mu(A) = 0$ und somit $\nu(A_j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$, d.h. $\sum |\nu(A_j)| = 0$. Also folgt $|\nu|(A) = 0$.

Also $\nu \ll \mu \Leftrightarrow |\nu| \ll \mu$, da die Umkehrung sofort aus $|\nu(A)| \le |\nu|(A)$ folgt.

Wir wollen mit dem Satz von Radon-Nikodym fortfahren, der aus der Maßtheorie etwa in folgender Form bekannt ist.

3.2.3 Satz. *Sei μ ein σ-endliches nichtnegatives Maß und ν ein nichtnegatives Maß, sodass $\nu \ll \mu$. Dann gibt es eine messbare Funktion, eine sogenannte* Dichte*, $f \ge 0$, die bis auf μ-Nullmengen eindeutig bestimmt ist, sodass*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathfrak{A} .$$

Offenbar ist in Satz 3.2.3 das Maß ν genau dann endlich, wenn $\int f \, d\mu < +\infty$.

Aus $\nu \ll \mu$ für ein $\nu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$ folgt offenbar $\bar{\nu} \ll \mu$ und damit $\operatorname{Re}\nu, \operatorname{Im}\nu \ll \mu$. Schreiben wir nun ν wie in Bemerkung 3.1.4 als $\nu = \nu_{r,+} - \nu_{r,-} + i(\nu_{i,+} - \nu_{i,-})$, so folgt aus der Darstellung dieser vier nichtnegativen Maße in Korollar 3.1.7 und Bemerkung 3.2.2, dass $\nu_{r,\pm}, \nu_{i,\pm} \ll \mu$. Wenden wir Satz 3.2.3 auf diese vier Maße an, so erhalten wir vier integrierbare, nichtnegative Dichten $f_{r,\pm}, f_{i,\pm}$. Setzen wir

$$f := (f_{r,+} - f_{r,-}) + i(f_{i,+} - f_{i,-}) ,$$

folgt

3.2.4 Korollar. *Sei μ ein σ-endliches nichtnegatives Maß und $\nu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$ ein komplexes Maß, sodass $\nu \ll \mu$. Dann gibt es $f \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$, so f eine Dichte von ν ist, dh.*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathfrak{A}. \tag{3.5}$$

Was ist hier nun die Dichte von $|\nu|$? Die naheliegende Antwort $|f|$ wird im folgenden Lemma gerechtfertigt.

3.2.5 Lemma. *Ist $f \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{C})$ mit σ-endlichem nichtnegativen Maß μ und $\nu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$ das komplexe Maß $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$, $A \in \mathfrak{A}$, so folgt*

$$|\nu|(A) = \int_A |f| \, d\mu, \quad A \in \mathfrak{A}, \tag{3.6}$$

und damit $\|f\|_1 = \|\nu\|$.

Beweis. Sei $A = \sum_{j=1}^{\infty} A_j$ eine Partition einer Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < +\infty$. Es folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\nu(A_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_{A_j} f \, d\mu \right| \le \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} |f| \, d\mu,$$

und somit $|\nu|(A) \le \int_A |f| \, d\mu$. Setzen wir für ein festes $p \in \mathbb{N}$

$$A_{j,k} = A \cap f^{-1}((\frac{j}{2^p}, \frac{j+1}{2^p}] \times (\frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p}]), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

so ist $A = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} A_{j,k}$ eine Partition. Für $x \in A_{j,k}$ sieht man, dass $f(x) = \frac{j}{2^p} + i\frac{k}{2^p} + \alpha(x)$ und $|f(x)| = \left|\frac{j}{2^p} + i\frac{k}{2^p}\right| + \beta(x)$, wobei für messbare $\alpha : A_{j,k} \to \mathbb{C}$ und $\beta : A_{j,k} \to \mathbb{R}$ mit $|\alpha(x)|, |\beta(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2^p}$. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt

$$|\nu(A_{j,k})| = \left|\int_{A_{j,k}} f\, d\mu\right| = \left|(\frac{j}{2^p} + i\frac{k}{2^p}) \cdot \mu(A_{j,k}) + \int_{A_{j,k}} \alpha\, d\mu\right| \geq$$

$$|\frac{j}{2^p} + i\frac{k}{2^p}| \cdot \mu(A_{j,k}) - \left|\int_{A_{j,k}} \alpha\, d\mu\right| \geq (|\frac{j}{2^p} + i\frac{k}{2^p}| - \frac{\sqrt{2}}{2^p}) \cdot \mu(A_{j,k}) =$$

$$\int_{A_{j,k}} |f|\, d\mu - \int_{A_{j,k}} \beta\, d\mu - \frac{\sqrt{2}}{2^p} \cdot \mu(A_{j,k}) \geq \int_{A_{j,k}} |f|\, d\mu - \frac{\sqrt{2}}{2^{p-1}}\mu(A_{j,k}).$$

Aufsummieren ergibt

$$|\nu|(A) \geq \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |\nu(A_{j,k})| \geq \int_A |f|\, d\mu - \frac{\sqrt{2}}{2^{p-1}}\, \mu(A),$$

und da $p \in \mathbb{N}$ beliebig war, erhalten wir (3.6).

Ist $\mu(A) = +\infty$, so kann man wegen der σ-Endlichkeit A als disjunkte Vereinigung $\sum_{n=1}^{\infty} B_n$ mit $\mu(B_n) < +\infty$ schreiben. Somit gilt auch (3.6) in diesem Fall.

❑

3.2.6 Korollar. *Mit den Voraussetzungen in Korollar 3.2.4 ist die Dichte f von ν eindeutig. Zudem gilt $\bar{\nu}, \operatorname{Re}\nu, \operatorname{Im}\nu, \nu_{r,\pm}, \nu_{i,\pm} \ll \mu$ mit den Dichten $\bar{f}, \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f, (\operatorname{Re} f)_\pm, (\operatorname{Im} f)_\pm$* [5].

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, dass die lineare Abbildung $f \mapsto \nu$, die einer Dichte aus L^1 ein komplexes Maß zuordnet, wegen $\|f\|_1 = \|\nu\|$ isometrisch und somit injektiv ist.

Außerdem überprüft man leicht hintereinander, dass $\bar{f}$ Dichte von $\bar{\nu}$, $\operatorname{Re} f$ ($\operatorname{Im} f$) Dichte von $\operatorname{Re}\nu$ ($\operatorname{Im}\nu$) und schließlich mit (3.3) und Lemma 3.2.5, dass $(\operatorname{Re} f)_\pm$ ($(\operatorname{Im} f)_\pm$) Dichte von $\nu_{r,\pm}$ ($\nu_{i,\pm}$) ist.

❑

Wendet man obigen Satz auf $\nu \ll \mu := |\nu|$ an, so folgt

3.2.7 Korollar. *Sei μ ein σ-endliches nichtnegatives Maß und $\nu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$, sodass*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Es gilt $\mu = |\nu|$ genau dann, wenn $|f| = 1$ μ-fast überall.

Beweis. Ist $\mu = |\nu|$, so folgt aus Lemma 3.2.5, dass $|f|$ die Dichte für $|\nu|$ ist. Da auch die konstante Einsfunktion eine Dichte für $\mu = |\nu|$ ist, folgt aus der Eindeutigkeit in Satz 3.2.3, dass $|f| = 1$ μ-fast überall.

[5] Dabei ist für eine reellwertige Funktion g, $g_+ := \max(g, 0) = \frac{|g|+g}{2}$, $g_- := -\min(g, 0) = \frac{|g|-g}{2}$.

Die Umkehrung beweist man, wenn man diese Schlussfolgerungen in die andere Richtung macht.

❑

Nun können wir auch die Integration komplexwertiger Funktionen nach komplexen Maßen definieren.

3.2.8 Definition. Für $\nu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$ sei μ ein nichtnegatives, σ-endliches Maß mit $\nu \ll \mu$, und sei f die Dichte von ν bezüglich μ. [6]

Eine messbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt integrierbar bzgl. ν ($\in M(\Omega, \mathfrak{A})$), wenn $g \cdot f$ integrierbar bzgl. μ ist. Wir definieren dann

$$\int_\Omega g \, d\nu := \int_\Omega gf \, d\mu. \tag{3.7}$$

3.2.9 Fakta.

1. Diese Definition ist unabhängig von μ ($\gg \nu$). Sind nämlich $\mu_1, \mu_2 \gg \nu$, so ist auch $\mu_1 + \mu_2 \gg \nu$. Seien f_1 und f_2 die Dichten von ν bezüglich μ_1 bzw. μ_2, und seien h_1 und h_2 die Dichten von μ_1 bzw. μ_2 bezüglich $\mu_1 + \mu_2$. Dann gilt

$$\int_A f_1 \cdot h_1 \, d(\mu_1 + \mu_2) = \int_A f_1 \, d\mu_1 = \nu(A) = \int_A f_2 \, d\mu_2 = \int_A f_2 \cdot h_2 \, d(\mu_1 + \mu_2),$$

woraus $f_1 \cdot h_1 = f_2 \cdot h_2$, $(\mu_1 + \mu_2)$-fast überall folgt. Nun ist

$$\int_\Omega gf_1 \, d\mu_1 = \int_\Omega gf_1h_1 \, d(\mu_1 + \mu_2) = \int_\Omega gf_2h_2 \, d(\mu_1 + \mu_2) = \int_\Omega gf_2 \, d\mu_2,$$

und zwar in dem Sinn, dass die Integrierbarkeit einer der Integranden die aller anderen bedingt.

2. Aus Definition 3.2.8 erkennt man sofort, dass $\int_\Omega g \, d\nu$ linear in g ist, dh.

$$\int_\Omega (\alpha g_1 + \beta g_2) \, d\nu = \alpha \int_\Omega g_1 \, d\nu + \beta \int_\Omega g_2 \, d\nu \,,$$

wobei g_1, g_2 integrierbar sind und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

3. Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $\nu_1, \nu_2 \in M(\Omega, \mathfrak{A})$, so folgt unmittelbar $\nu_1, \nu_2, \alpha\nu_1 + \beta\nu_2 \ll |\nu_1| + |\nu_2|$. Sind f_1 und f_2 die Dichte von ν_1 und ν_2 bezüglich $|\nu_1| + |\nu_2|$, so ist klarerweise $\alpha f_1 + \beta f_2$ die Dichte von $\alpha\nu_1 + \beta\nu_2$.

Ist g integrierbar bezüglich ν_1 und ν_2, so auch bzgl. $\alpha\nu_1 + \beta\nu_2$, wobei

$$\int_\Omega g \, d(\alpha\nu_1 + \beta\nu_2) = \int_\Omega g(\alpha f_1 + \beta f_2) \, d(|\nu_1| + |\nu_2|) =$$

$$\alpha \int_\Omega gf_1 \, d(|\nu_1| + |\nu_2|) + \beta \int_\Omega gf_2 \, d(|\nu_1| + |\nu_2|) = \alpha \int_\Omega g \, d\nu_1 + \beta \int_\Omega g \, d\nu_2.$$

Also ist $\int_\Omega g \, d\nu$ auch linear in ν.

[6] Z.B. gilt für $\mu = |\nu|$ sicherlich $\nu \ll \mu$.

4. Sind nun ν und μ komplexe Maße, also $\mu, \nu \in M(\Omega, \mathfrak{A})$, und gilt $\nu \ll \mu$, also $\nu \ll |\mu|$, und bezeichnet f_1 die Dichte von ν bzgl. $|\mu|$ sowie f_2 die Dichte von μ bzgl. $|\mu|$ - wegen Korollar 3.2.7 gilt $|f_2| = 1$ $|\mu|$-fast überall - so folgt

$$\nu(A) = \int_A f_1 \, d|\mu| = \int_A \frac{f_1}{f_2} f_2 \, d|\mu| = \int_A \frac{f_1}{f_2} \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Also ist $f := \frac{f_1}{f_2}$ eine Dichte von ν bezüglich μ. Diese ist eindeutig bis auf $|\mu|$-Nullmengen, da für ein messbares $h : \Omega \to \mathbb{C}$ mit

$$\nu(A) = \int_A h \, d\mu = \int_A h f_2 \, d|\mu|, \quad A \in \mathcal{A}$$

folgt, dass hf_2 die Dichte von ν bezgüglich $|\mu|$ ist. Es folgt $hf_2 = f_1$ bzw. $h = \frac{f_1}{f_2} = f$ $|\mu|$-fast überall.

5. Mit der selben Notation wie im letzten Punkt sei zusätzlich $g : \Omega \to \mathbb{C}$ messbar. Nach Definition 3.2.8 gilt

$$\int_\Omega g \, d\nu = \int_\Omega g f_1 \, d|\mu| = \int_\Omega g \frac{f_1}{f_2} f_2 \, d|\mu| = \int_\Omega g f \, d\mu.$$

Somit gilt (3.7) auch für komplexe μ mit $\nu \ll \mu$.

3.2.10 Beispiel. Sei $\nu \in M(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ das komplexe Maß auf $\mathbb{R}$

$$\nu(B) = \int_B \frac{e^{i2x}}{1+x^2} \, d\lambda(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} \delta_n(B),$$

wobei δ_x das Punktmaß bei $x \in \mathbb{R}$ ist. Da $\frac{e^{i2x}}{1+x^2}$ in $L^1(\lambda)$ liegt, ist $\nu_1(B) := \int_B \frac{e^{i2x}}{1+x^2} \, d\lambda(x)$ ein komplexes Borelmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{i^n}{2^n}\delta_n$ ein komplexes Maß auf $\mathbb{R}$. Insbesondere liegt es im Banachraum $M(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, vgl. Satz 3.1.11. Wegen $\|\frac{i}{2^n}\delta_n\| = \frac{1}{2^n}\delta_n(\mathbb{R}) = \frac{1}{2^n}$ konvergiert die $M(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$-wertige Reihe,

$$\nu_2 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} \delta_n$$

in $M(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ absolut. Somit gilt $\nu \in M(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Genauso konvergiert

$$\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_n$$

in $M(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ absolut. Offensichtlich liegt $\sum_{n=1}^{\infty} i^n \cdot \mathbb{1}_{\{n\}}$ in $L^1(\mu)$, und diese Funktion ist die Dichte von ν_2 bzgl. μ.

Wir wollen nun

$$\int_\mathbb{R} e^{-i2x} \, d\nu(x)$$

berechnen. Als beschränkte Funktion ist e^{-i2x} nach dem endlichen Maß $|\nu|$ integrierbar. Nach Fakta 3.2.9 ist dieses Integral die Summe von $\int e^{-i2x} \, d\nu_1(x)$ und $\int e^{-i2x} \, d\nu_2(x)$.

Nach Definition 3.2.8 gilt wegen $\nu_1 \ll \lambda$ mit Dichte $\frac{e^{i2x}}{1+x^2}$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i2x}\, d\nu_1(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2x} \cdot \frac{e^{i2x}}{1+x^2}\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\, d\lambda(x) = \pi,$$

und wegen $\nu_2 \ll \mu$ mit Dichte $\sum_{n=1}^{\infty} i^n \cdot \mathbb{1}_{\{n\}}$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i2x}\, d\nu_2(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} i^n \cdot \mathbb{1}_{\{n\}}\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (i \cdot e^{-2i})^n \int \mathbb{1}_{\{n\}}\, d\mu =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{i \cdot e^{-2i}}{2}\Big)^n = i \cdot e^{-2i} \cdot \frac{1}{2 - i \cdot e^{-2i}}.$$

Also

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i2x}\, d\nu(x) = \pi + i \cdot e^{-2i} \cdot \frac{1}{2 - i \cdot e^{-2i}}.$$

3.3 Der Dualraum des $C_0(X)$

In diesem Abschnitt sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorffraum. Wir betrachten den Raum $C_0(X, \mathbb{C})$[7] aller komplexwertigen stetigen Funktionen, die im unendlichen verschwinden, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \exists K \subseteq X \text{ kompakt}: \ \forall x \in K^c \Rightarrow |f(x)| \leq \epsilon.$$

Bekannterweise ist $C_0(X, \mathbb{C})$ ein abgeschlossener Teilraum von $C_b(X, \mathbb{C})$[8] ist, und somit selber, versehen mit der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$, ein Banachraum.

3.3.1 Bemerkung. Der Raum $C_{00}(X, \mathbb{C})$ aller stetigen, komplexwertigen Funktionen mit kompakten Träger ist ein dichter Teilraum von $C_0(X, \mathbb{C})$:

Sei $f \in C_0(X, \mathbb{C})$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es eine kompakte Menge $K \subseteq X$ mit $|f|(K^c) \subseteq [0, \epsilon)$. Nach Korollar 1.2.13 gibt es ein $h \in C_{00}(X, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{1}_K \leq h \leq 1$. Der Träger von fh ist in dem von h enthalten und daher auch kompakt, d.h. $fh \in C_{00}(X, \mathbb{C})$.

Schließlich ist $|f(x) - f(x)h(x)| = |f(x) - f(x)| = 0$, wenn $x \in K$, und

$$|f(x) - f(x)h(x)| \leq 2|f(x)| < 2\epsilon, \text{ wenn } x \in K^c.$$

Also $\|f - fh\|_\infty \leq 2\epsilon$, und daher $f \in \overline{C_{00}(X, \mathbb{C})}$, wobei der Abschluss bzgl. $\|.\|_\infty$ gebildet wird. Genauso sieht man, dass $C_{00}(X, \mathbb{R})$ ein dichter Teilraum von $C_0(X, \mathbb{R})$ ist.

Für das Hauptergebnis dieses Abschnittes benötigen wir

3.3.2 Lemma. *Sei $\Phi : C_0(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional.*

Dann gibt es ein stetiges, positives, lineares Funktional $\Lambda : C_0(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, sodass $\Phi(f) \leq \Lambda(f)$ für alle $f \in C_0(X, \mathbb{R}),\ f \geq 0$.

---

[7]Ist X kompakt, so gilt $C(X) = C_b(X) = C_0(X)$.

[8]Der Raum $C_b(X, \mathbb{C})$ aller stetigen, beschränkten und koplexwertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ ist ein Banachraum.

Beweis. Wir definieren für $f \in C_0(X, \mathbb{R}), f \geq 0$,

$$\Lambda(f) = \sup\{\Phi(h) : h \in C_0(X, \mathbb{R}), 0 \leq h \leq f\}. \tag{3.8}$$

Wegen der Beschränktheit von Φ gilt für alle $h \in C_0(X, \mathbb{R}), 0 \leq h \leq f$, die Abschätzung

$$|\Phi(h)| \leq \|\Phi\| \cdot \|h\|_\infty \leq \|\Phi\| \cdot \|f\|_\infty, \tag{3.9}$$

wodurch $\Lambda(f)$ wohldefiniert in $\mathbb{R}$ ist. Da $h = 0$ ebenfalls $h \in C_0(X, \mathbb{R}), 0 \leq h \leq f$ erfüllt, gilt $\Lambda(f) \geq 0$.

Wir wollen nun $\Lambda(f+g) = \Lambda(f)+\Lambda(g)$ nachweisen, wenn $f, g \in C_0(X, \mathbb{R}),\ f, g \geq 0$. Dazu sei $0 \leq h \leq f+g$. Setzt man $p = \max(h-g, 0), q = \min(h, g)$, so sieht man sofort, dass $p, q \in C_0(X, \mathbb{R}),\ p + q = h,\ 0 \leq p \leq f,\ 0 \leq q \leq g$. Also gilt

$$\{p + q : p, q \in C_0(X, \mathbb{R}),\ 0 \leq p \leq f, 0 \leq q \leq g\} = \{h : h \in C_0(X, \mathbb{R}),\ 0 \leq h \leq f + g\},$$

und mit dem Lemma über die iterierten Suprema folgt

$$\begin{gathered}
\Lambda(f + g) = \sup\{\Phi(h) : h \in C_0(X, \mathbb{R}), 0 \leq h \leq f + g\} = \\
\sup\{\Phi(p + q) : p, q \in C_0(X, \mathbb{R}),\ 0 \leq p \leq f, 0 \leq q \leq g\} = \\
\sup\{\Phi(p) + \Phi(q) : p, q \in C_0(X, \mathbb{R}),\ 0 \leq p \leq f, 0 \leq q \leq g\} = \\
\sup\{\sup\{\Phi(p) + \Phi(q) : q \in C_0(X, \mathbb{R}),\ 0 \leq q \leq g\} : p \in C_0(X, \mathbb{R}),\ 0 \leq p \leq f\} = \\
\sup\{\Phi(p) + \sup\{\Phi(q) : q \in C_0(X, \mathbb{R}),\ 0 \leq q \leq g\} : p \in C_0(X, \mathbb{R}),\ 0 \leq p \leq f\} = \\
\sup\{\Phi(p) : p \in C_0(X, \mathbb{R}),\ 0 \leq p \leq f\} + \Lambda(g) = \Lambda(f) + \Lambda(g).
\end{gathered}$$

Für $\eta > 0$ erhält man

$$\begin{aligned}
\Lambda(\eta f) = \sup\{\Phi(h) : h \in C_0(X, \mathbb{R}), 0 \leq h \leq \eta f\} = \\
\eta \sup\{\Phi(\frac{1}{\eta}h) : h \in C_0(X, \mathbb{R}), 0 \leq \frac{1}{\eta}h \leq f\} = \eta\Lambda(f).
\end{aligned}$$

Für $\eta = 0$ gilt auch $\Lambda(\eta f) = \eta\Lambda(f)$, da aus (3.8) unmittelbar $\Lambda(0) = 0$ folgt.

