Analysis auf Mannigfaltigkeiten

August 2011

Michael Kaltenbäck

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Mannigfaltigkeiten

1.1 Karten und Atlanten

Wir wollen eingangs Objekte M mathematisch fassen, die anschaulich Geraden bzw. Oberflächen entsprechen. Wir studieren diese Objekte mit sogenannten Karten. Das sind bijektive Abbildungen von dem betrefflichen Objekt auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$, mit deren Hilfe man die Eigenschaften von M zumindest lokal innerhalb eines bekannten Settings studieren kann. Dazu einige grundlegende Definitionen.

1.1.1 Definition.

- Sei M ein topologischer Raum und $d \in \mathbb{N}$. Eine bijektive Abbildung $\varphi : U \to D$ heißt *Karte* auf M mit Werten in $\mathbb{R}^d$, falls $\emptyset \neq U \subseteq M$ und $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen sind, und falls φ ein Homöomorphismus ist, wobei U und D jeweils mit der Spurtopologie versehen wird.
- Ist $\varphi : U \to D$ eine Karte, so bezeichnet man die Abbildung $\varphi^{-1} : D \to U$ als lokale Parametrisierung oder kurz als Einbettung.
- Für ein $r \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ und ein $d \in \mathbb{N}$ ist ein d-dimensionaler C^r*-Atlas* auf M eine Menge $\mathcal{A}$ von Karten $\varphi : U_\varphi \to D_\varphi$ auf M mit Werten in $\mathbb{R}^d$, sodass die Definitionsbereiche der Karten ganz M überdecken, d.h.

  $$M = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} U_\varphi,$$

  und sodass für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ mit $U_\varphi \cap U_\psi \neq \emptyset$

  $$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_\varphi \cap U_\psi)\ (\subseteq D_\varphi) \to \psi(U_\varphi \cap U_\psi)\ (\subseteq D_\psi), \tag{1.1}$$

  eine C^r-Abbildung[1] ist.
- Ist $\mathcal{A}$ ein d-dimensionaler C^r-Atlas auf M und ist ϕ eine d-dimensionale Karte, die in $\mathcal{A}$ liegt oder auch nicht, so nennen wir ϕ mit $\mathcal{A}$ verträglich, wenn auch $\mathcal{A} \cup \{\phi\}$ ein C^r-Atlas auf M ist.

  Einen zweiten Atlas $\mathcal{A}'$ auf M nennen wir *äquivalent* zu $\mathcal{A}$, wenn auch $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ ein Atlas ist.

[1] Für $r = 0$ bedeutet C^r-Abbildung, dass selbige stetig ist.

- Ist M ein topologischer Raum, der das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt, und der eine abzählbare topologische Basis besitzt, d.h. es sei das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, sind $r \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ und $d \in \mathbb{N}$ und ist $\mathcal{A}$ ein d-dimensionaler C^r-Atlas auf M, so nennt man das Paar $(M, \mathcal{A})$ eine d-dimensionale *C^r-Mannigfaltigkeit*.

Da man in (1.1) $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ vertauschen kann, bedeutet diese Forderung gerade, dass $\psi \circ \varphi^{-1}$ im Fall $r = 0$ ein Homöomorphismus und im Fall $r > 0$ ein r-mal stetig differenzierbarer Diffeomorphismus ist.

Wir werden uns hier ausschließlich mit C^r-Mannigfaltigkeiten mit $r \geq 1$ beschäftigen, d.h. mit sogenannten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Meist beschränkt man sich sogar auf den Fall $r = \infty$.

1.1.2 Bemerkung. Ist $(M, \mathcal{A})$ ein d-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit, so schreiben wir in Hinkunft meist nur M dafür und erwähnen meist nicht den dazugehörigen Atlas $\mathcal{A}$. Sprechen wir dann von einer Karte φ auf M, dann meinen wir immer – außer es wird explizit darauf hingewiesen – eine mit $\mathcal{A}$ verträgliche Karte.

1.1.3 Beispiel.

- Für $M = \mathbb{R}^d$ ist $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d} : M \to \mathbb{R}^d$ offensichtlich eine Karte und $\mathcal{A} = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}\}$ ist ein d-dimensionaler C^∞-Atlas. Also ist $(M, \mathcal{A})$ eine d-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit.

- Nimmt man $M = \mathbb{R}^d$ und irgendeinen Homöomorphismus $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, der nicht differenzierbar ist, so ist auch $(M, \{\phi\})$ eine d-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit, da Bedingung (1.1) trivialerweise erfüllt ist. Nun ist aber die Karte $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}$ nicht verträglich mit dem Atlas $\{\phi\}$.

- Ist M ein d-dimensionaler affiner Teilraum von $\mathbb{R}^p$, und ist $f : \mathbb{R}^d \to M$ eine affine Abbildung der Bauart $x \mapsto y + Ax$ mit einer injektiven linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ und einem festen $y \in M$, so ist $\mathcal{A} = \{f^{-1}\}$ ein d-dimensionaler C^∞-Atlas.

- Ist allgemeiner $f : D \to \mathbb{R}^p$ eine injektive und stetige Abbildung von einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}^p$, sodass $f^{-1} : f(D)\ (\subseteq \mathbb{R}^p) \to D$ ebenfalls stetig ist, so ist $M = f(D)$ versehen mit dem Atlas $\{f^{-1}\}$ eine d-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit. Wir wollen derartige Mannigfaltigkeiten als d-dimensionale *Flächen* im $\mathbb{R}^p$ bezeichnen.

- Sei $D = (-1, 1) \times (-1, 1)$ und $M := f(D)$ mit

$$f\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \xi^2 + \eta^2 \end{pmatrix}$$

  Diese Abbildung ist offensichtlich injektiv. Sie ist stetig, da alle Komponentenfunktionen stetig sind. Außerdem ist $f^{-1} : M \to D$ nichts anderes als die Projektion auf die ersten beiden Koordinaten, und somit auch stetig.

Wir werden später sehen, dass die Mannigfaltigkeiten aus der Analysis III in unser Schema hier passen.

1.1.4 Fakta.

1. Ist M eine d-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit, so ist M als topologischer Raum lokalkompakt (und damit regulär):

   Ist $x \in M$ und $\varphi : U \to D$ eine (mit dem M zugrunde liegenden Atlas verträgliche) Karte mit $x \in U$, so sei $\epsilon > 0$ so klein, dass die abgeschlossene Kugel $K_\epsilon(\varphi(x))$ in D enthalten ist. Die Menge $\varphi^{-1}(K_\epsilon(\varphi(x)))$ ist als stetiges Bild einer kompakten Menge selbst kompakt und enthält die in der Spurtopologie offene Menge $\varphi^{-1}(U_\epsilon(\varphi(x))) \ni x$. Also hat x eine kompakte Umgebung.

2. Sei M eine d-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit und $\varphi : U \to D$ eine (mit dem M zugrunde liegenden Atlas verträgliche) Karte und $U' \subseteq U$ $(\subseteq M)$ offen und nichtleer, so ist auch $D' := \varphi(U') \subseteq D$ offen und nichtleer. Umgekehrt ist für ein offenes nichtleeres $D' \subseteq D$ sicherlich auch $U' := \varphi^{-1}(D') \subseteq U$ $(\subseteq M)$ offen und nichtleer.

   In jedem Fall ist dann auch $\varphi|_{U'} : U' \to D'$ eine (mit dem M zugrunde liegenden Atlas verträgliche) Karte, weil die Bedingung, dass die Funktion in (1.1) C^r ist, bei der Einschränkung auf eine offene Teilmenge erhalten bleibt.

3. Aus dem letzen Punkt folgt sofort, dass, wenn $(M, \mathcal{A})$ eine d-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit und $O \subseteq M$ offen ist, dann auch $(O, \mathcal{A}')$ eine d-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit ist, wobei

$$\mathcal{A}' := \{\varphi|_{U_\varphi \cap O} : \varphi \in \mathcal{A},\ U_\varphi \cap O \neq \emptyset\}.$$

4. Ist $(M_i, \mathcal{A}_i), i \in I$, eine endliche oder abzählbar unendliche Familie von d-dimensionalen C^r-Mannigfaltigkeiten, wobei $M_j \cap M_i = \emptyset$ für alle $i \neq j$, und versieht man $M := \dot{\bigcup}_{i \in I} M_i$ mit der finalen Topologie bezüglich der Abbildungen $\iota_{M_i} : M_i \to M,\ x \mapsto x$, so ist $(M, \mathcal{A})$ eine d-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit, wobei

$$\mathcal{A} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i.$$

5. Sei M eine d-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit. Ist $\varphi : U_\varphi \to D_\varphi$ eine (mit dem M zugrunde liegenden Atlas verträgliche) Karte und $x \in U_\varphi$, so ist auch $y \mapsto \varphi(y) - \varphi(x)$ eine (mit dem M zugrunde liegenden Atlas verträgliche) Karte, die zudem x auf $0 \in \mathbb{R}^d$ abbildet.

   Ist allgemeiner $h : D_\varphi \to O$ $(\subseteq \mathbb{R}^d)$ ein C^r-Diffeomorphismus, so ist $h \circ \varphi : U_\varphi \to O$ ein (mit dem M zugrunde liegenden Atlas verträgliche) Karte.

1.1.5 Lemma (*Lindelöf*)**.** *Sei $U_i,\ i \in I$, eine offene Überdeckung eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$, d.h. $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Hat $(X, \mathcal{T})$ eine abzählbare Basis, so gibt es eine höchstens abzählbare Teilmenge $J \subseteq I$, sodass $U_i,\ i \in J$, ebenfalls X überdeckt.*

Beweis. Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis von $(X, \mathcal{T})$. Da jede offene Menge als Vereinigung von Basismengen geschrieben werden kann, gibt es zu jedem i und jedem $x \in U_i$ ein $B_{i,x} \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_{i,x} \subseteq U_i$. Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller derart getroffenen Mengen aus $\mathcal{B}$.

Da mit $\mathcal{B}$ auch $\mathcal{A}$ höchstens abzählbar ist, gibt es $(i(n), x(n)),\ n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\mathcal{A} = \{B_{i(n),x(n)} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ist nun $x \in X$, so gibt es laut Voraussetzung ein i mit $x \in U_i$. Wegen $B_{i,x} \in \mathcal{A}$ gibt es ein n, sodass $x \in B_{i,x} = B_{i(n),x(n)} \subseteq U_i$, wobei i.A. $i \neq i(n), x \neq x(n)$. Da aber auch $B_{i(n),x(n)} \subseteq U_{i(n)}$, folgt $x \in U_{i(n)}$, und wir sehen, dass die $U_{i(n)},\ n \in \mathbb{N}$, ganz X überdecken.

❑

1.1.6 Korollar. *Ist $(M, \mathcal{A})$ eine Mannigfaltigkeit, so gibt es einen Teilatlas $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, der aus abzählbar vielen Karten besteht.*

Beweis. Aus Lemma 1.1.5 angewandt auf $U_\varphi,\ \varphi \in \mathcal{A}$, folgt sofort die Aussage. ❑

1.1.7 Lemma. *Sei $(M_1, \mathcal{A}_1)$ eine d_1-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit und $(M_2, \mathcal{A}_2)$ eine d_2-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit. Versieht man $M := M_1 \times M_2$ mit der Produkttopologie und mit dem Atlas*

$$\mathcal{A} := \{\varphi_1 \times \varphi_2 : \varphi_1 \in \mathcal{A}_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}_2\},$$

so ist auch $(M, \mathcal{A})$ eine $d_1 + d_2$-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit, die sogenannte Produktmannigfaltigkeit *von M_1 und M_2. Dabei ist $\varphi_1 \times \varphi_2 : U_{\varphi_1} \times U_{\varphi_2}\ (\subseteq M) \to D_{\varphi_1} \times D_{\varphi_2}\ (\subseteq \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \cong \mathbb{R}^{d_1+d_2})$ die Abbildung $(x, y) \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(y))$.*

Beweis. Bekannterweise ist M versehen mit der Produkttopologie lokalkompakt und Hausdorffsch, und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Für $\varphi_1 \in \mathcal{A}_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}_2$ sind zudem $U_{\varphi_1} \times U_{\varphi_2}$ und $D_{\varphi_1} \times D_{\varphi_2}$ offen in M bzw. $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \cong \mathbb{R}^{d_1+d_2}$, und $\varphi_1 \times \varphi_2 : U_{\varphi_1} \times U_{\varphi_2} \to D_{\varphi_1} \times D_{\varphi_2}$ ist ein Homöomorphismus.

Sind $\varphi_1, \psi_1 \in \mathcal{A}_1, \varphi_2, \psi_2 \in \mathcal{A}_2$ so, dass $U_{\varphi_1} \cap U_{\psi_1} \neq \emptyset,\ U_{\varphi_2} \cap U_{\psi_2} \neq \emptyset$, so gilt

$$(\psi_1 \times \psi_2) \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1} = (\psi_1 \circ \varphi_1^{-1}) \times (\psi_2 \circ \varphi_2^{-1}) :$$

$$(\varphi_1 \times \varphi_2)((U_{\varphi_1} \cap U_{\psi_1}) \times (U_{\varphi_2} \cap U_{\psi_2})) \to (\psi_1 \times \psi_2)((U_{\varphi_1} \cap U_{\psi_1}) \times (U_{\varphi_2} \cap U_{\psi_2})),$$

womit diese Abbldung C^r ist. Wegen

$$M = M_1 \times M_2 = \left(\bigcup_{\varphi_1 \in \mathcal{A}_1} U_{\varphi_1}\right) \times \left(\bigcup_{\varphi_2 \in \mathcal{A}_2} U_{\varphi_2}\right) = \bigcup_{\varphi_1 \in \mathcal{A}_1,\ \varphi_2 \in \mathcal{A}_2} U_{\varphi_1} \times U_{\varphi_2}$$

ist $\mathcal{A}$ ein Atlas. ❑

Wie fast überall in der Mathematik sind Funktionen, die strukturerhaltend sind, von ganz besonderem Interesse. Bei den Mannigfaltigkeiten sind das die differenzierbaren Abbildungen.

1.1.8 Definition. Seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ zwei C^r-Mannigfaltigkeiten mit einem $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt m-mal *stetig differenzierbar* mit einem $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, m \leq r$, wenn es zu jedem $x \in M$ eine mit $\mathcal{A}$ verträgliche Karte φ mit $x \in U_\varphi$ und eine mit $\mathcal{B}$ verträgliche Karte ψ mit $f(x) \in U_\psi$ gibt, sodass $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$ und sodass

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : D_\varphi \to D_\psi$$

m-mal stetig differenzierbar ist. Die Menge aller m-mal stetig differenzierbaren Abbildungen von M nach N bezeichnen wir mit $C^m(M, N)$.
Ein bijektives $f : M \to N$ heißt C^m-*Diffeomorphismus*, wenn f und f^{-1} im Sinne von oben in $C^m(M, N)$ bzw. in $C^m(N, M)$ liegen.

1.1.9 Fakta.

1. Sei $f \in C^m(M, N)$, und seien φ und ψ Karten wie in Definition 1.1.8 zu einem gegebenen $x \in M$. Da U_φ offen ist, und da

$$f|_{U_\varphi} = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi : U_\varphi \to N$$

   als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig ist, folgt die Stetigkeit von f bei x. Da x beliebig war, ist $f : M \to N$ auf ganz M stetig.

2. Ist $f : M \to N$ ein C^m-Diffeomorphismus, so ist f wegen des letzten Punktes auch ein Homöomorphismus.

3. Ist $f : M \to N$ in $C^m(M, N)$, und sind $\tilde{\varphi}$ bzw. $\tilde{\psi}$ zwei beliebige (mit $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ verträgliche) Karten auf M bzw. N, sodass $f(U_{\tilde{\varphi}}) \subseteq U_{\tilde{\psi}}$, so ist auch

$$\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1} : D_{\tilde{\varphi}} \to D_{\tilde{\psi}}$$

   m-mal stetig differenzierbar. Insbesondere bleibt die m-malige Differenzierbarkeit von f erhalten, wenn man auf M und N jeweils zu äquivalenten Atlanten übergeht.

   Um das einzusehen sei $x \in U_{\tilde{\varphi}}$, und seien φ und ψ Karten wie in Definition 1.1.8. Also gilt $f(U_\varphi \cap U_{\tilde{\varphi}}) \subseteq U_\psi \cap U_{\tilde{\psi}}$ und damit gemäß (1.1)

$$\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}|_{\tilde{\varphi}(U_\varphi \cap U_{\tilde{\varphi}})} = (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})|_{\tilde{\varphi}(U_\varphi \cap U_{\tilde{\varphi}})},$$

   wobei $\tilde{\varphi}(U_\varphi \cap U_{\tilde{\varphi}})$ eine offene $\tilde{\varphi}(x)$ enthaltende Teilmenge von $D_{\tilde{\varphi}}$ ist. Also ist $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1} : D_{\tilde{\varphi}} \to D_{\tilde{\psi}}$ lokal um jeden Punkt von $D_{\tilde{\varphi}}$ – und daher überall – als Zusammensetzung von C^m-Abbildungen auch m-mal stetig differenzierbar.

4. Aus 3 und 1 erkennt man leicht, dass $f : M \to N$ genau dann C^m ist, wenn $f : M \to N$ stetig ist und wenn für alle Karten φ auf M und ψ auf N die Abbildung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ auf ihrem maximalen Definitionsbereich $\varphi(f^{-1}(U_\psi) \cap U_\varphi)$ eine klassische C^m-Abbildung ist.

5. Sind $M \subseteq \mathbb{R}^p$ und $N \subseteq \mathbb{R}^q$ offen versehen mit den Atlanten $\{\mathrm{id}_M\}$ bzw. $\{\mathrm{id}_N\}$, so liegt ein $f : M \to N$ genau dann in $C^m(M, N)$, wenn f als Abbildung von M nach $\mathbb{R}^q$ im klassischen Sinne m-mal stetig differenzierbar ist.

6. Ist φ eine Karte auf M, so ist $\varphi : U_\varphi \to D_\varphi$ ein C^r-Diffeomorphismus, wobei U_φ für sich eine Mannigfaltigkeit wie in Fakta 1.1.4, 3, und D_φ mit dem Atlas $\{\mathrm{id}_{D_\varphi}\}$ versehen ist.

7. Die Hintereinanderausführung von m-mal stetig differenzierbaren Funktionen zwischen Mannigfaltigkeiten ist wieder m-mal stetig differenzierbar.

   Insbesondere ist die Hintereinanderausführung von C^m-Diffeomorphismen zwischen Mannigfaltigkeiten wieder ein C^m-Diffeomorphismus.

   Dazu seien $f : M \to N$ und $h : N \to L$ in $C^m(M, N)$ bzw. $C^m(N, L)$. Zu $x \in M$ gibt es Karten ψ auf N und ϕ auf L mit $f(x) \in U_\psi$, $h(f(x)) \in U_\phi$ und $h(U_\psi) \subseteq U_\phi$, sodass $\phi \circ h \circ \psi^{-1} : D_\psi \to D_\phi$ m-mal stetig differenzierbar ist.

   Ist nun φ eine Karte auf M mit $x \in U_\varphi$, so ist wegen der Stetigkeit von f die Menge $U' := f^{-1}(U_\psi) \cap U_\varphi$ eine offene Teilmenge von U_φ mit $x \in U'$. Nach Fakta 1.1.4 ist auch $\varphi' := \varphi|_{U'} : U' \to \varphi(U')$ eine Karte, die zudem $x \in U_{\varphi'} = U'$, $f(U_{\varphi'}) \subseteq U_\psi$ und $h \circ f(U_{\varphi'}) \subseteq h(U_\psi) \subseteq U_\phi$ erfüllt.

Nach 3, ist zudem $\psi \circ f \circ (\varphi')^{-1} : D_{\varphi'} \to D_\psi$ und daher auch

$$(\phi \circ h \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ (\varphi')^{-1}) = \phi \circ h \circ f \circ (\varphi')^{-1} : D_{\varphi'} \to D_\phi.$$

m-mal stetig differenzierbar.

8. Mit der Notation von Lemma 1.1.7 ist die Projektion $\pi_j : M_1 \times M_2 \to M_j$ für $j = 1, 2$ eine r-mal stetig differenzierbare Abbildung.

   Wegen 7 sind damit für eine C^m-Abbildung $f : L \to M_1 \times M_2$ mit einer C^r-Mannigfaltigkeit L die Abbildungen $\pi_j \circ f : L \to M_j$ auch m-mal stetig differenzierbar und zwar für $j = 1, 2$.

   Man zeigt unschwer, dass auch die Umkehrung gilt; also ist eine Abbildung $f : L \to M_1 \times M_2$ genau dann m-mal stetig differenzierbar, wenn beide Abbildungen $\pi_1 \circ f : L \to M_1$ und $\pi_2 \circ f : L \to M_2$ es sind.

1.1.10 Bemerkung. Ist $M = G$ gleichzeitig eine d-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit und eine Gruppe, sodass die Multiplikation $\cdot : G \times G \to G$ r-mal stetig differenzierbar ist, so spricht man von einer *C^r-Liegruppe*. Ein Beispiel für eine C^∞-Liegruppe ist z.B. $GL(n, \mathbb{R})$.

Man zeigt leicht, dass dann z.B. auch die Abbildung $l_g : x \mapsto gx$ (Linkstranslation) von G nach G für jedes $g \in G$ ein C^r-Diffeomorphismus ist.

Den Beweis des folgenden Lemmas überlassen wir dem Leser als Übung; siehe Analysis III.

1.1.11 Lemma. *Ist $O \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $t \in O$ und $\epsilon >$ so, dass $K_\epsilon(t) \subseteq O$, so gibt es ein $h \in C^\infty(O, \mathbb{R})$ mit kompaktem Träger* $\operatorname{supp} h \subseteq O$*, mit $h(O) \subseteq [0, 1]$ und $h(K_\epsilon(t)) = \{1\}$.*

1.1.12 Satz. *Sei M eine C^r-Mannigfaltigkeit.*

1. *Sei $(O_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von M. Dann gibt es eine C^r-*Zerlegung der Eins*, d.h. abzählbar viele C^r-Funktionen $\chi_j : M \to [0, 1]$, $j = 1, \dots, l$ mit $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, sodass der Träger* $\operatorname{supp}(\chi_j) = \overline{\{x \in M : \chi_j(x) \neq 0\}}$ *einer jeden dieser Funktionen kompakt und in einem $O_{i(j)}$ enthalten ist, und sodass*

$$1 = \sum_{j=1}^{l} \chi_j(x), \quad x \in M.$$

   Dabei gibt es zu jedem $x \in M$ eine Umgebung V_x um x und einen Index $l(x) \in \mathbb{N}$, sodass $\chi_j(y) = 0$ für alle $j > l(x)$ und alle $y \in V_x$, womit $\sum_{j=1}^{l} \chi_j$ lokal eine endliche Summe ist.

2. *Ist K eine kompakte Teilmenge von M und $(O_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K, so gibt es endliche viele C^r-Funktionen $\chi_j : M \to [0, 1]$, $j = 1, \dots, l$ mit einem $l \in \mathbb{N}$, sodass der Träger* $\operatorname{supp}(\chi_j) = \overline{\{x \in M : \chi_j(x) \neq 0\}}$ *einer jeden dieser Funktionen kompakt und in einem $O_{i(j)}$ enthalten ist, und sodass*

$$\mathbb{1}_K(x) \leq \sum_{j=1}^{l} \chi_j(x) \leq 1, \quad x \in M.$$

Beweis. Folgender Beweis funktioniert für beide Aussagen.