Ist nun $f \in C_0(X, \mathbb{R})$, so kann man f - nicht eindeutig - als $f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in C_0(X, \mathbb{R}), f_1, f_2 \geq 0$ schreiben. Wir definieren dann $\Lambda(f) := \Lambda(f_1) - \Lambda(f_2)$. Diese Definition ist eindeutig, denn für $f_1 - f_2 = f = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$ mit $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in C_0(X, \mathbb{R}), \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \geq 0$ folgt aus $f_1 + \tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 + f_2$,

$$\Lambda(f_1) + \Lambda(\tilde{f}_2) = \Lambda(f_1 + \tilde{f}_2) = \Lambda(\tilde{f}_1 + f_2) = \Lambda(\tilde{f}_1) + \Lambda(f_2),$$

und somit $\Lambda(f) = \Lambda(f_1) - \Lambda(f_2) = \Lambda(\tilde{f}_1) - \Lambda(\tilde{f}_2)$. Für $f, g \in C_0(X, \mathbb{R})$ mit Zerlegungen $f = f_1 - f_2,\ g = g_1 - g_2,\ f_1, f_2, g_1, g_2 \geq 0$ ist $f + g = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$ eine Zerlegungen mit $f_1 + g_1, f_2 + g_2 \geq 0$, also

$$\Lambda(f + g) = \Lambda(f_1 + g_1) - \Lambda(f_2 + g_2) = \Lambda(f_1) + \Lambda(g_1) - (\Lambda(f_2) + \Lambda(g_2)) = \Lambda(f) + \Lambda(g).$$

Entsprechend zeigt man $\Lambda(\eta f) = \eta\Lambda(f)$ für alle $\eta \in \mathbb{R}$.

Also erhalten wir eine Fortsetzung von $\Lambda(f)$ zu einem linearen, positiven und wegen (3.9) beschränkten Funktional auf $C_0(X, \mathbb{R})$. Die geforderte Bedingung folgt unmittelbar aus (3.8).

❑

3.3.3 Definition. Sei nun $\mu \in M(X, \mathfrak{B})$, d.h. ein komplexes Maß auf $(X, \mathfrak{B})$. Wir nennen μ *regulär*, wenn seine Variation $|\mu|$ regulär ist. Die Menge aller dieser Maße werde mit $M_{reg}(X)$ bezeichnet.

3.3.4 Bemerkung. Da nach Korollar 1.2.8 ein endliches, nichtnegatives Borelmaß schon regulär ist, wenn es nur auf allen offenen Mengen von innen regulär ist, ist ein $\mu \in M(X, \mathfrak{B})$ genau dann regulär, wenn $|\mu|$ auf allen offenen Mengen von innen regulär ist.

$M_{reg}(X)$ ist klarerweise eine Teilmenge von $M(X, \mathfrak{B})$. In vielen Fällen, z.B. wenn $X = \mathbb{R}$, sind alle endlichen nichtnegativen Maße regulär (vgl. Beispiel 1.2.9), und daher $M_{reg}(X) = M(X, \mathfrak{B})$.

3.3.5 Lemma. *Sind $\mu, \nu \in M_{reg}(X),\ a, b \in \mathbb{C}$, so sind auch $a\mu + b\nu \in M_{reg}(X)$. Insbesondere ist $M_{reg}(X)$ ein linearer Teilraum von $M(X, \mathfrak{B})$.*

Schließlich gilt für $f \in L^1(X, \mathfrak{B}, |\mu|, \mathbb{C})$, dass auch das Maß $\omega : B \mapsto \int_B f\, d\mu,\ B \in \mathfrak{B}$, regulär ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst die letzte Aussage. Dazu sei h die Dichte von μ bezüglich $|\mu|$. Nach Korollar 3.2.7 ist $|h| = 1$ fast überall (bzgl. $|\mu|$). Nach Definition 3.2.8 gilt $\omega(B) = \int_B f \cdot h\, d|\mu|$ und wegen Lemma 3.2.5

$$|\omega|(B) = \int\limits_B |f|\, d|\mu|,\ B \in \mathfrak{B}.$$

Da $|\mu|$ regulär ist, folgt die Behauptung aus Korollar 1.2.10.

Nun zeigen wir, dass $|\mu| + |\nu| \in M_{reg}(X)$. Dazu sei O offen und $\epsilon > 0$. Wegen der Regularität von O bzgl. $|\mu|$ und $|\nu|$ gibt es kompakte $K_1, K_2 \subseteq O$ mit $|\mu|(O) < |\mu|(K_1) + \epsilon$ und $|\nu|(O) < |\nu|(K_2) + \epsilon$, und somit

$$(|\mu| + |\nu|)(O) - (|\mu| + |\nu|)(K_1 \cup K_2) \leq \big(|\mu|(O \setminus K_1) + |\nu|(O \setminus K_2)\big) < \epsilon.$$

Nach Bemerkung 3.3.4 gilt $|\mu| + |\nu| \in M_{reg}(X)$.

Sind h_μ, h_ν die Dichten von μ und ν bzgl. $|\mu|+|\nu|$ gemäß Korollar 3.2.4, so folgt, dass $|h_\mu|, |h_\nu|$ die Dichten von $|\mu|$ und $|\nu|$ bzgl. $|\mu| + |\nu|$ sind. Daraus und aus der Eindeutigkeit der Dichte (vgl. Satz 3.2.3) folgt $|h_\mu| + |h_\nu| = 1$ fast überall.

Da $|\mu| + |\nu|$ endlich ist, gilt $L^\infty(X, \mathfrak{B}, |\mu| + |\nu|, \mathbb{C}) \subseteq L^1(X, \mathfrak{B}, |\mu| + |\nu|, \mathbb{C})$, womit $ah_\mu + bh_\nu \in L^1(X, \mathfrak{B}, |\mu| + |\nu|, \mathbb{C})$. Zudem ist diese Funktion die Dichte von $a\mu + b\nu$. Nach dem ersten Beweisschritt gilt dann $a\mu + b\nu \in M_{reg}(X)$.

❑

Aus dem folgenden Hauptsatz dieses Abschnittes wird unmittelbar folgen, dass $M_{reg}(X)$ versehen mit $\|\mu\| = |\mu|(X)$ sogar ein Banachraum und damit ein abgeschlossener Unterraum von $M(X, \mathfrak{B})$ ist, siehe auch Satz 3.1.11.

3.3.6 Satz (*Satz von Riesz-Markov*)**.** *Sei $(X.\mathcal{T})$ ein lokalkompakter Hausdorffraum. Für $\mu \in M_{reg}(X)$ definiert*

$$\Phi_\mu(f) = \int f\, d\mu,\quad f \in C_0(X, \mathbb{C}), \tag{3.10}$$

ein lineares Funktional auf $C_0(X, \mathbb{C})$, welches beschränkt mit der Abbildungsnorm $\|\Phi_\mu\| = \|\mu\|\ (= |\mu|(X))$ ist.

Ist umgekehrt, $\Phi \in C_0(X, \mathbb{C})'$, so gibt es genau ein $\mu \in M_{reg}(X)$, sodass

$$\Phi(f) = \Phi_\mu(f) = \int f \, d\mu, \ f \in C_0(X, \mathbb{C}).$$

Also ist die Abbildung $\mu \mapsto \Phi_\mu$ eine lineare, isometrische Bijektion von $M_{reg}(X)$ auf $C_0(X, \mathbb{C})'$.

Schließlich ist μ ein signiertes Maß - also $\mu(A) \in \mathbb{R}, A \in \mathfrak{B}$ - genau dann, wenn $\Phi_\mu(f) \in \mathbb{R}$ für alle $f \in C_0(X, \mathbb{R})$ [9], und μ ist nichtnegativ genau dann, wenn $\Phi_\mu(f) \in [0, +\infty)$ für alle $f \in C_0(X, \mathbb{R}), \ f \geq 0$[10].

Beweis.

⇝ Da jedes $f \in C_0(X, \mathbb{C})$ Borel-messbar und beschränkt, und somit integrierbar bzgl. $|\mu|$ ist, ist

$$\Phi_\mu(f) = \int f \, d\mu = \int f r \, d|\mu|$$

für jedes $f \in C_0(X, \mathbb{C})$ wohldefiniert und liegt in $\mathbb{C}$. Die Funktion r ist die Radon-Nykodym Ableitung von μ bzgl. $|\mu|$, wie in Korollar 3.2.7. Diese erfüllt ja $|r| = 1$ fast überall. Offensichtlich ist Φ_μ linear in f. Wegen

$$|\Phi_\mu(f)| \leq \int |f| \, d|\mu| \leq \|f\|_\infty |\mu|(X) \tag{3.11}$$

ist Φ_μ auch beschränkt mit einer Abbildungsnorm kleiner oder gleich $|\mu|(X)$.

⇝ Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, schreiben wir zunächst $\bar{r}$ in der Form

$$\bar{r}(x) = \exp(i\phi(x))$$

mit einer Borel-messbaren Funktion $\phi : X \to [0, 2\pi)$. Somit ist ϕ bzgl. $|\mu|$ integrierbar, d.h. $\phi \in L^1(|\mu|, \mathbb{R})$.

Wegen der Regularität finden wir mit Hilfe von Lemma 1.2.16 zu gegebenen $\epsilon > 0$ eine Funktion $h \in C_{00}(X, \mathbb{R})$ mit $\|\phi - h\|_1 < \epsilon$ ($\|.\|_1$ bzgl. $|\mu|$). Nun ist $\exp(ih)$ eine beschränkte und stetige Funktion auf X, sodass $|\exp(ih)| = 1$ und

$$\|\bar{r} - \exp(ih)\|_1 \leq \|\phi - h\|_1 < \epsilon.$$

Letztere Ungleichung folgt unmittelbar aus $|e^{ix} - e^{iy}| = |\int_x^y e^{it} \, dt| \leq |x - y|$.

Da X regulär bzgl. $|\mu|$ ist, gibt es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$, sodass $|\mu|(X) < |\mu|(K) + \epsilon$. Nach Korollar 1.2.13 gibt es ein $g \in C_{00}(X, \mathbb{R})$, sodass $\mathbb{1}_K \leq g \leq 1$.

Nun ist klarerweise $g \exp(ih) \in C_{00}(X, \mathbb{C}) \subseteq C_0(X, \mathbb{C})$ mit $\|g \exp(ih)\|_\infty \leq 1$ und

$$\Big|\Phi_\mu(g \exp(ih)) - |\mu|(X)\Big| \leq \int |g \exp(ih) r - 1| \, d|\mu| \leq$$

$$\int |g \exp(ih) r - \exp(ih) r| \, d|\mu| + \int |\exp(ih) r - 1| \, d|\mu| =$$

$$\int |g - 1| \, d|\mu| + \int |\exp(ih) - \bar{r}| \, d|\mu| \leq |\mu|(K^c) + \|\bar{r} - \exp(ih)\|_1 < 2\epsilon.$$

Damit kommt $\|\Phi_\mu\| = \sup\{\Phi_\mu(f) : \|f\|_\infty \leq 1\}$ der Zahl $|\mu|(X)$ beliebig nahe, und muss somit mit ihr übereinstimmen.

[9] Man spricht von einem reellen Funktional.

[10] Somit ist Φ_μ positiv.

⇝ Wegen $\Phi_{a\mu+b\nu}(f) = \inf f\, d(a\mu + b\nu) = a\int f\, d\mu + b\int f\, d\nu = a\Phi_\mu(f) + b\Phi_\nu(f)$ (vgl. Fakta 3.2.9) ist $\mu \mapsto \Phi_\mu$ von $M_{reg}(X)$ nach $C_0(X,\mathbb{C})'$ nach linear. Im letzten Punkt haben wir gesehen, dass sie isometrisch und somit auch injektiv ist.

⇝ Ist μ ein signiertes (nichtnegatives) Maß, so folgt unmittelbar aus (3.10), dass $\Phi_\mu(f) \in \mathbb{R}$ für $f \in C_0(X,\mathbb{R})$ ($\Phi_\mu(f) \geq 0$ für $f \in C_0(X,\mathbb{R}),\ f \geq 0$).

Sei nun umgekehrt $\Phi_\mu(f) \in \mathbb{R}$ bzw. $\Phi_\mu(f) \geq 0$ für alle $f \in C_0(X,\mathbb{R}),\ f \geq 0$. Offenbar ($h \in L^1(X,\mathfrak{B},|\mu|,\mathbb{C})$)

$$h \mapsto \int hr\, d|\mu|,$$

stetig auf $L^1(X,\mathfrak{B},|\mu|,\mathbb{C})$. r ist dabei wieder die Dichte von μ bzgl. $|\mu|$, und erfüllt somit $|r| = 1$ fast überall.

Da wegen $C_{00}(X,\mathbb{R}) \subseteq C_0(X,\mathbb{R})$ gemäß Lemma 1.2.16 die Menge aller $f \in C_0(X,\mathbb{R}),\ f \geq 0$ dicht in $\{h \in L^1(X,\mathfrak{B},|\mu|,\mathbb{R}) : h \geq 0\}$ ist, folgt $\int hr\, d|\mu| \in \mathbb{R}$ bzw. $\int hr\, d|\mu| \geq 0$ für alle nichtnegativen und integrierbaren Funktionen h auf X.

Nimmt man $h = \mathbb{1}_{\{x:\operatorname{Im} r(x)>0\}}$, so folgt in jedem Fall

$$0 = \operatorname{Im}\int hr\, d|\mu| = \int_{\{x:\operatorname{Im} r(x)>0\}} \operatorname{Im} r\, d|\mu|.$$

Also muss $|\mu|(\{x : \operatorname{Im} r(x) > 0\}) = 0$. Entsprechend zeigt man $|\mu|(\{x : \operatorname{Im} r(x) < 0\}) = 0$, also ist r fast überall reellwertig und damit μ ein signiertes Maß.

Ist sogar $\int hr\, d|\mu| \geq 0$ für alle nichtnegativen und integrierbaren Funktionen h auf X, so nimmt man $h = \mathbb{1}_{\{x:\operatorname{Re} r(x)<0\}}$, um wegen

$$0 \leq \int hr\, d|\mu| = \int_{\{x:\operatorname{Re} r(x)<0\}} \operatorname{Re} r\, d|\mu|$$

auf $r \geq 0$ fast überall zu schließen. Also ist dann μ nichtnegativ.

⇝ Um schließlich die Surjektivität von $\mu \mapsto \Phi_\mu$ zu zeigen, sei $\Phi \in C_0(X,\mathbb{C})'$. Wir definieren für $f \in C_0(X,\mathbb{R})$

$$\operatorname{Re}\Phi(f) = \frac{\Phi(f) + \overline{\Phi}(f)}{2},\ \ \operatorname{Im}\Phi(f) = \frac{\Phi(f) - \overline{\Phi}(f)}{2i},$$

und überprüfen leicht, dass $\operatorname{Re}\Phi, \operatorname{Im}\Phi : C_0(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineare und beschränkte Funktionale sind.

Nach Lemma 3.3.2 gibt es ein positives $\Lambda \in C_0(X,\mathbb{R})'$, sodass $\operatorname{Re}\Phi(f) \leq \Lambda(f)$ für $f \in C_0(X,\mathbb{R}),\ f \geq 0$. Damit ist auch $\Lambda - \operatorname{Re}\Phi \in C_0(X,\mathbb{R})'$ positiv.

Wir bemühen nun Satz 2.1.4 um zwei nichtnegative, auf allen offenen Mengen von innen reguläre Borel-Maße μ_1, μ_2 zu erhalten, sodass

$$\Lambda(f) = \int f\, d\mu_1,\ \ \Lambda(f) - \operatorname{Re}\Phi(f) = \int f\, d\mu_2,\ \ f \in C_{00}(X,\mathbb{R}).$$

Ist $K \subseteq X$ eine beliebige kompakte Menge, so gibt es nach Korollar 1.2.13 ein $h \in C_{00}(X,\mathbb{R})$ mit $\mathbb{1}_K \leq h \leq 1$, und daher

$$\mu_1(K) \leq \int h\, d\mu_1 = \Lambda(h) \leq \|\Lambda\| \cdot \|h\|_\infty \leq \|\Lambda\|.$$

Wegen der Regularität von innen folgt $\mu_1(X) \leq \|\Lambda\|$, und damit die Endlichkeit von μ_1, d.h. $\mu_1 \in M_{reg}(X)$. Genauso sieht man $\mu_2 \in M_{reg}(X)$.

Die gleichen Argumente auf $\operatorname{Im}\Phi$ angewandt ergeben zwei Maße $\mu_3, \mu_4 \in M_{reg}(X)$, sodass insgesamt (vgl. Fakta 3.2.9)

$$\operatorname{Re}\Phi(f) = \int f\, d(\mu_1 - \mu_2), \quad \operatorname{Im}\Phi(f) = \int f\, d(\mu_3 - \mu_4), \quad f \in C_{00}(X, \mathbb{R}).$$

Setzen wir $\mu := \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$, so ist klarerweise $\mu \in M_{reg}(X)$ und $\Phi(f) = \int f\, d\mu = \Phi_\mu(f),\ f \in C_{00}(X, \mathbb{R})$. Zerlegt man eine komplexwertige Funktion in Real- und Imaginärteil, so gilt diese Beziehung auch für alle $f \in C_{00}(X)$ ($= C_{00}(X, \mathbb{C})$).

Wie aus Bemerkung 3.3.1 bekannt, ist $C_{00}(X)$ dicht in $C_0(X)$, und da sowohl Φ als auch Φ_μ stetig auf $C_0(X)$ sind, gilt $\Phi(f) = \Phi_\mu(f),\ f \in C_0(X, \mathbb{C})$.

❑

3.3.7 Bemerkung. Satz 3.3.6 bleibt auch sinngemäß richtig, wenn man reellwertige Funktionen und signierte Maße μ betrachtet, daher $C_0(X, \mathbb{C})$ durch $C_0(X, \mathbb{R})$ und $M_{reg}(X)$ durch $\{\mu \in M_{reg}(X) : \mu \text{ ist signiertes Maß}\}$ ersetzt. Der Beweis lässt sich auf den komplexwertigen Fall zurückführen.

Ist nämlich $\Phi \in C_0(X, \mathbb{R})'$, so definiert

$$\Phi(f) := \Phi(\operatorname{Re} f) + i\Phi(\operatorname{Im} f),\ f \in C_0(X, \mathbb{C}),$$

eine $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung, die wegen

$$|\Phi(f)| = \sup_{\zeta \in \mathbb{T}} \operatorname{Re}(\zeta \cdot \Phi(f)) = \sup_{\zeta \in \mathbb{T}} \Phi(\operatorname{Re}(\zeta \cdot f)) \leq \sup_{\zeta \in \mathbb{T}} \|\operatorname{Re}(\zeta \cdot f)\|_\infty \leq \|\Phi\| \cdot \|f\|_\infty,$$

und wegen $C_0(X, \mathbb{R}) \subseteq C_0(X, \mathbb{C})$ die selbe Abbildungsnorm wie das ursprüngliche Φ hat.

Somit lässt sich $C_0(X, \mathbb{R})'$ normtreu mit $\{\Phi \in C_0(X, \mathbb{C})' : \Phi(f) \in \mathbb{R}, f \in C_0(X, \mathbb{R})\}$ identifizieren, und wegen Satz 3.3.6 daher mit $\{\mu \in M_{reg}(X) : \mu \text{ ist signiertes Maß}\}$.

3.3.8 Beispiel. Als Anwendung der Eindeutigkeitsaussage Satz 3.3.6 wollen wir die *Fourier-Koeffizienten* eines komplexen Borelmaßes auf $\mathbb{T}$ betrachten.

Zu $\mu \in M(\mathbb{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{T})) = M_{reg}(\mathbb{T})$ (vgl. Korollar 1.2.8) setzt man

$$\hat{\mu}(n) := \int_{\mathbb{T}} \zeta^{-n}\, d\mu(\zeta), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Wegen $|\hat{\mu}(n)| \leq \|\mu\|$ liegt $(\hat{\mu}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ in im Banachraum $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ aller beschränkten komplexen Doppelfolgen.

Offensichtlich ist die Abbildung $\hat{}\ : M(\mathbb{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{T})) \to \ell^\infty(\mathbb{Z})$ linear. Sie ist wegen $|\hat{\mu}(n)| \leq \|\mu\|,\ n \in \mathbb{Z}$, auch beschränkt mit Abbildungsnorm kleiner oder gleich 1.

Eine wichtige Eigenschaft ist schließlich, dass $\hat{}$ sogar injektiv ist. Um das einzusehen nehmen wir an, dass $\hat{\mu}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Aus der Linearität des Integrals folgt

$$\int_{\mathbb{T}} p(\zeta)\, d\mu(\zeta) = 0$$

für alle trigonometrische Polynome p der Form $p(\zeta) = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n \zeta^n$.

Der Vektorraum aller trigonometrischen Polynome ist nach dem Satz von Stone-Weierstraß dicht in $C(\mathbb{T})$ bzgl. $\|.\|_\infty$. Da nach Satz 3.3.6 die Abbildung

$$\phi \mapsto \int_{\mathbb{T}} \phi(\zeta)\, d\mu(\zeta), \quad \phi \in C(\mathbb{T}),$$

stetig auf $C(\mathbb{T})$ versehen mit $\|.\|_\infty$ ist, und da sie auf der dichten Menge der trigonometrischen Polynome verschwindet, muss sie auf ganz $C(\mathbb{T})$ Null sein, dh.

$$\int_{\mathbb{T}} \phi(\zeta)\, d\mu(\zeta) = 0, \quad \phi \in C(\mathbb{T}).$$

Nun erfüllt aber auch das Nullmaß diese Tatsache. Gemäß Satz 3.3.6 muss $\mu = 0$.

Ist μ das Oberflächenmaß von $\mathbb{T}$ und $\sigma := \frac{1}{2\pi}\mu$ das normierte Oberflächenmaß, so kann man

$$M_\sigma := \{\nu \in M(\mathbb{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{T})) : \nu \ll \sigma\} \subseteq M(\mathbb{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{T}))$$

betrachten. Dieser Unterraum ist vermöge der Abbildung $\nu \mapsto h_\nu$, wobei h_ν die Dichte von ν bzgl. σ ist, isometrisch isomorph zu $L^1(\mathbb{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{T}), \sigma, \mathbb{C})$, vgl. Korollar 3.2.6.

Schränken wir $\hat{}$ auf M_σ ein und identifizieren M_σ mit $L^1(\mathbb{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{T}), \sigma, \mathbb{C})$ über die Dichten, so folgt, dass auch die Abbildung

$$\hat{} : f \mapsto \left(\hat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}} := \left(\int_{\mathbb{T}} \zeta^{-n} \cdot f\, d\sigma(\zeta)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

den Banachraum $L^1(\mathbb{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{T}), \sigma, \mathbb{C})$ beschränkt, linear und injektiv nach $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ abbildet.

Schließlich rechnet man elementar nach, dass für trigonometrische Polynome $p(\zeta) = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n \zeta^n$ die Zahl $\hat{p}(n)$ nur höchstens für $|n| \leq N$ ungleich Null ist. Insbesondere liegt $(\hat{p}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ sogar im abgeschlossenen Unterraum $c_0(\mathbb{Z})$ aller komplexen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $\lim_{|n|\to\infty} a_n = 0$ von $\ell^\infty(\mathbb{Z})$.

Bezeichnet $\mathcal{M}$ den dichten Unterraum von $C(\mathbb{T})$ aller trigonometrischen Polynome, so folgt aus der Stetigkeit von $\hat{}$, dass

$$\widehat{L^1(\sigma)} = \widehat{\overline{\mathcal{M}}} \subseteq \overline{\widehat{\mathcal{M}}} \subseteq \overline{c_0(\mathbb{Z})} = c_0(\mathbb{Z}).$$

Also bildet $\hat{}$ den $L^1(\mathbb{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{T}), \sigma, \mathbb{C})$ sogar nach $c_0(\mathbb{Z})$ hinein ab.

Wegen $L^2(\mathbb{T}, \widehat{\mathfrak{B}(\mathbb{T})}, \sigma, \mathbb{C}) = \ell^2(\mathbb{Z})$ ist $L^1(\mathbb{T}, \widehat{\mathfrak{B}(\mathbb{T})}, \sigma, \mathbb{C})$ dicht in $(c_0, \|.\|_\infty)$ enthalten. Dabei ist dieses Bild nicht ganz c_0, da sonst nach dem Satz vom offenen Bild dann $\hat{} : L^1(\mathbb{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{T}), \sigma, \mathbb{C}) \to c_0$ stetig in beide Richtungen wäre. Das hätte zur Folge, dass es eine lineare bi-stetigen Bijektion von $\ell^1(\mathbb{Z}) \cong c_0' \to L^1(\mathbb{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{T}) \cong L^\infty(\mathbb{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{T})$ geben würde. Somit wäre $L^\infty(\mathbb{T})$ separabel, was aber nicht der Fall ist, denn zB. $\{U_{\frac{1}{2}}^{\|.\|_\infty} \mathbb{1}_{U_1(\zeta)\cap\mathbb{T}} : \zeta \in \mathbb{T}\}$ waere eine paarweise disjunkte, überabzählbare Familie offenere Teilmengen von $L^\infty(\mathbb{T})$, was einer etwaigen Separabilität widerspricht.

3.4 Nochmals Harmonische Funktionen

3.4.1 Lemma. *Der Poisson-Kern $\wp(x, y) = \frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^p}$ hat folgende Eigenschaften.*

(*i*) *Für alle* $x \in U_1(0)$ *und* $y \in S^{p-1}$ *gilt* $\wp(x,y) > 0$.

(*ii*) *Für alle* $x \in U_1(0)$ *gilt*

$$\int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y)\, d\sigma(y) = 1,$$

(*iii*) *Für jedes* $\xi \in S^{p-1}$ *und jedes* $\delta > 0$

$$\lim_{x\to\xi} \sup_{y\in S^{p-1}\setminus K_\delta(\xi)} \wp(x,y) = 0.$$

Beweis. Eigenschaft (i) ist offensichtlich. (ii) folgt aus Satz 2.3.7, wenn wir dort $h \equiv 1$ setzen.

Schließlich folgt (iii) unmittelbar aus der Tatsache, dass für $\|y-\xi\| > \delta$ und $x \in K_{\frac{\delta}{2}}(\xi) \cap U_1(0)$ sicherlich $\|x-y\| > \frac{\delta}{2}$ und daher

$$\wp(x,y) \leq 2^p \frac{1-\|x\|^2}{\delta^p}.$$

❑

Für ein komplexes Maß $\nu \in M(S^{p-1}, \mathfrak{B}(S^{p-1}))$ betrachte man die Funktion

$$h(x) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y)\, d\nu(y),$$

$h : U_1(0) \to \mathbb{C}$. Wie man elementar nachweisen kann, ist $x \mapsto \wp(x,y)$ für alle $y \in S^{p-1}$ harmonisch auf $U_1(0)$. Man zeigt auch, dass für alle höheren Ableitungen ($\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^p$)

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_p^{\alpha_1}} \wp(x,y),$$

auf $U_1(0) \times S^{p-1}$ stetig und daher lokal beschränkt ist. Somit folgt aus dem entsprechenden Lemma für Parameterintegrale, dass

$$h(x) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y)\, d\nu(y) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot \frac{d\nu}{d|\nu|}\, d|\nu|(y),$$

harmonisch ist.

3.4.2 Lemma (*Dirichlet Problem*)**.** *Sei* $u : S^{p-1} \to \mathbb{C}$ *beschränkt und messbar. Dann erfüllt*

$$h(x) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot u(y)\, d\sigma(y), \; x \in U_1(0), \tag{3.12}$$

die Beziehung

$$\lim_{x\to\xi} h(x) = u(\xi),$$

falls u *bei* $\xi \in S^{p-1}$ *stetig ist. Insbesondere ist* $P[u] : K_1(0) \to \mathbb{C}$ *definiert durch* $P[u]|_{S^{p-1}} = u$ *und* $P[u]|_{U_1(0)} = h$ *bei* ξ *stetig.*

Beweis. Dazu sei $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ so klein, dass $|u(y) - u(\xi)| < \epsilon$, wenn nur $\|y - \xi\| < \delta$. Wegen Lemma 3.4.1, (i) und (ii), folgt für $x \in U_1(0)$

$$|h(x) - u(\xi)| = \left| \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot u(y)\, d\sigma(y) - \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot u(\xi)\, d\sigma(y) \right| \leq$$

$$\int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y) \cdot |u(y) - u(\xi)|\, d\sigma(y) =$$

$$\int\limits_{S^{p-1} \setminus K_\delta(\xi)} \wp(x,y) \cdot |u(y) - u(\xi)|\, d\sigma(y) + \int\limits_{S^{p-1} \cap K_\delta(\xi)} \wp(x,y) \cdot |u(y) - u(\xi)|\, d\sigma(y) \leq$$

$$\left(\sup_{y \in S^{p-1} \setminus K_\delta(\xi)} \wp(x,y) \right) \cdot \int\limits_{S^{p-1}} |u(y) - u(\xi)|\, d\sigma(y) + \epsilon \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y)\, d\sigma(y).$$

Wegen Lemma 3.4.1, (iii), wegen $\|u - u(\xi)\|_1 \leq \|u\|_1 + \sigma(S^{p-1})u(\xi)$, und wegen Lemma 3.4.1, (ii), ist das kleiner als $\epsilon(\|u\|_1 + u(\xi)) + \epsilon$, wenn nur $\|x - \xi\| < \delta'$ für ein $\delta' \in (0, \delta]$.

Wenn $x \in S^{p-1}$ ist, so folgt aus $\|x - \xi\| < \delta'$ wegen $\delta' \leq \delta$ nach der Wahl von δ, dass $|u(x) - u(\xi)| < \epsilon$. Also ist $P[u] : K_1(0) \to \mathbb{R}$ bei ξ stetig.

❑

3.4.3 Satz. *Die Beziehung*

$$h(x) = \int\limits_{S^{p-1}} \wp(x,y)\, d\nu(y),$$

stellt einen bijektiven Zusammenhang her zwischen allen $\nu \in M(S^{p-1}, \mathfrak{B}(S^{p-1}))$ *und allen harmonischen Funktionen* $h : U_1(0) \to \mathbb{C}$ *mit*

$$n(h) := \sup_{r \in (0,1)} \|\zeta \mapsto h(r\zeta)\|_1 < +\infty\,, \tag{3.13}$$

wobei $\|.\|_1$ *hier die Norm in* $L^1(S^{p-1}, \mathfrak{B}(S^{p-1}), \sigma, \mathbb{C})$ *ist. Dabei gilt sogar* $n(h) = \|\nu\|$. $\wp(x,y) = \frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^p}$ *is wieder der Poissonkern.*

Beweis. Wir wissen schon, dass für $\nu \in M(S^{p-1}, \mathfrak{B}(S^{p-1}))$ die Funktion $h : U_1(0) \to \mathbb{C}$ harmonisch ist.

Wegen $\|x - y\| = \left\| \|x\| y - \frac{1}{\|x\|} x \right\|$ für $\|y\| = 1$ und $x \neq 0$, gilt

$$\wp(r\zeta, y) = \frac{1 - \|r\zeta\|^2}{\|r\zeta - y\|^p} = \frac{1 - r^2}{\|\zeta - ry\|^p} = \wp(ry, \zeta) \tag{3.14}$$

für $y, \zeta \in S^{p-1}$. Also gilt für $r \in (0,1)$

$$\|\zeta \mapsto h(r\zeta)\|_1 = \int\limits_{S^{p-1}} |h(r\zeta)|\, d\sigma(\zeta) \leq \int\limits_{S^{p-1}} \int\limits_{S^{p-1}} \wp(r\zeta, y)\, d|\nu|(y)\, d\sigma(\zeta) =$$

$$\int\limits_{S^{p-1}} \underbrace{\int\limits_{S^{p-1}} \wp(ry, \zeta)\, d\sigma(\zeta)}_{=1}\, d|\nu|(y) = \|\nu\|\,.$$

Die Abbildung $\nu \mapsto h$ ist dabei offenbar linear. Sie ist auch injectiv. Dafür sei $h \equiv 0$ für ein $\nu \in M(S^{p-1}, \mathfrak{B}(S^{p-1}))$. Für ein $f \in C(S^{p-1}, \mathbb{C})$ ist $P[f] : K_1(0) \to \mathbb{C}$ gemäß Lemma 3.4.2 stetig auf $K_1(0)$. Wegen (3.14) gilt

$$\int_{S^{p-1}} P[f](r\zeta)\, d\nu(\zeta) = \int_{S^{p-1}} \int_{S^{p-1}} \wp(r\zeta, y) \cdot f(y)\, d\sigma(y)\, d\nu(\zeta) =$$

$$\int_{S^{p-1}} \int_{S^{p-1}} \wp(ry, \zeta) \cdot f(y)\, d\nu(\zeta)\, d\sigma(y) = \int_{S^{p-1}} h(ry) \cdot f(y)\, d\sigma(y) = 0\,.$$

Für $r \nearrow 1$ erhalten wir $\int_{S^{p-1}} f(\zeta)\, d\nu(\zeta) = 0$. Nachdem $f \in C(S^{p-1}, \mathbb{C})$ beliebig war, muss $\nu = 0$ nach der Eindeutigkeitsaussage in Satz 3.3.6.

Gelte nun umgekehrt (3.13). Weil für jedes $r \in (0,1)$ die Funktion $x \mapsto h(rx)$ auf $U_{\frac{1}{r}} \supseteq K_1(0)$ harmonisch ist, gilt nach Satz 2.3.7

$$h(rx) = \int_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot h(ry)\, d\sigma(y) = \Lambda_r(\wp(x, .)),$$

wobei $\Lambda_r(f) = \int_{S^{p-1}} f(y) \cdot h(ry)\, d\sigma(y)$ für $f \in C(S^{p-1}, \mathbb{C})$. Offenbar ist $\Lambda_r : C(S^{p-1}, \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ linear und wegen (3.13) gilt

$$\|\Lambda_r\| = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \Big| \int_{S^{p-1}} f(y) \cdot h(ry)\, d\sigma(y) \Big| \le \|f\|_\infty \|\zeta \mapsto h(r\zeta)\|_1\,.$$

Also liegen die Λ_r alle in der abgeschlossenen Kugel mit Radius $n(h)$ um die Null in $C(S^{p-1}, \mathbb{C})'$. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist dieser Kugel w^*-kompakt. Da $(\Lambda_r)_{r\in(0,1)}$ nach 1 hin gerichtet ein Netz ist, gibt es ein w^*-konvergentes Teilnetz $(\Lambda_{r_i})_{i\in I}$ mit Grenzwert $\Lambda \in C(S^{p-1}, \mathbb{C})'$, $\|\Lambda\| \le n(h)$. Teilnetz bedeutet

$$\forall r \in (0,1)\ \exists\, i_0 \in I\ :\ \forall i \ge i_0 \Rightarrow r_i \ge r\,,$$

womit $\lim_{I\in I} r_i = 1$. Also folgt für $x \in U_1(0)$

$$h(x) = \lim_{i\in I} h(r_i x) = \int_{S^{p-1}} \wp(x, y) \cdot h(r_i y)\, d\sigma(y) = \lim_{I\in I} \Lambda_{r_i}(\wp(x, .)) = \Lambda(\wp(x, .))\,.$$

Nach dem Satz von Riesz-Markov, Satz 3.3.6, gilt für jedes $x \in U_1(0)$

$$h(x) = \Lambda(\wp(x, .)) = \int_{S^{p-1}} \wp(x, .)\, d\nu\,,$$

für ein $\nu \in M(S^{p-1}, \mathfrak{B}(S^{p-1}))$ mit $\|\nu\| = \|\Lambda\| \le n(h)$. Da wir schon wissen, dass ν eindeutig ist und für dieses $n(h) \le \|\nu\|$ gilt, sind wir fertig.

❑

Kapitel 4

Das Haarsche Maß

4.1 Topologische Gruppen

4.1.1 Definition. Eine Gruppe G - wenn nichts anderes bemerkt, schreiben wir die Gruppenoperationen multiplikativ - versehen mit einer Topologie $\mathcal{T}$ heißt *topologische Gruppe*, falls

- Die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ von G nach G ist stetig.
- Die Abbildung $(x, y) \to xy$ von $G \times G$ nach G ist stetig, wobei $G \times G$ mit der Produkttopologie versehen wird.

4.1.2 Beispiel.

- Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Addition versehen mit der euklidischen Topologie $\mathcal{E}$ sind eine topologische Gruppe, da bekannterweise $(x, y) \to x + y$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und $x \mapsto -x$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind.
- $(\mathbb{R}^p, +)$ mit der euklidischen Topologie ist ebenfalls eine topologische Gruppe. Wie aus der Funktionalanalysis bekannt ist allgemeiner die additive Gruppe in einem jeden topologischen Vektorraum $(X, +)$ eine topologische Gruppe.
- Die positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}^+$ mit der Multiplikation versehen mit der euklidischen Topologie sind auch eine topologische Gruppe. Das folgt aus der wohlbekannten Tatsachen, dass $(x, y) \to xy$, $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, und $x \mapsto \frac{1}{x}$, $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, stetig sind.

  Die Abbildung $x \mapsto \exp(x)$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist bekannterweise ein Gruppen-Isomorphismus. Zusätzlich ist diese Abbildung bi-stetig. Also überträgt sie nicht nur die algebraische Struktur, sondern auch die topologische.
- Analog ist $\mathbb{C}^\times$ $(= \mathbb{C} \setminus \{0\})$ mit der Multiplikation versehen mit der euklidischen Topologie eine topologische Gruppe.
- Die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$, also die Menge aller regulären reellwertigen $n \times n$-Matrizen, mit der Matrizenmultiplikation versehen mit der der euklidischen Topologie ist auch eine topologische Gruppe:

Da die euklidische Norm und die Abbildungsnorm auf $\mathbb{R}^{n^2}$ äquivalent sind, gilt für jede Folge $((A_n, B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $GL(n,\mathbb{R})\times GL(n,\mathbb{R})$, die gegen (A, B) konvergiert, dass

$$\|A_nB_n - AB\| \le \|A_n\| \cdot \|B_n - B\| + \|B\| \cdot \|A_n - A\| \le$$

$$C \cdot \|B_n - B\| + \|B\| \cdot \|A_n - A\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

wobei $C \ge \|A_n\|$, $n \in \mathbb{N}$. Also konvergiert $(A_nB_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen AB. Somit ist die Matrizenmultiplikation stetig.

Bekannterweise gilt für $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}((-1)^{i+j} \det A_{ji})$, wobei A_{ji} die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix ist, die entsteht, wenn man die j-te Zeile und die i-te Spalte von A streicht. Also hängen die Einträge von A^{-1} stetig von denen von A ab, weshalb $A \mapsto A^{-1}$ stetig ist.

Ähnlich sieht man, dass $GL(n,\mathbb{C})$ eine topologische Gruppe ist.

$\rightsquigarrow$ Ist G ein Gruppe und $\mathcal{T}$ die diskrete Topologie, dh. $\mathcal{T} = \mathcal{P}(G)$, so ist $(G,\mathcal{T})$ wegen $\mathcal{T}\times\mathcal{T} = \mathcal{P}(G\times G)$ eine topologische Gruppe.

Wir sehen insbesondere, dass ein und dieselbe Gruppe, etwa $(\mathbb{R}, +)$ mit zwei verschiedenen Topologien zu einer topologischen Gruppe gemacht werden kann.

4.1.3 Bemerkung. Da die Inverse Abbildung von $x \mapsto x^{-1}$, $G \to G$ gerade sie selbst ist, ist diese Abbildung ein Homoemorphismus.

Hält man $y \in G$ fest, so Einbettungsabbildung $x \mapsto (x, y)$, $G \to G\times G$ stetig. Somit ist auch die Zusammensetzung dieser Abbildung und von $(x, y) \to xy$, $G \times G \to G$, also $x \mapsto xy$ stetig. Die Inverse davon ist $x \mapsto xy^{-1}$, und daher ebenfalls stetig. Also ist $x \mapsto xy$, $G \to G$ ebenfalls ein Homoemorphismus. Entsprechend zeigt man, dass $x \mapsto yx$, $G \to G$ ein Homoemorphismus ist.

4.1.4 Korollar. *Sind K_1, K_2 kompakte Teilmengen von G, so sind auch $K_1 \cdot K_2$ und K_1^{-1} kompakt.*

Ist $K \subseteq G$ kompakt und $A \subseteq G$ abgeschlossen, so sind auch $A \cdot K$ und $K \cdot A$ abgeschlossen.

Beweis. Die Menge $K_1 \cdot K_2$ ist das Bild unter der stetigen Abbildung $(x, y) \mapsto xy$ der kompakten Menge $K_1 \times K_2$. Ähnlich zeigt man, dass K_1^{-1} kompakt ist.