Zu jedem $x \in M$ bzw. $x \in K$ wähle man eine Karte φ_x mit $x \in U_{\varphi_x}$ und so, dass $U_{\varphi_x} \subseteq O_{i(x)}$ für ein $i(x) \in I$, vgl. Fakta 1.1.4. Lemma 1.1.11 angewandt auf $\varphi_x(x)$ ergibt eine C^∞-Funktion $h_x : D_{\varphi_x} \to \mathbb{R}$ mit kompakten Träger $\operatorname{supp} h_x \subseteq D_{\varphi_x}$ mit $h_x(D_{\varphi_x}) \subseteq [0,1]$ und $h_x(K_{\epsilon_x}(\varphi_x(x))) = \{1\}$ für ein $\epsilon_x > 0$, sodass $K_{\epsilon_x}(\varphi_x(x)) \subseteq D_{\varphi_x}$.

Setzen wir $h_x \circ \varphi_x$ durch Null auf ganz M fort, so folgt aus der Tatsache, dass die Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, dass diese Fortsetzung f_x eine C^r-Funktion ist.

Klarerweise stellt $(\varphi_x^{-1}(U_{\epsilon_x}(\varphi_x(x))))_{x\in K}$ eine offene Überdeckung von M bzw. K dar. Im ersten Fall folgt aus Lemma 1.1.5 bzw. im zweiten Fall folgt aus der Kompaktheit von K, dass abzählbar bzw. endliche viele dieser offenen Mengen $\varphi_{x_j}^{-1}(U_{\epsilon_{x_j}}(\varphi_{x_j}(x_j))),\ j = 1, \dots, l$ mit einem $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ schon M bzw. K überdecken.

Wir definieren nun $\chi_1 = f_{x_1}$ und für $j < l$

$$\chi_{j+1} = f_{x_{j+1}} \prod_{k=1}^{j} (1 - f_{x_k}).$$

Klarerweise haben alle Funktionen χ_j Werte in $[0,1]$, wobei der Träger von χ_j in dem von f_{x_j} und somit kompakt und in $O_{i(x_j)}$ enthalten ist. Zudem sind die χ_j aus $C^r(M, \mathbb{R})$.

Schließlich zeigt man unschwer durch ein induktives Argument, dass $(j + 1 < l)$

$$\sum_{k=1}^{j} \chi_k = 1 - \prod_{k=1}^{j} (1 - f_{x_k}).$$

Insbesondere hat $\sum_{k=1}^{j} \chi_k$ Werte im Intervall $[0,1]$.

Für $x \in M$ bzw. $x \in K$ ist x in einem $\varphi_{x_k}^{-1}(U_{\epsilon_{x_k}}(\varphi_{x_k}(x_k)))$ enthalten. Ist ein x in einem solchen $\varphi_{x_k}^{-1}(U_{\epsilon_{x_k}}(\varphi_{x_k}(x_k)))$ enthalten, so folgt für alle $y \in \varphi_{x_k}^{-1}(U_{\epsilon_{x_k}}(\varphi_{x_k}(x_k)))$, dass $f_{x_k}(y) = 1$ und damit $\sum_{r=1}^{j} \chi_r(y) = 1$ für alle $j \geq k$. Also ist $\chi_j(y) = 0$ für alle $j > k$.

❑

1.2 Tangentialraum

Wenn man an eine d-dimensionale Fläche $M = \phi(D)$ im $\mathbb{R}^p$ mit einem Homöomorphismus $\phi : D \to \phi(D)$, wobei $\phi : D \to \phi(D)$ stetig differenzierbar mit $\operatorname{rang} d\phi(s) = d,\ s \in D$ ist, denkt, so ist der Tangentialraum in einem Punkt $x \in M$ definiert als der d-dimensionale lineare Teilraum $d\phi(s)\,(\mathbb{R}^d)$ von $\mathbb{R}^p$. Bei abstrakten Mannigfaltigkeiten hat man keinen $\mathbb{R}^p$, worin M eingebettet liegt. Somit gestaltet sich schon die Definition des Tangentialraumes als nicht ganz einfach.

Die offensichtlichste Möglichkeit, den Tangentialraum T_xM bei einem Punkt x auf einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit M einzuführen ist die, einfach eine Kopie des $\mathbb{R}^d$ herzunehmen. Das Problematische dabei ist, diesen Tangentialraum in Verbindung zur Abbildung in und aus der Mannigfaltigkeit zu setzen.

Wir führen den Tangentialraum T_xM bei einem Punkt x auf einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{A})$ ein, indem wir zunächst zumindest einmal alle stetig differenzierbaren Abbildungen $c : I_c \to M$ mit einem offenen reellen Intervall I_c, sodass $0 \in I_c$

und $c(0) = x$, betrachten, wobei I_c mit dem Atlas $\{\mathrm{id}_{I_c}\}$ versehen ist, vgl. Definition 1.1.8, um dann die Menge

$$\mathcal{T}_x M := \{c : c \in C^1(I_c, M) \wedge c(0) = x\}$$

aller solchen Abbildungen mit der Äquivalenzrelation

$$c \sim b :\Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathcal{A} : \; x \in U_\varphi \wedge \; (\varphi \circ c)'(0) = (\varphi \circ b)'(0) \; (\in \mathbb{R}^d)$$

zu versehen. Man schließt leicht mit Hilfe der Kettenregel (vgl. (1.2)), dass diese Definition nicht von der konkreten Karte φ abhängt und dass in Folge $\sim$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist. Außerdem gilt $c \sim b$, wenn c und b auf irgendeiner Umgebung der reellen Null übereinstimmen.

1.2.1 Definition. Für eine d-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{A})$ und ein $x \in M$ sei der *Tangentialraum* bei x definiert als

$$T_x M := \mathcal{T}_x M / \sim$$

Für eine stetig differenzierbare Abbildung $g : I \to M$ mit einem offenen $I \subseteq \mathbb{R}$ wollen wir $g'(s)$ als die Restklasse

$$g'(s) := [\, (t \mapsto g(s+t)) \,]_\sim \;\; (\in T_{g(s)} M)$$

definieren.

1.2.2 Bemerkung. Ist $U \subseteq M$ offen und $x \in U$, so ist U gemäß Fakta 1.1.4, 3, selber eine Mannigfaltigkeit. Da $T_x M$ nur vom Aussehen der Wege lokal bei x abhängen, lässt sich $T_x M$ mit $T_x U$ vermöge der Abbildung $[c]_\sim \mapsto [c|_{J_c}]_\sim$ identifizieren, wobei J_c ein offenes Intervall um die Null mit $J_c \subseteq I_c$ ist, sodass $c(J_c) \subseteq U$.

1.2.3 Bemerkung. Für eine gegebene Karte φ mit $x \in U_\varphi$ ist

$$\mathrm{t}_x \varphi : [c]_\sim \mapsto (\varphi \circ c)'(0)$$

offensichtlich eine injektive Abbildung von $T_x M$ nach $\mathbb{R}^d$. Sie ist sogar bijektiv, da zu einem $v \in \mathbb{R}^d$ die Kurve $c_v(t) := \varphi^{-1}(\varphi(x) + tv),\; \varphi(x) + tv \in D_\varphi$, sicherlich

$$(\varphi \circ c_v)'(0) = v$$

erfüllt. Somit können wir $T_x M$ mit einer Vektorraumstruktur – also mit $+$ und $\cdot$ – versehen, indem wir fordern, dass $\mathrm{t}_x \varphi$ linear ist. Das Nullelement auf $T_x M$ ist – wie man sich leicht überzeugt – die von der Konstanten $c \equiv x$ aufgespannte Restklasse.

Diese Vektorraumstruktur hängt ad hoc von φ ab und macht $T_x M$ zu einem Vektorraum der Dimension d über $\mathbb{R}$. Um die Unabhängigkeit von φ nachzuweisen, sei ϕ eine zweite Karte, die $x \in U_\phi$ erfüllt. Nach der mehrdimensionalen Kettenregel (Analysis II) gilt

$$(\phi \circ c)'(0) = ((\phi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c))'(0) = d(\phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\, (\varphi \circ c)'(0). \tag{1.2}$$

Dabei ist $d(\phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$ eine reguläre, lineare Abbildung von $\mathbb{R}^d$ auf sich. Wir schließen

$$\mathrm{t}_x \phi = d(\phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ \mathrm{t}_x \varphi. \tag{1.3}$$

Wenn wir T_xM wie oben beschrieben ausgehend von φ mit einer Vektorraumstruktur versehen, dann ist die rechte Seite und damit auch $\mathrm{t}_x\phi$ eine reguläre, lineare Abbildung von T_xM auf $\mathbb{R}^d$. Also stimmt die gegebene Vektorraumstruktur auf T_xM mit der überein, wenn man eingangs verlangt, dass $\mathrm{t}_x\phi$ linear ist.

Da $c_v : t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(x)+tv)$ sogar r-mal stetig differenzierbar ist und da die $[c_v]_\sim$, $v \in \mathbb{R}^d$ ganz T_xM aufspannen, gilt auch $T_xM = \{[c]_\sim : c \in \mathcal{T}_xM, c \in C^r(I_c, M)\}$.

Somit macht folgende Definition Sinne.

1.2.4 Definition. Sei T_xM mit jener Vektorraumstruktur (+ und $\cdot$) versehen, sodass für alle Karten φ auf M mit $x \in U_\varphi$ die Abbildung $\mathrm{t}_x\varphi$ linear ist.

Offensichtlich hat T_xM dann Dimension d.

1.2.5 Beispiel. Ist M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ versehen mit dem Atlas $\{\mathrm{id}_M\}$, und nimmt man $\varphi = \mathrm{id}_M$, so ist die Abbildung $[c]_\sim \mapsto (\varphi \circ c)'(0)$ nichts anderes als $\mathrm{t}_x \,\mathrm{id}_M : [c]_\sim \mapsto c'(0)$. Also erhalten wir eine kanonische Identifikation von T_xM mit $\mathbb{R}^d$.

1.2.6 Beispiel. Wir betrachten die Gruppe $G := GL(n, \mathbb{R})$ als bekannterweise offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n\times n}$. Versehen mit $\{\mathrm{id}_G\}$ ist G eine n^2-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit. Sie ist in der Tat eine Lie-Gruppe, denn $\cdot : G \times G \to G$ ist C^∞.

Der Tangentialraum bei $I = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \in GL(n, \mathbb{R})$, also T_IG, ist vermöge

$$\mathrm{t}_I \,\mathrm{id}_G : T_IG \to \mathbb{R}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{n\times n}$$

isomorph zu $\mathbb{R}^{n\times n}$. Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $|t| < \frac{1}{\|A\|}$ liegt

$$c_A(t) := I + tA$$

in G mit $c_A(0) = I$; also $[c_A]_\sim \in T_IG$. Nun gilt

$$\mathrm{t}_I \,\mathrm{id}_G([c_A]_\sim) = c_A'(0) = A.$$

Ein Dimensionsvergleich ergibt $T_IG = \{[c_A]_\sim : A \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$, wobei die Zuordnung $A \mapsto [c_A]_\sim$ gerade die Inverse von $\mathrm{t}_I \,\mathrm{id}_G$ ist.

Betrachtet man ein allgemeines $B \in G$ und $c_A(t) = B + tA$ für hinreichend kleines $|t|$, so folgt genauso, dass $[c_A]_\sim \in T_BG$ und

$$\mathrm{t}_B \,\mathrm{id}_G([c_A]_\sim) = c_A'(0) = A.$$

Also gilt für alle $B \in G$

$$T_BG = \{[c_A]_\sim : A \in \mathbb{R}^{n\times n}\},$$

wobei auch $A \mapsto [c_A]_\sim$ die Inverse von $\mathrm{t}_B \,\mathrm{id}_G$ ist. Um herauszuheben, dass wir den Tangentialraum bei B betrachten, schreiben wir für c_A auch c_A^B.

1.2.7 Bemerkung. Sei M eine d-dimensionalen C^r-Mannigfaltigkeit. Ist φ eine Karte auf M mit $x \in U_\varphi$ und ist $i = 1, \ldots, d$, so sei

$$c_i(t) := \varphi^{-1}(\varphi(x) + te_i), \; t \in I_{c_i},$$

wobei I_{c_i} ein offenes Intervall um die Null ist, sodass $\varphi(x) + te_i \in D_\varphi$ für alle $t \in I_{c_i}$. Dann gilt $c_i \in \mathcal{T}_xM$, und wir setzen

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_x := [c_i]_\sim.$$

Wegen $(\varphi \circ c_i)'(0) = \mathrm{t}_x\varphi([c_i]_\sim) = e_i$ ist $\frac{\partial}{\partial\varphi_i}|_x,\ i = 1, \dots, d$, eine Vektorraumbasis von T_xM, vgl. Definition 1.2.4.

1.2.8 Definition. Seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten mit einem $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ist $f : M \to N$ mindestens einmal stetig differenzierbar und $x \in M$, so sei $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$ die Abbildung definiert durch

$$T_xf([c]_\sim) := [f \circ c]_\sim,\ \ [c]_\sim \in T_xM.$$

Diese Abbildung heißt die *Ableitung* von f.

1.2.9 Beispiel. Sind M und N offene Teilmengen von $\mathbb{R}^{d_1}$ bzw. $\mathbb{R}^{d_2}$ (versehen mit dem Atlas $\{\mathrm{id}_M\}$ bzw. $\{\mathrm{id}_N\}$), und wird für $x \in M$ der Tangentialraum T_xM wie in Beispiel 1.2.5 vermöge $\mathrm{t}_x\,\mathrm{id}_M$ mit $\mathbb{R}^{d_1}$ und $T_{f(x)}N$ vermöge $\mathrm{t}_{f(x)}\,\mathrm{id}_N$ mit $\mathbb{R}^{d_2}$ identifiziert, so gilt wegen der Kettenregel aus der Analysis II

$$\mathrm{t}_{f(x)}\,\mathrm{id}_N \circ T_xf([c]_\sim) = \mathrm{t}_{f(x)}\,\mathrm{id}_N([f \circ c]_\sim) = \\ (f \circ c)'(0) = df(x)c'(0) = df(x) \circ \mathrm{t}_x\,\mathrm{id}_M([c]_\sim),$$

wobei das $df(x)$ rechts in dieser Relation die Ableitung im Sinne der Analysis II ist. Wir sehen, dass in dem gegenwärtigen Fall die Abbildung T_xf der klassischen Ableitung $df(x)$ entspricht.

1.2.10 Fakta.

1. T_xf ist wohldefiniert, da $f \circ c \in \mathcal{T}_{f(x)}N$, und da für $c \sim b$ und Karten φ und ψ auf M bzw. N mit $x \in U_\varphi$, $f(x) \in U_\psi$, $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$ wie in Definition 1.1.8

   $$(\psi \circ f \circ c)'(0) = ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c))'(0) = d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\,(\varphi \circ c)'(0) =$$
   $$d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\,(\varphi \circ b)'(0) = (\psi \circ f \circ b)'(0),$$

   also $f \circ c \sim f \circ b$.

2. Wir erkennen aus dieser Gleichung auch, dass

   $$\mathrm{t}_{f(x)}\psi\ \ T_xf = d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\ \ \mathrm{t}_x\varphi, \tag{1.4}$$

   wobei rechts die Ableitung wie in der Analysis II gemeint ist. Da die Vektorraumstruktur auf T_xM und $T_{f(x)}N$ vermöge $\mathrm{t}_x\varphi$ bzw. $\mathrm{t}_{f(x)}\psi$ definiert ist, folgt $T_xf \in L(T_xM, T_{f(x)}N)$.

   Wir erkennen aus (1.4) auch, dass die lineare Abbildung T_xf die Koordinatendarstellung $d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$ hat, wenn wir T_xM und $T_{f(x)}N$ mit den Basen

   $$\frac{\partial}{\partial\varphi_i}|_x,\ i = 1\dots, \dim M, \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial}{\partial\psi_i}|_{f(x)},\ i = 1\dots, \dim N,$$

   wie in Bemerkung 1.2.7 versehen.

3. Da $d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$ in (1.4) nur vom Aussehen von $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ lokal bei $\varphi(x)$ abhängt, d.h. nur von der Einschränkung von $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ auf jede noch so kleine Umgebung von $\varphi(x)$, hängt $T_xf([c]_\sim)$ auch nur vom Aussehen von f lokal bei x ab.

4. Es gilt $T_x \mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{T_x M}$.

5. Ist in (1.4) $\psi = \mathrm{id}_{D_\varphi}$ und $f = \varphi : U_\varphi \to D_\varphi$ – U_φ als Mannigfaltigkeit wie in Fakta 1.1.4, 3, betrachtet –, so folgt
$$(\mathrm{t}_{\varphi(x)}\ \mathrm{id}_{D_\varphi})\ \ T_x\varphi = \mathrm{t}_x\varphi.$$

6. Ist auch L eine C^r-Mannigfaltigkeit und $g : N \to L$ mindestens einmal stetig differenzierbar, so gilt die *Kettenregel*
$$T_{f(x)}g\ \ T_x f = T_x(g \circ f),$$
da für $[c]_\sim \in T_x M$ sicherlich $[f \circ c]_\sim \in T_{f(x)}N$ und daher
$$T_x(g \circ f)([c]_\sim) = [(g \circ f) \circ c]_\sim = [g \circ (f \circ c)]_\sim = \\ T_{f(x)}g([f \circ c]_\sim) = T_{f(x)}g\ T_x f([c]_\sim).$$

7. Ist $f : M \to N$ mindestens ein C^1-Diffeomorphismus, so folgt aus den Punkten 6 und 4, dass $T_{f(x)}(f^{-1}) = (T_x f)^{-1}$, woraus inbesondere folgt, dass M und N dieselbe Dimension besitzen müssen.

8. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ offen und $g : I \to M$ mindestens einmal stetig differenzierbar, so gilt $g'(s) = T_s g \circ (\mathrm{t}_s\ \mathrm{id}_I)^{-1}(1)$, vgl. Definition 1.2.1.

1.2.11 Definition. Sei M eine d-dimensionalen C^r-Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Ist $f \in C^1(M, \mathbb{R}^m)$ – $\mathbb{R}^m$ mit dem Atlas $\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\}$ versehen – und ist $X_x \in T_x M$, so setzen wir (vgl. Beispiel 1.2.5)
$$X_x f := \mathrm{t}_{f(x)}\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\ \ T_x f\ X_x\ \ (\in \mathbb{R}^m),$$
und nennen das die Ableitung von f in Richtung X_x.

1.2.12 Fakta.

1. Ist $X_x = [c]_\sim$, so gilt
$$X_x f = \mathrm{t}_{f(x)}\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}([f \circ c]_\sim) = (f \circ c)'(0). \tag{1.5}$$
Ist dabei $c = c_i$ wie in Bemerkung 1.2.7 mit einer Karte φ, so ist $[c_i]_\sim f = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}|_x f$ nichts anderes als die Ableitung von $f \circ \varphi^{-1} : D_\varphi \to \mathbb{R}^m$ nach der i-ten Variablen. Für $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}|_x f$ schreibt man daher auch $\frac{\partial f}{\partial \varphi_i}(x)$.

2. Aus der Kettenregel folgt für eine weitere C^r-Mannigfaltigkeit N, $h \in C^r(M, N)$ und $f \in C^1(N, \mathbb{R}^m)$, dass
$$\underbrace{T_x h(X_x)}_{\in T_{h(x)}N} f = \mathrm{t}_{f \circ h(x)}\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\ \ T_{h(x)} f\ T_x h\ (X_x) = \\ \mathrm{t}_{f \circ h(x)}\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\ \ T_x(f \circ h)\ (X_x) = X_x(f \circ h).$$

3. Aus (1.5) folgt sofort, dass $X_x f$ linear von f abhängt. Da $X_x \mapsto X_x f$ eine Zusammensetzung zweier linearer Funktionen ist, hängt $X_x f$ auch linear von X_x ab.

4. Sind $X_x, Y_x \in T_xM$ und gilt $X_x f = Y_x f$ für alle $f \in C^1(M, \mathbb{R})$, so muss $X_x = Y_x$. Um das einzusehen, sei φ eine Karte auf M mit $x \in U_\varphi$ und sei $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion mit kompaktem, in D_φ enthaltenen Träger und sodass $h|_{U_\delta(\varphi(x))} \equiv 1$ für ein $\delta > 0$.

   Für jedes $v \in \mathbb{R}^d$ sei $f_v : U_\varphi \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_v(y) = (h \circ \varphi(y)) \cdot (v^T \varphi(y))$. Wegen der Wahl von h lässt sich f_v mit 0 außerhalb von U_φ zu einer C^∞-Funktion fortsetzen.

   Ist nun $X_x = [c]_\sim$ und $Y_x = [b]_\sim$, so folgt

$$X_x f_v = (f_v \circ c)'(0) = (v^T \varphi \circ c)'(0) = v^T (\varphi \circ c)'(0)$$

   und $Y_x f_v = v^T (\varphi \circ b)'(0)$. Diese beiden Ausdrücke müssen für alle $v \in \mathbb{R}^d$ übereinstimmen, und daher $(\varphi \circ c)'(0) = (\varphi \circ b)'(0)$ bzw. $[c]_\sim = [b]_\sim$.

Mengentheoretisch sind für verschiedene $x, y \in M$ die Tangentialräume T_xM und T_yM disjunkt.

1.2.13 Definition. Für eine d-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit M sei

$$TM := \dot{\bigcup_{x \in M}} T_xM$$

der *Tangentialraum* von M. Die Abbildung, die einem $Y \in TM$ jenes $x \in M$ zuordnet, sodass $Y \in T_xM$, heißt *Bündelprojektion* $\pi : TM \to M$. Ist $Y \in TM$ und $\pi(Y) = x$, so schreiben wir auch $Y = Y_x$.

Man kann sich TM so denken, dass man zu jedem $x \in M$ einen d-dimensionalen Vektorraum hängt. Nun wollen wir TM mit einem Atlas versehen. Dazu betrachten wir zunächst eine Karte φ aus dem gegebenen Atlas $\mathcal{A}$ auf M. Da U_φ eine offene Teilmenge von M ist und somit selbst eine d-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit, können wir TU_φ mit einer Teilmenge von TM identifizieren, siehe Bemerkung 1.2.2.

Die Abbildung

$$X \mapsto \mathrm{t}_x\varphi(X)$$

ordnet einem $X \in TM$ mit $x = \pi(X) \in U_\varphi$, d.h. $X \in TU_\varphi$, ein Element aus $\mathbb{R}^d$ zu, vgl. Bemerkung 1.2.3. Also ordnet die Abbildung

$$\hat{\varphi} : U_{\hat{\varphi}} := TU_\varphi \to D_{\hat{\varphi}} := D_\varphi \times \mathbb{R}^d, \quad X \mapsto \big(\varphi(\pi(X)), \mathrm{t}_{\pi(X)}\varphi\,(X)\big), \tag{1.6}$$

einem $X \in TU_\varphi$ ein Element aus der offenen Teilmenge $D_\varphi \times \mathbb{R}^d$ von $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^{2d}$ zu. Offensichtlich ist diese Abbildung bijektiv.

Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ mit $U_\varphi \cap U_\psi \neq \emptyset$. Wegen (1.3) gilt für $(t, \tau) \in \hat{\varphi}(TU_\varphi \cap TU_\psi) = \hat{\varphi}(T(U_\varphi \cap U_\psi)) = \varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \times \mathbb{R}^d$ $(\subseteq D_{\hat{\varphi}})$

$$\hat{\psi} \circ \hat{\varphi}^{-1}(t, \tau) = \hat{\psi}\Big(\underbrace{(\mathrm{t}_{\varphi^{-1}(t)}\varphi)^{-1}\tau}_{\in T_{\varphi^{-1}(t)}M \subseteq TM} \Big) = \tag{1.7}$$

$$\Big(\psi(\varphi^{-1}(t)), \mathrm{t}_{\varphi^{-1}(t)}\psi\,(\mathrm{t}_{\varphi^{-1}(t)}\varphi)^{-1}\tau\Big) = \Big(\psi \circ \varphi^{-1}(t), d(\psi \circ \varphi^{-1})(t)\tau\Big).$$

Also ist $\hat{\psi} \circ \hat{\varphi}^{-1}$ eine C^{r-1}-Abbildung von der in $\mathbb{R}^{2d}$ offenen Menge $\hat{\varphi}(TU_\varphi \cap TU_\psi)$ auf die in $\mathbb{R}^{2d}$ offene Menge $\hat{\psi}(TU_\varphi \cap TU_\psi)$. Weil ihre Inverse von gleicher Bauart ist, ist sie sogar ein C^{r-1}-Diffeomorphismus im Sinne der Analysis II. Offensichtlich gilt auch

$$\bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} U_{\hat{\varphi}} = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} TU_\varphi = TM.$$

Schließlich sei TM versehen mit der Topologie, welche

$$\{\hat{\varphi}^{-1}(D) : D \subseteq \mathbb{R}^{2d} \text{ offen}, \varphi \in \mathcal{A}\} \tag{1.8}$$

als Subbasis hat. Man sieht leicht, dass das die gröbste Topologie auf TM ist, sodass alle $U_{\hat{\varphi}} = TU_\varphi$ offen und alle Abbildungen $\hat{\varphi}$ stetig sind.

1.2.14 Lemma. *Sei φ eine Karte aus dem gegebenen Atlas $\mathcal{A}$ auf M. Dann ist ein $O \subseteq U_{\hat{\varphi}}$ genau dann offen bzgl. obiger Topologie, wenn $\hat{\varphi}(O)$ offen in $\mathbb{R}^{2d}$ ist.*

Ist $\mathcal{B}$ irgendein zu $\mathcal{A}$ äquivalenter Atlas, so ist die durch $\mathcal{B}$ via (1.8) *erzeugte Topologie auf TM gleich wie die durch $\mathcal{A}$ erzeugte.*

Beweis. Ist $\hat{\varphi}(O)$ offen in $\mathbb{R}^{2d}$, so liegt O – da φ injektiv ist – in der Subbasis (1.8) und damit in der Topologie.

Sei umgekehrt $O \subseteq U_{\hat{\varphi}}$ offen bzgl. der Topologie. Zu jedem $x \in O$ gibt es somit $\psi_1, \dots, \psi_n$ aus dem Atlas und offene $D_1, \dots, D_n \subseteq \mathbb{R}^{2d}$, sodass

$$x \in \bigcap_{j=1,\dots,n} \hat{\psi}_j^{-1}(D_j) \subseteq O,$$

woraus

$$\hat{\varphi}(x) \in \bigcap_{j=1,\dots,n} \hat{\varphi}(\hat{\psi}_j^{-1}(D_j) \cap U_{\hat{\psi}_j} \cap U_{\hat{\varphi}}) = \bigcap_{j=1,\dots,n} \hat{\varphi}\Big(\hat{\psi}_j^{-1}(D_j \cap \hat{\psi}_j(TU_{\psi_j} \cap TU_\varphi))\Big) \subseteq \hat{\varphi}(O)$$

folgt. Wegen $\hat{\psi}_j(TU_{\psi_j} \cap TU_\varphi) = \psi_j(U_{\psi_j} \cap U_\varphi) \times \mathbb{R}^d$ und da $\hat{\varphi} \circ \hat{\psi}_j^{-1}$ ein Homöomorphismus ist, ist die Menge links vom $\subseteq$ Zeichen offen in $\mathbb{R}^{2d}$. Da $\hat{\varphi}(x)$ beliebig in $\hat{\varphi}(O)$ ist, muss letztere Menge offen sein.

Beim Beweis der zweiten Aussage können wir wegen der Definition von Äquivalenz zweier Atlanten annehmen, dass $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Der Beweis folgt nun sofort aus dem ersten Teil, wenn man eine gegebene Teilmenge $O \subseteq TM$ als $O = \bigcup_{\psi \in \mathcal{B}} U_{\hat{\psi}} \cap O$ schreibt.

❑

1.2.15 Satz. *Sei $(M, \mathcal{A})$ eine d-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit. Versehen wir TM mit $\hat{\mathcal{A}} := \{\hat{\varphi} : \varphi \in \mathcal{A}\}$ und mit der obigen Topologie, so ist $(TM, \hat{\mathcal{A}})$ eine $2d$-dimensionale C^{r-1}-Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Wegen Korollar 1.1.6 gibt es einen abzählbaren Teilatlas $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$. Nach Lemma 1.2.14 erzeugt dieser via (1.8) dieselbe Topologie.

Lässt man nun in (1.8) die Teilmengen $D \subseteq \mathbb{R}^{2d}$ nicht durch alle offenen Teilmengen sondern durch eine abzählbare Basis $\mathfrak{B}$ laufen, so erzeugt auch die abzählbare Subbasis

$$\{\hat{\varphi}^{-1}(D) : D \in \mathfrak{B}, \varphi \in \mathcal{B}\}$$

dieselbe Topologie auf TM. Die Menge aller Schnitte endlich vieler Mengen daraus ist dann eine abzählbare Basis der Topologie auf TM.

Sind $X, Y \in TM$ verschieden, so zeigt man leicht durch Fallunterscheidung $\pi(X) = \pi(Y)$ und $\pi(X) \neq \pi(Y)$, dass es disjunkte Umgebungen von X und Y gibt. Also ist die Topologie auch Hausdorffsch.

Schließlich sind die Abbildungen $\hat{\varphi} : TU_\varphi \to D_{\hat{\varphi}}$ wegen Lemma 1.2.14 alle Homöomorphismen, und dass dann $\hat{\mathcal{A}}$ einen Atlas ergibt, haben wir schon oben gesehen.

❑

1.2.16 Bemerkung. Ist φ eine mit dem Atlas $\mathcal{A}$ auf M verträgliche Karte, so folgt aus dem zweiten Teil von Lemma 1.2.14 sowie (1.7), dass $\hat{\varphi}$ mit $\hat{\mathcal{A}}$ verträglich ist.

1.2.17 Bemerkung. Da $\varphi \circ \pi \circ \hat{\varphi}^{-1} : D_{\hat{\varphi}} \ (\subseteq \mathbb{R}^{2d}) \to D_{\varphi} \ (\subseteq \mathbb{R}^{d})$ nichts anderes als die Projektion auf die vorderen d Koordinaten ist, ist die Bündelprojektion $\pi : TM \to M$ eine C^{r-1}-Abbildung.

1.2.18 Beispiel. Ist $M \subseteq \mathbb{R}^d$ offen versehen mit dem Atlas $\{\mathrm{id}_M\}$, so gilt

$$\hat{\mathrm{id}}_M(X) = (\pi(X), \mathrm{t}_{\pi(X)}\,\mathrm{id}_M\,(X))$$

1.2.19 Proposition. *Seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten mit einem $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit Dimensionen d bzw. m. Ist $f : M \to N$ eine C^l-Abbildung mit $1 \le l \le r$, so ist*

$$Tf : TM \to TN, \quad X \mapsto T_{\pi(X)} f\, X$$

eine C^{l-1}-Abbildung.

Beweis. Seien $X \in TM$, $x := \pi(X)$ und Karten φ auf M und ψ auf N wie in Definition 1.1.8. Dann gilt für $(t, \tau) \in D_{\hat{\varphi}}$ gemäß (1.4)

$$\hat{\psi} \circ Tf \circ \hat{\varphi}^{-1}(t, \tau) = \hat{\psi}\Big(T_{\varphi^{-1}(t)} f\ (\mathrm{t}_{\varphi^{-1}(t)}\varphi)^{-1}\tau\Big) = \tag{1.9}$$

$$\left(\psi\Big(f(\varphi^{-1}(t))\Big), \mathrm{t}_{f(\varphi^{-1}(t))}\psi\ T_{\varphi^{-1}(t)} f\ (\mathrm{t}_{\varphi^{-1}(t)}\varphi)^{-1}\tau\right) = \Big(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(t), d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(t)\tau\Big).$$

Als Funktion von (t, τ) ist die rechte Seite C^{l-1}. Nach Definition 1.1.8 ist Tf somit eine C^{l-1}-Abbildung.

❑

Man beachte, dass die Abbildung $Tf : TM \to TN$ aus Proposition 1.2.19 bei gleichem $\pi(X)$ linear ist, d.h. $Tf(X + Y) = Tf(X) + Tf(Y)$, wenn $\pi(X) = \pi(Y)$.

Wir wollen uns am Ende dieses Abschnittes noch den Tangentialraum einer Produktmannigfaltigkeit $M_1 \times M_2$ wie in Lemma 1.1.7 anschauen. Die genaue Verifikation sei dem Leser überlassen.

1.2.20 Fakta.

1. Für $(x, y) \in M_1 \times M_2$ ist die Abbildung $\mathrm{i}_{(x,y)} : ([c_1]_\sim, [c_2]_\sim) \mapsto [t \mapsto (c_1(t), c_2(t))]_\sim$ eine wohldefinierte lineare und bijektive Abbildung von $T_x M_1 \times T_y M_2 \to T_{(x,y)} M_1 \times M_2$, die für Karten φ_j auf M_j ($j = 1, 2$) mit $x \in U_{\varphi_1}$ und $y \in U_{\varphi_2}$

   $$\mathrm{t}_{(x,y)}(\varphi_1 \times \varphi_2)\ \mathrm{i}_{(x,y)}\ (X_x, Y_y) = (\mathrm{t}_x\varphi_1\ X_x, \mathrm{t}_y\varphi_2\ Y_y)$$

   für alle $X_x \in T_x M_1$, $Y_y \in T_y M_2$ erfüllt.

2. Sei $f : M_1 \times M_2 \to L$ zumindest einmal stetig differenzierbar mit einer C^r-Mannigfaltigkeit L, $x \in M_1$ und $y \in M_2$. Für $[c_1]_\sim \in T_x M_1$ folgt

   $$T_{(x,y)} f\ \mathrm{i}_{(x,y)}([c_1]_\sim, \underbrace{0}_{\in T_y M_2}) = [t \mapsto f(c_1(t), y)]_\sim = T_x f(., y)\ [c_1]_\sim.$$

Genauso sieht man $T_{(x,y)}f\ \mathfrak{i}_{(x,y)}(0,[c_2]_\sim) = T_y f(x,.)\ [c_2]_\sim$ für $[c_2]_\sim \in T_yM_2$. Da $T_{(x,y)}f$ linear ist, gilt also

$$T_{(x,y)}f\ \mathfrak{i}_{(x,y)}\ (X_x, Y_y) = T_x f(.,y)\ X_x + T_y f(x,.)\ Y_y$$

für alle $X_x \in T_xM_1, Y_y \in T_yM_2$. Insbesondere folgt für $f \in C^1(M_1 \times M_2, \mathbb{R}^m)$

$$\mathfrak{i}_{(x,y)}(X_x, Y_y)\ f = X_x\ f(.,y) + Y_y\ f(x,.).$$

3. Die Abbildung $\mathfrak{i} : TM_1 \times TM_2 \to TM_1 \times M_2$ sei definiert durch $\mathfrak{i}(X_x, Y_y) := \mathfrak{i}_{(x,y)}\ (X_x, Y_y)$, wenn $X_x \in T_xM_1, Y_y \in T_yM_2$.

   Sind φ_j Karten auf M_j $(j = 1,2)$ mit $x \in U_{\varphi_1}$ und $y \in U_{\varphi_2}$, so gilt für $X_x \in T_xM_1, Y_y \in T_yM_2$.

$$\widehat{\varphi_1 \times \varphi_2} \circ \mathfrak{i}\ (X_x, Y_y) = \Big((\varphi_1(x), \varphi_2(y)), \mathfrak{t}_{(x,y)}(\varphi_1 \times \varphi_2)\ \mathfrak{i}_{(x,y)}\ (X_x, Y_y)\Big) =$$

$$\Big((\varphi_1(x), \varphi_2(y)), (\mathfrak{t}_x\varphi_1\ X_x, \mathfrak{t}_y\varphi_2\ Y_y)\Big) = \underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{4d \times 4d}} (\hat{\varphi}_1 \times \hat{\varphi}_2)\ (X_x, Y_y).$$

   Insbesondere ist $\mathfrak{i} : TM_1 \times TM_2 \to TM_1 \times M_2$ ein C^m-Diffeomorphismus.

4. Sei $f : M_1 \times M_2 \to L$ wieder zumindest einmal stetig differenzierbar mit einer C^r-Mannigfaltigkeit L, so gilt für $X_x \in T_xM_1, Y_y \in T_yM_2$ mit $(x,y) \in M_1 \times M_2$

$$Tf \circ \mathfrak{i}(X_x, Y_y) = T_{(x,y)}f\ \mathfrak{i}_{(x,y)}(X_x, Y_y) = \tag{1.10}$$

$$T_x f(.,y)\ X_x + T_y f(x,.)\ Y_y = \underbrace{Tf(.,y)}_{TM_1 \to TL}(X_x) + \underbrace{Tf(x,.)}_{TM_2 \to TL}(Y_y).$$

1.3 Untermannigfaltigkeit

1.3.1 Definition. Sei M eine d-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit mit $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und sei $1 \le k \le d$. Eine Teilmenge $N \subseteq M$ heißt k-dimensionale *Untermannigfaltigkeit* oder *Teilmannigfaltigkeit* von M, falls es zu jedem $x \in N$ eine (mit dem auf M gegebenen Atlas verträgliche) Karte φ mit $x \in U_\varphi$ gibt, sodass $D_\varphi \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \varphi(U_\varphi \cap N)$.

1.3.2 Fakta.

1. Man sieht unmittelbar, dass Teilmannigfaltigkeiten der Dimension $k = d$ genau die offenen Teilmengen von M sind.

2. Offensichtlich ist der Begriff Untermannigfaltigkeit ein lokaler Begriff, d.h. $N \subseteq M$ ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $x \in N$ eine in M offene Umgebung U von x gibt, sodass $N \cap U$ eine Untermannigfaltigkeit von U (versehen mit dem Atlas wie in Fakta 1.1.4, 3) ist.

3. Elementar prüft man auch nach, dass für eine Teilmannigfaltigkeit N von M eine Teilmenge $L \subseteq N$ genau dann eine Teilmannigfaltigkeit von N ist (Wir werden gleich sehen, vgl. Bemerkung 1.3.6, dass N als Untermannigfaltigkeit auch für sich selber eine Mannigfaltigkeit ist.), wenn sie eine solche von M ist.

1.3.3 Lemma. *$N \subseteq M$ ist genau dann eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M, wenn es zu jedem $x \in N$ eine Karte φ mit $x \in U_\varphi$ gibt, sodass $\varphi(U_\varphi \cap N)$ eine (bzgl. der Spurtopologie) offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ ($\subseteq \mathbb{R}^d$) ist.*

In der Tat lässt sich der Definitionsbereich U_φ einer jeden Karte φ mit $U_\varphi \cap N \neq \emptyset$ und (bzgl. der Spurtopologie) offenem $\varphi(U_\varphi \cap N) \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\}$ so verkleinern, dass der neue offenen Definitionsbereich U ($\subseteq U_\varphi$)

$$\varphi(U_\varphi \cap N) = \varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

erfüllt.

Beweis. Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist offensichtlich. Um die Hinlänglichkeit zu zeigen, sei $x \in N$ und φ eine Karte, sodass $O \times \{0\} := \varphi(U_\varphi \cap N)$ ($\subseteq D_\varphi$) offen in $\mathbb{R}^k \times \{0\} \cong \mathbb{R}^k$ ist.

Für $U := \varphi^{-1}((O \times \mathbb{R}^{d-k}) \cap D_\varphi)$ gilt

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(U \cap U_\varphi \cap N) = (O \times \mathbb{R}^{d-k}) \cap (O \times \{0\}) = O \times \{0\}$$

sowie

$$(O \times \mathbb{R}^{d-k}) \cap D_\varphi \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = (O \times \{0\}) \cap D_\varphi = O \times \{0\}.$$

Also erfüllt die Karte $\varphi|_U : U \to (O \times \mathbb{R}^{d-k}) \cap D_\varphi$ die Bedingung aus Definition 1.3.1. ❑

1.3.4 Beispiel. Als ganz einfaches Beispiel sei an das letzte Beispiel in Beispiel 1.1.3 erinnert. $M = f(D)$ mit $D = (-1, 1) \times (-1, 1)$ und

$$f\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \xi^2 + \eta^2 \end{pmatrix}$$

ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $D \times \mathbb{R}$ versehen mit dem Atlas $\{\mathrm{id}_{D\times\mathbb{R}}\}$, da $g(M) = D \times \{0\}$, wobei $g : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$g\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma - \alpha^2 - \beta^2 \end{pmatrix}$$

eine mit $\{\mathrm{id}_{D\times\mathbb{R}}\}$ verträgliche Karte ist.

1.3.5 Beispiel. Für Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 ist $M_1 \times \{y\}$ für jedes $y \in M_2$ eine Untermannigfaltigkeit von $M_1 \times M_2$ definiert wie in Lemma 1.1.7.

1.3.6 Bemerkung. Nimmt man zwei Karten φ, ψ wie in Definition 1.3.1, sodass $N \cap U_\varphi \cap U_\psi \neq \emptyset$, so gilt $\varphi(N \cap U_\varphi \cap U_\psi) =: C \times \{0\}$ mit einem offenen $C \subseteq \mathbb{R}^k$ und

$$(p_k \circ \psi|_{N\cap U_\psi}) \circ (p_k \circ \varphi|_{N\cap U_\varphi})^{-1} = (p_k \circ \psi \circ \varphi^{-1} \circ \iota_k)|_C,$$

wobei $p_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die ersten k Koordinaten und $\iota_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ die Abbildung $u \mapsto (u, 0)^T$ ist.

Da die rechte Seite C^r ist, sieht man leicht, dass N versehen mit der Spurtopologie und mit dem Atlas aller Abbildungen $\varphi_N := p_k \circ \varphi|_{N\cap U_\varphi}$, wobei die φ wie in Definition 1.3.1 gelagert sind, selber eine k-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit ist.

Man beachte schließlich, dass wir auch mit Karten φ mit der schwächeren Eigenschaft, dass $\varphi(N \cap U_\varphi)$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ ist, wie in Lemma 1.3.3 starten können, um mit $\varphi_N := p_k \circ \varphi|_{N \cap U_\varphi}$ eine Karte von N zu erhalten. Das folgt unmittelbar aus der zweiten Aussage in Lemma 1.3.3.

1.3.7 Proposition. *Ist N eine Untermannigfaltigkeit von M, so ist die Einbettungsabbildung $\iota_N : N \to M$, $x \mapsto x$, eine C^r-Abbildung. Für jedes $x \in N$ ist dabei $T_x\iota_N : T_xN \to T_xM$ die injektive Abbildung $[c]_\sim \mapsto [c]_\sim$, wobei $c : I_c \to N$ stetig differenzierbar ist und die linke Restklasse bzgl. N und die rechte bzgl. M gebildet wird.*

Beweis. Nehmen wir zu $x \in N$ eine Karte φ auf M wie in Definition 1.3.1, so ist

$$\varphi \circ \iota_N \circ (p_k \circ \varphi|_{N \cap U_\varphi})^{-1} = \varphi \circ \iota_N \circ \varphi^{-1} \circ \iota_k|_{p_k(D_\varphi \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}))} = \iota_k|_{p_k(D_\varphi \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}))}$$

die Einbettungsabbildung der offenen Teilmenge $p_k(D_\varphi \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}))$ von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^d$ hinein und als solche sicherlich r-mal stetig differenzierbar. Ihre Ableitung (im Sinne der Analysis II) ist somit insbesondere immer injektiv.

Nach Definition 1.2.8 gilt $T_x\iota_N([c]_\sim) = [\iota_N \circ c]_\sim = [c]_\sim$. Wegen (1.4) angewandt auf φ und $p_k \circ \varphi|_{N \cap U_\varphi}$ ist $T_x\iota_N$ injektiv.

❑

1.3.8 Bemerkung. Ist $x \in N$ und φ wie in Definition 1.3.1, so ist nach Bemerkung 1.3.6 $\varphi_N = p_k \circ \varphi|_{N \cap U_\varphi}$ eine Karte auf N. Wegen (1.4) angewandt auf φ_N und φ und wegen $\varphi \circ \iota_N \circ \varphi_N^{-1}(\tau) = (\tau, 0)^T$ $(\in \mathbb{R}^k \times \{0\})$ folgt

$$\mathrm{t}_x\varphi \circ T_x\iota_N = \iota_k \circ \mathrm{t}_x\varphi_N,$$

und damit

$$\hat{\varphi} \circ T\iota_N = (\iota_k \times \iota_k) \circ \hat{\varphi}_N,$$

wobei $(\iota_k \times \iota_k)(u, v) = (\iota_k(u), \iota_k(v)) = ((u, 0)^T, (v, 0)^T)$ für, $u, v \in \mathbb{R}^k$.

1.3.9 Bemerkung. Mit Hilfe von Proposition 1.3.7 zeigt man leicht, dass für eine C^m-Abbildung $f : M \to L$ mit Mannigfaltigkeiten M, L auch $f|_N : N \to L$ eine C^m-Abbildung ist, wenn N eine Teilmannigfaltigkeit von M ist.

Für eine Abbildung $g : L \to N$ $(\subseteq M)$ ist g genau dann C^m, wenn $\iota_N \circ g : L \to M$ eine C^m-Abbildung ist.