Sei nun $K \subseteq G$ kompakt und $A \subseteq G$ abgeschlossen, und sei $(a_ik_i)_{i\in I}$ ein Netz aus $A \cdot K$, das gegen ein $b \in G$ konvergiert. Können wir zeigen, dass $b \in A \cdot K$, so folgt, dass $A \cdot K$ abgeschlossen ist.

Wegen der Kompaktheit von K hat $(k_i)_{i\in I}$ ein gegen ein $k \in K$ konvergentes Teilnetz $(k_{i(j)})_{j\in J}$. Wegen der Stetigkeit von $x \mapsto x^{-1}$ konvergiert $(k_{i(j)}^{-1})_{j\in J}$ gegen k^{-1} und wegen der Stetigkeit von $(x, y) \mapsto xy$ gilt

$$b \cdot k^{-1} = \lim_{j\in J} a_{i(j)}k_{i(j)} \cdot \lim_{j\in J} k_{i(j)}^{-1} = \lim_{j\in J} a_{i(j)}k_{i(j)} \cdot k_{i(j)}^{-1} = \lim_{j\in J} a_{i(j)}.$$

Da A abgeschlossen ist, muss $b \cdot k^{-1} \in A$, und somit

$$b = (b \cdot k^{-1}) \cdot k \in A \cdot K.$$

❑

4.1.5 Beispiel. Man betrachte die additive Gruppe $\mathbb{R}^2$ und darin die Mengen $A_1 := \{(x; \frac{1}{x}) : x \in (0, +\infty)\}$ sowie $A_2 := \mathbb{R} \times \{0\}$. Diese Mengen sind abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$, aber $A_1 + A_2 = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ ist es nicht.

4.1.6 Proposition. *Sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe. Ist H eine Untergruppe von G und versieht man H mit der Spurtopologie, so ist auch H eine topologische Gruppe.*

Ist $(G_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologische Gruppen, und versieht man die Gruppe $\prod_{i\in I} G_i$ mit der Produkttopologie, so ist auch $\prod_{i\in I} G_i$ eine topologische Gruppe.

Beweis. Zunächst sei daran erinnert, dass wenn man eine Teilmenge L eins Produktraumes $\prod Y_i$ mit der Spurtopologie der Produkttopologie versieht, wegen der Assoziativität der initialen Topologie diese Spurtopologie mit der initialen Topologie auf L bzgl. der Abbildungen $\pi_i|_L : L \to Y_i$ übereinstimmt.

Aus den Eigenschaften der Initialen Topologie folgt damit, dass eine Abbildung $f : Z \to L$ genau dann stetig ist, wenn alle Abbildungen $\pi_i \circ f : Z \to Y_i$ stetig sind.

Um für die Untergruppe H die Stetigkeit von $\cdot : H \times H \to H$ zu zeigen, betrachten wir $H \times H$ als Teilmenge von $G \times G$. Nach dem oben gesagten stimmt die Produktopologie auf $H \times H$ mit der Spurtopologie überein. Die Stetigkeit von $\cdot : H \times H \to H$ ist klarerweise äquivalent zu der von $\cdot : H \times H \to G$. Letztere gilt aber, da diese Abbilgung eine Einschränkung einer stetigen Abbildung ist. Entsprechend ist $.^{-1} : H \to H \subseteq G$ Einschränkung einer stetigen Abbildung und daher auch stetig.

Sei nun $(G, \mathcal{T}) = (\prod_{i\in I} G_i, \prod_{i\in I} \mathcal{T}_i)$. Da die Produkttopologie die initiale Topologie bezüglicher der Projektionen $\pi_i : G \to G_i$ ist, ist eine Abbildung f von einem topologischen Raum (Z, O) nach G genau dann stetig, wenn alle Abbildungen $\pi_i \circ f : Z \to G_i$ stetig sind.

Da die Operationen auf $G = \prod_{i\in I} G_i$ punktweise erklärt sind, folgt mit $Z = G$ und $f = .^{-1}$, dass $\pi_i \circ f$ ein $(x_k)_{k\in I}$ auf x_i^{-1} abbildet. Somit stimmt $\pi_i \circ f$ mit $(.^{-1}) \circ \pi_i$ überein, wobei hier $.^{-1}$ für die Inverse auf G_i steht. Also ist $\pi_i \circ f$ stetig.

Für $Z = G \times G$ und $f((x_k)_{k\in I}, (y_k)_{k\in I}) = (x_k \cdot y_k)_{k\in I}$ gilt $\pi_i \circ f = (\cdot_i) \circ (\pi_i \times \pi_i)$, wobei $\pi_i \times \pi_i : G \times G \to G_i \times G_i$ und $\cdot_i : G_i \times G_i \to G_i$. Also ist $\pi_i \circ f$ stetig.

❑

4.1.7 Beispiel.

- ⇝ $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ und nach Proposition 4.1.6 ist $\mathbb{Z}$ versehen mit der euklidischen Topologie eine topologische Gruppe. Wegen $\mathbb{Z} \cap (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}) = \{n\}$ ist die Spurtopologie diskret, dh. $\mathcal{E}|_{\mathbb{Z}} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
- ⇝ Analog ist $(\mathbb{Z}^n, +)$ eine abgeschlossene Untergruppe von $(\mathbb{R}^n, +)$, sodass die Spurtopologie auf $\mathbb{Z}^n$ diskret ist.
- ⇝ $\mathbb{T}$ versehen mit . ist eine topologische Untergruppe (im Sinne von Proposition 4.1.6) von $\mathbb{C}^\times$ versehen mit . und der euklidischen Topologie. Bekannterweise ist $\mathbb{T}$ versehen mit $\mathcal{E}|_{\mathbb{T}}$ kompakt.

4.1.8 Aufgabe. Sei $a \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass die Abbildung $t \mapsto \exp(it)$, $(a, a + 2\pi) \to \mathbb{T} \setminus \{\exp(ia)\}$ in alle beiden Richtungen stetig ist.

Hinweis: Man verwende die Folgencharakterisierung der Stetigkeit und die Tatsache, dass $x_n \to x$ genau dann, wenn jede Teilfolge von (x_n) eine gegen x konvergente Teilfolge hat. Weiters verwende man, dass $[a, a + 2\pi]$ kompakt ist.

4.1.9 Aufgabe. Man zeige, dass $t \mapsto \exp(it)$, $\mathbb{R} \to \mathbb{T}$ eine offene Abbildung ist. Man Zeige auch, dass $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (\exp(it_1), \dots, \exp(it_n))$ eine offene Abbildung von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{T}^n$ ist.

4.1.10 Aufgabe. Sei G eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{T}$. Man zeige, dass G entweder endlich, oder gleich $\mathbb{T}$ ist.

4.1.11 Aufgabe. Man zeige, dass die Gruppe $U(n,\mathbb{C})$ aller komplexen unitären $n \times n$ Matrizen eine kompakte Untergruppe von $GL(n,\mathbb{C})$ ist.

4.1.12 Satz. *Sei $(G,\mathcal{T})$ eine topologische Gruppe. Ist H eine Untergruppe von G und wird die Menge G/H der Rechtsnebenklassen, also die Menge der Restklassen bzgl. der Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow \exists h \in H : \ y = xh$, mit der finalen Topologie $\mathcal{F}$ bzgl. $\pi : G \to G/H$ versehen, so ist π sogar eine offene Abbildung. Dasselbe gilt für die Menge der Linksnebenklassen.*

Ist N sogar ein Normalteiler, so ist G/H versehen mit $\mathcal{F}$ eine topologische Gruppe.

Beweis. Ist $O \in \mathcal{T}$, so gilt

$$\pi^{-1}(\pi(O)) = \{y \in G : \exists x \in O, h \in H, \ y = xh\} = \bigcup_{h \in H} O \cdot h.$$

Nach Bemerkung 4.1.3 ist jede der Mengen $O \cdot h$ offen in G. Somit ist $\pi^{-1}(\pi(O)) \in \mathcal{T}$ und nach der Eigenschaft der Finalen Topologie, dass $P \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \pi^{-1}(P) \in \mathcal{T}$ folgt $\pi(O) \in \mathcal{F}$.

Ist nun H ein Normalteiler, und daher G/H eine Gruppe, so ist zunächst $.^{-1} : G/H \to G/H$ stetig. Um das zu sehen, sei an (FI_3) erinnert, wonach $.^{-1} : G/H \to G/H$ genau dann stetig ist, wenn $.^{-1} \circ \pi : G \to G/H$ es ist. Nun gilt aber $\pi(x)^{-1} = \pi(x^{-1})$, also $.^{-1} \circ \pi = \pi \circ .^{-1}$. Somit ist diese Abbildung stetig.

Um die Stetigkeit von $\cdot : (G/H)\times(G/H) \to G/H$ nachzuweisen, zeigen wir zuerst, dass die Produkttopologie $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ auf $(G/H)\times(G/H)$ mit der finalen Topologie $\mathcal{T}_f$ auf $(G/H)\times(G/H) \cong (G\times G)/(H\times H)$ bzgl. der kanonischen Projektion $\pi\times\pi : G\times G \to (G\times G)/(H\times H)$ übereinstimmt.

Da $\pi : (G,\mathcal{T}) \to (G/H,\mathcal{F})$ stetig ist, folgt aus der universellen Eigenschaft (IN_3) der initialen Topologie, dass auch

$$(x,y) \mapsto (x\cdot H, y\cdot H), \ \ (G\times G, \mathcal{T}\times\mathcal{T}) \to ((G/H)\times(G/H), \mathcal{F}\times\mathcal{F})$$

stetig ist. Wegen der universellen Eigenschaft (FI_3) der Finalen Topologie, ist auch $\mathrm{id} : ((G\times G)/(H\times H), \mathcal{T}_f) \to ((G/H)\times(G/H), \mathcal{F}\times\mathcal{F})$ stetig und somit $\mathcal{F}\times\mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}_f$[1].

Jede offene Menge R in $\mathcal{T}_f$ lässt sich als $(\pi\times\pi)(O)$ für ein $O \in \mathcal{T}\times\mathcal{T}$ schreiben, z.B. $O = (\pi\times\pi)^{-1}(R)$. Da die Mengen $P\times Q$ mit $P, Q \in \mathcal{T}$ eine Basis von $\mathcal{T}\times\mathcal{T}$ darstellen, folgt zusammen mit der Tatsache, dass π offen ist,

$$(\pi\times\pi)(O) = (\pi\times\pi)(\bigcup_{j\in J} P_j \times Q_j) = \bigcup_{j\in J} \pi(P_j)\times\pi(Q_j) \in \mathcal{F}\times\mathcal{F}.$$

Also gilt auch $\mathcal{T}_f \subseteq \mathcal{F}\times\mathcal{F}$

Nun ist $\cdot \circ (\pi\times\pi) : G\times G \to G/H$ stetig, da $\cdot \circ (\pi\times\pi) = \pi \circ \cdot$, denn π ist ja ein Homomorphismus. Nach (FI_3) ist auch $\cdot : ((G\times G)/(H\times H), \mathcal{T}_f) \to (G/H, \mathcal{F})$ stetig. Wegen $\mathcal{T}_f = \mathcal{F}\times\mathcal{F}$ ist $(G/H,\mathcal{F})$ eine topologische Gruppe.

❑

4.1.13 Bemerkung. Wir stellen als Folge obigen Beweises explizit heraus, dass für eine Untergruppe H einer topologischen Gruppe $(G,\mathcal{T})$ die Produkttopologie $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$

[1] Man beachte, dass zum Beweis dieser Inklusion nicht eingeflossen ist, dass G eine Gruppe ist.

auf $(G/H) \times (G/H)$ mit der Finalen Topologie auf $(G \times G)/(H \times H)$ bezüglich der kanonischen Projektion $\pi \times \pi : G \times G \to H \times H$, wenn wir $(G/H) \times (G/H)$ mit $(G \times G)/(H \times H)$ identifizieren.

Analoges gilt für $(G/H)^n \cong G^n/H^n$.

4.1.14 Aufgabe. Man zeige, dass die topologische Gruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, versehen mit der finalen Topologie, algebraisch und topologisch isomorph zu $\mathbb{T}$ ist. Schließlich zeige man dasselbe für $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ und $\mathbb{T}^n$.

4.1.15 Aufgabe. Man zeige, dass $SL(n, \mathbb{C})$ (komplexe $n \times n$-Matrizen mit Determinante 1) ein abgeschlossener Normalteiler von $GL(n, \mathbb{C})$ ist. Man zeige auch, dass $GL(n, \mathbb{C})/SL(n, \mathbb{C})$ topologsch und algebraisch isomorph zu $\mathbb{C}^\times$ ist.

Folgendes technisches Lemma wird oft von großer Hilfe sein.

4.1.16 Lemma. *Sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe, und sei U eine das neutrale Element e von G enthaltende offene Teilmenge von G. Dann gibt es eine offenes $V \subseteq G$ mit $e \in V$, sodass $V^2 := V \cdot V \subseteq U$ und $V^{-1} = V^2$.*

Beweis. Da $\cdot$ stetig ist, folgt aus $e \cdot e = e$ die Existenz einer offenen (e, e) enthaltenden Teilmenge $O \subseteq G \times G$, sodass $\cdot(O) := \{x \cdot y : (x, y) \in O\} \subseteq U$.

Da die Mengen der Form $P \times Q$, $P, Q \in \mathcal{T}$ eine Basis von $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ bilden, können wir $O = P \times Q$ annehmen, wobei $e \in P, Q \in \mathcal{T}$. Nun sei $V = P \cap Q \cap P^{-1} \cap Q^{-1}$.

Da $.^{-1} : G \to G$ ein Homöomorphismus ist, folgt dass V offen ist. Weiters gilt $V \cdot V \subseteq \cdot(O) \subseteq U$ sowie

$$V^{-1} = (P \cap Q \cap P^{-1} \cap Q^{-1})^{-1} = P^{-1} \cap Q^{-1} \cap P \cap Q = V.$$

❑

Um das für die Konvergenztheorie wichtige Hausdorffaxiom von G auf G/H übertragen zu können, brauchen wir folgendes Lemma.

4.1.17 Lemma. *Jede Topologische Gruppe erfüllt das Trennungsaxiom $(T3)$*[3].

Beweis. Sei $A \subseteq G$ abgeschlossen, sodass x nicht in A enthalten ist. Somit ist e nicht in der abgeschlossenen Menge $x^{-1} \cdot A$ enthalten (vgl. Bemerkung 4.1.3). Wegen Lemma 4.1.16 gibt es ein offenes und symmetrisches V mit $e \in V^2 \subseteq (x^{-1} \cdot A)^c = x^{-1} \cdot A^c$.

Ist $y \in x \cdot V \cap (A \cdot V)$, d.h. $y = x \cdot v_1 = a \cdot v_2$ mit $a \in A$ und $v_1, v_2 \in V$, so folgt der Widerspruch

$$a = x \cdot (v_1 \cdot v_2^{-1}) \in x \cdot V \cdot V^{-1} = x \cdot V^2 \subseteq x \cdot x^{-1} \cdot A^c = A^c.$$

Also sind die nach Bemerkung 4.1.3 offene Menge $x \cdot V$ und die wegen

$$A \cdot V = \bigcup_{a \in A} a \cdot V$$

offene Menge $A \cdot V$ disjunkt. Wegen $e \in V$ sind das zwei disjunkte offene Mengen, die x bzw. A enthalten.

❑

[2] Die Eigenschaft $V^{-1} = V$ nennt man symmetrisch.

[3] Abgeschlossene Mengen A und einpunktige Mengen $\{x\}$ mit $x \notin A$ lassen sich trennen, d.h. $\exists O_x, O_A \in \mathcal{T} : x \in O_x, A \subseteq O_A,\ O_x \cap O_A = \emptyset$.

4.1.18 Korollar. *Ist H eine abgeschlossene Untergruppe von G, so ist G/H regulär.*

Beweis. Ist π die kanonische Projektion $\pi : G \to G/H$, so per definitionem $O \subseteq G/H$ genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(O)$ offen in G ist. Durch Übergang zu den Komplementen, sieht man, dass $A \subseteq G/H$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $\pi^{-1}(A)$ abgeschlossen in G ist.

Nun ist $\pi^{-1}(\{e_{G/H}\}) = H$ nach Voraussetzung abgeschlossen. Also ist $\{e_{G/H}\}$ und wegen Bemerkung 4.1.3 auch jede andere einpunktige Teilmenge von G/H abgeschlossen.

❑

4.1.19 Bemerkung. Ist H eine offene Untergruppe von G, so ist sie auch abgeschlossen. Um das einzusehen, betrachten wir die Rechtsnebenklassen $x \cdot H,\ x \in G$. Diese bilden eine Partition von G, d.h.

$$G = \dot{\bigcup_{x \cdot H \in G/H}} x \cdot H.$$

Da auch $H = e \cdot H$ eine solche Rechtsnebenklasse ist, gilt

$$H^c = \dot{\bigcup_{H \neq x \cdot H \in G/H}} x \cdot H.$$

Nach Bemerkung 4.1.3 sind alle Menge der Bauart $x \cdot H$ offen, und daher ist auch H^c offen, bzw. H abgeschlossen.

4.1.20 Beispiel. Die Untergruppe $GL^+(n, \mathbb{R})$ aller $T \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $\det T > 0$ ist eine offene Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$, da $GL^+(n, \mathbb{R})$ genau das Urbild der offenen Menge $(0, +\infty)$ unter der stetigen Funktion $T \mapsto \det T$.

4.1.21 Aufgabe. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Sei $\sim$ eine Relation auf $X \times X$ definiert durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists Z \subseteq X,\ x, y \in Z,\ Z \text{ ist zusammenhängend}.$$

Man zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, und dass für $x \in X$ die Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ die größte x enthaltende zusammenhängende Teilmenge von X ist.

4.1.22 Aufgabe. Sei nun $X = G$ eine topologische Gruppe, $\sim$ wie in Aufgabe 4.1.21 und e ihr neutrales Element. Man zeige, dass $N := [e]_\sim$ ein abgeschlossener Normalteiler ist, und $[x]_\sim$ genau die Nebenklassen bzgl. N sind.

4.1.23 Aufgabe. Man zeige, dass $U(n, \mathbb{C})$ eine zusammenhängende Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$. Ist $GL(n, \mathbb{C})$ auch zusammenhängend?

4.1.24 Aufgabe. Man zeige, dass $SL(2, \mathbb{R})$ nicht zusammenhängend ist. Man bestimme $[I]_\sim$, wobei I die 2×2-Einheitsmatrix ist.

Hinweis: Wie kann die Spur einer Matrix mit Determinante eins aussehen? Eigenwerte!

4.2 Das Haarsche Maß, Existenz und Eindeutigkeit

4.2.1 Definition. Eine Topologische Gruppe $(G, \mathcal{T})$ heißt *lokalkompakt*, wenn $(G, \mathcal{T})$ als topologischer Raum lokalkompakt ist.

Im folgenden werden wir immer auch vorraussetzen, dass $(G, \mathcal{T})$ Hausdorffsch ist, und wir sagen dann kurz, dass $(G, \mathcal{T})$ eine *lokalkompakte Gruppe* ist.

4.2.2 Bemerkung. Lokale Kompaktheit eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ wird so definiert, dass jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt.

Ist X auch Hausdorff, so ist das äquivalent dazu, dass jede Umgebung eines jeden Punktes $x \in X$ eine kompakte Umgebung enthält. Ist nämlich $U \in \mathfrak{U}(x)$ und $U_0 \in \mathfrak{U}(x)$ eine feste kompakte Umgebung, so gibt es ein offenes $O \subseteq U \cap U_0$.

Somit ist O auch offen in U_0 versehen mit der Spurtopologie $\mathcal{T}|_{U_0}$. Da $(U_0, \mathcal{T}|_{U_0})$ kompakt und Hausdorffsch ist, ist er auch normal und somit insbesondere regulär. Also

$$\exists V \in \mathcal{T}|_{U_0} : \ x \in V \subseteq \overline{V}^{\mathcal{T}|_{U_0}} \subseteq O = U_0 \cap O \ (\in \mathcal{T}|_{U_0}) .$$

Wegen $V = O \cap V$ und wegen $\mathcal{T}|_O = (\mathcal{T}|_{U_0})|_O$ ist V auch offen in $(O, \mathcal{T}|_O)$. Als Schnitte von offenen Mengen sind alle Mengen in $\mathcal{T}|_O$ auch offen in $\mathcal{T}$. Insbesondere ist $V \in \mathcal{T}$. Außerdem gilt $\overline{V}^{\mathcal{T}|_{U_0}} = \overline{V}^{\mathcal{T}} \cap U_0 = \overline{V}^{\mathcal{T}} \subseteq U_0$ (U_0 ist in X abgeschlossen). Damit ist $\overline{V}^{\mathcal{T}}$ eine kompakte, in O und daher auch in U enthaltene kompakte Umgebung von x.

Man beachte, dass wir mit obiger Argumentation auch gezeigt haben, dass jeder lokalkompakte Hausdorffraum regulär ist.