Differenzierbare Abbildungen erzeugen Untermannigfaltigkeiten in verschiedener Art und Weise. Wichtiges Hilfsmittel dabei ist der

1.3.10 Satz (*Satz über die Inverse Funktion*)**.** *Sei $f : C \to \mathbb{R}^n$ mindestens r-mal stetig differenzierbar auf der offenen Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Weiters sei $c \in C$, sodass*

$$\det df(c) \neq 0,$$

und sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $d := f(c) \in E$. Dann existieren offene Mengen $O \subseteq C$ und $R \subseteq E$ mit den folgenden Eigenschaften:

(*i*) *$c \in O$ und $d \in R$.*

(*ii*) *$f|_O$ ist eine Bijektion von O auf R.*

(*iii*) *Die inverse Abbildung $g : R \to O$ von $f|_O : O \to R$ ist mindestens r-mal stetig differenzierbar mit $dg(f(u)) = df(u)^{-1}$ für $u \in O$.*

1.3.11 Korollar. *Seien M, N zwei d-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit. Außerdem sei $f : M \to N$ eine C^m-Abbildung, sodass $T_x f$ $(\in L(T_x M, T_{f(x)} N))$ für ein $x \in M$ vollen Rang d hat. Dann existieren eine offene Umgebungen $Q \subseteq M$ von x und $P \subseteq N$ von $f(x)$, sodass $f|_Q : Q \to P$ ein C^m-Diffeomorphismus ist.*

Beweis. Sind φ und ψ Karten mit $x \in U_\varphi$ und $f(x) \in U_\psi$ mit $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$, so wenden wir Satz 1.3.10 einfach auf $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ an und setzen $Q = \varphi^{-1}(O)$ und $P = \psi^{-1}(R)$. ❑

1.3.12 Lemma. *Seien $p, q, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq \min(p, q)$, und sei M eine $q \times p$-Matrix vom Rang m, sodass, wenn man M in der Blockgestalt*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

schreibt, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}, B \in \mathbb{R}^{m \times (p-m)}, C \in \mathbb{R}^{(q-m) \times m}, D \in \mathbb{R}^{(q-m) \times (p-m)}$, die Matrix A regulär ist.

Dann gilt

$$M \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_{(p-m)\times(p-m)} \end{pmatrix}^{-1}}_{\in \mathbb{R}^{p \times p}} = \begin{pmatrix} I_{m \times m} & 0 \\ CA^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wie man leicht nachrechnet gilt

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_{(p-m)\times(p-m)} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & I_{(p-m)\times(p-m)} \end{pmatrix}$$

und damit

$$M \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_{(q-m)\times(p-m)} \end{pmatrix}^{-1}}_{\in \mathbb{R}^{p \times p}} = \begin{pmatrix} I_{m \times m} & 0 \\ CA^{-1} & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Da der Rang dieser Matrix aber auch m sein muss, folgt $D - CA^{-1}B = 0$. ❑

Für $m \leq \min(p, q)$ bezeichne im Folgenden $p_m : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ bzw. $p_m : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m$ die Projektion auf die ersten m Koordinaten und $\iota_m : R^m \to \mathbb{R}^p$ bzw. $\iota_m : R^m \to \mathbb{R}^q$ die Einbettung $x \mapsto \binom{x}{0}$. Weiters sei $p_{(q-m)} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^{q-m}$ die Projektion auf die hinteren $q - m$ Koordinaten.

1.3.13 Satz (*Rangsatz*). *Sei $f : C \to \mathbb{R}^q$ eine C^r-Abbildung (im klassischen Sinne) auf der offenen Menge $C \subseteq \mathbb{R}^p$, sodass $df(t)$ Rang kleiner oder gleich m $(\leq \min(p, q))$ für alle $t \in C$ hat.*

Weiters sei $0 \in C$ und $0 = f(0) \in E$ für eine gegebene offene Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^q$. Wir nehmen auch an, dass die linke obere $m \times m$-Teilmatrix von $df(0)$ Rang m hat, d.h. $p_m \circ df(0) \circ \iota_m$ ist regulär.

Dann existieren offene Mengen $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{R}^p$, $R_1, R_2 \subseteq \mathbb{R}^q$ und C^r-Diffeomorphismen (im klassischen Sinne)

$$S : F_1 \to F_2 \text{ und } T : R_1 \to R_2$$

mit $0 \in F_1 \subseteq C$, $0 \in R_1 \subseteq E$, *sodass* $S(0) = 0$, $T(0) = 0$, $f(F_1) \subseteq R_1$ *und*

$$\iota_m \circ p_m|_{F_2} = T \circ f|_{F_1} \circ S^{-1};$$

d.h. $T \circ f|_{F_1} \circ S^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}}_{\in F_2 \subseteq \mathbb{R}^p} = \underbrace{\begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^q}$.

Beweis. Wir können C durch $f^{-1}(E)$ ersetzen, um $f(C) \subseteq E$ annehmen zu dürfen.

Identifizieren wir den $\mathbb{R}^p$ mit $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{p-m}$ und $\mathbb{R}^q$ mit $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{q-m}$, so hat $df(x)$ die 2×2-Blockgestalt

$$df\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\binom{\xi}{\eta} & B\binom{\xi}{\eta} \\ C\binom{\xi}{\eta} & D\binom{\xi}{\eta} \end{pmatrix}.$$

Sei $S : C \to \mathbb{R}^p$ definiert durch $S(x) = \iota_m \circ p_m \circ f(x) + (x - \iota_m \circ p_m(x))$. Betrachtet man C als Teilmenge von $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{p-m}$ und zerlegt den Zielraum entsprechend, so wirkt S wie

$$S\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\binom{\xi}{\eta} \\ \eta \end{pmatrix},$$

wobei $f_1 = p_m \circ f$ und

$$dS\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\binom{\xi}{\eta} & B\binom{\xi}{\eta} \\ 0 & I_{(p-m)\times(p-m)} \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 1.3.10 gibt es offene Nullumgebungen $F_1, F_2 \subseteq C$ ($\subseteq \mathbb{R}^p$), sodass $S|_{F_1} : F_1 \to F_2$ ein C^r-Diffeomorphismus ist. Indem wir F_1 und F_2 nötigenfalls kleiner machen, können wir annehmen, dass $F_2 = Q_1 \times Q_2$ mit offenen Kugeln um die Null $Q_1 \subseteq \mathbb{R}^m$, $Q_2 \subseteq \mathbb{R}^{p-m}$. Nach der Kettenregel und Lemma 1.3.12 gilt ($(\xi, \eta)^T \in F_1$)

$$d(f \circ (S|_{F_1})^{-1})\left(S\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = df\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \left(dS\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} I_{m\times m} & 0 \\ C\binom{\xi}{\eta}\left(A\binom{\xi}{\eta}\right)^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt einerseits, dass die Ableitung von $g_1 := p_m \circ f \circ (S|_{F_1})^{-1} : Q_1 \times Q_2 \to \mathbb{R}^m$ mit der von der linearen Funktion $\binom{u}{v} \mapsto u$ übereinstimmt. Wegen $g_1(0) = 0$ muss somit $g_1\binom{u}{v} = u$.

Andererseits folgt, dass für jedes feste $u \in Q_1$ die Funktion $v \mapsto g_2\binom{u}{v}$ mit $g_2 := p_{(q-m)} \circ f \circ S|_{F_1}^{-1} : Q_1 \times Q_2 \to \mathbb{R}^{q-m}$ Ableitung Null hat, d.h. $g_2\binom{u}{v} = g_2\binom{u}{0}$. Also ist $f \circ (S|_{F_1})^{-1} : F_2 \to \mathbb{R}^q$ von der Bauart

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ g_2\binom{u}{0} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt $f(F_1) = f \circ (S|_{F_1})^{-1}(F_2) \subseteq Q_1 \times \mathbb{R}^{q-m}$.

Schließlich definieren wir $T : Q_1 \times \mathbb{R}^{q-m} \to Q_1 \times \mathbb{R}^{q-m}$ durch

$$T\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta - g_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in F_2 \subseteq \mathbb{R}^p} \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort, dass T ein C^r-Diffeomorphismus ist, und dass

$$(T \circ f \circ (S|_{F_1})^{-1})\binom{u}{v} = T\begin{pmatrix} g_1\binom{u}{v} \\ g_2\binom{u}{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1\binom{u}{v} \\ g_2\binom{u}{v} - g_2\binom{g_1\binom{u}{v}}{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ g_2\binom{u}{v} - g_2\binom{u}{0} \end{pmatrix} = \binom{u}{0}.$$

Zu guter Letzt sei $R_1 := E \cap (Q_1 \times \mathbb{R}^{q-m})$ und $R_2 := T(R_1)$.

❏

1.3.14 Satz. *Sei L eine l-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit, und sei M eine eine d-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit. Außerdem sei $f : M \to L$ eine C^r-Abbildung, sodass $T_x f$ $(\in L(T_x M, T_{f(x)} L))$ für alle $x \in M$ Rang n hat. Dann gilt:*

- *Für jedes $a \in f(M)$ $(\subseteq L)$ ist die Menge $N := f^{-1}\{a\}$ eine $(d-n)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M.*

  Ist $\iota_N : N \to M$ die Einbettungsabbildung wie in Proposition 1.3.7 und für $x \in N$ dann $T_x\iota_N : T_x N \to T_x M$ die entsprechende (injektive) Ableitung, so gilt auch $T_x\iota_N(T_x N) = \ker T_x f$.

- *Für jedes $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von x, sodass $f(U)$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von L ist.*

  Ist $T_x f$ sogar injektiv, d.h. $n = d$, so ist $f : U \to f(U)$ ein C^r-Diffeomorphismus.

Beweis. Sei $x \in M$, und seien φ und ψ Karten auf M bzw. L mit $x \in U_\varphi$, $f(x) \in U_\psi$ und $f(U_\varphi) \subseteq U_\psi$. Nach Fakta 1.1.4, 5, können wir $\varphi(x) = 0$ und $\psi(f(x)) = 0$ annehmen. Nach (1.4) hat $d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(t) \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^l)$ Rang n $(\leq \min(l, d))$ für alle $t \in D_\varphi$.

Indem wir nötigenfalls φ durch die Karte $\sigma_1 \circ \varphi$ und ψ durch die Karte $\sigma_2 \circ \psi$ ersetzen, wobei $\sigma_1 \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ und $\sigma_2 \in L(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^l)$ geeignete Koordinatenpermutationen sind, können wir annehmen, dass die linke obere $n \times n$-Teilmatrix von $d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$ Rang n hat, d.h. regulär ist.

Wenden wir Satz 1.3.13 auf die Funktion $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) : C = D_\varphi \to E = D_\psi$ an, so erhalten wir (klassische) C^r-Diffeomorphismen $S : F_1$ $(\subseteq D_\varphi) \to F_2$ und $T : R_1$ $(\subseteq D_\psi) \to R_2$, sodass

$$T \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ S^{-1} = \iota_n \circ p_n|_{F_2}.$$

Gemäß Fakta 1.1.4, 5, sind $\tilde{\psi} := T \circ \psi|_{\psi^{-1}(R_1)} : U_{\tilde{\psi}} := \psi^{-1}(R_1) \to D_{\tilde{\psi}} := R_2$ und $\tilde{\varphi} := S \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(F_1)} : U_{\tilde{\varphi}} := \varphi^{-1}(F_1) \to D_{\tilde{\varphi}} := F_2$ mit dem jeweiligen Atlas auf M bzw. L verträgliche Karten, für die

$$\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \iota_n \circ p_n|_{D_{\tilde{\varphi}}} \tag{1.11}$$

gilt. Insbesondere folgt

$$\tilde{\psi}(f(U_{\tilde{\varphi}})) = \tilde{\psi}(U_{\tilde{\psi}} \cap f(U_{\tilde{\varphi}})) = \underbrace{p_n(D_{\tilde{\varphi}}) \times \{0\}}_{\subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{l-n}}.$$

Nach Lemma 1.3.3 ist damit $f(U_{\tilde{\varphi}})$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Ist dabei $n = d$, so gilt $p_n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}$. Aus (1.11) folgt dann (vgl. Bemerkung 1.3.6)

$$\tilde{\psi}|_{f(U_{\tilde{\varphi}})} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \mathrm{id}_{D_{\tilde{\varphi}}},$$

womit $f : U_{\tilde{\varphi}} \to f(U_{\tilde{\varphi}})$ ein Diffeomorphismus ist.

Gilt andererseits $x \in N := f^{-1}\{a\}$ und damit $0 = \tilde{\psi}(f(x)) = \tilde{\psi}(a)$, so folgt

$$\tilde{\varphi}(N \cap U_{\tilde{\varphi}}) = \{t \in D_{\tilde{\varphi}} : \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(t) = 0\} = \{t \in D_{\tilde{\varphi}} : \iota_n \circ p_n(t) = 0\} = D_{\tilde{\varphi}} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{d-n}).$$

Also ist auch N eine $(d-n)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Schließlich gilt für $[c]_\sim \in T_x N$, dass $T_x\iota_N([c]_\sim)$ die von der Kurve c in M aufgespannte Restklasse ist. Da c nur Werte in N hat, folgt $f \circ c \equiv a$, woraus sich $T_x f(T_x\iota_N([c]_\sim)) = [a]_\sim = 0 \in T_{f(x)}L$ ergibt; also $T_x\iota_N(T_x N) \subseteq \ker T_x f$.

Andererseits hat $T_x N$ Dimension $d-n$, wodurch $T_x\iota_N(T_x N) \subsetneq \ker T_x f$ implizieren würde, dass der Rang von $T_x f$ kleiner als $d-(d-n) = n$ wäre, vgl. Rangsatz aus der Linearen Algebra.

❏

1.3.15 Beispiel. Für die Abbildung $f : x \mapsto \|x\|_2^2$ von $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}$ (beide versehen mit dem Atlas $\{\mathrm{id}\}$) gilt $df(x) = 2(x_1, \dots, x_d)$, $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, womit $df(x)$ und auch $T_x f$ (vgl. (1.4)) Rang eins hat. Nach Satz 1.3.14 ist $S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$ eine $(d-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ und somit auch von $\mathbb{R}^d$.

1.3.16 Beispiel. Wir betrachten die $G = GL(n, \mathbb{R})$ als bekannterweise offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n^2}$ wie in Beispiel 1.2.6. Die Abbildung

$$f = \det : G \to \mathbb{R}$$

ist sicherlich eine C^∞-Abbildung, wobei für $B \in G$ und $c_A(t) = B + tA$

$$\mathfrak{t}_{f(B)}\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ T_B f([c_A]_\sim) = (\det \circ c_A)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(B + tA) =$$

$$\det(B)\, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (-t)^n \underbrace{\det(-\tfrac{1}{t} I - B^{-1}A)}_{=\chi_{-B^{-1}A}(\frac{1}{t})} =$$

$$\det(B)\, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (-t)^n \left((-1)^n \frac{1}{t^n} + (-1)^{n-1} \frac{1}{t^{n-1}} \operatorname{tr}(-B^{-1}A) + \dots \right) = \det(B)\, \operatorname{tr}(B^{-1}A),$$

vgl. Lineare Algebra 2. Insbesondere gilt $\mathfrak{t}_{f(B)}\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ T_B f([c_B]_\sim) = \det(B)\, \operatorname{tr}(I) = n \det(B) \neq 0$, womit $T_B f$ immer Rang 1 hat.

Nach Satz 1.3.14 ist daher $H := SL(n, \mathbb{R}) = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det B = 1\}$ eine $(n^2 - 1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von G. Man zeigt unschwer, dass dann auch H eine Lie-Gruppe ist.

Gemäß Proposition 1.3.7 ist $T_B\iota_H : T_B H \to T_B G$ für jedes $B \in G$ eine injektive Einbettung, wobei nach Satz 1.3.14 $T_B\iota_H(T_B H) = \ker T_B f$. Für $[c_A]_\sim \in T_B G$ gilt also

$$[c_A]_\sim \in T_B\iota_H(T_B H) \Leftrightarrow \det(B)\, \operatorname{tr}(B^{-1}A) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}(B^{-1}A) = 0.$$

Für $B = I$ lässt sich insbesondere $T_I H$ (vermöge $T_I\iota_H$) mit $\mathfrak{sl}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \operatorname{tr} A = 0\}$ identifizieren.

Man beachte, dass für $\operatorname{tr} A = 0$ zwar $[c_A]_\sim \in T_B\iota_H(T_B H)$, aber der Weg c_A nicht in $H = SL(n, \mathbb{R})$ verläuft. Es gilt aber $c_A'(0) = d'(0)$ für einen stetig differenzierbaren Weg $d : (-\delta, \delta) \to N$ mit $d(0) = I$. In der Tat gilt das etwa für $d(t) = \exp(tA)$.

Folgendes Korollar zeigt insbesondere, dass der Begriff Mannigfaltigkeit aus der Analysis III mit dem aktuellen Begriff Untermannigfaltigkeit (von $\mathbb{R}^p$) übereinstimmt.

1.3.17 Korollar. *Sei M eine p-dimensionale C^r-Mannigfaltigkeit mit $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und sei $1 \leq d \leq p$. Eine Teilmenge $N \subseteq M$ ist eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M genau dann, wenn es zu jedem $x \in N$*

- *ein offenes $D \subseteq \mathbb{R}^d$, eine C^r-Abbildung $f : D \to M$ (D versehen mit dem Atlas $\{\mathrm{id}_D\}$) mit $f(D) \subseteq N$, sodass $T_s f$ $(\in L(T_s D, T_{f(s)} M))$ für alle $s \in D$ vollen Rang d hat,*

- *und ein offenes $U \subseteq M$ mit $x \in U$ gibt, sodass $f : D \to U \cap N$ ein Homöomorphismus ist, wobei $U \cap N$ mit der Spurtopologie versehen ist.*

Beweis. Sei zunächst N eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M, $x \in N$ und φ eine Karte auf M wie in Definition 1.3.1, d.h. $x \in U_\varphi$ und $D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}) = \varphi(U_\varphi \cap N)$. Wir setzen $D := p_d(D_\varphi \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}))$ Wegen Fakta 1.1.9, 6, und Bemerkung 1.3.6 ist

$$\varphi_N^{-1} : D \to U_\varphi \cap N,$$

wobei $\varphi_N := p_d \circ \varphi|_{N \cap U_\varphi}$, ein C^r-Diffeomorphismus, womit $T_s \varphi_N^{-1}$ für alle $s \in D$ bijektiv ist, vgl. Fakta 1.2.10, 7. Nach Fakta 1.2.10, 6, und Proposition 1.3.7 ist auch

$$f := \iota_N \circ \varphi_N^{-1} : \ D \to M$$

eine C^r-Abbildung mit injektiven $T_s f$ $(\in L(T_s D, T_{f(s)} M))$, $s \in D$. Offensichtlich ist f als Abbildung von D auf $U_\varphi \cap N = f(D)$ – also φ_N^{-1} – ein Homöomorphismus. Setzen wir also $U = U_\varphi$, so haben wir alle gewünschten Eigenschaften nachgewiesen.

Wir nehmen nun an, dass die Bedingungen aus dem aktuellen Korollar erfüllt sind, d.h. zu $x \in N$ gibt es eine Abbildung f mit besagten Eigenschaften. Insbesondere ist $f(t) = x$ für ein $t \in D$.

Nach Satz 1.3.14 gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq D$ von t, sodass $f(V)$ eine d-dimensionale, x enthaltende Untermannigfaltigkeit ist. Wegen der Homöomorphieeigenschaft ist $f(V)$ bzgl. der Spurtopologie offen in $N \cap U$ und daher offen in N; also $f(V) = N \cap U'$ für ein in M offenes U'. Nach Fakta 1.3.2, 2, ist N dann eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M.

❏

Kapitel 2

Flüsse

Wir wollen uns in diesem Kapitel ausschließlich mit C^∞-Mannigfaltigkeiten beschäftigen.

2.1 Vektorfelder

2.1.1 Definition. Ein *Vektorfeld* X auf einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung, die jedem $x \in M$ ein Element $X(x) \in T_xM$ zuweist; also eine Abbildung

$$X : M \to TM \quad \text{mit} \quad \pi \circ X(x) = x,\ x \in M.$$

Mit $\mathfrak{X}(M)$ wollen wir den Raum aller C^∞-Vektorfelder – also alle Vektorfelder, die als Abbildung $X : M \to TM$ unendlich oft differenzierbar sind – bezeichnen, vgl. Satz 1.2.15.

Für ein Vektorfeld X, eine Karte φ auf M und die entsprechende Karte $\hat{\varphi}$ auf TM aus (1.6) gilt für $t \in D_\varphi$

$$\hat{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}(t) = (\varphi(\pi(X \circ \varphi^{-1}(t))), \mathrm{t}_{\varphi^{-1}(t)}\varphi\, X \circ \varphi^{-1}(t)) = (t, \mathrm{t}_{\varphi^{-1}(t)}\varphi\, X \circ \varphi^{-1}(t)). \quad (2.1)$$

Somit ist die erste Komponente von $\hat{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}$ die Identität, und es gilt $X \in \mathfrak{X}(M)$ genau dann, wenn $\pi_2 \circ \hat{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1} = \mathrm{t}_{\varphi^{-1}(.)}\varphi\, X \circ \varphi^{-1}(.)$ für alle Karten φ auf M unendlich oft differenzierbar ist.

Ist nun X wieder ein Vektorfeld und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, so gilt für $x \in M$ (siehe Definition 1.2.11 und Beispiel 1.2.18)

$$(f(x), X(x)f) = (f(x), \mathrm{t}_{f(x)}\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\, T_xf\, X(x)) = \widehat{\mathrm{id}}_{\mathbb{R}}((Tf)\, X(x)). \quad (2.2)$$

Für eine Karte φ auf M und die entsprechende Karte $\hat{\varphi}$ auf TM folgt daraus mit (1.9), wobei dort $\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, dass

$$X(\varphi^{-1}(t))f = \pi_2 \circ \widehat{\mathrm{id}}_{\mathbb{R}} \circ (Tf) \circ X \circ \varphi^{-1}(t) = \quad (2.3)$$

$$\pi_2 \circ \widehat{\mathrm{id}}_{\mathbb{R}} \circ (Tf) \circ \hat{\varphi}^{-1}(\underbrace{\alpha(t)}_{\in D_\varphi \times \mathbb{R}^d}) = d(f \circ \varphi^{-1})(t)\, \alpha_2(t) = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial \alpha_2(t)}(t),$$

wobei rechts die Richtungsableitung von $f \circ \varphi^{-1}$ in Richtung des Vektors $\alpha_2(t)$ ($\in \mathbb{R}^d$) steht und wobei $\alpha : D_\varphi \to D_\varphi \times \mathbb{R}^d$ mit

$$\alpha(t) := \hat{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}(t) = (t, \underbrace{\mathrm{t}_{\varphi^{-1}(t)}\varphi\, X(\varphi^{-1}(t))}_{=\pi_2\circ\hat{\varphi}\circ X\circ\varphi^{-1}(t)=:\alpha_2(t)}). \tag{2.4}$$

2.1.2 Beispiel. Sei φ ein Karte auf M. Die Abbildung

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_i} := \left(x \mapsto \underbrace{\frac{\partial}{\partial\varphi_i}|_x}_{\in T_xM}\right)$$

aus Bemerkung 1.2.7 ist ein Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit U_φ. Wegen $\mathrm{t}_x\varphi\, \frac{\partial}{\partial\varphi_i}|_x = e_i$ folgt

$$\hat{\varphi} \circ \frac{\partial}{\partial\varphi_i} \circ \varphi^{-1}(t) = \left(t, \mathrm{t}_{\pi\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_i}(\varphi^{-1}(t))\right)}\varphi\, \frac{\partial}{\partial\varphi_i}(\varphi^{-1}(t))\right) = (t, e_i),$$

womit $\frac{\partial}{\partial\varphi_i}$ sogar C^∞ ist, also in $\mathfrak{X}(U_\varphi)$ liegt.

2.1.3 Lemma. *Sei $X : M \to TM$ ein Vektorfeld auf M. Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$, so gilt für jede Funktion $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, dass die Funktion (vgl. Definition 1.2.11)*

$$Xf : M \to \mathbb{R}, \quad Xf\,(x) := X(x)f \; (= \mathrm{t}_{f(x)}\, \mathrm{id}_\mathbb{R}\, T_xfX(x)),$$

in $C^\infty(M, \mathbb{R})$ liegt.
Ist umgekehrt $Xf \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ für alle $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, so folgt $X \in \mathfrak{X}(M)$[1].

Beweis. Für ein Vektorfeld X auf M und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ folgt aus (2.2)

$$Xf = \pi_2 \circ \hat{\mathrm{id}}_\mathbb{R} \circ (Tf) \circ X,$$

womit wegen Proposition 1.2.19 und Fakta 1.2.10, 6, aus $X \in C^\infty(M, TM)$, d.h. $X \in \mathfrak{X}(M)$, folgt, dass $Xf \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Ist nun $Xf \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ für jedes $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, so muss auch für jedes $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ die linke und damit die rechte Seite von (2.3) eine klassische C^∞-Funktion für $t \in D_\varphi$ sein. Da φ eine Karte ist, muss damit $s \mapsto dg(s)\, \alpha_2(s)$ für alle $g \in C^\infty(D_\varphi, \mathbb{R})$, sodass sich $f = g \circ \varphi$ zu einer $C^\infty(M, \mathbb{R})$-Funktion fortsetzen lässt, unendlich oft differenzierbar sein.

Ist $g \in C^\infty(D_\varphi, \mathbb{R})$ beliebig, $t \in D_\varphi$ und h wie in Lemma 1.1.11, so liegt $h \cdot g$ auch in $C^\infty(D_\varphi, \mathbb{R})$, und $(h \cdot g) \circ \varphi$ hat kompakten, in U_φ enthaltenen Träger, und lässt sich damit zu einer $C^\infty(M, \mathbb{R})$-Funktion fortsetzen. Da $s \mapsto dg(s)\, \alpha_2(s)$ lokal bei t mit $s \mapsto d(h \cdot g)(s)\, \alpha_2(s)$ übereinstimmt, ist auch erstere Funktion C^∞ lokal bei t und damit auf ganz D_φ.

Nimmt man für g nacheinander die Projektionen p_j auf die einzelnen Koordinaten, so sieht man, dass dann $\alpha_2 = \pi_2 \circ \hat{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}$ unendlich oft differenzierbar sein muss. Da φ eine beliebige mit dem Atlas auf M verträgliche Karte war, muss X unendlich oft differenzierbar sein.

❑

Man beachte, dass wegen Fakta 1.2.12, 4, ein $X \in \mathfrak{X}(M)$ eindeutig durch alle Funktionen Xf für $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ bestimmt ist.

[1] Für die unendliche Differenzierbarkeit von X auf U_φ für eine Karte φ reicht es, dass $x \mapsto X(x)f,\ x \in U_\varphi$ für $f = p_j \circ \varphi,\ j = 1, \ldots, d$, unendlich oft differenzierbar auf U_φ ist.

2.1.4 Lemma. *$\mathfrak{X}(M)$ versehen mit der punktweisen Addition bzw. skalaren Multiplikation ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ist $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$, so ist auch das punktweise Produkt $f \cdot X$ ein Element aus $\mathfrak{X}(M)$. Insbesondere ist $\mathfrak{X}(M)$ ein $C^\infty(M,\mathbb{R})$-Modul.*

Die Abbildung $(f, X) \mapsto Xf$ ist eine bilineare Abbildung von $C^\infty(M,\mathbb{R}) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$. Dabei gilt $(f \cdot X)g = f \cdot (Xg)$ und die Produktregel

$$X(f \cdot g) = f \cdot Xg + g \cdot Xf. \tag{2.5}$$

Beweis. Dass $Xf \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, haben wir in Lemma 2.1.3 gesehen. Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ – f kann auch ein konstanter Skalar sein – und $x \in M$ gilt wegen $X(x), Y(x) \in T_xM$

$$(f \cdot X + Y)(x) = f(x) \cdot X(x) + Y(x) \in T_xM,$$

womit $f \cdot X + Y : M \to TM$ ein Vektorfeld ist. Für ein beliebiges $g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ gilt dann wegen Fakta 1.2.12, 3,

$$(f \cdot X + Y)g\,(x) = (f \cdot X + Y)(x)g = f(x) \cdot (X(x)g) + Y(x)g = (f \cdot (Xg) + Yg)(x).$$

Wegen Lemma 2.1.3 folgt $f \cdot X + Y \in \mathfrak{X}(M)$. Außerdem folgt für $Y = 0$, dass $(f \cdot X)g = f \cdot (Xg)$.

Aus (2.3) folgt für $f, g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$

$$X(\varphi^{-1}(t))(f \cdot g) = \frac{\partial (f \cdot g) \circ \varphi^{-1}}{\partial \alpha_2(t)}(t),$$

wobei rechts die Richtungsableitung von $(f \cdot g) \circ \varphi^{-1}$ in Richtung des Vektors $\alpha_2(t)$ ($\in \mathbb{R}^d$) steht. Wegen der klassischen Produktregel folgt

$$X(\varphi^{-1}(t))(f \cdot g) = f \circ \varphi^{-1}(t) \cdot \frac{\partial g \circ \varphi^{-1}}{\partial \alpha_2(t)}(t) + g \circ \varphi^{-1}(t) \cdot \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial \alpha_2(t)}(t) =$$

$$f(\varphi^{-1}(t)) \cdot X(\varphi^{-1}(t))g + g(\varphi^{-1}(t)) \cdot X(\varphi^{-1}(t))f.$$

Also gilt (2.5).

❑

2.1.5 Beispiel. Sei φ eine Karte auf M und $X \in \mathfrak{X}(U_\varphi)$ sowie $x \in U_\varphi$, so existiert eine zusammenhängende Umgebung $D \subseteq D_\varphi$ von $\varphi(x)$ und eine C^∞-Funktion $h : D_\varphi \to \mathbb{R}$ mit $h(D_\varphi) \subseteq [0, 1]$, kompaktem $\operatorname{supp} h \subseteq D_\varphi$ und $h|_D = 1$.

Die Funktion $(h \circ \varphi) \cdot X$ liegt nun auch in $\mathfrak{X}(U_\varphi)$. Setzt man diese Funktion außerhalb von U_φ mit 0 fort, so folgt aus der Tatsache, dass der Träger dann in U_φ enthalten ist, dass diese Fortsetzung in $\mathfrak{X}(M)$ liegt und auf $U := \varphi^{-1}(D)$ mit $X|_U$ übereinstimmt.

Zusammengefasst gilt $\mathfrak{X}(U_\varphi)|_U = \mathfrak{X}(M)|_U$. Insbesondere gibt es Vektorfelder $X_j \in \mathfrak{X}(M)$, die auf der offenen und zusammenhängenden Menge U mit den $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}$ aus Beispiel 2.1.2 übereinstimmen.

Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Nach der klassischen Produktregel für das Produkt einer Matrix-wertigen und einer Vektor-wertigen Funktion folgt aus (2.3)

$$Y(\varphi^{-1}(t))\,(Xf) = \frac{\partial((Xf) \circ \varphi^{-1})}{\partial \beta_2(t)}(t) = \frac{\partial(s \mapsto d(f \circ \varphi^{-1})(s)\,\alpha_2(s))}{\partial \beta_2(t)}(t) =$$

$$\frac{\partial(s\mapsto d(f\circ\varphi^{-1})(s))}{\partial\beta_2(t)}(t)\ \alpha_2(t)+d(f\circ\varphi^{-1})(t)\ \frac{\partial\alpha_2}{\partial\beta_2(t)}(t)=$$
$$\frac{\partial(s\mapsto d(f\circ\varphi^{-1})(s)\ \alpha_2(t))}{\partial\beta_2(t)}(t)+d(f\circ\varphi^{-1})(t)\ \frac{\partial\alpha_2}{\partial\beta_2(t)}(t)=$$
$$\frac{\partial^2 f\circ\varphi^{-1}}{\partial\alpha_2(t)\ \partial\beta_2(t)}(t)+d(f\circ\varphi^{-1})(t)\ \frac{\partial\alpha_2}{\partial\beta_2(t)}(t).$$

wobei $\alpha_2(t)=\pi_2\circ\hat{\varphi}\circ X\circ\varphi^{-1}(t)=\mathrm{t}_{\varphi^{-1}(t)}\varphi\ X(\varphi^{-1}(t))$ und $\beta_2(t)=\pi_2(\hat{\varphi}\circ Y\circ\varphi^{-1}(t))=\mathrm{t}_{\varphi^{-1}(t)}\varphi\ Y(\varphi^{-1}(t))$. Wegen dem Satz von Schwarz folgt aus Symmetriegründen für $\varphi^{-1}(t)=y\in U_\varphi$

$$X(y)\,(Yf)\ -\ Y(y)(Xf)= \tag{2.6}$$
$$d(f\circ\varphi^{-1})(t)\ \left(\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_2(t)}(t)-\frac{\partial\alpha_2}{\partial\beta_2(t)}(t)\right)=Z(y)f,$$

wobei (vgl. (2.3))

$$Z(y)=(\mathrm{t}_y\varphi)^{-1}\left(\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_2(t)}(t)-\frac{\partial\alpha_2}{\partial\beta_2(t)}(t)\right)\in T_yM. \tag{2.7}$$

Man beachte dabei, dass $Z(y)$ ad hoc von der Karte φ abhängt. Da aber der Ausdruck $X(y)(Yf)-Y(y)(Xf)$ von der Karte unabhängig ist, folgt aus Fakta 1.2.12, 4, dass $Z(y)$ doch nicht von φ abhängt, und damit auch auf ganz M definiert ist. Außerdem gilt (vgl. (2.1))

$$\hat{\varphi}\circ Z\circ\varphi^{-1}(t)=\left(t,\left(\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_2(t)}(t)-\frac{\partial\alpha_2}{\partial\beta_2(t)}(t)\right)\right).$$

Nach Lemma 2.1.4 ist somit Z in $C^\infty(M,TM)$; also $Z\in\mathfrak{X}(M)$.

2.1.6 Definition. Für $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ sei die *Lie-Klammer* $[X,Y]$ definiert durch $[X,Y]:=Z$, vgl. (2.7).

2.1.7 Lemma. *Für $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ und $g\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ gilt*

(i) $[X,Y]=-[Y,X]$ *(*Schiefsymmetrie*)*

(ii) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$ *(*Jakobi-Identität*)*

(iii) $[g\cdot X,Y]=g\cdot[X,Y]-(Yg)X$

Beweis. Die Schiefsymmetrie folgt sofort aus (2.7). Um die Jakobi-Identität nachzuweisen, genügt es nach Fakta 1.2.12, 4, zu zeige, dass $[X,[Y,Z]]f+[Y,[Z,X]]f+[Z,[X,Y]]f=0$ für alle $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$. In der Tat folgt aus (2.6)

$$[X,[Y,Z]](y)f=X(y)\ ([Y,Z]f)\ -\ [Y,Z](y)(Xf)=$$

$$X(y)\Big(x\mapsto\big(Y(x)\ (Zf)\ -\ Z(x)(Yf)\big)\Big)-$$
$$Y(y)\ \big(x\mapsto Z(x)(Xf)\big)\ +\ Z(y)\big(x\mapsto Y(x)(Xf)\big)=$$

$$X(y)\Big(x\mapsto Y(x)\ (Zf)\Big)\ -\ X(y)\Big(x\mapsto Z(x)(Yf)\Big)-$$
$$Y(y)\ \big(x\mapsto Z(x)(Xf)\big)\ +\ Z(y)\big(x\mapsto Y(x)(Xf)\big).$$

Addiert man nun das mit den entsprechenden Ausdrücken für $[Y,[Z,X]]f$ und $[Z,[X,Y]]f$, so kürzen sich alle Terme weg.

Bezüglich der letzten Gleichheit wenden wir $[g\cdot X, Y]$ auf ein beliebiges $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ an und erhalten mit Lemma 2.1.4

$$\begin{aligned}[g\cdot X,Y](y)f &= (g\cdot X)(y)\,(Yf) \;-\; Y(y)((g\cdot X)f) = \\ g(y)\cdot\Big(X(y)(Yf)\Big) &\;-\; Y(y)(g\cdot(Xf)) = \\ g(y)\cdot\Big(X(y)(Yf)\Big) - g(y)\cdot\Big(Y(y)(Xf)\Big) &- (X(y)f)\cdot(Y(y)g) = \\ (g\cdot[X,Y])(y)f &- ((Yg)\cdot X)(y)f.\end{aligned}$$

❑

2.1.8 Beispiel. Sei φ ein Karte auf M, und sei $\frac{\partial}{\partial\varphi_i} : U_\varphi \to TU_\varphi$ das Vektorfeld wie Beispiel 2.1.2. Wegen $\hat{\varphi}\circ\frac{\partial}{\partial\varphi_i}\circ\varphi^{-1}(t) = (t,e_i)$ folgt für $i,j\in\{1,\dots,d\}$ aus (2.7)

$$\pi_2\circ\hat{\varphi}\circ\left[\frac{\partial}{\partial\varphi_i},\frac{\partial}{\partial\varphi_j}\right]\circ\varphi^{-1}(t) = \left(\frac{\partial e_j}{\partial e_i}(t) - \frac{\partial e_i}{\partial e_j}(t)\right) = 0.$$

Also gilt $\left[\frac{\partial}{\partial\varphi_i},\frac{\partial}{\partial\varphi_j}\right] = 0$.

2.1.9 Beispiel. Aus Beispiel 1.2.6 wissen wir, dass für $G = GL(n,\mathbb{R})$ (versehen mit dem Atlas $\{\mathrm{id}_G\}$) und $B\in G$ sowie $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ für $c_A^B := B + tA$ die Restklasse $[c_A^B]$ zu T_BG gehört, wobei $\mathrm{t}_B\,\mathrm{id}_G\,([c_A^B]) = A$.

Für festes A ist die Abbildung $Y : B\mapsto[c_A^B]$ nun ein C^∞-Vektorfeld. Um die unendliche Differenziebarkeit nachzurechnen, sei $B\in G$ und $\hat{\mathrm{id}}_G : TG\to G\times\mathbb{R}^{n\times n}$ sei die Karte auf TG, wobei $\hat{\mathrm{id}}_G X = (B, \mathrm{t}_B\,\mathrm{id}_G\;X)$ mit $X\in T_BG$. Offensichtlich ist $\hat{\mathrm{id}}_G\circ Y\circ\mathrm{id}_G^{-1}(B) = \hat{\mathrm{id}}_G([c_A^B] = (B,A)$ eine C^∞-Funktion. Für $f\in C^\infty(G,\mathbb{R})$ gilt

$$Yf(B) = [c_A^B]f = (f\circ c_A^B)'(0) = \frac{\partial f}{\partial A}(B).$$

Für $A,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $Z(B) := [c_C^B]$ und $f\in C^\infty(G,\mathbb{R})$ gilt

$$[Y,Z]f = YZf - ZYf = \frac{\partial^2}{\partial A\partial C}f(B) - \frac{\partial^2}{\partial C\partial A}f(B) = 0.$$

Also $[Y,Z] = 0$.

2.1.10 Beispiel. Interessanter sind Vektorfelder auf G der Bauart $Y : B\mapsto[c_{BA}^B]$. Auch diese sind C^∞, da

$$\hat{\mathrm{id}}_G\circ Y\circ\mathrm{id}_G^{-1}(B) = \hat{\mathrm{id}}_G([c_{BA}^B]) = (B,BA)$$

C^∞ von B abhängt. Offensichtlich gilt auch

$$Yf(B) = [c_{BA}^B]f = (f\circ c_{BA}^B)'(0) = \frac{\partial f}{\partial BA}(B).$$

Für $A,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $Z(B) := [c_{BC}^B]$ und $f\in C^\infty(G,\mathbb{R})$ gilt

$$[Y,Z]f = YZf - ZYf = \frac{\partial}{\partial BA}\left(D\mapsto\frac{\partial}{\partial DC}f(D)\right)(B) - \frac{\partial}{\partial BC}\left(D\mapsto\frac{\partial}{\partial DA}f(D)\right)(B).$$

Nun ist $\frac{\partial}{\partial DC} f(D) = df(D)\,DC$, wobei $df(D) \in L(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R})$ im Sinne der Analysis II. Nach der Produktregel und wegen $\frac{\partial(D\mapsto DC)}{\partial BA}(B) = (t \mapsto (B+tBA)C)'(0) = BAC$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial BA}\left(D \mapsto \frac{\partial}{\partial DC} f(D)\right)(B) =$$

$$\frac{\partial(D \mapsto df(D))}{\partial BA}(B)\,BC + df(B)\,\frac{\partial(D \mapsto DC)}{\partial BA}(B) =$$

$$\frac{\partial(D \mapsto df(D)\,BC)}{\partial BA}(B) + df(B)\,BAC = \frac{\partial^2}{\partial BA \partial BC} f(B) + df(B)\,BAC$$

und mit dem Satz von Schwarz

$$[Y, Z]f = df(B)\,BAC - df(B)\,BCA = \frac{\partial f}{\partial B(AC - CA)}(B).$$

Somit gilt $[Y, Z](B) = (B, [c^B_{B(AC-CA)}])$.

Also ist $\Phi : A \mapsto (B \mapsto [c^B_{BA}])$ eine Abbildung von $\mathbb{R}^{n\times n}$ nach $\mathfrak{X}(G)$, die wegen $\mathrm{t}_B\,\mathrm{id}_G\,([c^B_{BA}]) = (c^B_{BA})'(0) = BA$ injektiv und linear ist, und die nach obiger Rechnung sogar mit der $[.,.]$ verträglich ist, wenn wir $[A, C] := AC - CA$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ definieren.

Man beachte, dass $A \mapsto \Phi(A)(I) = [c^I_A]$ wegen $\mathrm{t}_I\,\mathrm{id}_G\,([c^I_A]) = A$ sogar eine Bijektion von $\mathbb{R}^{n\times n}$ auf $T_I G$ ist.

2.2 Verwandte Vektorfelder

2.2.1 Definition. Seien M, N zwei C^∞-Mannigfaltigkeiten und $h : M \to N$ unendlich oft differenzierbar. Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$, so heißen X und Y *h-verwandt*, falls $Th \circ X = Y \circ h$, d.h.

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "Th"] & TN \\ M \arrow[u, "X"] \arrow[r, "h"] & N \arrow[u, "Y"'] \end{tikzcd}$$

Die Tatsache h-verwandt zu sein ist offenbar mit + und dem skalaren Multiplizieren verträglich. Es gilt sogar

2.2.2 Lemma. *Sei $h \in C^\infty(M, N)$, $f \in C^\infty(N, \mathbb{R})$, und seien $X, \tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$, $Y, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$. Sind X und Y sowie $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ jeweils h-verwandt, so sind es auch $[X, \tilde{X}]$ und $[Y, \tilde{Y}]$, $X + \tilde{X}$ und $Y + \tilde{Y}$ sowie $(f \circ h) \cdot X$ und $f \cdot Y$.*

Beweis. Sei $m \in M, g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$. Nach Fakta 1.2.12, 2, gilt für jedes Vektorfeld $Z : M \to TM$ immer $Th(Z(m))\,g = (T_m h\, Z(m))g = Z(m)\,(h \circ g)$ und somit

$$\underbrace{(Th \circ [X, \tilde{X}])(m)}_{\in T_{h(m)}N} g = [X, \tilde{X}](m)(g \circ h) =$$

$$X(m)(x \mapsto \tilde{X}(x)\,(g \circ h)) - \tilde{X}(m)(x \mapsto X(x)\,(g \circ h)) =$$

$$X(m)(x \mapsto (Th \circ \tilde{X})(x)\,g) - \tilde{X}(m)(x \mapsto (Th \circ X)(x)\,g) =$$

$$X(m)(x \mapsto \underbrace{(\tilde{Y} \circ h)(x)\,g}_{=(\tilde{Y}g)\circ h(x)}) - \tilde{X}(m)(x \mapsto \underbrace{(Y \circ h)(x)\,g}_{=(Yg)\circ h(x)}) =$$

$$(Th \circ X)(m)\,(\tilde{Y}g) - (Th \circ \tilde{X})(m)\,(Yg) =$$
$$(Y \circ h)(m)\,(\tilde{Y}g) - (\tilde{Y} \circ h)(m)\,(Yg) = [Y, \tilde{Y}](h(m))g\,.$$

Die zweite Behauptung folgt sofort aus der Linearität von $T_x h$ für alle $x \in M$, und die dritte Behauptung zeigt man auch ganz elementar.

❑

2.2.3 Beispiel. Ist G eine Liegruppe (vgl. Bemerkung 1.1.10) mit neutralen Element e, so nennt man ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(G)$ *linksinvariant*, wenn

$$Tl_g \circ X = X \circ l_g,$$

d.h. X ist mit sich selber l_g-verwandt, und zwar für alle $g \in G$. Dabei ist $l_g : G \to G$ die Linkstranslation $x \mapsto gx$.

Gemäß Lemma 2.2.2 bildet die Menge $\mathfrak{g}$ aller linksinvarianten Vektorfelder einen unter $[.,.]$ abgeschlossenen Unterraum von $\mathfrak{X}(G)$.

Offensichtlich ist dann $X \mapsto X(e)$ eine lineare Abbildung von $\mathfrak{g}$ nach T_eG. Wegen

$$X(g) = X(l_g(e)) = T_e l_g\, X(e)$$

ist diese Abbildung injektiv. Andererseits ist sie surjektiv, da man für $X_e \in T_eG$ das Vektorfeld $X(g) = T_e l_g\, X_e$ betrachten kann. Dieses ist linksinvariant und – wie man elementar zeigen kann – C^∞. Also ist $\mathfrak{g} \cong T_eG$.

2.2.4 Beispiel. Wir betrachten $G = GL(n, \mathbb{R})$. Aus Beispiel 2.1.10 ist bekannt, dass $Y = \Phi(A) : B \mapsto [c^B_{BA}]$ mit $c^B_{BA}(t) = B + tBA$ in $\mathfrak{X}(G)$ liegt. Für $C \in G$ gilt

$$Tl_C \circ Y(B) = T_B l_C([c^B_{BA}]) = [l_C \circ c^B_{BA}] = [c^{CB}_{CBA}] = Y(CB) = Y \circ l_C.$$

Also liegt Y in $\mathfrak{g} =: \mathfrak{g}l(n, \mathbb{R})$, d.h. $\Phi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathfrak{g}l(n, \mathbb{R})$.

Nun ist nach Beispiel 2.2.3 $X \mapsto X(I)$ bijektiv von $\mathfrak{g}l(n, \mathbb{R})$ auf T_IG. Nach Beispiel 2.1.10 ist aber auch $A \mapsto [c^I_A] = \Phi(A)(I)$ bijektiv. Also muss auch $\Phi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathfrak{g}l(n, \mathbb{R})$ bijektiv sein.