4.2.3 Definition. Sei G eine Gruppe, $s \in G$ und Y irgendeine Menge. Für eine Funktion $f : G \to Y$ sei die *Linkstranlatierte*

$$l(s)f : G \to Y \ \text{ definiert durch } \ (l(s)f)(x) := f(s^{-1}x).$$

Entsprechend sei die *Rechtstranlatierte*

$$r(s)f : G \to Y \ \text{ definiert durch } \ (r(s)f)(x) := f(xs).$$

Die *Inversion* ist definiert durch

$$\check{f} : G \to Y, \ \ \check{f}(x) := f(x^{-1})$$

4.2.4 Bemerkung. Wegen

$$l(s_1)(l(s_2)f)(x) = (l(s_2)f)(s_1^{-1}x) = f(s_2^{-1}s_1^{-1}x) = (l(s_1s_2)f)(x),$$

gilt $l(s_1)(l(s_2)f) = l(s_1s_2)f$. Ähnlich sieht man $r(s_1)(r(s_2)f) = r(s_1s_2)f$ und $(l(\check{s})f) = r(s)\check{f}$ sowie $(r(\check{s})f) = l(s)\check{f}$.

4.2.5 Bemerkung. Ist $Y = \mathbb{C}$ (oder allgemeiner eine normierter Raum) und ist $f \in \mathcal{B}(G, Y)$, dh. eine beschränkte Funktion, so sind $f \mapsto l(s)f$, $f \mapsto r(s)f$ und $f \mapsto \check{f}$ isometrische und lineare Bijektionen von $\mathcal{B}(G, Y)$ auf sich, wobei dieser Raum mit der Supremumsnorm versehen wird, weil $x \mapsto s^{-1}x$, $x \mapsto xs$ und $x \mapsto x^{-1}$ Bijektionen auf G sind.

Aus Bemerkung 4.2.4 folgt, dass $s \mapsto l(s)$ bzw. $s \mapsto r(s)$ auch ein Gruppenhomomorphismus von G in die Menge $GL(\mathcal{B}(G, Y))$ aller beschränkten und linearen Bijektionen von $\mathcal{B}(G, Y)$ nach $\mathcal{B}(G, Y)$ ist.

Ziel dieses Kapitels ist es, zu zeigen, dass es auf jeder lokalkompakten Gruppe ein linksinvariantes positives, von außen reguläres und auf allen offenen Teilmengen von innen reguläres Borelmaß μ, das sogenanntes *Linke Haarsche Maß*, gibt. Linksinvariant bedeutet dabei $\mu(sB) = \mu(B)$ für alle Borelmengen $B \in \mathfrak{B}(G)$ und alle $s \in G$. Wir werden auch sehen, dass so ein Maß μ im wesentlichen eindeutig ist.

4.2.6 Lemma. *Ist $f \in C_{00}(G)$ komplexwertig, so ist f gleichmäßig stetig, dh.*

$$\forall \epsilon > 0 \exists U \in \mathfrak{U}(e) : \ \forall x, y \in G, \ x^{-1}y \in U \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Beweis. Wäre dem nicht so, so gäbe es ein $\epsilon > 0$, sodass es zu jedem $U \in \mathfrak{U}(e)$ zwei $x_U, y_U \in G$ mit $x_U^{-1} y_U \in U$ und $|f(x_U) - f(y_U)| \geq \epsilon$ gibt. Klarerweis liegt immer zumindest einer der Punkte x_U, y_U in $\operatorname{supp}(f)$. Wir wählen die Notation so, dass $x_U \in \operatorname{supp}(f)$.

Da der Filter $\mathfrak{U}(e)$ versehen mit $\preceq := \supseteq$ eine gerichtete Menge ist, hat das Netz $(x_U)_{U\in\mathfrak{U}(e)}$ wegen der Kompaktheit von $\operatorname{supp}(f)$ ein gegen ein $x \in \operatorname{supp}(f)$ konvergentes Teilnetz $(x_{U(i)})_{i\in I}$.

Offensichtlicherweise konvergiert $(x_U^{-1} y_U)_{U\in\mathfrak{U}(e)}$ gegen e. Somit konvergiert auch $(x_{U(i)}^{-1} y_{U(i)})_{i\in I}$ gegen e und wegen der Stetigkeit von $(x, y) \mapsto xy$ konvergiert $(y_{U(i)})_{i\in I} = (x_{U(i)} \cdot x_{U(i)}^{-1} y_{U(i)})_{i\in I}$ gegen x.

Also konvergiert das Netz $((x_{U(i)}, y_{U(i)}))_{i\in I}$ in $G \times G$ gegen (x, x), und wegen der Stetigkeit von $(x, y) \mapsto |f(x) - f(y)|$ folgt

$$\lim_{i\in I} |f(x_{U(i)}) - f(y_{U(i)})| = |f(x) - f(x)| = 0.$$

Das widerspricht aber der Tatsache, dass $|f(x_{U(i)}) - f(y_{U(i)})| \geq \epsilon$.

❑

4.2.7 Bemerkung. Fast genauso, wie in Lemma 4.2.6 zeigt man

$$\forall \epsilon > 0 \exists U \in \mathfrak{U}(e) : \ \forall x, y \in G, \ yx^{-1} \in U \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

4.2.8 Satz. *Jede lokalkompakte Gruppe $(G, \mathcal{T})$ besitzt ein linksinvariantes positives, nicht verschwindendes Riesz-reguläres Borelmaß μ, das sogenanntes* Linke Haarsche Maß.

Für jede nichtleere offene Menge O gilt $\mu(O) > 0$.

Beweis.

(*i*) Wir betrachten die Menge $C_{00}(G)$ aller stetigen, reellwertigen Funktion f auf G mit kompakten Träger $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in G : f(x) \neq 0\}}$, und setzen $C_{00,+}(G) := \{f \in C_{00}(G) : f \geq 0\}$ und $C_{00,+}(G)^\times := C_{00,+}(G) \setminus \{0\}$.

(*ii*) Nun seien Funktionen $f \in C_{00,+}(G)$ und $g \in C_{00,+}(G)^\times$ gegeben. Für $\alpha \in (1, +\infty)$ ist $O := g^{-1}\{z \in \mathbb{C} : \alpha|z| > \|g\|_\infty\}$ eine nichtleere offene Teilmenge von G. Da ein gegebenes $x \in G$ in der Menge sO liegt, wobei $s = xo^{-1}$ für irgendein $o \in O$, ist $(sO)_{s\in G}$ eine offene Überdeckung von G.

Da $\operatorname{supp}(f)$ kompakt ist, gibt es $s_1, \ldots, s_n \in G$, sodass

$$\bigcup_{j=1,\ldots,n} s_j O \supseteq \operatorname{supp}(f).$$

Für $x \in \operatorname{supp}(f)$ folgt daher $x \in s_j O$ für ein j und somit

$$f(x) \leq \|f\|_\infty = \frac{\alpha\|f\|_\infty}{\|g\|_\infty} \cdot \frac{\|g\|_\infty}{\alpha} \leq \frac{\alpha\|f\|_\infty}{\|g\|_\infty} g(s_j^{-1} x),$$

da $s_j^{-1} x \in O$ und daher $g(s_j^{-1} x) > \frac{\|g\|_\infty}{\alpha}$.

Insbesondere gibt es also $s_1, \ldots, s_n \in G$ und $c_1, \ldots, c_n \in [0, +\infty)$, sodass

$$f \leq \sum_{j=1}^{n} c_j l(s_j) g.$$

(*iii*) Wir setzen für $(f, g) \in C_{00,+}(G) \times C_{00,+}(G)^\times$

$$(f : g) = \inf\{\sum_{j=1}^{n} c_j : s_1, \ldots, s_n \in G,\ c_1, \ldots, c_n \in [0, +\infty), \text{sodass } f \leq \sum_{j=1}^{n} c_j l(s_j) g\}.$$

Klarerweise gilt $(0 : g) = 0$ und $(cf : g) = c(f : g)$ für $c \in (0, +\infty)$.

Aus $f_1 \leq \sum_{j=1}^n c_j l(s_j) g$ und $f_2 \leq \sum_{j=1}^m d_j l(t_j) g$ folgt

$$f_1 + f_2 \leq \sum_{j=1}^{n} c_j l(s_j) g + \sum_{j=1}^{m} d_j l(t_j) g,$$

und daher $(f_1 + f_2 : g) \leq \sum_{j=1}^n c_j + \sum_{j=1}^m d_j$. Aus der Beliebigkeit dieser Summen folgt $(f_1 + f_2 : g) \leq (f_1 : g) + (f_2 : g)$.

Da $f \leq \sum_{j=1}^n c_j l(s_j) g$ genau dann, wenn $l(s) f \leq \sum_{j=1}^n c_j l(s s_j) g$ (siehe Bemerkung 4.2.4), folgt $(l(s) f : g) = (f : g)$.

Sind $f \in C_{00,+}(G)$ und $g, h \in C_{00,+}(G)^\times$, und gilt $f \leq \sum_{j=1}^n c_j l(s_j) g$ sowie $g \leq \sum_{k=1}^m d_k l(t_k) h$, so folgt

$$f \leq \sum_{j=1}^{n} c_j l(s_j) g \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} c_j d_k l(s_j t_k) h.$$

Also gilt auch $(f : g) \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m c_j d_k = \left(\sum_{j=1}^n c_j\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^m d_k\right)$. Nimmt man das Infimum über alle diese Summen, so folgt

$$(f : h) \leq (f : g) \cdot (g : h). \tag{4.1}$$

Schließlich folgt aus $f \leq \sum_{j=1}^n c_j l(s_j) g$

$$\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty \cdot \sum_{j=1}^{n} c_j,$$

und somit

$$\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty \cdot (f : g). \tag{4.2}$$

Insbesondere gilt $(f : g) > 0$ für $f \neq 0$.

(*iv*) Wir halten nun $f_0 \in C_{00,+}(G)^\times$ fest und definieren für jedes $g \in C_{00,+}(G)^\times$ die Abbildung $I_g : C_{00,+}(G)^\times$ durch

$$I_g(f) := \frac{(f : g)}{(f_0 : g)}.$$

Aus den Eigenschaften im letzten Punkt folgt für $f, h \in C_{00,+}(G)^\times$, $c \in (0, +\infty)$, $s \in G$ sofort

$$I_g(f + h) \leq I_g(f) + I_g(h),\ I_g(cf) = c I_g(f),\ I_g(l(s) f) = I_g(f)\,.$$

Wegen (4.1) gilt dabei

$$(f : g) \leq (f : f_0)(f_0 : g),\ \ (f_0 : g) \leq (f_0 : f)(f : g),$$

und daher

$$I_g(f) \in [\frac{1}{(f_0 : f)}, (f : f_0)]. \tag{4.3}$$

(v) Seien nun $f_1, f_2 \in C_{00,+}(G)^\times$ fest gehalten, und wähle $h \in C_{00,+}(G)^\times$, sodass $h(x) = 1$ für alle $x \in \operatorname{supp} f_1 + f_2$ (vgl. Korollar 1.2.13).

Wir wollen hier zeigen, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ eine kompakte e-Umgebung U gibt, sodass für $g \in C_{00,+}(G)^\times$ mit $\operatorname{supp}(g) \subseteq U$ immer

$$I_g(f_1) + I_g(f_2) \leq I_g(f_1 + f_2) + \epsilon.$$

Mit beliebigem, aber zunächst festem $\delta > 0$ sei $f := f_1 + f_2 + \delta h$ und $(j = 1, 2)$

$$h_j(x) := \begin{cases} \frac{f_j(x)}{f(x)} & , \quad f(x) \neq 0 \\ 0 & , \quad f(x) = 0 \end{cases} .$$

Wegen $f(x) > 0$ für $x \in \operatorname{supp} f_1 + f_2$ ist $h_j(x) = \frac{f_j(x)}{f(x)}$ stetig auf $x \in \operatorname{supp} f_1 + f_2$. Für $x \in \{x \in G : f_1(x) + f_2(x) = 0\}$ gilt $h_j(x) = 0$. Da

$$\operatorname{supp} f_1 + f_2 \;\text{ und }\; \{x \in G : f_1(x) + f_2(x) = 0\}$$

zwei abgeschlossene Teilmengen von G sind, deren Vereinigung ganz G ist, folgt aus Lemma 1.2.15, dass die Funktionen h_j stetig sind.

Gemäß Lemma 4.2.6 sind die Funktionen h_j sogar gleichmäßig stetig. Also gibt es eine Umgebung U von e, sodass $x^{-1}y \in U \Rightarrow |h_j(x) - h_j(y)| \leq \delta$. Wegen der Lokalkompaktheit können wir U als kompakt annehmen. Ist nun $g \in C_{00,+}(G)^\times$ mit $\operatorname{supp}(g) \subseteq U$, so folgt für $s \in G$ und $s^{-1}x \in U$ wegen $|h_j(x) - h_j(s)| \leq \delta$

$$h_j(x)\,(l(s)g)(x) \leq (h_j(s) + \delta)\,(l(s)g)(x).$$

Für $s^{-1}x \notin U$ gilt diese Ungleichung auch, da beide Seiten verschwinden. Somit folgt aus $f \leq \sum_{k=1}^n c_k l(s_k) g$

$$f_j = f \cdot h_j \leq \sum_{k=1}^n c_k h_j l(s_k) g \leq \sum_{k=1}^n c_k (h_j(s_k) + \delta) l(s_k) g.$$

Also gilt $(f_j : g) \leq \sum_{k=1}^n c_k (h_j(s_k) + \delta)$ und wegen $h_1 + h_2 \leq 1$ sogar

$$(f_1 : g) + (f_2 : g) \leq (1 + 2\delta) \sum_{k=1}^n c_k.$$

Da $\sum_{k=1}^n c_k l(s_k) g$ $(\geq f)$ beliebig war, gilt

$$(f_1 : g) + (f_2 : g) \leq (1 + 2\delta)\,(f : g) = (1 + 2\delta)\,(f_1 + f_2 + \delta h : g) \leq$$
$$(1 + 2\delta)\,((f_1 + f_2 : g) + \delta\,(h : g)).$$

Durch $(f_0 : g)$ dividieren ergibt.

$$I_g(f_1) + I_g(f_2) \leq I_g(f_1 + f_2) + (2\delta\, I_g(f_1 + f_2) + (1 + 2\delta)\delta\, I_g(h)).$$

Nach (4.3) lässt sich die rechte Klammer durch

$$2\delta\,(f_1 + f_2 : f_0) + (1 + 2\delta)\delta\,(h : f_0),$$

und daher unabhängig von g nach oben abschätzen. Wählt man $\delta > 0$ hinreichend klein, so sehen wir also, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ eine kompakte e-Umgebung U gibt, sodass für $g \in C_{00,+}(G)^\times$ mit $\operatorname{supp}(g) \subseteq U$ immer

$$I_g(f_1) + I_g(f_2) \leq I_g(f_1 + f_2) + \epsilon.$$

(*vi*) Für jedes $g \in C_{00,+}(G)^\times$ bildet I_g die Menge $C_{00,+}(G)^\times$ in die reellen Zahlen ab, wobei wegen (4.3) $I_g(f) \in [\frac{1}{(f_0:f)}, (f : f_0)]$. Also

$$I_g \in \prod_{f \in C_{00,+}(G)^\times} [\frac{1}{(f_0 : f)}, (f : f_0)].$$

Nach dem Satz von Tychonoff ist dieses Produkt kompakt. Betrchtet man also das Netz $(I_{g_U})_{U \in \mathfrak{U}(e)}$, wobei $g_U \in C_{00,+}(G)^\times$ irgendeine Funktion mit $\operatorname{supp} g_U \subseteq U$ und wobei $\mathfrak{U}(e)$ durch $\supseteq$ gerichtet ist, so hat diese Netz ein konvergentes Teilnetz

$$\prod_{f \in C_{00,+}(G)^\times} [\frac{1}{(f_0 : f)}, (f : f_0)] \ni I := \lim_{i \in I} I_{g_{U(i)}}.$$

Also gilt $\lim_{i \in I} I_{g_{U(i)}}(f) = I(f)$ für alle $f \in C_{00,+}(G)^\times$. Wegen $I_g(f_0) = 1$, $I_g(cf) = cI_g(f)$, $I_g(f_1 + f_2) \leq I_g(f_1) + I_g(f_2)$ und $I_g(l(s)f) = I_g(f)$ $(f, f_1, f_2 \in C_{00,+}(G)^\times,\ c \in (0, +\infty),\ s \in G)$ gilt auch für den Grenzwert I

$$I(f_0) = 1,\ I(cf) = cI(f),\ I(f_1 + f_2) \leq I(f_1) + I(f_2),\ I(l(s)f) = I(f). \tag{4.4}$$

Aus dem letzten Punkt wissen wir, dass es zu gegebenen $\epsilon > 0$ ein $U \in \mathfrak{U}(e)$ gibt, sodass $I_g(f_1) + I_g(f_2) \leq I_g(f_1 + f_2) + \epsilon$, wenn nur $\operatorname{supp} g \subseteq U$. Insbesondere gilt für den Grenzwert I, dass $I(f_1) + I(f_2) \leq I(f_1 + f_2) + \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, gilt $I(f_1) + I(f_2) \leq I(f_1 + f_2)$ und damit

$$I(f_1) + I(f_2) = I(f_1 + f_2),\ f_1, f_2 \in C_{00,+}(G)^\times.$$

Also ist I additiv. Wegen $I(f) \in [\frac{1}{(f_0:f)}, (f : f_0)]$ ist $I(f) > 0$ für $f \in C_{00,+}(G)^\times$.

(*vii*) Zunächst setzen wir I fort auf $C_{00,+}(G)$, indem wir $I(0) := 0$ setzen. Man sieht sofort, dass dann (4.4) noch immer erfüllt ist, wobei sogar $c \in [0, +\infty)$.

Ist nun $f \in C_{00}(G)$ (alle reellwertig), so kann man f – nicht eindeutig – als $f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in C_{00,+}(G), f_1, f_2 \geq 0$ schreiben. Wir definieren dann $I(f) := I(f_1) - I(f_2)$. Diese Definition ist eindeutig, denn für $f_1 - f_2 = f = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$ folgt aus $f_1 + \tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 + f_2 \geq 0$,

$$I(f_1) + I(\tilde{f}_2) = I(f_1 + \tilde{f}_2) = I(\tilde{f}_1 + f_2) = I(\tilde{f}_1) + I(f_2),$$

und somit $I(f) = I(f_1) - I(f_2) = I(\tilde{f}_1) - I(\tilde{f}_2)$. Aus dieser Unabhängigkeit von der konkreten Zerlegung folgt leicht, dass I linear auf $C_{00,+}(G)$ ist.

Da offensichtlicherweise I ein positives lineares Funktional ist, folgt aus dem Rieszschen Darstellungssatz die Existenz eines eindeutigen Riesz-regulären Borelmaß $\mu : \mathfrak{B} \to [0, +\infty]$, sodass

$$I(f) = \int_G f\, d\mu,\ f \in C_{00}(G).$$

(*viii*) Da $T : y \mapsto s^{-1}y$ ein Homöomorphismus auf G ist, ist diese Abbildung in beide Richtungen bzgl. $\mathfrak{B}$ messbar. Somit ist auch $\mu^T : B \mapsto \mu(T^{-1}(B)) = \mu(sB)$ ein Borelmaß mit den gleichen Regularitätseigenschaften, wie μ. Aus der Maßtheorie folgt

$$I(l(s)f) = \int_G f(s^{-1}g)\, d\mu(g) = \int_G f \circ T\, d\mu = \int_G f\, d\mu^T.$$

Wegen $I(f) = I(l(s)f)$ folgt aus der Eindeutigkeitsaussage des Rieszschen Darstellungssatzes, dass $\mu = \mu^T$ bzw. $\mu(sB) = \mu(B)$ für alle $B \in \mathfrak{B}$. Somit ist μ linksinvariant.

(ix) Ist $\emptyset \neq O \in \mathcal{T}$ und $f \in C_{00,+}(G)^\times$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq O$ und $0 \leq f \leq 1$ (vgl. Korollar 1.2.13). Es folgt

$$0 < I(f) = \int_G f \, d\mu \leq \int_O 1 \, d\mu = \mu(O).$$

❑

4.2.9 Bemerkung. Sei ν ein (Riesz-reguläres) Borelmaß auf G. Mit der selben Argumentation wie im Beweisschritt (viii) sieht man, dass

$$\int_G f(s^{-1}t) \, d\mu(t) = \int_G f(t) \, d\, {}_s\mu(t)\,,$$

wobei $s \in G$, ${}_s\mu$ das (Riesz-reguläres) Borelmaß $B \mapsto \mu(sB)$ auf G ist, und $f : G \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) messbar ist. Obige Gleichheit ist so zu verstehen, dass die linke Seite genau denn existiert, wenn es die rechte tut. Insbesondere gilt

$$\int_G f(s^{-1}t) \, d\mu(t) = \int_G f(t) \, d\mu(t)\,,$$

falls μ das in Satz 4.2.8 konstruierte Maß ist.