2.2.5 Lemma. *Sei $h : M \to N$ eine C^∞-Abbildung und $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Außerdem sei $T_x h : T_xM \to T_{h(x)}N$ für alle $x \in M$ injektiv und $Y(h(x)) \in T_x h(T_xM)$. Dann existiert genau ein $X \in \mathfrak{X}(M)$, welches zu Y h-verwandt ist.*

Beweis. Falls X zu Y h-verwandt ist, so muss für alle $x \in M$ immer $T_x h\, X(x) = Y(h(x))$, was voraussetzungsgemäß zu $X(x) := (T_x h)^{-1} Y(h(x))$ äquivalent ist. Also ist X eindeutig, falls es existiert. Dafür setzen wir

$$X(x) := (T_x h)^{-1} Y(h(x)),\ \ x \in M,$$

und stellen sofort $X(x) \in T_xM$ fest, womit $X : M \to TM$ ein Vektorfeld ist. Um zu zeigen, dass X unendlich oft differenzierbar ist, sei zunächst M eine Untermannigfaltigkeit von N und $h = \iota_M$ sei die Einbettungsabbildung von M nach N hinein, vgl. Definition 1.3.1. Nach Proposition 1.3.7 erfüllt ein solches h die Voraussetzung, dass $T_x h : T_xM \to T_{h(x)}N$ immer injektiv ist.

Zu einem $x \in M$ gibt es gemäß Definition 1.3.1 eine Karte φ auf N mit $x \in U_\varphi$, sodass $D_\varphi \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \varphi(U_\varphi \cap M)$ $(\subseteq \mathbb{R}^d)$, wobei $k = \dim M$ und $d = \dim N$. Nach Bemerkung 1.3.6 ist dann

$$\varphi_M = p_k \circ \varphi|_{M\cap U_\varphi} : M \cap U_\varphi \to p_k(D_\varphi \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}))$$

eine Karte von M mit $x \in U_{\varphi_M}$. Nach Bemerkung 1.3.8 gilt $\hat{\varphi} \circ T\iota_M = (\iota_k \times \iota_k) \circ \hat{\varphi}_M$. Also gilt für $y \in U_{\varphi_M}$

$$(\iota_k \times \iota_k) \circ \hat{\varphi}_M \circ X(y) = \hat{\varphi} \circ T\iota_M \circ X(y) = \hat{\varphi}(T_y h\, X(y)) = \hat{\varphi}(Y(h(y))) = \hat{\varphi}(Y(y)),$$

was zusammen mit $\varphi_M^{-1} = \varphi^{-1} \circ \iota_k$ die Gleichheit

$$(\iota_k \times \iota_k) \circ \hat{\varphi}_M \circ X \circ \varphi_M^{-1} = \hat{\varphi} \circ Y \circ \varphi_M^{-1} = \hat{\varphi} \circ Y \circ \varphi^{-1} \circ \iota_k$$

als Funktion von $D_{\varphi_M} = D_\varphi \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ nach $D_{\hat{\varphi}} = D_\varphi \times \mathbb{R}^d$ ergibt. Nun ist die rechte Seite eine C^∞-Funktion und damit auch die linke. Das bedingt aber auch $\hat{\varphi}_M \circ X \circ \varphi_M^{-1} \in C^\infty(D_{\varphi_M}, D_{\hat{\varphi}_M})$, womit $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Für ein allgemeines $h : M \to N$ wie in der Behauptung sei an Satz 1.3.14 erinnert. Daraus erkennen wir, dass es zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von x gibt, sodass $h(U)$ eine Teilmannigfaltigkeit von N ist und sodass $h|_U : U \to h(U)$ ein Diffeomorphismus ist.

Aus $h = \iota_{h(U)} \circ h|_U$ folgt $T_{h(y)}\iota_{h(U)} \circ T_y h|_U = T_y h$ und damit $Y(y) \in T_{h(y)}\iota_{h(U)}\, T_{h(y)}h(U)$ für $y \in U$. Nach dem ersten Teil des Beweises ist $Z : z \mapsto (T_z\iota_{h(U)})^{-1}Y(z),\ z \in h(U)$ aus $\mathfrak{X}(h(U))$. Da $h|_U : U \to h(U)$ ein Diffeomorphismus ist, ist auch

$$X(y) = (T_y h)^{-1} Y(h(y)) = (T_y h|_U)^{-1}(T_{h(y)}\iota_{h(U)})^{-1} Y(h(y)) = (Th|_U)^{-1} Z \circ h|_U(y)$$

als Funktion von $y \in U$ als Zusammensetzung von C^∞-Funktionen selber C^∞.

❑

2.2.6 Bemerkung. Sei $h : M \to N$ eine C^∞-Abbildung und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Es muss nicht immer ein $Y \in \mathfrak{X}(N)$ geben, sodass X und Y h-verwandt sind. Ist aber h ein Diffeomorphismus, so liegt $Y := Th \circ X \circ h^{-1}$ offenbar in $\mathfrak{X}(N)$ und ist zu X h-verwandt.

In einem Spezialfall lassen sich verwandte Vektorfelder noch anders erzeugen.

2.2.7 Beispiel. Sei H eine Untermannigfaltigkeit einer Liegruppe G, sodass H auch eine Untergruppe von G ist. Weiters sei ι_H die Einbettungsabbildung von H nach G.

Da $T_e\iota_H : T_eH \to T_eG$ injektiv ist, und da der Raum der linksinvarianten Vektorfelder $\mathfrak{h}$ $(\subseteq \mathfrak{X}(H))$ ($\mathfrak{g}$ $(\subseteq \mathfrak{X}(G))$) vermöge der Abbildung $X \mapsto X(e)$ isomorph zu T_eH (T_eG) ist, lässt sich jedem $X \in \mathfrak{h}$ injektiv ein $\tilde{X} \in \mathfrak{g}$ derart zuordnen, dass $\tilde{X}(e) = T_e\iota_H\, X(e)$. Diese Zuordnung ist linear. Außerdem gilt für $g \in H$, dass $\iota_H \circ l_g = l_g \circ \iota_H$ bzw. $T\iota_H \circ Tl_g = Tl_g \circ T\iota_H$, und damit

$$\begin{aligned} T_g\iota_H X(g) = T_g\iota_H X(l_g(e)) = T_g\iota_H\, T_e l_g\, X(e) = \\ Tl_g\, T_e\iota_H\, X(e) = Tl_g\, \tilde{X}(e) = \tilde{X}(l_g(e)) = \tilde{X}(\iota_H(g)). \end{aligned}$$

Also gilt $T\iota_H \circ X = \tilde{X} \circ \iota_H$, d.h. X und $\tilde{X}$ sind ι_H-verwandt. Gemäß Lemma 2.2.2 ist somit die Zuordnung $X \mapsto \tilde{X}$ nicht nur linear, sondern auch mit $[.,.]$ verträglich.

2.2.8 Beispiel. Sei $G = GL(n, \mathbb{R})$ und $H = SL(n, \mathbb{R})$, vgl. Beispiel 1.3.16. Von dort wissen wir auch, dass $T_eG = \{[c_A^I] : A \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$ und

$$T_I\iota_H\, T_eH = \{[c_A^I] : A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathrm{tr}(A) = 0\}.$$

Dabei ist die Zuordnung A $(\in \mathbb{R}^{n\times n}) \mapsto [c_A^I]$ $(\in T_eG)$ linear und bijektiv.

Ist $X \in \mathfrak{h} =: \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, so liegt $T_I\iota_H\, X(e)$ in $T_I\iota_H\, T_eH$. Also gilt $T_I\iota_H\, X(e) = [c_A^I]$ für ein eindeutiges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathrm{tr}(A) = 0$. Das entsprechende linksinvariante Vektorfeld $\tilde{X} \in \mathfrak{gl}(n)$ ist nach Beispiel 2.2.4 gegeben durch $B \mapsto [c_{BA}^B]$.

2.3 Integralkurven

2.3.1 Definition. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $c : I = (a, b) \to M$ mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ eine C^∞-Abbildung, d.h. eine C^∞-Kurve, und sei $x \in M$. Dann heißt c *Integralkurve von X* durch x, wenn $0 \in I$ mit $c(0) = x$ und

$$c'(t) = X(c(t)),\ t \in I\,,$$

vgl. Definition 1.2.1. Sie heißt *maximale Integralkurve von X* durch x, falls es keine echte Fortsetzung von c auf ein größeres offenes Intervall zu einer Integralkurve von X gibt.

2.3.2 Bemerkung. Sei φ eine Karte mit $x \in U_\varphi$. Dann gilt für $c : I \to M$, wobei I so klein ist, dass $c(I) \subseteq U_\varphi$, wegen (1.6)

$$\hat{\varphi} \circ c'(t) = \Big(\varphi \circ c(t), \mathrm{t}_{\varphi\circ c(t)}\varphi([s \mapsto c(t+s)])\Big) = \Big(\varphi \circ c(t), (\varphi \circ c)'(t)\Big).$$

Also ist $c'(t) = X(c(t))$ zu

$$(\varphi \circ c)'(t) = \pi_2 \circ \hat{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}(\varphi \circ c(t)),\ t \in I,$$

äquivalent.

Die Existenz von maximalen Integralkurven basiert auf folgendem Resultat, das wir aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen importieren. Dabei handelt es sich um eine Version des *Satzes von Picard-Lindelöf*.

2.3.3 Satz. *Seien J ein offenes, Null enthaltendes, reelles Intervall, $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, und $f : J \times D \to \mathbb{R}^d$ mindestens m-mal stetig differenzierbar mit $m \geq 1$.*

1. *Dann existiert zu jedem $\xi \in D$ ein offenes Intervall I um die Null und eine C^{m+1}-Lösung $g : I \to D$ des Anfangswertproblems*

   $$g'(t) = f(t, g(t)),\ t \in I,\ \ g(0) = \xi.$$

   Die Lösung ist eindeutig im folgenden Sinne: Jede weitere C^1-Funktion $\hat{g} : \hat{I} \to D$ mit einem offenen Intervall $\hat{I}$ um die Null, sodass $\hat{g}'(.) = f(., \hat{g}(.))$ auf $\hat{I}$ und $\hat{g}(0) = \xi$, stimmt mit g auf $I \cap \hat{I}$ überein.

2. *Zu jedem $\xi \in D$ gibt es sogar eine offene Umgebung $U(\xi) \subseteq D$ von ξ, ein offenes Intervall I um die Null und eine m-mal stetig differenzierbare Funktion $G : I \times U(\xi) \to D$, sodass $g_\zeta(t) := G(t, \zeta),\ t \in I$, für alle $\zeta \in U(\xi)$ eine Lösung von $g' = f(., g)$ auf I mit $g(0) = \zeta$ ist.*

   Diese Lösung ist für alle $\zeta \in U(\xi)$ auch eindeutig: Jede weitere C^1-Funktion $\hat{g} : \hat{I} \to D$ mit einem offenen Intervall $\hat{I}$ um die Null, sodass $\hat{g}'(.) = f(., \hat{g}(.))$ auf $\hat{I}$ und $\hat{g}(0) = \zeta$, stimmt mit g_ζ auf $I \cap \hat{I}$ überein.

2.3.4 Lemma. *Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $x \in M$. Dann existiert eine eindeutige maximale Integralkurve $c_x : I_x \to M$, d.h. $I_x = (a_x, b_x)$ und $c_x'(t) = X(c_x(t))$ mit $c_x(0) = x$. Jede Integralkurve bei x ist eine Einschränkung von c_x.*
Für $y := c_x(s)$ mit einem $s \in I_x$ folgt zudem $I_y = I_x - s$ mit $c_y(t) = c_x(s+t),\ t \in I_y$.

Beweis. Zunächst sei φ eine Karte mit $x \in U_\varphi$. Wenden wir Satz 2.3.3, 1, auf

$$D = D_\varphi, \ J = \mathbb{R} \ \text{ und } \ f(t,g) = \pi_2 \circ \hat{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}(g)$$

an, so folgt die Existenz eines offenen Intervalls I um die Null und einer Abbildung $g : I \to D_\varphi$, sodass $g' = f(.,g) = \pi_2 \circ \hat{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1} \circ g$ auf I mit $g(0) = \varphi(x)$. Nach Bemerkung 2.3.2 ist $c = \varphi^{-1} \circ g$ eine Integralkurve durch x. Also gibt es überhaupt Integralkurven durch x.

Sei nun $\mathfrak{I}$ die Menge aller Integralkurven $c : J_c \to M$ durch x, wobei J_c ein von c abhängiges offenes Intervall um die Null ist. Sind nun $c, d \in \mathfrak{I}$, so wollen wir zeigen, dass c und d auf dem offenen Intervall $J_c \cap J_d$ um die Null übereinstimmen. Dazu sei

$$R := \{\tau \in J_c \cap J_d : d(\tau) = c(\tau)\}.$$

Aus Stetigkeitsgründen ist R abgeschlossen in $J_c \cap J_d$. Wegen $c(0) = x = d(0)$ liegt 0 in R. Insbesondere ist R nichtleer.

Sei nun $r \in R$, ψ eine Karte auf M mit $d(r) = c(r) \in U_\psi$, und sei $\delta > 0$ so klein, dass $(r - \delta, r + \delta) \subseteq J_c \cap J_d$ und $d(r - \delta, r + \delta) \subseteq U_\psi$ sowie $c(r - \delta, r + \delta) \subseteq U_\psi$. Die Funktionen

$$g_r(s) := \psi \circ c(r + s), \ \text{ und } \ h_r(s) := \psi \circ d(r + s), \ s \in (-\delta, +\delta),$$

erfüllen gemäß Bemerkung 2.3.2 die Gleichungen $g_r' = f(., g_r)$ bzw. $h_r' = f(., h_r)$. Da zusätzlich $g_r(0) = \psi \circ c(r) = \psi \circ d(r) = h_r(0)$, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Satz 2.3.3, 1, dass $g_r = h_r$ auf einem kleinen Intervall um 0, bzw. $g = h$ und damit $c = d$ auf einem kleinen Intervall um r. Somit ist R auch offen. Da $J_c \cap J_d$ zusammenhängend ist, folgt $R = J_c \cap J_d$.

Mit $I_x := \bigcup_{c \in \mathfrak{I}} J_c$ erhalten wir offensichtlich ein offenes, Null enthaltendes Intervall. Für $t \in I_x$ definieren wir $c_x(t) := c(t)$, wobei $c \in \mathfrak{I}$ mit $t \in J_c$ ist. Wegen obiger Überlegung ist diese Definition nicht von c abhängig, solange nur $t \in J_c$. Da die J_c alle offen sind, und da C^∞ zu sein, eine lokale Eigenschaft ist, folgt auch $c_x \in C^\infty(I_x, M)$.

Aus $c'(t) = X(c(t))$ für $t \in I_x$ und $c \in \mathfrak{I}$ so, dass $t \in J_c$, folgt unmittelbar auch $c_x'(t) = X(c_x(t))$. Dabei gilt $c_x(0) = c(0) = x$ für jedes $c \in \mathfrak{I}$. Damit ist $c_x : I_x \to M$ eine Integralkurve. Nach Konstruktion ist jede Integralkurve bei x eine Einschränkung von c_x auf I_x. Insbesondere ist c_x maximal.

Sei schließlich $y := c_x(s)$ mit einem $s \in I_x$. Nun erfüllt $d(t) := c_x(t+s)$ für $t \in I_x - s$ sicherlich $d(0) = y$ und $d'(t) = X(d(t))$ auf $I_x - s$. Also ist d eine Integralkurve bei y, die nach dem Bewiesenen die Einschränkung von c_y auf $I_x - s$ ist; also $I_x - s \subseteq I_y$ und $c_x(t + s) = d(t) = c_y(t), \ t \in I_x - s$. Für $-s \in I_x - s \subseteq I_y$ folgt $x = c_x(0) = c_y(-s)$.

Vertauscht man nun die Rollen von y und $x = c_y(-s)$, so folgt insbesondere $I_y + s \subseteq I_x$ und damit schließlich $I_x - s = I_y$.

❑

2.3.5 Beispiel. Ist $X(x) = 0$, so erfüllt die konstante Funktion $c \equiv x$ die Gleichung $c' = 0 = X(x)$. Also ist in dem Fall $I_x = \mathbb{R}$ und $c_x \equiv x$.

2.3.6 Bemerkung. Mit der Notation aus Lemma 2.3.4 gilt für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und das C^∞-Vektorfeld $\lambda \cdot X$ nach der Kettenregel für $\lambda t \in I_x$

$$c_x(\lambda\, .)'(t) = \lambda X(c_x(\lambda t)),$$

womit sich $t \mapsto c_x(\lambda t)$ mit $t \in \frac{1}{\lambda}\, I_x$ als die maximale Integralkurve von $\lambda \cdot X$ bei x herausstellt. Dabei ist $\frac{1}{\lambda}\, I_x = \mathbb{R}$, falls $\lambda = 0$.

2.3.7 Beispiel. Ist φ eine Karte auf M, so gilt für das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial\varphi_j} \in \mathfrak{X}(U_\varphi)$, dass $\pi_2 \circ \hat{\varphi} \circ \frac{\partial}{\partial\varphi_j} \circ \varphi^{-1}(\xi) = e_j$.

Somit ist für ein $x \in U_\varphi$ die Funktion $\varphi \circ c_x(t)$ Lösung von $(\varphi \circ c_x)'(t) = e_j$ und daher $\varphi \circ c_x(t) = \varphi(x) + te_j$.

2.3.8 Beispiel. Sei G eine Liegruppe (vgl. Bemerkung 1.1.10) mit neutralen Element e und $X \in \mathfrak{g}$, d.h. ein linksinvariantes Vektorfeld. Die Integralkurve c_e von X durch e erfüllt für $t \in I_e$

$$(l_g \circ c_e)'(t) = Tl_g\, c_e'(t) = Tl_g\, X(c_e(t)) = X(l_g \circ c_e(t)).$$

Also ist $l_g \circ c_e$ eine Integralkurve von X durch $l_g(e) = g$. Indem man ähnlich argumentiert, wenn man von c_g ausgeht und $l_{g^{-1}}$ anwendet, sieht man, dass $I_g = I_e$ und darauf $l_g \circ c_e = c_g$.

Für ein $s \in I_e$ und $g = c_e(s)$ folgt aus Lemma 2.3.4, dass $I_e = I_g = I_e - s$. Das kann aber nur gelten, wenn $I_e = \mathbb{R}$. Weiters hat man

$$l_g \circ c_e(t) = c_g(t) = c_e(s+t) \ \text{ und somit } \ c_e(s) \cdot c_e(t) = c_e(s+t).$$

Also ist $t \mapsto c_e(t)$ sogar ein differenzierbarer Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(G, \cdot)$.

2.3.9 Beispiel. Für $G = GL(n, \mathbb{R})$ wissen wir, dass $A \mapsto (B \mapsto [c^B_{BA}])$ ein Isomorphismus von $\mathbb{R}^{n\times n}$ auf $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ist.

Da id_G eine Karte auf G ist, erfüllt nach Bemerkung 2.3.2 eine Kurve genau dann $c'(t) = X(c(t))$ (im Sinne von Definition 1.2.1) für ein $X \in \mathfrak{X}(G)$, wenn

$$c'(t) = \pi_2 \circ \widehat{\mathrm{id}}_G \circ X(c(t)) = \mathrm{t}_{c(t)}\, \mathrm{id}_G\, X(c(t)).$$

Im Falle $X = (B \mapsto [c^B_{BA}])$ gilt $\mathrm{t}_{c(t)}\, \mathrm{id}_G\, X(c(t)) = c(t)A$. Somit ist die Integralkurve c_I von X durch I nichts anderes als $c(t) = \exp(tA)$, da diese Kurve bekannterweise die eindeutige Lösung von $c'(t) := c(t)A$ mit $c(0) = I$ ist.

Wir sehen für diese Gruppe damit auch direkt, dass $t \mapsto \exp(tA)$ ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(G, \cdot)$ ist, vgl. Beispiel 2.3.8.

2.4 Lokale und globale Flüsse

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass es für ein gegebenes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ und ein $x \in M$ eine maximale Integralkurve $c_x : I_x \to M$ durch x gibt. Wir wollen nun die Gesamtheit aller solchen Kurven betrachten.

2.4.1 Definition. Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Mit der Notation aus Lemma 2.3.4 sei

$$\mathfrak{D}^X := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M : t \in I_x\} = \bigcup_{x \in M} I_x \times \{x\}.$$

Die Abbildung $\mathrm{Fl}^X : \mathfrak{D}^X \to M$ definiert durch $\mathrm{Fl}^X(t, x) = c_x(t)$ heißt der zu X gehörige *lokale Fluss*.

Für ein $t \in \mathbb{R}$ wollen wir mit $\mathfrak{D}_t^X$ den Schnitt

$$\mathfrak{D}_t^X = \{x \in M : (t, x) \in \mathfrak{D}^X\} = \{x \in M : t \in I_x\}$$

bezeichnen.

2.4.2 Bemerkung. Der lokale Fluss $\mathrm{Fl}^X(t, x)$ hat wegen Lemma 2.3.4 und Definition 2.4.1 folgende Eigenschaften:

(*i*) $\mathfrak{D}_0^X = M$ und $\mathrm{Fl}^X(0, x) = x$.

(*ii*) Da für jedes $x \in M$ die Menge I_x ein nichtleeres offenes Intervall um die Null ist gilt

$$\bigcup_{t>0} \mathfrak{D}_t^X = M, \quad \bigcup_{t<0} \mathfrak{D}_t^X = M.$$

(*iii*) Aus $0 \le s \le t$ bzw. $t \le s \le 0$ folgt $\mathfrak{D}_t^X \subseteq \mathfrak{D}_s^X$.

(*iv*) $\mathrm{Fl}^X(t, .)$ bildet $\mathfrak{D}_t^X$ bijektiv auf $\mathfrak{D}_{-t}^X$ ab.

(*v*) Für beliebige $s, t \in \mathbb{R}$ ist der Definitionsbereich $\{x \in \mathfrak{D}_t^X : \mathrm{Fl}^X(t, x) \in \mathfrak{D}_s^X\}$ von $\mathrm{Fl}^X(s, .) \circ \mathrm{Fl}^X(t, .)$ in $\mathfrak{D}_{s+t}^X$ enthalten, wobei $\mathrm{Fl}^X(s, .) \circ \mathrm{Fl}^X(t, .) = \mathrm{Fl}^X(s + t, .)$ gilt.

Haben s und t dasselbe Vorzeichen, so stimmt der Definitionsbereich von $\mathrm{Fl}^X(s, .) \circ \mathrm{Fl}^X(t, .)$ mit $\mathfrak{D}_{s+t}^X$ überein.

Insbesondere stimmt für $k \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ der Definitionsbereich von

$$\mathrm{Fl}^X(t, .)^k := \underbrace{\mathrm{Fl}^X(t, .) \circ \cdots \circ \mathrm{Fl}^X(t, .)}_{k-\mathrm{mal}}$$

mit $\mathfrak{D}_{kt}^X$ überein, wobei $\mathrm{Fl}^X(t, .)^k = \mathrm{Fl}^X(kt, .)$.