Da $x \mapsto x^{-1}$ ein Homöomorphismus auf G ist, ist mit μ auch $\check{\nu}(B) := \nu(B^{-1})$ ein (Riesz-reguläres) Borelmaß auf G. Mit $T : G \to G,\ x \mapsto x^{-1}$ folgt aus der Maßtheorie, dass $\nu^T(B) = \nu(T^{-1}(B)) = \nu(B^{-1}) = \check{\nu}(B)$ und mit $f : G \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

$$\int f(x) \, d\check{\nu}(x) = \int f(x) \, d\nu^T(x) = \int f(T(x)) \, d\nu(x) = \int f(x^{-1}) \, d\nu(x)$$

in dem Sinne, dass die linke Seite genau dann existiert, wenn es die rechte tut.

4.2.10 Bemerkung. Ist G kompakt, so gilt $\mu(G) < +\infty$. In diesem Fall normiert man μ üblichersweise so, dass $\mu(G) = 1$.

Trägt G die diskrete Topologie, so normiert man μ üblicherweise so, dass $\mu(\{e\}) = 1$. Wegen der Linksinvarianz folgt dann $\mu(\{g\}) = 1$ für alle $g \in G$ und weiter, dass

$$\mu(B) = \begin{cases} |B| & , \quad B \text{ ist endlich} \\ +\infty & , \quad B \text{ ist unendlich} \end{cases}$$

Also ist μ das Zählmaß auf G.

4.2.11 Aufgabe. Man zeige, dass $\mu(G) = +\infty$, wenn G nicht kompakt ist.

Hinweis: Man finde ein $V \in \mathfrak{U}(e)$ und $x_1, x_2, \dots \in G$, sodass die Mengen $x_j \cdot V$ alle disjunkt sind!

4.2.12 Aufgabe. Seien $(G_1, \mathcal{T}_1)$ und $(G_2, \mathcal{T}_2)$ zwei lokalkompakte Gruppen und μ_1, μ_2 zwei linke Haarmaße, die als σ-endlich vorausgestzt seien. Man zeige, dass dann $\mu_1 \times \mu_2$ ein linkes Haarmaß auf $G_1 \times G_2$ ist.

Klarerweise sind in abelschen Gruppen alle linksinvarianten Maße auch rechtsinvariant. Im allgemeinen ist dem nicht so. Es gilt aber folgender Zusammenhang.

4.2.13 Korollar. *Ist μ ein linksinvariantes (rechtsinvariantes) positives, Riesz-reguläres, so ist $\check{\mu}$ ein rechtsinvariantes (linksinvariantes) positives, Riesz-reguläres Borelmaß.*

Beweis. Für $g \in G$ und $B \in \mathfrak{B}$ gilt

$$\check{\nu}(Bg) = \nu((Bg)^{-1}) = \nu(g^{-1}B^{-1}) = \mu(B^{-1}) = \check{\nu}(B).$$

Die Umkehrung zeigt man entsprechend.

❑

4.2.14 Lemma. *Sei ν ein positives Borelmaß und $f \in C_{00}(G)$. Dann ist die Funktion*

$$t \mapsto \int_G f(tx)\, d\nu(x)$$

wohldefiniert und stetig.

Beweis. Wähle zunächst eine feste kompakte Umgebung $U_0 \in \mathfrak{U}(e)$ von e.

Wegen Bemerkung 4.2.7 gibt es zu gegebenen $\epsilon > 0$ ein $U \in \mathfrak{U}(e)$, sodass

$$\forall x, y \in G,\ yx^{-1} \in U \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Somit gilt $|f(tx) - f(sx)| < \epsilon$, wenn nur $st^{-1} \in U$. Wegen der Stetigkeit von $x \mapsto x^{-1}$ können wir U nötigenfalls kleiner machen, sodass $U^{-1} \subseteq U_0$.

Sei nun $t \in G$ fest und $st^{-1} \in U$. Ist $f(sx) \neq 0$, so folgt $x \in s^{-1}\operatorname{supp}(f) \subseteq t^{-1}U^{-1}\operatorname{supp}(f) \subseteq t^{-1}U_0\operatorname{supp}(f)$. Aus $f(tx) \neq 0$ folgt $x \in t^{-1}\operatorname{supp}(f) \subseteq t^{-1}U_0\operatorname{supp}(f)$.

Somit gilt $|f(tx) - f(sx)| = 0$ für alle $x \notin t^{-1}U_0\operatorname{supp}(f)$, und daher ($s \in tU$)

$$\int_G |f(tx) - f(sx)|\, d\nu(x) = \int_{t^{-1}U_0\operatorname{supp}(f)} |f(tx) - f(sx)|\, d\nu(x) \leq \epsilon \cdot \nu(t^{-1}U_0\operatorname{supp}(f)).$$

Dabei ist $\nu(t^{-1}U_0\operatorname{supp}(f))$ wegen Korollar 4.1.4 endlich. Also gibt es bei festem t zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung, nämlich tU, von t, sodass

$$\left| \int_G f(tx)\, d\nu(x) - \int_G f(sx)\, d\nu(x) \right| \leq \int_G |f(tx) - f(sx)|\, d\nu(x) \leq \nu(t^{-1}U_0\operatorname{supp}(f))\epsilon$$

für alle $s \in tU$. Daraus folgt die Stetigkeit.

❑

4.2.15 Definition. Ist ν ein positives Boralmaß auf einem Hausdorffraum $(X, \mathcal{T})$, so ist der *Träger* die Menge

$$\operatorname{supp}(\nu) := \{x \in X : \forall V \in \mathfrak{U}(x) \Rightarrow \nu(V) > 0\}.$$

Aus

$$G \setminus \operatorname{supp}(\nu) := \{x \in X : \exists V \in \mathfrak{U}(x),\ \nu(V) = 0\}$$

erkennt man leicht, dass $G \setminus \operatorname{supp}(\nu)$ offen und somit $\operatorname{supp}(\nu)$ abgeschlossen ist.

4.2.16 Bemerkung. Das in Satz 4.2.8 konstruierte linke Haarmaß hat Träger G, da das Maß jeder offenen Menge strikt positiv ist.

4.2.17 Bemerkung. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und gelte

$$\int f \cdot g \, d\nu = 0$$

für alle $g \in C_{00}(X)$. Ist $x \in \operatorname{supp}(\nu)$ und wäre $f(x) =: \delta > 0$, so gibt es wegen der Stetigkeit eine Umgebung $V \in \mathfrak{U}(x)$, sodass $f(y) \geq \frac{\delta}{2}$ für alle $y \in V$. Nun gibt es eine Funktion $g \in C_{00,+}(X)$ mit $\operatorname{supp}(g) \subseteq V$ und $g(x) = 1$ (siehe Korollar 1.2.13). Also gilt $g(y) \geq \frac{1}{2}$ für $y \in O$ für eine offene Teilmenge O von V mit $x \in O$ und somit erhalten wir den Widerspruch

$$\int f \cdot g \, d\nu = \int_V f \cdot g \, d\nu \geq \int_O f \cdot g \, d\nu \geq \frac{\delta}{4} \nu(O) > 0.$$

Genauso führt $f(x) < 0$ auf einen Widerspruch. Also muss $f(x) = 0$ für alle $x \in \operatorname{supp}(\nu)$.

4.2.18 Satz. *Das linke (und wegen Korollar 4.2.13 auch das rechte) Haar Maß ist bis auf eine multiplikative, positive Konstante eindeutig.*

Beweis. Seien μ_1, μ_2 zwei linksinvariante positive, nicht verschwindende Maße mit den Regularitätseigenschaften wie in Satz 4.2.8, wobei wir klarerweise annehmen können, dass oBdA. μ_1 das in Satz 4.2.8 konstruierte Maß ist.

Wegen $\mu_1 \not\equiv 0$ gibt es eine Funktion $f \in C_{00}(G)$ mit $\langle f, \mu_1 \rangle := \int f \, d\mu_1 \neq 0$. Nach Lemma 4.2.14 ist die Funktion

$$\nabla_f : G \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\langle f, \mu_1 \rangle} \int f(tx) \, d\mu_2(t) \tag{4.5}$$

stetig auf G. Für $g \in C_{00}(G)$ gilt

$$\langle f, \mu_1 \rangle \cdot \int g(t) \, d\check{\mu}_2(t) = \int f(s) \, d\mu_1(s) \cdot \int g(t) \, d\check{\mu}_2(t) = \int \left(\int f(s) g(t) \, d\check{\mu}_2(t) \right) d\mu_1(s).$$

Nach Korollar 4.2.13 ist $\check{\mu}_2$ rechtsinvariant. Somit stimmt dieser Ausdruck überein mit[4]

$$\int \left(\int f(s) g(ts) \, d\check{\mu}_2(t) \right) d\mu_1(s) = \int \left(\int f(s) g(ts) \, d\mu_1(s) \right) d\check{\mu}_2(t).$$

Wegen die Linksinvarianz von μ_1 ist dieser Ausdruck gleich[4]

$$\int \left(\int f(t^{-1}s) g(s) \, d\mu_1(s) \right) d\check{\mu}_2(t) = \int \left(\int f(t^{-1}s) g(s) \, d\check{\mu}_2(t) \right) d\mu_1(s).$$

[4]Man beachte, dass unsere Maße i.A. nicht σ-endlich sind, und daher der Satz von Fubini nicht direkt verwendet werden kann. Außerdem ist nicht so klar, dass der Integrand bzgl. der Produkt-σ-Algebra messbar ist. I.A. gilt nämlich nur $\mathfrak{B}(G \times G) \supseteq \mathfrak{B}(G) \times \mathfrak{B}(G)$.

Die Funktion $\psi : (s,t) \mapsto f(s)g(ts)$ verschwindet aber außerhallb von $(\operatorname{supp} f) \times ((\operatorname{supp} f)^{-1} \cdot \operatorname{supp} g)$, dh. $\psi \in C_{00}(G \times G)$. Wegen dem Satz von Stone-Weierstraß für lokalkompakte Räume ist ψ gleichmäßiger Grenzwert einer Folge von Funktionen der Bauart $(s,t) \mapsto f_1(s)g_1(t) + \cdots + f_m(s)g_m(t)$ mit $f_j, g_j \in C_{00}(G)$, wodurch ψ bzgl. der Produkt σ-Algebra $\mathfrak{B}(G) \times \mathfrak{B}(G)$ messbar ist. Also können wir Fubini auf die Einschränkung von ψ auf die kompakte Menge $(\operatorname{supp} f) \times ((\operatorname{supp} f)^{-1} \cdot \operatorname{supp} g)$ anwenden.

Mit Bemerkung 4.2.9 stimmt das überein mit

$$\int g(s)\left(\int f(ts)\, d\mu_2(t)\right)\, d\mu_1(s) = \langle f, \mu_1\rangle \cdot \int g(s)\cdot \triangledown_f(s)\, d\mu_1(s).$$

Kürzt man $\langle f, \mu_1\rangle$ durch, so folgt

$$\int g(t)\, d\check{\mu}_2(t) = \int g(s)\cdot \triangledown_f(s)\, d\mu_1(s).$$

Die linke Seite hängt nicht von f ab. Also gilt

$$\int g(s)\cdot \triangledown_h(s)\, d\mu_1(s) = \int g(t)\, d\check{\mu}_2(t) = \int g(s)\cdot \triangledown_f(s)\, d\mu_1(s)$$

für alle $f, h \in f \in C_{00}(G)$ mit $\langle f, \mu_1\rangle \neq 0 \neq \langle h, \mu_1\rangle$ und alle $g \in C_{00}(G)$. Nach Bemerkung 4.2.17 und Bemerkung 4.2.16 gilt $\triangledown_f(s) - \triangledown_h(s) = 0,\ s \in G$ und damit ist durch

$$\triangledown_G := \triangledown_f$$

eine stetige Funktion auf G definiert, die von der Wahl von $f \in C_{00}(G)$ unabhängig ist solange nur $\langle f, \mu_1\rangle \neq 0$. Setzt man $c := \triangledown_G(e)$, so folgt aus (4.5)

$$c \cdot \int f\, d\mu_1 = \int f\, d\mu_2$$

für alle $f \in C_{00}(G)$, $\langle f, \mu_1\rangle \neq 0$. Somit stimmen die linearen Funktionale $f \mapsto c \cdot \int f\, d\mu_1$ und $f \mapsto \int f\, d\mu_2$ auf dem Komplement der Hyperebene $\langle f, \mu_1\rangle = 0$ überein. Sie stimmen daher überein. Insbesondere muss $c > 0$ und wegen der Eindeutigkeitsaussage des Rieszschen Darstellungssatzes folgt $c \cdot \mu_1 = \mu_2$.

❑

Ist nun μ ein linkes Haarmaß auf G und $s \in G$, dann sieht man ähnlich wie in Bemerkung 4.2.9, dass auch $\mu_s : B \mapsto \mu(Bs)$ ein positives, nicht verschwindendes Borelmaß mit den selben Regularitätseigenschaften, wie μ ist. Außerdem gilt $\mu_s(tB) = \mu(tBs) = \mu(Bs) = \mu_s(B)$. Also ist auch μ_s ein linkes Haarmaß, und wegen Satz 4.2.18 gilt

$$\mu_s = \triangle_G(s)\cdot \mu \tag{4.6}$$

für ein reelles $\triangle_G(s) > 0$.

4.2.19 Definition. Die Funktion $s \mapsto \triangle_G(s)$ heißt die *Modularfunktion* von G. Gilt $\triangle_G \equiv 1$, so heißt G *unimodular*

4.2.20 Bemerkung. Aus (4.6) erkennt man sofort, dass μ genau dann rechtsinvariant ist, wenn G unimodular ist. Also sind genau in diesem Fall die links- und die rechtsinvarianten Haarmaße die selben. In diesem Fall spricht man vom Haarschen Maß.

4.2.21 Lemma. *$\triangle_G$ ist ein stetiger Homomorpismus von G nach* $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.

Beweis. Zunächst ist $\triangle_G$ unabhängig vom gewählten linken Haarmaß. In der Tat gilt für ein anderes linkes Haarmaß $\tilde{\mu}$ wegen Satz 4.2.18 $\tilde{\mu} = c\cdot\mu$ für ein $c > 0$. Daraus folgt $\tilde{\mu}_s = c\cdot\mu$ und daher $\tilde{\mu}_s = \triangle_G(s)\cdot\tilde{\mu}$.

Nimmt man $\tilde{\mu} = \mu_t$ für ein $t \in G$, so folgt

$$\triangle_G(st)\cdot\mu = \mu_{st} = (\mu_t)_s = \triangle_G(s)\cdot\mu_t = (\triangle_G(s)\cdot\triangle_G(t))\cdot\mu,$$

und damit die Tatsache, dass $\triangle_G$ ein Homomorphismus ist.

Schließlich gilt $\mu_s = \mu(T^{-1}(.)) =: \mu^T$ mit $T : G \to G,\ T(t) = ts^{-1}$ und daher folgt aus der Maßtheorie für ein $f \in C^{\times}_{00,+}$

$$\int f(ts^{-1})\, d\mu(t) = \int f(t)\, d\mu_s(t) = \triangle_G(s) \cdot \int f(t)\, d\mu(t).$$

Nach Lemma 4.2.14 ist die linke Seite stetig in s und wegen der Eigenschaften des Haarschen Maßes sind beide Seiten nicht Null. Somit ist auch $\triangle_G(s)$ stetig.

❑

4.2.22 Korollar. *Ist G kompakt, so ist G unimodular.*

Beweis. Nach Lemma 4.2.21 ist $s \mapsto \ln(\triangle_G(s))$ ein stetiger Homomorphismus von G nach $(\mathbb{R}, +)$. Das Bild von G unter diesem Homomorphismus ist eine kompakte und daher beschränkte Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$. Außer $\{0\}$ hat aber $(\mathbb{R}, +)$ keine beschränkte Untergruppe. Also muss $\triangle_G \equiv 1$.

❑

4.3 Eingebettete Lie-Gruppen

4.3.1 Lemma. *Sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe derart, dass G eine offene Teilmenge eines gewissen $\mathbb{R}^p$ ist und dass $\mathcal{T}$ genau die Spurtopologie die euklidischen Topologie ist. Weiters sei für alle $x \in G$ die Abbildung $(x, y) \mapsto xy,\ G \times G \to G$ ist stetig differenzierbar. Dann ist ($B \in \mathfrak{B}_p, B \subseteq G$)*

$$B \mapsto \int_B \frac{1}{|\det dl_t(e)|}\, d\lambda_p(t), \tag{4.7}$$

ein linkes Haarmaß, wobei $l_x : y \mapsto xy$. Dabei ist $x \mapsto dl_x(e),\ G \to \mathbb{R}^{p\times p})$ stetig. Entsprechend ist

$$B \mapsto \int_B \frac{1}{|\det dr_t(e)|}\, d\lambda_p(t), \tag{4.8}$$

ein rechtes Haarmaß, wobei $r_x : y \mapsto yx$

Beweis. Die Stetigkeit von $x \mapsto dl_x(e)$ folgt sofort aus der vorausgesetzten stetigen Differenzierbarkeit von $(x, y) \mapsto xy$.

Offensichtlich gilt $l_{x_1 x_2} = l_{x_1} \circ l_{x_2}$ und daher $d(l_{st})(e) = dl_s(t) dl_t(e)$. Also gilt für $f \in C_{00}(G)$ und $s \in G$ gemäß der Transformationsformel angewandt auf den Diffeomorphismus $l_s : G \to G$

$$\int_G f(st) \cdot \frac{1}{|\det dl_t(e)|}\, d\lambda_p(t) = \int_G f(st) \cdot \frac{1}{|\det dl_{st}(e)|} \cdot |\det dl_s(t)|\, d\lambda_p(t) =$$

$$\int_G f(\tau) \cdot \frac{1}{|\det dl_\tau(e)|}\, d\lambda_p(\tau).$$

Somit ist (4.7) linksinvariant. Genauso zeigt man, dass (4.8) rechtsinvariant ist.

❑

4.3.2 Beispiel. Alle im folgenden behandelten Gruppen sind lokalkompakt, da sie allesamt als Topologischer Raum offene Teilmengen eines gewissen $\mathbb{R}^d$ sind.

- Das p-dimensionales Lebesguesche Maß λ_p auf $\mathbb{R}^p$ erfüllt bekannterweise $\lambda_p(B) = \lambda_p(a + B)$ für alle $a \in \mathbb{R}^p$ und $B \in \mathfrak{B}_p$. Also ist λ_p ein (und bis auf eine multiplikative positive Konstante eindeutiges) Haarsches Maß von $(\mathbb{R}^p, +)$.

- Betrachte die Gruppe $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Klarerweise ist $(x, y) \mapsto xy$ stetig differenzierbar. Die Linkstranslation $l_s : y \mapsto sy$ erfüllt

$$dl_s(t) = s,$$

  und wegen Lemma 4.3.1 ist das Maß $B \mapsto \int_B \frac{1}{t}\, d\lambda(t),\ B \in \mathfrak{B},\ B \subseteq \mathbb{R}^+$ das Haarsche Maß auf $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.

- Ist $w \in \mathbb{C}$, so hat die Abbildung $z \mapsto zw$ betrachtet als Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ Determinante $|w^2|$. Somit ergibt sich aus Lemma 4.3.1, dass

$$B \mapsto \int_B \frac{1}{|z|^2}\, d\lambda_2(z),\ B \in \mathfrak{B}_2$$

  das Haarsche Maß von $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ ist.

- Die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n\times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$. Die Abbildung $l_S : X \mapsto SX$ als Abbildung von $\mathbb{R}^{n\times n}$ nach $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist linear. Identifiziert man $X = (x_{i,j})_{i,j=1}^n$ mit dem Vektor $(\xi_k)_{k=1}^{n^2} \in \mathbb{R}^{n^2}$, wobei $x_{i,j} = \xi_{i+(j-1)n}$, so hat l_S die Blockmatrixdarstellung

$$\operatorname{diag}(S, \dots, S)\ (\in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}).$$

  Also gilt $\det l_S = (\det S)^n$ und wegen Lemma 4.3.1 ist

$$B \mapsto \int_B \frac{1}{|\det X|^n}\, d\lambda_{n^2}(X),\ B \in \mathfrak{B}_{n^2}, B \subseteq GL(n, \mathbb{R})$$

  ein linkes Haarmaß. Genauso sieht man, dass dieses Maß auch rechtsinvariant ist. Also ist $GL(n, \mathbb{R})$ unimodular.