Wir wollen noch die letzte Aussage nachweisen. Dazu sei $x \in \mathfrak{D}_t^X$ mit $\mathrm{Fl}^X(t, x) = c_x(t) \in \mathfrak{D}_s^X$. Wegen Lemma 2.3.4 ist $s \in I_{c_x(t)} = I_x - t$ und damit $s + t \in I_x$ bzw. $x \in \mathfrak{D}_{s+t}^X$, wobei $\mathrm{Fl}^X(s, .) \circ \mathrm{Fl}^X(t, x) = c_{c_x(t)}(s) = c_x(s + t) = \mathrm{Fl}^X(s + t, x)$.

Haben s, t dasselbe Vorzeichen, so folgt aus $x \in \mathfrak{D}_{s+t}^X$ wegen (iii), dass $x \in \mathfrak{D}_t^X$ bzw. $t \in I_x$. Aus $x \in \mathfrak{D}_{s+t}^X$ folgt auch $s + t \in I_x$. Wieder wegen Lemma 2.3.4 gilt $I_{c_x(t)} = I_x - t$ und damit $s \in I_{c_x(t)}$, bzw. $\mathrm{Fl}^X(t, x) \in \mathfrak{D}_s^X$.

2.4.3 Satz. *Die Menge $\mathfrak{D}^X$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R} \times M$ (versehen mit der Produkttopologie), und $\mathrm{Fl} : \mathfrak{D}^X \to M$ ist eine C^∞-Abbildung, wobei $\mathbb{R} \times M$ gemäß Lemma 1.1.7 und $\mathfrak{D}^X$ gemäß Fakta 1.1.4, 3, als Mannigfaltigkeit zu sehen ist.*

Somit ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Bijektion $\mathrm{Fl}^X(t, .) : \mathfrak{D}_t^X \to \mathfrak{D}_{-t}^X$ ein C^∞-Diffeomorphismus definiert auf der offenen Teilmenge $\mathfrak{D}_t^X \subseteq M$.

Beweis. Seien $x \in M$ und $s \in I_x$. Setze $y := c_x(s)$ und wähle eine Karte φ mit $y \in U_\varphi$. Wir wenden Satz 2.3.3, 2, auf

$$D = D_\varphi, \ J = \mathbb{R} \ \text{ und } \ f(t, g) = \pi_2 \circ \hat{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}(g)$$

an, so folgt die Existenz eines offenen Intervalls J_y um die Null, einer offenen Umgebung $D_y \subseteq D_\varphi$ von $\varphi(y)$ und einer C^∞-Funktion $G : J_y \times D_y \to D_\varphi$, sodass $g_\eta(t) := G(t, \eta)$, $t \in J_y$, für alle $\eta \in D_y$ die eindeutige Lösung von $g' = f(., g)$ auf J_y mit $g(0) = \eta$ ist.

Nach Bemerkung 2.3.2 und Lemma 2.3.4 gilt $J_y \subseteq I_z$ für alle $z \in U_y := \varphi^{-1}(D_y)$ sowie, dass $\varphi^{-1} \circ g_{\varphi(z)}$ die Einschränkung auf J_y der Integralkurve c_z durch z ist. Insbesondere gilt

$$J_y \times U_y \subseteq \mathfrak{D}^X \ \text{ und } \ \mathrm{Fl}^X(t,z) = \varphi^{-1} \circ G(t, \varphi(z)), \ (t,z) \in J_y \times U_y.$$

Zudem ist diese Funktion unendlich oft auf $J_y \times U_y$ als Abbildung nach M differenzierbar, vgl. Lemma 1.1.7 und Definition 1.1.8.

Ist nun $K_x \subseteq I_x$ ein kompaktes Intervall mit $0 \in K_x$, so lässt sich die kompakte Menge $c_x(K_x)$ durch endlich viele U_y überdecken. Sei W $(\supseteq c_x(K_x))$ die Vereinigung dieser endlich vielen U_y. Schneiden wir die entsprechenden J_y, so erhalten wir ein offenes Intervall J um die Null, sodass $\rho_1(t,z) := \mathrm{Fl}^X(t,z)$ auf $O_1 := J \times W$ $(\subseteq \mathfrak{D}^X)$ unendlich oft differenzierbar und daher insbesondere stetig ist. Die Menge

$$O_2 := \rho_1^{-1}(W) \ (\subseteq O_1 = J \times W)$$

ist damit offen, und die Abbildung $\rho_2(t,z) := \rho_1(t, \rho_1(t,z))$ ist wohldefiniert auf O_2 und ebenfalls unendlich oft differenzierbar. Setzen wir induktiv fort, so erhalten wir offene Mengen $O_k := \rho_{k-1}^{-1}(W)$ $(\subseteq O_{k-1} \subseteq \cdots \subseteq O_1 = J \times W)$ und darauf C^∞-Abbildungen

$$\rho_k(t,z) := \rho_1(t, \rho_{k-1}(t,z)), \ (t,z) \in O_k.$$

Man beachte, dass wegen Bemerkung 2.4.2, (v), $O_k \subseteq \{(t,z) : z \in \mathfrak{D}^X_{kt}\}$ und für $(t,z) \in O_k$ gilt die Beziehung

$$\rho_k(t,z) = \mathrm{Fl}^X(kt, z) = c_z(kt). \tag{2.8}$$

Ist $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{k}K_x \subseteq J$, so gilt

$$\rho_1\Big(\frac{1}{k}K_x \times \{x\}\Big) = c_x\Big(\frac{1}{k}K_x\Big) \subseteq W$$

und damit $\frac{1}{k}K_x \times \{x\} \subseteq O_2$. Wegen (2.8) folgt

$$\rho_2\Big(\frac{1}{k}K_x \times \{x\}\Big) = c_x\Big(\frac{2}{k}K_x\Big) \subseteq W$$

und daher wieder $\frac{1}{k}K_x \times \{x\} \subseteq O_3$. Verfährt man so fort, so folgt induktiv

$$\rho_{k-1}\Big(\frac{1}{k}K_x \times \{x\}\Big) = c_x\Big(\frac{k-1}{k}K_x\Big) \subseteq W$$

bzw. $\frac{1}{k}K_x \times \{x\} \subseteq O_k$. In Folge ist die Abbildung $(t,z) \mapsto \rho_k(t,z) = \mathrm{Fl}^X(kt,z)$ auf der offenen Obermenge O_k von $\frac{1}{k}K_x \times \{x\}$ definiert und unendlich oft differenzierbar.

Somit hat Fl^X auf einer offenen Obermenge von $K_x \times \{x\}$ dieselbe Eigenschaft. Da $K_x \subseteq I_x$ und schließlich auch $x \in M$ beliebig war, ist $\mathfrak{D}^X$ offen und Fl^X darauf C^∞.

Aus der Tatsache, dass $\mathfrak{D}^X$ offen ist folgt unmittelbar die Offenheit von $\mathfrak{D}^X_t$. Als Einschränkung auf eine Komponente ist $x \mapsto \mathrm{Fl}^X(t,x)$ offensichtlich auch C^∞.

❑

2.4.4 Korollar. *Ist $x \in M$ und I_x nach oben beschränkt, d.h.*

$$I_x = (a_x, b_x) \ \text{ mit } \ -\infty \le a_x < 0 < b_x < +\infty,$$

so liegt $c_x([0,b_x))$ in keiner kompakten Teilmenge von M, d.h. $\lim_{t \nearrow b_x} c_x(t) = \infty$, wenn $M \dot{\cup} \{\infty\}$ die Alexandroff-Kompaktifizierung ist. Entsprechendes gilt im Fall $-\infty < a_x$.

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an, so gibt es eine Folge $0 < t_n \nearrow b_x$, sodass $\lim_{n\to\infty} c_x(t_n) = z$ für ein $z \in M$. Wegen $\bigcup_{t>0} \mathfrak{D}_t^X = M$ gilt $z \in \mathfrak{D}_t^X$ für ein festes $t > 0$. Da $\mathfrak{D}_t^X$ offen ist, gilt $c_x(t_n) \in \mathfrak{D}_t^X$ für n hinreichend groß.

Für solche n ist daher $t \in I_{c_x(t_n)} = I_x - t_n$, bzw. $t_n + t \in I_x = (a_x, b_x)$. Das steht aber im Widerspruch zu $\lim_{n\to\infty} t_n = b_x$.

❑

Besonders interessant ist nun der Fall, dass $\mathfrak{D}^X = \mathbb{R} \times M$ oder äquivalent, dass $I_x = \mathbb{R}$ für alle $x \in M$. Man spricht dann von einem *globalen Fluss*.

2.4.5 Bemerkung. Der Fluss Fl^X ist genau dann global, wenn für je ein $t > 0$ und ein $t < 0$ gilt, dass $\mathfrak{D}_t^X = M$.

In der Tat folgt aus $\mathfrak{D}^X = \mathbb{R} \times M$ unmittelbar $\mathfrak{D}_t^X = M$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Gilt umgekehrt $\mathfrak{D}_t^X = M$ für ein $t \neq 0$, so folgt aus Bemerkung 2.4.2, (v) und (iii), sofort $\mathfrak{D}_s^X = M$ für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{sgn}(s) = \mathrm{sgn}(t)$.

2.4.6 Beispiel. Ist G eine Liegruppe und $X \in \mathfrak{g}$ ein linksinvariantes Vektorfeld. Aus Beispiel 2.3.8 wissen wir, dass der maximale Fluss durch e und damit auch durch jedes andere $g \in G$ auf $I_e = I_g = \mathbb{R}$ definiert ist. Also ist der entsprechende Fluss Fl^X auf ganz $\mathbb{R} \times M$ definiert und daher ein globaler Fluss.

2.4.7 Beispiel. Für $G = GL(n, \mathbb{R})$ und $X = (B \mapsto [c_{BA}^B]) \in \mathfrak{g}l(n, \mathbb{R})$ ist nach Beispiel 2.3.9 $c_I(t) = \exp(tA)$ und damit $c_B(t) = B\exp(tA)$, vgl. Beispiel 2.3.8. Also gilt

$$\mathrm{Fl}^X(t, B) = B\exp(tA).$$

2.4.8 Beispiel. Sei G wieder eine (C^∞-)Liegruppe und bezeichne $f : G \times G \to G$ die Gruppenmultiplikation $f(g,h) = gh$. Man sieht ganz leicht, dass $g \mapsto 0\ (\in T_gG)$ ein C^∞-Vektorfeld ist. Wegen Fakta 1.1.9, 8, ist damit auch die Abbildung

$$\Phi : (g, X_e) \mapsto (0, \iota_{T_eG} X_e) \in T_gG \times T_eG \subseteq TG \times TG,$$

aus $C^\infty(G \times T_eG, TG \times TG)$. Beachte dabei, dass T_eG eine Untermannigfaltigkeit von TG ist – wie man unschwer nachprüft. $\iota_{T_eG} : T_eG \to TG$ bezeichnet die Einbettungsabbildung.

Mit der Notation aus Fakta 1.2.20 ist daher auch die Zusammensetzung $Tf \circ \mathfrak{i} \circ \Phi : G \times T_eG \to TG$ eine C^∞-Funktion und stimmt gemäß (8) mit

$$(g, X_e) \mapsto \underbrace{Tf(g,.)}_{TG\to TG}(X_e) = Tl_g\,(X_e)\ (\in TG) \tag{2.9}$$

überein.

Damit haben wir insbesondere auch die Behauptung aus Beispiel 2.2.3 gezeigt, dass $X(g) := Tl_g(X_e)$ für jedes feste $X_e \in T_eG$ ein linksinvariantes C^∞-Vektorfeld ist, d.h. $X \in \mathfrak{g}$. Also ist gemäß Beispiel 2.2.3 $X \mapsto X(e)$ tatsächlich eine lineare Bijektion von der Menge aller linksinvarianter C^∞-Vektorfelder $\mathfrak{g}$ auf T_eG. Insbesondere sind $\mathfrak{g}$ und T_eG diffeomorph, wenn wir $\mathfrak{g}$ vermöge einer linearen Bijektion auf $\mathbb{R}^{\dim G}$ als Atlas zu einer Mannigfaltigkeit machen.

Wegen Fakta 1.1.9, 8, folgt aus (2.9) auch, dass

$$Y : (g, X_e) \mapsto \tilde{\mathfrak{i}} \circ (\underbrace{X(g)}_{=Tl_g(X_e)}, \underbrace{0}_{\in T_{X_e}(T_eG)})\ \ (\in T(G \times (T_eG))\,)$$

ein C^∞-Vektorfeld auf $G \times (T_eG)$ ist, wobei $\tilde{\iota} : TG \times T(T_eG) \to T(G \times (T_eG))$ der Diffeomorphismus wie in Fakta 1.2.20 bezüglich der Mannigfaltigkeiten G und T_eG ist. Wegen (see Fakta 1.2.20)

$$(\mathrm{Fl}^X(.,g), X_e)'(t) = \tilde{\iota}(\underbrace{\mathrm{Fl}^X(.,g)'(t)}_{\in T_{\mathrm{Fl}^X(t,g)}G}, \underbrace{X_e'(t)}_{\in T_{X_e}(T_eG)}) = \tilde{\iota}(X(\mathrm{Fl}^X(t,g)), 0)$$

ist $t \mapsto (\mathrm{Fl}^X(t,g), X_e)$, $t \in \mathbb{R}$, die Integralkurve von Y durch den Punkt (g, X_e), womit der Fluss $\mathrm{Fl}^Y(t,(g,X_e))$ eine C^∞-Funktion in den Variablen (t,g,X_e) ist. Wir setzen

$$\exp(X_e) := \mathrm{Fl}^Y(1,(e,X_e)) = \mathrm{Fl}^X(1,e),$$

und sehen, dass $\exp : T_eG \to G$ eine C^∞-Funktion ist.

Schließlich gilt für $X \in \mathfrak{g}$ mit $X(h) := Tl_h(X_e)$ und $g \in G$ bekannterweise $g \exp(X_e) = g\,\mathrm{Fl}^X(t,e) = \mathrm{Fl}^X(t,g)$, siehe Beispiel 2.3.8. Nach Bemerkung 2.3.6 gilt $\exp(s \cdot X_e) = \mathrm{Fl}^X(s,e)$ und daher

$$T_0 \exp\ \underbrace{([s \mapsto s \cdot X_e]_\sim)}_{\in T_0(T_eG)} = \underbrace{[s \mapsto \exp(s \cdot X_e)]_\sim}_{\in T_eG} = \underbrace{[s \mapsto \mathrm{Fl}^X(s,e)]_\sim}_{\in T_eG} = \mathrm{Fl}^X(.,e)'(0) = X(\mathrm{Fl}^X(0,e)) = X_e.$$

2.4.9 Korollar. *Hat X einen kompakten Träger, d.h. der Abschluss $\operatorname{supp} X$ der Menge $\{x \in M : X(x) \neq 0\}$ ist in M kompakt, so ist Fl^X ein globaler Fluss.*

Beweis. Gemäß Satz 2.4.3 gilt $\bigcup_{t>0} \mathfrak{D}_t^X = M = \bigcup_{t<0} \mathfrak{D}_t^X$. Laut Voraussetzung und wegen Bemerkung 2.4.2, (iii), gibt es $t_1 > 0, t_2 < 0$ mit $\mathfrak{D}_{t_1}^X, \mathfrak{D}_{t_2}^X \supseteq \operatorname{supp} X$. Für alle $x \notin \operatorname{supp} X$ gilt wegen Beispiel 2.3.5 $I_x = \mathbb{R}$, d.h. $x \in \mathfrak{D}_{t_1}^X, \mathfrak{D}_{t_2}^X$. Also insgesamt $\mathfrak{D}_{t_1}^X = M = \mathfrak{D}_{t_2}^X$.

❑

2.4.10 Lemma. *Seien M und N beide C^∞-Mannigfaltigkeiten, und sei $h \in C^\infty(M,N)$. Weiters seien $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Diese beiden sind genau dann h-verwandt, wenn $\mathrm{Fl}^Y \circ (\mathrm{id}_\mathbb{R} \times h) = h \circ \mathrm{Fl}^X$ auf einer gewissen offenen Menge $\mathfrak{R}$ mit $\{0\} \times M \subseteq \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{D}^X \cap (\mathrm{id}_\mathbb{R} \times h)^{-1}(\mathfrak{D}^Y)$.*

Ist das der Fall, so gilt $\mathfrak{D}^X \subseteq (\mathrm{id}_\mathbb{R} \times h)^{-1}(\mathfrak{D}^Y)$ und darauf gilt $\mathrm{Fl}^Y \circ (\mathrm{id}_\mathbb{R} \times h) = h \circ \mathrm{Fl}^X$. Also ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{D}^X$ eine (und damit die größte) zulässige Wahl.

Beweis. Gilt $\mathrm{Fl}^Y \circ (\mathrm{id}_\mathbb{R} \times h) = h \circ \mathrm{Fl}^X$ auf der offenen Menge $\mathfrak{R} \supseteq \{0\} \times M$, so folgt für $x \in M$ zunächst, dass $(-\delta,\delta) \times \{x\} \subseteq \mathfrak{R}$ für ein $\delta > 0$. Wegen $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{D}^X \cap (\mathrm{id}_\mathbb{R} \times h)^{-1}(\mathfrak{D}^Y)$ gilt insbesondere $(-\delta,\delta) \times \{x\} \subseteq \mathfrak{D}^X$ und $(-\delta,\delta) \times \{h(x)\} \subseteq \mathfrak{D}^Y$ bzw. $(-\delta,\delta) \subseteq I_x, I_{h(x)}$.

Da für $t \in (-\delta,\delta)$ sicher $\mathrm{Fl}^Y(t,h(x)) = h \circ \mathrm{Fl}^X(t,x)$, folgt mit Fakta 1.2.10, 6, 7,

$$Y(h(x)) = \mathrm{Fl}^Y(.,h(x))'(0) = (h \circ \mathrm{Fl}^X(.,x))'(0) = T_xh\ \mathrm{Fl}^X(.,x)'(0) = T_xh\ X(x).$$

Sind X und Y h-verwandt, so folgt für $x \in M$ und $t \in I_x$

$$(h \circ \mathrm{Fl}^X(.,x))'(t) = T_{\mathrm{Fl}^X(t,x)}h\ \mathrm{Fl}^X(.,x)'(t) = T_{\mathrm{Fl}^X(t,x)}h\ X(\mathrm{Fl}^X(t,x)) = Y(h \circ \mathrm{Fl}^X(t,x)),$$

womit $h \circ \mathrm{Fl}^X(.,x)$ in der maximalen Integralkurve von Y durch $h \circ \mathrm{Fl}^X(0,x) = h(x)$ enthalten ist. Also folgt $I_x \times \{h(x)\} \subseteq \mathfrak{D}^Y$ und damit $(\mathrm{id}_\mathbb{R} \times h)(\mathfrak{D}^X) \subseteq \mathfrak{D}^Y$, wobei $\mathrm{Fl}^Y \circ (\mathrm{id}_\mathbb{R} \times h) = h \circ \mathrm{Fl}^X$.

❑

2.4.11 Beispiel. Sei M eine Teilmannigfaltigkeit von N und ι_M die Einbettungsabbildung. Ist $Y \in \mathfrak{X}(N)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ das gemäß Lemma 2.2.5 in eindeutiger Weise existierende zu Y ι_M-verwandte Vektorfeld, so folgt aus Lemma 2.4.10, dass für $(t, x) \in \mathfrak{D}^X$ wegen $x = \iota_M(x) \in M$

$$\mathrm{Fl}^Y(t, x) = \mathrm{Fl}^X(t, x).$$

Wir wollen uns anschauen, wie zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und ihre Flüsse in Verbindung stehen können. Dazu setzen wir zunächst

$$\mathrm{Fl}^X_s := \mathrm{Fl}^X(s, .) : \mathfrak{D}^X_s \to \mathfrak{D}^X_{-s} \; (\subseteq M)$$

für festes $s \in \mathbb{R}$. Die Ableitung $T\,\mathrm{Fl}^X_s$ davon bildet damit $T\mathfrak{D}^X_s$ bijektiv auf $T\mathfrak{D}^X_{-s}$ ($\subseteq TM$) ab.

2.4.12 Lemma. *Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $x \in M$ gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} T\,\mathrm{Fl}^X_{-t} \circ Y \circ \mathrm{Fl}^X_t(x) = [X, Y](x), \tag{2.10}$$

wobei $T\,\mathrm{Fl}^X_{-t} \circ Y \circ \mathrm{Fl}^X_t(x)$ für alle in Frage kommenden $t \in I_x$ (bzgl. X) Werte in T_xM hat und damit die Ableitung dort zu bilden ist[2]*. Der Ausdruck links in* (2.10) *heißt die* Lie-Ableitung *$\mathcal{L}_X$ von Y.*

Beweis. Die Funktion $(s, t, y) \mapsto \mathrm{Fl}^X_s \circ \mathrm{Fl}^X_t(y)$ ist auf der wegen der Stetigkeit von Fl^X offenen Teilmenge $\mathfrak{D}^{X;X} := \{(s, t, y) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{D}^X : (s, \mathrm{Fl}^X_t(y)) \in \mathfrak{D}^X\}$ von $\mathbb{R}^2 \times M$ definiert, welche offensichtlich $\{0\} \times \{0\} \times M$ umfasst.

Sei $x \in M$ und φ eine Karte auf M mit $x \in U_\varphi$. Wegen $(0, 0, x) \in \mathfrak{D}^{X;X}$ und da $(s, t, y) \mapsto \mathrm{Fl}^X_s(x) \circ \mathrm{Fl}^X_t(y)$ auf $\mathfrak{D}^{X;X}$ stetig ist, finden wir ein $\delta > 0$ und eine offenen Umgebung $U \subseteq U_\varphi$ von x, sodass $(-\delta, \delta) \times (-\delta, \delta) \times U \subseteq \mathfrak{D}^{X;X}$ und $\mathrm{Fl}^X_s \circ \mathrm{Fl}^X_t(y) \in U_\varphi$ und damit

$$\mathrm{Fl}^X_t(y) \in U_\varphi, T\,\mathrm{Fl}^X_s \circ Y \circ \mathrm{Fl}^X_t(y) \in U_{\hat\varphi}$$

für alle $s, t \in (-\delta, \delta)$ und $y \in U$.

Wir setzen nun für jedes feste $t \in (-\delta, \delta)$ und variables $\xi \in D := \varphi(U)$

$$\gamma_t(\xi) := \varphi \circ \mathrm{Fl}^X(t, \varphi^{-1}(\xi))$$

und erhalten damit eine C^∞-Funktion $\gamma_t : D \to D_\varphi$. Offensichtlich ist sogar die Funktion $(t, \xi) \mapsto \gamma_t(\xi)$ eine C^∞-Funktion von $(-\delta, \delta) \times D$ nach D_φ. Wegen Bemerkung 2.3.2 gilt

$$\frac{d}{dt}\gamma_t(\xi) = \pi_2 \circ \underbrace{\hat\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}}_{=:\alpha}(\gamma_t(\xi)) = \alpha_2(\gamma_t(\xi))$$

mit $\alpha_2 = \pi_2 \circ \alpha$. Wegen dem Satz von Schwarz und der Kettenregel folgt

$$\frac{d}{dt} d\gamma_t(\xi) = d\alpha_2(\gamma_t(\xi))\, d\gamma_t(\xi).$$

Aus (1.9) folgt andererseits für $s \in (-\delta, \delta)$

$$\hat\varphi \circ T\,\mathrm{Fl}^X_s \circ \hat\varphi^{-1}(\xi, \eta) = (\gamma_s(\xi), d\gamma_s(\xi)\eta).$$

[2] Endlichdimensionale Vektorräume haben genau eine Topologie, die sie zu topologischen Vektorräumen machen.