- Die *affine Gruppe G* ist die Menge aller affinen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ der Form $x \mapsto ax+b$ mit $a \in \mathbb{R}^\times$ $(= \mathbb{R} \setminus \{0\})$, $b \in \mathbb{R}$. Die Gruppenmultiplikation ist dabei die Hintereinanderausführung dieser Abbildungen. Als Menge identifizieren wir G mit $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$, wobei wegen $a_1(a_2x + b_2) + b_1 = a_1a_2x + (a_1b_2 + b_1)$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + b_1).$$

  Man sieht sofort, dass $(1, 0)$ das Neutrale Element von G ist, und dass G nicht abelsch ist. Versieht man $G \simeq \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie, so ist G eine lokalkompakte topologische Gruppe.

  Für die Abbildung $l_{(a,b)} : (x, y)^T \mapsto (ax, ay+b)^T$ auf $\mathbb{R}^2$ gilt $\det(dl_{(a,b)}(x, y)) = a^2$. Somit ist nach Lemma 4.3.1 $\mu : B \mapsto \int_B \frac{1}{c^2}\, d\lambda_2(c, d)^T$ ein linkes Haarmaß.

  Andererseits gilt für $(a, b) \in G$ und $B \in \mathfrak{B}_2, B \subseteq \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$

$$\mu(B \cdot (a, b)) = \int_{B\cdot(a,b)} \frac{1}{c^2} d\lambda_2(c, d)^T = \int_B \frac{|a|}{a^2x^2}\, d\lambda_2(x, y)^T =$$

$$\frac{1}{|a|} \cdot \int_B \frac{1}{x^2}\, d\lambda_2(x,y)^T = \frac{1}{|a|}\mu(B),$$

da die Abbildung $r_{(a,b)} : (x,y)^T \mapsto= (x,y)(a,b) \simeq (ax, xb+y)^T$ auf $\mathbb{R}^2$ Funkionaldeterminante $\det dr_{(a,b)}(x,y) = a$ hat. Aus (4.6) erkennt man, dass $\triangle_G((a,b)) = \frac{1}{|a|}$.

4.3.3 Aufgabe. Man bestimme das Haarsche Maß von $GL(n,\mathbb{C})$.

4.3.4 Aufgabe. Man bestimme das linke Haarsche Maß der affinen Gruppe auf dem $\mathbb{R}^p$.

4.4 Einiges über Mannigfaltigkeiten

Wir wollen im folgenden topologische Gruppen betrachten, die neben der Gruppenstruktur darüberhinaus noch eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit in einem $\mathbb{R}^p$ mit $d \leq p$ sind. Dazu sollen die Gruppenoperationen differenzierbar sein. Wir benötigen einige

4.4.1 Definition. Ist M_1 eine d_1-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{p_1}$, M_2 eine d_2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{p_2}$ und $f : M_1 \to M_2$, so heißt f stetig differenzierbar auf M_1, wenn für jede Einbettung $\phi : D \to M_1$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^{d_1}$ und jede Einbettung $\tilde{\phi} : \tilde{D} \to M_2$ mit $\tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$, sodass $O := (f \circ \phi)^{-1}(\tilde{\phi}(\tilde{D}))$ nichtleer ist, eben diese Menge O offen ist und die Abbildung

$$\tilde{\phi}^{-1} \circ f \circ \phi|_O : O \to \tilde{D} \tag{4.9}$$

stetig differenzierbar ist.

Ein bijektives $f : M_1 \to M_2$ heißt Diffeomorphismus, wenn f und f^{-1} im Sinne von oben stetig differenzierbar sind.

4.4.2 Bemerkung. Sei $\phi : D \to M$ eine Einbettung in die d-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^p$ und $O \subseteq D$ eine offene Menge. Mit D ist daher auch O offen in $\mathbb{R}^d$. Außerdem ist $\phi : D \to \phi(D)$ ein Homöomorphismus, wobei $\phi(D)$ offen in M ($\subseteq \mathbb{R}^d$) versehen mit der Spurtopologie, ist. Somit ist auch $\phi|_O : O \to \phi(O)$ ein Homöomorphismus von der in $\mathbb{R}^d$ offenen Menge O auf die in M offenen Menge $\phi(D)$. Als Einschränkung von ϕ erfüllt sicher auch $\phi|_O$ die Bedingung, dass $d\phi|_O(t)$ maximalen Rang für alle $t \in O$ hat. Also ist auch $\phi|_O$ eine Einbettung.

4.4.3 Lemma. *$f : M_1 \to M_2$ ist genau dann stetig differenzierbar, wenn es zu jedem $x \in M_1$ eine Einbettung $\phi_1 : D_1 \to M_1$ mit $x \in \phi_1(D_1)$ und eine Einbettung $\phi_2 : D_2 \to M_2$ mit $f(x) \in \phi_2(D_2)$ gibt, sodass $f(\phi_1(D_1)) \subseteq \phi_2(D_2)$ und sodass*

$$\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 : D_1 \to D_2$$

stetig differenzierbar ist.

Jedes stetig differenzierbare $f : M_1 \to M_2$ ist auch stetig.

Beweis. Sei f stetig differenzierbar und $x \in M_1$. Weiters seien $\phi : D \to M_1$ mit $x \in \phi(D)$, d.h. $x = \phi(s)$, $s \in D$, und $\tilde{\phi} : \tilde{D} \to M_2$ mit $f(x) \in \tilde{\phi}(\tilde{D})$ Einbettungen. Klarerweise folgt $D_1 := O := (f \circ \phi)^{-1}(\tilde{\phi}(\tilde{D})) \neq \emptyset$, da ja $s \in D_1$.

Nach Definition 4.4.1 ist D_1 offen in D. Nach Bemerkung 4.4.2 ist auch $\phi_1 := \phi|_{D_1} : D_1 \to \phi(D_1)$ eine Einbettung, die klarerweise

$$f(\phi_1(D_1)) = f(f^{-1}(\tilde{\phi}(\tilde{D}))) \subseteq \tilde{\phi}(\tilde{D})$$

erfüllt. Setzen wir noch $D_2 := \tilde{D}$ und $\phi_2 := \tilde{\phi}$, so ist $\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1$ $(= \tilde{\phi}^{-1} \circ f \circ \phi|_O)$: $D_1 \to D_2$ nach Definition 4.4.1 stetig differenzierbar.

Nun gelte umgekehrt die in Lemma 4.4.3 behauptete Tatsache. Weiters seien $\phi : D \to M_1$ und $\tilde{\phi} : \tilde{D} \to M_2$ Einbettungen mit $O := (f \circ \phi)^{-1}(\tilde{\phi}(\tilde{D})) \neq \emptyset$.

Für $s \in O$ sei $x := \phi(s)$ und seien $\phi_1 : D_1 \to M_1$ und $\phi_2 : D_2 \to M_2$ Einbettungen mit $x \in \phi_1(D_1)$, und $f(x) \in \phi_2(D_2)$, sodass $f(\phi_1(D_1)) \subseteq \phi_2(D_2)$ und sodass $\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 : D_1 \to D_2$ stetig differenzierbar und daher insbesondere stetig ist.

Da ϕ_1 und ϕ_2 Homöomorphismen sind, und da $\phi_1(D_1)$ und $\phi_2(D_2)$ offene Teilmengen von M_1 bzw. M_2 sind, folgt die zunächst die Stetigkeit von f bei x.

Die Mengen

$$C_1 := \phi_1(D_1) \cap \phi(D) \text{ und } C_2 := \phi_2(D_2) \cap \tilde{\phi}(\tilde{D})$$

sind als Schnitt von offenen Mengen offen in M_1 bzw. M_2, und enthalten x bzw. $f(x)$. Klarerweise sind dann $\phi^{-1}(C_1) \subseteq D, \phi_1^{-1}(C_1) \subseteq D_1, \tilde{\phi}^{-1}(C_2) \subseteq \tilde{D}, \phi_2^{-1}(C_2) \subseteq D_2$ jeweils offene Mengen und nach Analysis 3, Korollar 13.1.11 im Download von Kapitel 13 sind

$$\phi_1^{-1} \circ \phi|_{\phi^{-1}(C_1)} : \phi^{-1}(C_1) \to \phi_1^{-1}(C_1), \quad \phi_2^{-1} \circ \tilde{\phi}|_{\tilde{\phi}^{-1}(C_2)} : \tilde{\phi}^{-1}(C_2) \to \phi_2^{-1}(C_2)$$

Diffeomorphismen.

Da $\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 : D_1 \to D_2$ insbesondere stetig ist, ist das Urbild von $\phi_2^{-1}(C_2)$ unter dieser Abbildung offen in D_1. Außerdem stimmt es mit $(f \circ \phi_1)^{-1}(C_2)$ überein. Somit ist auch $\phi_1^{-1}(C_1) \cap (f \circ \phi_1)^{-1}(C_2)$ offen in D_1. Da $\phi_1^{-1} \circ \phi|_{\phi^{-1}(C_1)}$ insbesondere ein Homöomorphismus ist, muss auch

$$P := (\phi^{-1} \circ \phi_1)(\phi_1^{-1}(C_1) \cap (f \circ \phi_1)^{-1}(C_2)) = \phi^{-1}(C_1 \cap f^{-1}(C_2))$$

offen in D sein und enthält $s = \phi^{-1}(x)$. Außerdem gilt

$$f(\phi(P)) = f(C_1 \cap f^{-1}(C_2)) \subseteq C_2 \subseteq \tilde{\phi}(\tilde{D}).$$

Also gilt $s \in P \subseteq O$, und $\tilde{\phi}^{-1} \circ f \circ \phi|_O$ eingeschränkt auf P stimmt mit

$$(\phi_2^{-1} \circ \tilde{\phi})^{-1} \circ \phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 \circ (\phi_1^{-1} \circ \phi)|_P$$

überein. Also ist sie lokal bei s stetig differenzierbar. Da $s \in O$ beliebig war, sieht man, dass O als Vereinigung der jeweils offenen Mengen P selber offen ist, und $\tilde{\phi}^{-1} \circ f \circ \phi|_O$ auch überall stetig differenzierbar ist.

❏

4.4.4 Bemerkung. Ist $d_1 = p_1$, dh. M_1 ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{p_1}$, so ist $\mathrm{id}_{M_1} : M_1 \to M_1$ eine Einbettung. Also ist $f : M_1 \to M_2$ genau dann stetig differenzierbar, wenn für jede Einbettung $\tilde{\phi} : \tilde{D} \to M_1$ die Menge $O := f^{-1}(\tilde{\phi}(\tilde{D}))$ offen in M_1 und $\tilde{\phi}^{-1} \circ f|_O$ stetig differenzierbar ist, oder wenn es zu jedem $x \in M_1$ eine x enthaltende, offene Teilmenge $D_1 \supseteq M_1$ und eine Einbettung $\phi_2 : D_2 \to M_2$ gibt, sodass $f(D_1) \subseteq \phi_2(D_2)$ und sodass $\phi_2^{-1} \circ f|_O$ stetig differenzierbar ist.

Ist $d_2 = p_2$, dh. M_2 ist offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{p_2}$, so ist $\mathrm{id}_{M_2} : M_2 \to M_2$ eine Einbettung. Also ist $f : M_1 \to M_2$ genau dann stetig differenzierbar, wenn für jede Einbettung $\phi : D \to M_1$ die Abbildung $f \circ \phi$ stetig differenzierbar ist, oder wenn es zu jedem $x \in M_1$ eine Einbettung $\phi_1 : D_1 \to M_1$ gibt, sodass sodass $f \circ \phi_1$ stetig differenzierbar ist.

4.4.5 Bemerkung. Nach Bemerkung 4.4.4 ist die Einbettungsabbildung $\iota : M \to \mathbb{R}^p,\ x \mapsto x$, einer Mannigfaltigkeit M in $\mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar, da es zu jedem $x \in M$ eine Einbettung $\phi : D \to M$ mit $x \in \phi(D)$ gibt. Für diese ist $\iota \circ \phi\ (= \phi) : D \to \mathbb{R}^p$ per definitionem stetig.

4.4.6 Korollar. *Die Hintereinanderausführung von stetig differenzierbar Funktionen ist wieder stetig differenzierbar.*

Beweis. Seien $f : M_1 \to M_2$ und $h : M_2 \to M_3$ stetig differenzierbar. Also gibt es nach Lemma 4.4.3 zu $x \in M_1$ Einbettungen $\phi_1 : D_1 \to M_1$, $\phi_2 : D_2 \to M_2$ sowie $\tilde{\phi}_2 : \tilde{D}_2 \to M_2$, $\phi_3 : D_3 \to M_3$ mit $x \in D_1$, $f(x) \in \tilde{D}_2$ und $f(\phi_1(D_1)) \subseteq \phi_2(D_2)$, $h(\tilde{\phi}_2(\tilde{D}_2)) \subseteq \phi_3(D_3)$, sodass

$$\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 : D_1 \to D_2 \text{ und } \phi_3^{-1} \circ f \circ \tilde{\phi}_2 : \tilde{D}_2 \to D_3$$

stetig differenzierbar sind. Wegen der Stetigkeit von f ist $\phi_1^{-1}(f^{-1(\tilde{\phi}_2(\tilde{D}_2))})$ offen in D_1. Indem wir ϕ_1 auf diese Menge einschränken, können wir auch $f(\phi_1(D_1)) \subseteq \tilde{\phi}_2(\tilde{D}_2)$ annehmen (vgl. Bemerkung 4.4.2). Also gilt sogar $f(\phi_1(D_1)) \subseteq \phi_2(D_2) \cap \tilde{\phi}_2(\tilde{D}_2)$.

Nach Analysis 3, Korollar 13.1.11 im Download von Kapitel 13, ist

$$\tilde{\phi}_2^{-1} \circ \phi_2 : B_2 \to \tilde{B}_2$$

mit $B_2 := \phi_2^{-1}(\phi_2(D_2) \cap \tilde{\phi}_2(\tilde{D}_2))$, $\tilde{B}_2 := \tilde{\phi}_2^{-1}(\phi_2(D_2) \cap \tilde{\phi}_2(\tilde{D}_2))$ ein Diffeomorphismus. Somit ist

$$\phi_3^{-1} \circ h \circ \tilde{\phi}_2 \circ (\tilde{\phi}_2^{-1} \circ \phi_2) \circ \phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 : D_1 \to D_3$$

wohldefiniert und als Hintereinanderausführung dreier stetig differenzierbarer Abbildungen (im klassischen Sinne) selber stetig differenzierbarer. Außerdem stimmt sie mit $\phi_3^{-1} \circ h \circ f \circ \phi_1 : D_1 \to D_3$ überein. Also ist $h \circ f$ nach Lemma 4.4.3 stetig differenzierbar.

❑

4.4.7 Bemerkung. Sei $f : M_1 \to M_2\ (\subseteq \mathbb{R}^{p_2})$. Bezeichnet $\iota : M_2 \to \mathbb{R}^{p_2}$ die Einbettungsabbildung, so ist diese nach Bemerkung 4.4.5 stetig differenzierbar ist. Somit ist nach Korollar 4.4.6 auch $\iota \circ f : M_1 \to \mathbb{R}^{p_2}$ stetig differenzierbar.

Sei umgekehrt $\iota \circ f : M_1 \to \mathbb{R}^{p_2}$ stetig differenzierbar. Mit $x \in M_1$ ist $f(x) \in M_2$ und somit gibt es nach Analysis 3, Korollar 13.1.10 im Download von Kapitel 13, offene Mengen $W \subseteq \mathbb{R}^{p_2}$, $D_2 \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$ mit $f(x) \in W$ und d_2 viele Koordinaten $x_{i_1}, \dots, x_{i_{d_2}}$ im $\mathbb{R}^{p_2}$, sodass die Inverse von $P|_{M_2 \cap W} : M_2 \cap W \to D_2$ eine Einbettung $\phi_2 : D_2 \to M \cap W$ ist. Dabei ist P die Orthogonalprojektion von $\mathbb{R}^{p_2}$ auf den d_2-dimensionalen Unterraum, der von $x_{i_1}, \dots, x_{i_{d_2}}$ aufgespannt und mit $\mathbb{R}^{d_2}$ identifiziert wird.

Ist $\phi : D \to M_1$ eine Einbettung mit $x = \phi(s),\ s \in D$, so ist gemäß Voraussetzung $\iota \circ f \circ \phi : D \to \mathbb{R}^{p_2}$ stetig differenzierbar und somit stetig. Also gibt es eine offene Umgebung $D_1 \subseteq D$ von s, sodass $\iota \circ f \circ \phi(D_1) \subseteq W$. Setzen wir $\phi_1 := \phi|_{D_1} : D_1 \to M_1$, so ist $x \in \phi_1(D_1)$ und $f(\phi_1(D_1)) \subseteq W$, und $\phi_2^{-1} \circ f \circ \phi_1 = P \circ \iota \circ f \circ \phi_1 : D_1 \to D_2$ ist stetig differenzierbar;n also auch die Abbildung f.

4.4.8 Bemerkung. Sei $f : M_1 \to M_2$ ein Diffeomorphismus. Weiters seien $\phi : D \to M_1$ und $\tilde{\phi} : \tilde{D} \to M_2$ Einbettungen, sodass $O := (f \circ \phi)^{-1}(\tilde{\phi}(\tilde{D})) \neq \emptyset$ (vgl. Definition 4.4.1). Wir schränken ϕ so ein, dass oBdA. $D = O$, siehe Bemerkung 4.4.2.

Wegen der Stetigkeit von $f^{-1} : M_2 \to M_1$ ist $f(\phi(D))$ eine offene (bzgl. der Spurtopologie von M_2) Teilmenge von $\tilde{\phi}(\tilde{D})$. Nun können wir $\tilde{\phi}$ so einschränken, dass $\tilde{\phi}(\tilde{D}) = f(\phi(D))$. Also können wir die Einbettungen so wählen, dass $f(\phi(D)) = \tilde{\phi}(\tilde{D})$.

Gemäß Definition 4.4.1 müssen $g := \tilde{\phi}^{-1} \circ f \circ \phi : D \to \tilde{D}$ und $h := \phi^{-1} \circ f^{-1} \circ \tilde{\phi} : \tilde{D} \to D$ stetig differenzierbar sein. Nach der Kettenregel folgt ($s \in D,\ t \in \tilde{D}, t = g(s)$)

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{d_1}} = d\,\mathrm{id}_D(s) = d(h \circ g)(s) = dh(t)dg(s), \quad \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{d_2}} = d\,\mathrm{id}_{\tilde{D}}(t) = d(g \circ h)(t) = dg(s)dh(t).$$

Aus der linearen Algebra folgt $d_1 = d_2$. Also muss die Dimension zweier diffeomorpher Mannigfaltigkeiten gleich sein. Wir sehen auch, dass g und h Diffeomorphismen sind.

Insbesondere ist $f \circ \phi : D \to M_2$ als Zusammensetzung des Diffeomorphismus g und der Abbildung $\tilde{\phi}$ eine Einbettung.

4.4.9 Aufgabe. Man zeige, dass $\mathbb{T} \times \mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^4$ eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^4$ ist.

4.4.10 Aufgabe. Man stelle sich die Oberfläche F des Schlauches eines Fahrradreifen (ohne Ventil) vor. Man zeige, dass F eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ ist.

Weiters zeige man, dass $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ zu F diffeomorph ist, indem man einen Diffeomorphismus von $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ auf F explizit angibt.

4.4.11 Definition. Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}^q$ stetig differenzierbar. Ist $x \in M$ und $\phi : D \to M$ eine Einbettung mit $x \in \phi(D)$, so definieren wir mit $x = \phi(s)$

$$\Xi(f)(x) := \sqrt{\frac{\det(d(f \circ \phi)(s))^T d(f \circ \phi)(s)}{\det d\phi(s)^T d\phi(s)}} \in [0, +\infty).$$

Die Funktion $\Xi(f)$ ist unabhängig von der gewählten Einbettung ϕ. Ist nämlich $\tilde{\phi} : \tilde{D} \to M$ eine zweite Einbettung mit $x \in \tilde{\phi}(\tilde{D})$, dh. $x = \tilde{\phi}(\tilde{s})$, so ist

$$\tilde{\phi}^{-1} \circ \phi : B_1 \to B_2$$

ein Diffeomorphismus, wobei $B_1 := \phi^{-1}(\phi(D) \cap \tilde{\phi}(\tilde{D}))$ und $B_2 := \tilde{\phi}^{-1}(\phi(D) \cap \tilde{\phi}(\tilde{D}))$ und daher $s \in B_1$ und $\tilde{s} \in B_2$. Somit ist $T := d(\tilde{\phi}^{-1} \circ \phi)(s)$ eine reguläre $d \times d$-Matrix. Wegen

$$|\det T| \sqrt{\det C^T C} = \sqrt{\det T^T (\det C^T C) \det T} = \sqrt{\det (CT)^T CT}.$$

gilt mit $C = d(f \circ \tilde{\phi})(\tilde{s})$ und $CT = d(f \circ \tilde{\phi})(\tilde{s}) d(\tilde{\phi}^{-1} \circ \phi)(s) = d(f \circ \phi)(s)$ (Kettenregel)

$$|\det T| \sqrt{\det(d(f \circ \tilde{\phi})(\tilde{s}))^T d(f \circ \tilde{\phi})(\tilde{s})} = \sqrt{\det(d(f \circ \phi)(s))^T d(f \circ \phi)(s)}.$$

Setzt man $C = d\tilde{\phi}(\tilde{s})$, so gilt $CT = d\phi(s)$ und weiters

$$|\det T| \sqrt{\det d\tilde{\phi}(\tilde{s})^T d\tilde{\phi}(\tilde{s})} = \sqrt{\det d\phi(s)^T d\phi(s)}$$

Daher gilt auch

$$\Xi(f)(x) = \sqrt{\frac{\det(d(f \circ \phi)(s))^T d(f \circ \phi)(s)}{\det d\phi(s)^T d\phi(s)}} = \sqrt{\frac{\det(d(f \circ \tilde{\phi})(\tilde{s}))^T d(f \circ \tilde{\phi})(\tilde{s})}{\det d\tilde{\phi}(\tilde{s})^T d\tilde{\phi}(\tilde{s})}}.$$

4.4.12 Bemerkung. Die Funktion $\Xi(f)$ ist stetig, da $\phi^{-1} : \phi(D) \to D$ ja stetig ist und somit $\Xi(f)$ lokal um jeden Punkt x stetig ist.

4.4.13 Satz. *Seien M_1 und M_2 zwei d-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{p_1}$ bzw. $\mathbb{R}^{p_2}$ und bezeichne σ_j das Oberflächenmaß auf M_j, $j = 1, 2$. Ist $T : M_1 \to M_2$ ein Diffeomorphismus, so gilt für ein messbares $f : M_2 \to \mathbb{C}$*

$$\int_{M_2} f \, d\sigma_2 = \int_{M_1} f(T(t)) \cdot \Xi(T)(t) \, d\sigma_1(t).$$[5]

Beweis. Sei $\phi_j : D_j \to M_1$, $j \in \mathbb{N}$, eine Folge von Einbettungen, sodass $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \phi_j(D_j) = M_1$. Setzen wir, $N_j := \phi_j(D_j) \setminus (\phi_{j-1}(D_{j-1}) \cup \cdots \cup \phi_1(D_1))$, so gilt (Siehe Analysis 3, Download von Kapitel 13)

$$\int_{M_1} f(T(t)) \cdot \Xi(T)(t) \, d\sigma_1(t) =$$

$$\sum_j \int_{\phi_j^{-1}(N_j)} (f \circ T \circ \phi_j(s)) \cdot \Xi(T)(\phi_j(s)) \cdot \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} \, d\lambda_d(s).$$

Es sei bemerkt, dass das Oberflächenmaß nicht von der gewählten Folge von Einbettungen abhängt. Wir schreiben das folgendermaßen um (siehe Definition 4.4.11)

$$\sum_j \int_{\phi_j^{-1}(N_j)} (f \circ (T \circ \phi_j)(s)) \cdot$$

$$\sqrt{\frac{\det(d(T \circ \phi_j)(s))^T d(T \circ \phi_j)(s)}{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)}} \cdot \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)} \, d\lambda_d(s) =$$

$$\sum_j \int_{(T\circ\phi_j)^{-1}(T(N_j))} (f \circ (T \circ \phi_j)(s)) \cdot \sqrt{\det(d(T \circ \phi_j)(s))^T d(T \circ \phi_j)(s)} \, d\lambda_d(s). \tag{4.10}$$

Nun sind wegen Bemerkung 4.4.8 die Abbildungen $T \circ \phi_j : D_j \to M_2$ auch Einbettungen mit $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} T \circ \phi_j(D_j) = T(M_1) = M_2$. Außerdem gilt

$$T(N_j) = T \circ \phi_j(D_j) \setminus (T \circ \phi_{j-1}(D_{j-1}) \cup \cdots \cup T \circ \phi_1(D_1)).$$

Also ist (4.10) nichts anderes als $\int_{M_2} f \, d\sigma_2$.

❑

4.5 In $\mathbb{R}^p$ eingebettete Lie Gruppen

4.5.1 Aufgabe. Sei M_1 eine d_1-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{p_1}$ und M_2 eine d_2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{p_2}$. Man überprüfe, dass $M_1 \times M_2$ eine $d_1 + d_2$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{p_1+p_2}$ ist.

Hinweis: Man zeige, dass mit $\phi_1 : D_1 \to M_1$ und $\phi_2 : D_2 \to M_2$ auch $\phi_1 \times \phi_2 : D_1 \times D_2 \to M_1 \times M_2$ eine Einbettung ist.

Mit dieser Aufgabe macht folgende Definition Sinn.

[5] Man beachte, dass man eigentlich $\Xi(\iota \circ T)$ statt $\Xi(T)$ schreiben müsste, wobei $\iota : M_2 \to \mathbb{R}^{p_2}$ die Einbettungsabbildung ist.

4.5.2 Definition. Sei G eine Gruppe derart, dass $G \subseteq \mathbb{R}^p$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit ist und dass die Gruppenmultiplikation als Abbildung

$$\cdot : G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto xy$$

stetig differenzierbar ist. Dann heißt G eine *Lie-Gruppe*.

4.5.3 Bemerkung. Versieht man G mit der von der Euklidischen Topologie auf G induzierten Spurtopologie $\mathcal{T}$, so ist $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe. In der Tat stimmt die Produkttopologie $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ auf $G \times G$ mit der auf $G \times G \subseteq \mathbb{R}^{2p}$ von Euklidischen Topologie induzierten Spurtopologie überein. Somit folgt aus der stetigen Differenzierbarkeit von $\cdot$ auch ihre Stetigkeit (vgl. Lemma 4.4.3).

Da G eine Mannigfaltigkeit ist, gibt es außerdem zu jedem x eine Einbettung $\phi : D \to G$ mit $\phi(D) \ni x$. Insbesondere hat x eine bzgl. $\mathcal{T}$ kompakte Umgebung. Also ist $(G, \mathcal{T})$ eine lokalkompakte Gruppe.

4.5.4 Lemma. *Ist G eine Liegruppe im $\mathbb{R}^p$ und $x \in G$, so ist die Abbildung $l_x : y \mapsto xy,\ G \to G$ ein Diffeomorphismus (vgl. Definition 4.4.1). Entsprechendes gilt für $r_x : y \mapsto yx,\ G \to G$.*

Beweis. Wie in jeder topologischen Gruppe ist l_x ein Homöomorphismus. Um zu sehen, dass l_x ein Diffeomorphismus ist, genügt es die stetige Differenzierbarkeit zu zeigen, da die Inverse $l_{x^{-1}}$ dann ja auch stetig differenzierbar ist.

Sei $y \in G$, $\phi_1 : D_1 \to G$ eine Einbettung mit $\phi_1(s_1) = x,\ s_1 \in D_1$ und $\phi_2 : D_2 \to G$ eine Einbettung mit $\phi_2(s_2) = y,\ s_2 \in D_2$. Weiters sei $\phi_3 : D_3 \to G$ eine Einbettung mit $\phi_1(s_3) = xy,\ s_3 \in D_3$.

Nun ist $\phi_1 \times \phi_2 : D_1 \times D_2 \to G \times G$ eine Einbettung. Bezeichnet $\psi : D_1 \times D_2 \to G$ die Abbildung $(t_1, t_2) \mapsto \phi_1(t_1) \cdot \phi_2(t_2)$, so ist nach Definition 4.5.2 und Definition 4.4.1 $\phi_3^{-1} \circ \psi|_O : O \to D_3$ stetig differenzierbar im klassischen Sinne, wobei

$$O = \{(t_1, t_2) \in D_1 \times D_2 : \phi_1(t_1) \cdot \phi_2(t_2) \in \phi_3(D_3)\}$$

offen in $\mathbb{R}^{2d}$ ist. Klarerweise ist $(s_1, s_2) \in O$. Die Menge $O_{s_1} = \{t \in \mathbb{R}^d : (s_1, t) \in O\} \simeq O \cap (\{s_1\} \times \mathbb{R}^d)$ ist offen in $\mathbb{R}^d$, und die Abbildung

$$t \mapsto \phi_3^{-1}(\phi_1(s_1) \cdot \phi_2(t)) = \phi_3^{-1}(l_x \circ \phi_2(t)),\ t \in O_{s_2}$$

ist als Einschränkung von $\phi_3^{-1} \circ \psi$ auf die vorderen Koordinaten sicherlich stetig differenzierbar. Nach Lemma 4.4.3 ist l_x stetig differenzierbar.

Genauso zeigt man, dass r_x ein Diffeomorphismus ist.

❑

4.5.5 Bemerkung. Mit der Notation aus dem letzten Beweis betrachtet man ψ als Abbildung von $D_1 \times D_2$ nach $\mathbb{R}^p$ $(\supseteq G)$, so ist diese wegen Bemerkung 4.4.7 ebenfalls stetig differenzierbar, wobei $((s, t) = (\xi_1, \dots, \xi_d, \eta_1, \dots, \eta_d) \in D_1 \times D_2)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta_j}(s, t) = \frac{\partial}{\partial \eta_j}(\phi_1(s) \cdot \phi_2(t)) = \frac{\partial}{\partial \eta_j}(l_{\phi_1(s)} \circ \phi_2)(t).$$

Entsprechend gilt $\frac{\partial \psi}{\partial \xi_j}(s, t) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} r_{\phi_2(t)} \circ \phi_1(s)$. Also ist insbesondere

$$d\psi(s, t) = (d(r_{\phi_2(t)} \circ \phi_1)(s) \mid d(l_{\phi_1(s)} \circ \phi_2)(t))$$

stetig. Hält man etwa t fest, so erkennt man, dass insbesondere $s \mapsto d(l_{\phi_1(s)} \circ \phi_2)(t)$ stetig auf D_1 ist.

Da $\phi_1 : D_1 \to \phi_1(D_1)$ ein Homöomorphismus ist und da ϕ_1 eine beliebige Einbettung war, folgt, dass $x \mapsto d(l_x \circ \phi_2)(t)$ stetig auf G ist, und zwar für jede Einbettung $\phi_2 : D_2 \to G$ und jedes $t \in D_2$.

4.5.6 Bemerkung. Wir erkennen nun auch, dass zur Kartierung einer Lie-Gruppe G als Mannigfaltigkeit eigentlich nur eine Einbettung $\phi : D \to G$ mit $e \in \phi(D)$ nötig ist.

Ist nämlich $x \in G$ beliebig, so ist $\phi_x := l_x \circ \phi : D \to G$ wegen Lemma 4.5.4 und Bemerkung 4.4.8 eine Einbettung mit $x \in \phi_x(D)$.

4.5.7 Beispiel. Man betrachte die Gruppe $SL(n, \mathbb{R})$ $(\subseteq \mathbb{R}^{n^2})$. Diese ist definiert durch die Gleichung $F(A) = 0$, wobei $(A = (a_{ij}))$

$$F(A) := \det(A) - 1.$$

Es sei an die Entwicklung von Determinanten durch Koefaktoren aus der linearen Algebra erinnnert. Dabei gilt für $i = 1, \dots, n$

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} a_{il}(-1)^{i+l} \det A_{il},$$

wobei A_{il} diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix ist, die A durch Streichen der i-ten Zeile und l-ten Spalte hervorgeht. Da in A_{il} kein Eintrag der Form a_{ij} auftritt, folgt

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}(A) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

Betrachtet man F als Abbildung von der offenen Teilmenge $GL(n, \mathbb{R})$ von $\mathbb{R}^{n^2}$ nach $\mathbb{R}$, so hat $dF(A)$ $(\in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2})$ immer Rang 1, da aus $\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}(A) = 0,\ i, j = 1, \dots, n$, sicherlich $\det A = 0$ folgen würde, was aber $A \in GL(n, \mathbb{R})$ widerspricht.

Also definiert $F(A) = 0$ eine $(n^2 - 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{n^2}$.

Um zu sehen, dass $\cdot : SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{R}) \to SL(n, \mathbb{R})$ stetig differenzierbar ist, sei $A, B \in SL(n, \mathbb{R})$, und betrachte Einbettungen $\phi_1 : D_1 \to SL(n, \mathbb{R})$ und $\phi_2 : D_2 \to SL(n, \mathbb{R})$ mit $A \in \phi_1(D_1), B \in \phi_2(D_2)$. Nach Aufgabe 4.5.1 ist $\phi_1 \times \phi_2 : D_1 \times D_2 \to SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{R})$ eine Einbettung mit $(A, B) \in \phi_1 \times \phi_2(D_1 \times D_2)$.

Die Abbildung $\psi : (s, t) \mapsto = \cdot \circ \phi_1 \times \phi_2 = \phi_1(s) \cdot \phi_2(t)$ als Abbildung von $D_1 \times D_2$ nach $\mathbb{R}^{n^2}$ erfüllt $(s = (s_1, \dots, s_{n-1})^T,\ t = (t_1, \dots, t_{n-1})^T)$

$$\frac{\partial \psi(s, t)}{\partial s_i} = \frac{\partial \phi_1(s, t)}{\partial s_i} \cdot \phi_2(t),$$

$$\frac{\partial \psi(s, t)}{\partial t_j} = \phi_1(s) \cdot \frac{\partial \phi_2(s, t)}{\partial t_j},$$

und ist somit stetig differenzierbar. Nach Bemerkung 4.4.7 ist auch $\psi : D_1 \times D_2 \to SL(n, \mathbb{R})$ stetig differenzierbar. Also ist $SL(n, \mathbb{R})$ eine (n^2-1)-dimensionale Lie-Gruppe im $\mathbb{R}^{n^2}$.

Folgender Satz ist eine Verallgemeinerung von Lemma 4.3.1 auf Lie-Gruppen.

4.5.8 Satz. *Sei G eine d-dimensionale Lie-Gruppe im $\mathbb{R}^p$. Weiters sei σ das Oberflächenmaß auf G. Dann ist $(B \in \mathfrak{B}(G))$*

$$B \mapsto \int_B \frac{1}{\Xi(l_x)(e)} \, d\sigma(x), \tag{4.11}$$

ein linkes Haarmaß, wobei $l_x : y \mapsto xy$. Dabei ist $x \mapsto \Xi(l_x(e))$, $G \to \mathbb{R}$ stetig. Entsprechend ist

$$B \mapsto \int_B \frac{1}{\Xi(r_x)(e)} \, d\sigma(x), \tag{4.12}$$

ein rechtes Haarmaß, wobei $r_x : y \mapsto yx$.

Beweis. Zunächst gilt

$$\Xi(l_{yx})(e) = \Xi(l_x)(e) \cdot \Xi(l_y)(x).$$

Um das einzusehen, sei $\phi : D \to G$ eine Einbettung mit $\phi(s) = e$ für ein $s \in D$. Nach Bemerkung 4.5.6 ist auch $l_x \circ \phi : D \to G$ eine Einbettung mit $l_x \circ \phi(s) = x$. Da $\Xi(l_y)$ unabhängig von der gewählten Einbettung ist, gilt

$$\Xi(l_y)(x) = \sqrt{\frac{\det d(l_y \circ (l_x \circ \phi))(s)^T d(l_y \circ (l_x \circ \phi))(s)}{\det d(l_x \circ \phi)(s)^T d(l_x \circ \phi)(s)}}$$

und klarerweis

$$\Xi(l_x)(e) = \sqrt{\frac{\det d(l_x \circ \phi)(s)^T d(l_x \circ \phi)(s)}{\det d\phi(s)^T d\phi(s)}}. \tag{4.13}$$

Es folgt

$$\Xi(l_x)(e) \cdot \Xi(l_y)(x) = \sqrt{\frac{\det d(l_y \circ l_x \circ \phi)(s)^T d(l_y \circ l_x \circ \phi)(s)}{\det d\phi(s)^T d\phi(s)}}.$$

Dieser Ausdruck stimmt aber wegen $l_y \circ l_x = l_{yx}$ mit $\Xi(l_{yx})(e)$ überein.

Die Stetigkeit von $x \mapsto \Xi(l_x)(e)$ folgt wegen (4.13) aus Bemerkung 4.5.5.

Also gilt für $f \in C_{00}(G)$ und $s \in G$ (vgl. Satz 4.4.13)

$$\int_G f(yx) \cdot \frac{1}{\Xi(l_x)(e)} \, d\sigma(x) = \int_G f(yx) \cdot \frac{1}{\Xi(l_{yx})(e)} \cdot \Xi(l_y)(x) \, d\sigma(x) =$$

$$\int_G f(\xi) \cdot \frac{1}{\Xi(l_\xi)(e)} \, d\sigma(\xi).$$

Somit ist (4.11) linksinvariant. Genauso zeigt man, dass (4.12) rechtsinvariant ist.

❑

4.5.9 Beispiel. Die Gruppe $(\mathbb{T}, \cdot)$ ist eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^2$, da sie implizit durch die Gleichung $x^2 + y^2 - 1 = 0$ für $(x, y)^T$ in der offenen Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definiert ist.

Für $\exp(ia) \in \mathbb{T}$ ist mit hinreichend kleinem $\epsilon > 0$ $\phi_a : (a - \epsilon, a + \epsilon) \to \mathbb{T}$, $t \mapsto \exp(it)$, eine Einbettung. Ist nun auch $\exp(ib) \in T$, so ist

$$\phi_a \times \phi_b : (a - \epsilon, a + \epsilon) \times (b - \epsilon, b + \epsilon) \to \mathbb{T} \times \mathbb{T},$$

eine Einbettung. Die Abbildung

$$(a - \epsilon, a + \epsilon) \times (b - \epsilon, b + \epsilon) \to \mathbb{R}^2, \ (s, t) \mapsto \phi_a(s) \cdot \phi_b(t) = \exp(i(s + t))$$

ist klarerweise stetig differenzierbar. Nach Bemerkung 4.4.7 ist daher $\cdot : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ stetig differenzierbar. Also ist $(\mathbb{T}, \cdot)$ eine Lie-Gruppe.

Ist $x = \exp(ia) \in \mathbb{T}$ fest und $\exp(ib) \in \mathbb{T}$ beliebig, so gilt

$$l_x \circ \phi_b(s) = \exp(i(a+s)) \simeq \begin{pmatrix} \cos(a+s) \\ \sin(a+s) \end{pmatrix}$$

und daher

$$d(l_x \circ \phi_b)(s) = \begin{pmatrix} -\sin(a+s) \\ \cos(a+s) \end{pmatrix}.$$

also folgt $d(l_x \circ \phi)(s)^T d(l_x \circ \phi)(s) = 1 = d\phi(s)^T d\phi(s)$ und somit $\Xi(l_x)(e) = 1$. Nach Satz 4.5.8 stimmt daher das Oberflächenmaß auf $\mathbb{T}$ mit dem Haarschen Maß überein.

4.5.10 Aufgabe. Man weise nach, dass $\mathbb{T}^n$ ebenfalls eine Lie-Gruppe ist, und dass hier auch das Oberflächenmaß mit dem Haarschen Maß überstimmt.

4.5.11 Aufgabe. Man zeige, dass $O(n)$ (alle orthogonalen $n \times n$-Matrizen) eine Lie-Gruppe im $\mathbb{R}^{n^2}$ ist. Welche Dimension hat diese?

4.5.12 Beispiel. Um das Haarsche Maß in der Lie-Gruppe $O(n)$ zu berechnen betrachte man $\Xi(l_x)$ für ein $x \in O(n)$. Um dieses zu berechnen sei $\phi : D \to O(n)$ eine Einbettung mit $y \in \phi(D)$, dh. $\phi(s) = y$.

Da l_x die Einschränkung der linearen Abbildung $B \mapsto x \cdot B$ von $\mathbb{R}^{n^2}$ auf sich ist, gilt $d(l_x \circ \phi)(s) = l_x \circ d(\phi)(s) = \hat{x} \cdot d(\phi)(s)$, wobei $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ die Darstellung von $B \mapsto x \cdot B$ als $n^2 \times n^2$-Matrix ist. Man sieht leicht, dass auch $\hat{x}$ orthogonal ist.

Somit folgt

$$(d(l_x \circ \phi)(s))^T d(l_x \circ \phi)(s) = d\phi(s)^T \hat{x}^T \hat{x} d\phi(s) = d\phi(s)^T d\phi(s).$$

Also gilt

$$\Xi(l_x)(y) := \sqrt{\frac{\det(d(l_x \circ \phi)(s))^T d(l_x \circ \phi)(s)}{\det d\phi(s)^T d\phi(s)}} = 1,$$

und nach Satz 4.5.8 stimmt das Oberflächenmaß mit dem Haarschen Maß auf $O(n)$ überein.

Entsprechendes gilt für $U(n)$.

Literaturverzeichnis

[L] J.Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie,* Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2005.

[K] N.Kusolitsch: *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie,* Springer.

[R2] W.Rudin: *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill, New York 1966, third edition 1987.

Index