Setzen wir noch $\beta := \hat{\varphi} \circ Y \circ \varphi^{-1}$ und $\beta_2 := \pi_2 \circ \beta$, so folgt

$$\rho(s,t,\xi) := \pi_2 \circ \hat{\varphi} \circ T\,\mathrm{Fl}_s^X \circ Y \circ \mathrm{Fl}_t^X \circ \varphi^{-1}(\xi) = d\gamma_s(\gamma_t(\xi))\,\beta_2(\gamma_t(\xi))$$

mit der Ableitung $d\gamma_s(\gamma_t(\xi))$ im Sinne der Analysis II.

Zusammen mit $\mathrm{Fl}_0^X = \mathrm{id}$ bzw. $\gamma_0 = \mathrm{id}$ erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial s}\rho(s,0,\xi) = d\alpha_2(\gamma_s(\xi))\,d\gamma_s(\xi)\,\beta_2(\xi).$$

Aus $d\gamma_0(\xi) = d\,\mathrm{id}(\xi) = \mathrm{id}$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(0,t,\xi) = d\beta_2(\gamma_t(\xi))\,\alpha_2(\gamma_t(\xi)).$$

Somit folgt aus der Kettenregel für $\xi = \varphi(x)$ wegen (2.7)

$$\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\rho(-t,t,\varphi(x)) = d\beta_2(\varphi(x))\alpha_2(\varphi(x)) - d\alpha_2(\varphi(x))\beta_2(\varphi(x)) = \mathrm{t}_x\varphi\,[X,Y](x).$$

Somit gilt

$$\mathrm{t}_x\varphi\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\,T\,\mathrm{Fl}_{-t}^X \circ Y \circ \mathrm{Fl}_t^X(x) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\mathrm{t}_x\varphi\,T\,\mathrm{Fl}_{-t}^X \circ Y \circ \mathrm{Fl}_t^X(x) =$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}\,\pi_2 \circ \hat{\varphi} \circ T\,\mathrm{Fl}_{-t}^X \circ Y \circ \mathrm{Fl}_t^X(x) = \mathrm{t}_x\varphi\,[X,Y](x).$$

Da $\mathrm{t}_x\varphi : T_xM \to \mathbb{R}^d$ eine lineare Bijektion ist, folgt (2.10). Das Vertauschen von $\mathrm{t}_x\varphi$ mit $\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}$ ist gerechtfertigt, da endlichdimensionale Vektorräume nur eine Topologie haben, die sie zu topologischen Vektorräumen machen.

❑

Wir betrachten nun die Funktion $(t,s,x) \mapsto \mathrm{Fl}_t^X \circ \mathrm{Fl}_s^Y(x) = \mathrm{Fl}^X(t,\mathrm{Fl}^Y(s,x))$ mit dem Definitionsbereich

$$\mathfrak{D}^{Y;X} := \{(t,s,x) \in \mathbb{R}\times\mathfrak{D}^Y : (t,\mathrm{Fl}^Y(s,x)) \in \mathfrak{D}^X\}\ \ (\subseteq \mathbb{R}^2 \times M).$$

Als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion ist diese Menge offen. Genauso ist der Definitionsbereich

$$\mathfrak{D}^{X;Y} := \{(t,s,x) \in \mathbb{R}^2\times M : (s,t,x) \in \mathbb{R}\times\mathfrak{D}^X, (s,\mathrm{Fl}^X(t,x)) \in \mathfrak{D}^Y\}\ \ (\subseteq \mathbb{R}^2 \times M).$$

von $(t,s,x) \mapsto \mathrm{Fl}_s^Y \circ \mathrm{Fl}_t^X(x) = \mathrm{Fl}^Y(s,\mathrm{Fl}^X(t,x))$ offen.

2.4.13 Proposition. *Sind $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, so gilt:*

Es existiert eine offenen Menge $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{D}^{X;Y} \cap \mathfrak{D}^{Y;X}$ mit $\{0\}\times\{0\}\times M \subseteq \mathfrak{Q}$, sodass

$$\mathrm{Fl}_t^X \circ \mathrm{Fl}_s^Y(x) = \mathrm{Fl}_s^Y \circ \mathrm{Fl}_t^X(x), \ \ \textit{für alle}\ \ (t,s,x) \in \mathfrak{Q}, \qquad (2.11)$$

genau dann, wenn $[X,Y] = 0$.

Man spricht in dem Fall von kommutierenden Flüssen.

Beweis. Gelte zunächst (2.11). Zu $x \in M$ gibt es wegen $\{0\}\times\{0\}\times M \subseteq \mathfrak{Q}$ ein $\delta > 0$ und eine offene Umgebung U von x, sodass $(-\delta,\delta)\times(-\delta,\delta)\times U \subseteq \mathfrak{Q}$. Für ein festes $t \in (-\delta,\delta)$ folgt für

$$h : U \to M,\ \ h(y) = \mathrm{Fl}_t^X(y)$$

aus (2.11), dass $\mathrm{Fl}^Y(s, h(y)) = h \circ \mathrm{Fl}^Y(s, y)$ für alle $s \in (-\delta, \delta)$ und alle $y \in U$.

Nach Beispiel 2.4.11 gilt für die Einschränkung $Y|_U : U \to TU$ des Vektorfeldes Y auf U, dass $\mathfrak{D}^{Y|_U} \subseteq \mathfrak{D}^Y$ und $(\mathrm{Fl}^Y)|_{\mathfrak{D}^{Y|_U}} = \mathrm{Fl}^{Y|_U}$. Es folgt

$$\mathrm{Fl}^Y(s, h(y)) = h \circ \mathrm{Fl}^{Y|_U}(s, y)$$

für alle $(s, y) \in ((-\delta, \delta) \times U) \cap \mathfrak{D}^{Y|_U} \supseteq \{0\} \times U$. Wenden wir Lemma 2.4.10 auf h und die Vektorfelder $Y|_U$ und Y an, so folgt

$$\underbrace{T(\mathrm{Fl}^X_t|_U)}_{=(T\,\mathrm{Fl}^X_t)|_{TU}} \circ Y|_U = Th \circ Y|_U = Y \circ h = Y \circ \mathrm{Fl}^X_t|_U.$$

und zwar für alle $t \in (-\delta, \delta)$.

Wegen $x \in U$ gibt es aus Stetigkeitsgründen ein $0 < \delta' \leq \delta$ mit $\mathrm{Fl}^X_t(x) \in U$ für alle $|t| < \delta'$. Für solche t folgt dann

$$T\,\mathrm{Fl}^X_{-t} \circ \underbrace{Y(\mathrm{Fl}^X_t(x))}_{\in TU} = Y \circ \mathrm{Fl}^X_{-t}(\mathrm{Fl}^X_t(x)) = Y(x).$$

Aus (2.10) schließen wir auf $[X, Y](x) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0} Y(x) = 0$. Da $x \in M$ beliebig war, folgt $[X, Y] = 0$.

Umgekehrt bedingt $[X, Y] = 0$ für jedes $x \in M$ und $t \in I_x$ wegen Bemerkung 2.4.2 die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial s}|_{s=t} T\,\mathrm{Fl}^X_{-s} \circ Y \circ \mathrm{Fl}^X_s(x) = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} T\,\mathrm{Fl}^X_{-s-t} \circ Y \circ \mathrm{Fl}^X_{s+t}(x) =$$

$$\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} T\,\mathrm{Fl}^X_{-t} \circ T\,\mathrm{Fl}^X_{-s} \circ Y \circ \mathrm{Fl}^X_s \circ \mathrm{Fl}^X_t(x) = T\,\mathrm{Fl}^X_{-t} \circ \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} T\,\mathrm{Fl}^X_{-s} \circ Y \circ \mathrm{Fl}^X_s \circ \mathrm{Fl}^X_t(x) =$$

$$T\,\mathrm{Fl}^X_{-t} \circ [X, Y] \circ \mathrm{Fl}^X_t(x) = 0.$$

Das Vertauschen von $\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}$ und $T\,\mathrm{Fl}^X_{-t}$ ist gerechtfertigt, da $T\,\mathrm{Fl}^X_{-t}$ hier eine lineare Abbildung von dem endlichdimensionalen Vektorraum $T_{\mathrm{Fl}^X_t(x)}M$ nach T_xM und somit stetig ist. Es folgt $T\,\mathrm{Fl}^X_{-t} \circ Y \circ \mathrm{Fl}^X_t(x) = T\,\mathrm{Fl}^X_{-0} \circ Y \circ \mathrm{Fl}^X_0(x) = Y$ für alle $t \in I_x$. Anders formuliert erhalten wir für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$T\,\mathrm{Fl}^X_t \circ Y \circ \mathrm{Fl}^X_{-t}(x) = Y(x), \quad \text{für alle } x \in \mathfrak{D}^X_{-t}.$$

Substituieren wir $x = \mathrm{Fl}^X_t(y)$ und beachten Bemerkung 2.4.2, (iv), so folgt

$$T\,\mathrm{Fl}^X_t \circ Y(y) = Y \circ \mathrm{Fl}^X_t(y), \quad \text{für alle } y \in \mathfrak{D}^X_t.$$

Zu einem festen $x \in M$ wähle $\delta > 0$ und eine offene Umgebung U von x, sodass $(-\delta, \delta) \times U \subseteq \mathfrak{D}^X$. Damit gilt $U \subseteq \mathfrak{D}^X_t$ für alle $t \in (-\delta, \delta)$.

Für ein festes aber beliebiges solches t setzen wir $h = \mathrm{Fl}^X_t|_U : U \to M$ und schränken Y auf U ein. Wieder nach Beispiel 2.4.11 gilt dafür $\mathfrak{D}^{Y|_U} \subseteq \mathfrak{D}^Y$ und

$$(\mathrm{Fl}^Y)|_{\mathfrak{D}^{Y|_U}} = \mathrm{Fl}^{Y|_U} : \mathfrak{D}^{Y|_U} \to U \ (\subseteq \mathfrak{D}^X_t). \tag{2.12}$$

Wenden wir Lemma 2.4.10 auf h sowie auf die Vektorfelder $Y|_U$ und Y an, so folgt

$$(\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \times \mathrm{Fl}^X_t)(\mathfrak{D}^{Y|_U}) = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \times h)(\mathfrak{D}^{Y|_U}) \subseteq \mathfrak{D}^Y \tag{2.13}$$

und

$$\mathrm{Fl}_t^X \circ \mathrm{Fl}_s^Y(y) = h \circ \mathrm{Fl}^{Y|_U}(s,y) = \mathrm{Fl}^Y \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \times h)(s,y) = \mathrm{Fl}_s^Y \circ \mathrm{Fl}_t^X(y)$$

für alle $(s,y) \in \mathfrak{D}^{Y|_U}$ $(\supseteq \{0\} \times U)$ und für beliebiges $t \in (-\delta, \delta)$.

Nun ist $\mathfrak{D}^{Y|_U}$ offen in $\mathbb{R} \times M$ und daher $(-\delta,\delta) \times \mathfrak{D}^{Y|_U}$ offen in $\mathbb{R}^2 \times M$ mit $(0,0,x) \in (-\delta,\delta) \times \mathfrak{D}^{Y|_U}$, wobei wegen (2.12) dann $(-\delta,\delta) \times \mathfrak{D}^{Y|_U} \subseteq \mathfrak{D}^{Y;X}$ und wegen (2.13) auch $(-\delta,\delta) \times \mathfrak{D}^{Y|_U} \subseteq \mathfrak{D}^{X;Y}$.

Bezeichnet nun $\mathfrak{Q}$ die Vereinigung aller dieser Mengen $(-\delta,\delta) \times \mathfrak{D}^{Y|_U}$, wenn $x \in M$ läuft, so ist $\mathfrak{Q}$ eine offene Teilmenge von $\mathfrak{D}^{X;Y} \cap \mathfrak{D}^{Y;X}$, die $\{0\} \times \{0\} \times M$ enthält.

❑

2.5 Distributionen, Satz von Frobenius

Hat man nicht nur zwei, sondern endlich viele C^∞-Vektorfelder $X_1, \dots, X_k$ auf einer Mannigfaltigkeit, so ist der Definitionsbereich von $(t_1, \dots, t_k, x) \mapsto \mathrm{Fl}_{t_1}^{X_1} \circ \dots \circ \mathrm{Fl}_{t_k}^{X_k}(x)$ rekursiv nach k definiert durch $\mathfrak{D}^{X_1}$ für $k = 1$ und

$$\mathfrak{D}^{X_1;\dots;X_k} :=$$
$$\{(t_1, \dots, t_k, x) \in \mathbb{R}^k \times M : (t_2, \dots, t_k, x) \in \mathfrak{D}^{X_2;\dots;X_k},\ (t_1, \mathrm{Fl}_{t_2}^{X_2} \circ \dots \circ \mathrm{Fl}_{t_k}^{X_k}(x)) \in \mathfrak{D}^{X_1}\}$$

für $k > 1$. Man zeigt induktiv nach k leicht, dass die Mengen $\mathfrak{D}^{X_1;\dots;X_k}$ alle offen in $\mathbb{R}^k \times M$ sind, $\{0\}^k \times M$ enthalten, und dass $(t_1, \dots, t_k, x) \mapsto \mathrm{Fl}_{t_1}^{X_1} \circ \dots \circ \mathrm{Fl}_{t_k}^{X_k}(x)$ auf $\mathfrak{D}^{X_1;\dots;X_k}$ eine C^∞-Abbildung ist.

Das folgendes Resultat ist eine Art Umkehrung von Beispiel 2.1.8.

2.5.1 Satz. *Sei M eine d-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit und seien $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, sodass $X_1(x), \dots, X_k(x)$ als Elemente von T_xM linear unabhängig sind, und zwar für alle $x \in M$. Weiters gelte $[X_i, X_j] = 0,\ i, j \in \{1, \dots, k\}$.*

Dann existiert um jeden Punkt aus M eine Karte φ, sodass auf U_φ

$$X_i = \frac{\partial}{\partial \varphi_i},\ i = 1, \dots, k.$$

Beweis. Sei $x \in M$ und ψ eine Karte mit $x \in U_\psi$ und $\psi(x) = 0$. Setzen wir ψ nötigenfalls mit einer geeigneten linearen Abbildung zusammen, so können wir dazu annehmen, dass $\mathrm{t}_x\psi\ X_1(x), \dots, \mathrm{t}_x\psi\ X_k(x)$ zusammen mit $e_{k+1}, \dots, e_d$ den $\mathbb{R}^d$ aufspannen.

Gemäß den Überlegungen vor dem gegenwärtigen Satz gibt es ein $\delta > 0$, sodass $U_\delta(0) \subseteq D_\psi$, $\psi^{-1}(0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_d)^T \in \mathfrak{D}^{X_1;\dots;X_k}$ und damit

$$h(t_1, \dots, t_d)^T := \mathrm{Fl}_{t_1}^{X_1} \circ \dots \circ \mathrm{Fl}_{t_k}^{X_k} \circ \psi^{-1}(0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_d)^T$$

für alle $(t_1, \dots, t_d)^T \in U_\delta(0)$ wohldefiniert. Wegen der Stetigkeit von h sei $\delta > 0$ auch so klein, dass das Bild von h in U_ψ enthalten ist. Machen wir $\delta > 0$ nötigenfalls abermals kleiner, so können wir auch annehmen, dass

$$\psi^{-1}(0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_d)^T \in \mathfrak{D}^{X_{\sigma(1)};\dots;X_{\sigma(k)}}$$

für jede Permutation σ von $\{1, \dots, k\}$. Schließlich können wir voraussetzungsgemäß Proposition 2.4.13 anwenden auf alle Paare X_i, X_j und sehen, dass wir $\delta > 0$ nötigenfalls ein letztes Mal kleiner machen können, sodass

$$h(t_1, \dots, t_d)^T = \mathrm{Fl}_{t_{\sigma(1)}}^{X_{\sigma(1)}} \circ \dots \circ \mathrm{Fl}_{t_{\sigma(k)}}^{X_{\sigma(k)}} \circ \psi^{-1}(0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_d)^T$$

auf $U_\delta(0)$ und für jede Permutation σ von $\{1,\dots,k\}$. Somit gilt für $j=1,\dots,k$ wegen Bemerkung 2.3.2

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t_j}\psi\circ h(t_1,\dots,t_d)^T\\
&\quad=\frac{\partial}{\partial t_j}\psi\circ \mathrm{Fl}^{X_j}_{t_j}\circ \mathrm{Fl}^{X_1}_{t_1}\circ\cdots\circ \mathrm{Fl}^{X_{j-1}}_{t_{j-1}}\circ \mathrm{Fl}^{X_{j+1}}_{t_{j+1}}\circ\cdots\circ \mathrm{Fl}^{X_k}_{t_k}\circ\psi^{-1}(0,\dots,0,t_{k+1},\dots,t_d)^T\\
&\quad=\pi_2\circ\hat\psi\circ X_j(\,\mathrm{Fl}^{X_j}_{t_j}\circ \mathrm{Fl}^{X_1}_{t_1}\circ\cdots\circ \mathrm{Fl}^{X_{j-1}}_{t_{j-1}}\circ \mathrm{Fl}^{X_{j+1}}_{t_{j+1}}\circ\cdots\circ \mathrm{Fl}^{X_k}_{t_k}\circ\psi^{-1}(0,\dots,0,t_{k+1},\dots,t_d)^T)\\
&\quad=\pi_2\circ\hat\psi\circ X_j(h(t_1,\dots,t_d))=\mathrm{t}_{h(t_1,\dots,t_d)^T}\psi\; X_j(h(t_1,\dots,t_d)^T).
\end{aligned}$$

Für $j=k+1,\dots,d$ gilt $(\frac{\partial}{\partial t_j}\psi\circ h)(0,\dots,0)^T=\frac{\partial}{\partial t_j}|_{t_j=0}(0,\dots,0,t_j,\dots,0)^T=e_j$.

Gemäß unserer Wahl von ψ ist $d\psi\circ h(0,\dots,0)$ (Ableitung im Sinne der Analysis II) invertierbar. Also gibt es offene Nullumgebungen $C,D\subseteq U_\delta(0)$, sodass

$$T:=\psi\circ h:C\to D$$

ein C^∞-Diffeomorphismus ist. In Folge ist $\varphi:=T^{-1}\circ\psi=(h|_C)^{-1}$ eine Karte auf M mit $U_\varphi=\psi^{-1}(D)\ni x$. Zudem gilt für $y=h|_C(t_1,\dots,t_d)^T\in U_\varphi$ und $j=1,\dots,k$

$$\mathrm{t}_y\varphi\; X_j(y)=(dT^{-1})(\psi(y))\;\mathrm{t}_y\psi\; X_j(y)=(dT(T^{-1}\circ\psi(y)))^{-1}\frac{\partial}{\partial t_j}\psi\circ h(t_1,\dots,t_d)^T=$$

$$(dT(t_1,\dots,t_d)^T)^{-1}dT(t_1,\dots,t_d)^Te_j=e_j.$$

Also gilt $X_j=\frac{\partial}{\partial\varphi_j}$.

❑

2.5.2 Korollar. *Sei M eine d-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit und seien $X_1,\dots,X_k\in\mathfrak{X}(M)$, sodass $X_1(x),\dots,X_k(x)$ als Elemente von T_xM linear unabhängig sind, und zwar für alle $x\in M$. Weiters gelte für alle $x\in M$ und $i,j\in\{1,\dots,k\}$*

$$[X_i,X_j](x)\in\operatorname{span}\{X_1(x),\dots,X_k(x)\}.$$

Dann existiert um jeden Punkt aus M eine Karte φ, sodass auf U_φ

$$X_j=\sum_{i=1}^k d_{ij}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi_i},\ \ j=1,\dots,k,$$

wobei $d_{ij}\in C^\infty(U_\varphi,\mathbb{R})$ für $i,j=1,\dots,k$.

Beweis. Sei $x\in M$ und ψ eine Karte mit $x\in U_\psi$. Für die Funktionen

$$\alpha_2^j=\pi_2\circ\hat\psi\circ X_j\circ\psi^{-1}:D_\psi\to\mathbb{R}^d$$

gilt $\alpha_2^j(t)=\mathrm{t}_{\psi^{-1}(t)}\psi\; X_j(\psi^{-1}(t))$. Damit sind die Vektoren $\alpha_2^1(t),\dots,\alpha_2^k(t)\in\mathbb{R}^d$ immer linear unabhängig.

Ersetzen wir ψ nötigenfalls durch $\sigma\circ\psi$ für eine geeignete Koordinatenpermutation σ, so können wir annehmen, dass die ersten k Einträge von $\alpha_2^1(\psi(x)),\dots,\alpha_2^k(\psi(x))$ als Elemente von $\mathbb{R}^k$ linear unabhängig sind. Wir definieren $A(y)\in\mathbb{R}^{d\times k}$ für $y\in U_\psi$ so, dass ihre Spalten gerade $\alpha_2^1(\psi(y)),\dots,\alpha_2^k(\psi(y))$ sind. Zudem sei $D(y)\in\mathbb{R}^{k\times k}$ so, dass die ersten k Zeilen von $A(y)$ und von $D(y)$ übereinstimmen. Insbesondere ist $D(x)$ regulär.

Da die Determinante stetig ist, können wir ψ auf einen neuen Definitionsbereich U_ψ einschränken, sodass $D(y) = (d_{ij}(y))_{i,j=1,\dots,k}$ für alle $y \in U_\psi$ regulär ist. Mit $B(y) = (b_{ij}(y))_{i,j=1,\dots,k}$ wollen wir die Inverse $D(y)^{-1}$ bezeichnen. Für $y \in U_\psi$ folgt

$$A(y)B(y) = \begin{pmatrix} I \\ C(y) \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

wobei $y \mapsto C(y) = (c_{ij}(y))_{i=k+1,\dots,d;\, j=1,\dots,k} \in \mathbb{R}^{(d-k)\times k}$ genauso wie $y \mapsto A(y)$, $y \mapsto D(y)$ und auch $y \mapsto B(y)$ eine C^∞-Funktion ist. Also sind auch $j = 1, \dots, k$

$$Y_j : y \mapsto (\mathrm{t}_y\psi)^{-1}\, A(y)B(y)e_j \ \ (\in T_yM)$$

punktweise linear unabhängige C^∞-Vektorfelder auf U_ψ, vgl. (2.1), wobei wegen (2.14) und wegen $\frac{\partial}{\partial\psi_i}(y) = (\mathrm{t}_y\psi)^{-1}\, e_i$

$$Y_j(y) = \frac{\partial}{\partial\psi_j}(y) + \sum_{i=k+1}^{d} c_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial\psi_i}(y).$$

Aus $\left[\frac{\partial}{\partial\psi_l}, \frac{\partial}{\partial\psi_m}\right](y) = 0$ (vgl. Beispiel 2.1.8) und den Rechenregeln in Lemma 2.1.4 und Lemma 2.1.7 folgt

$$[Y_l, Y_m](y) = \sum_{n=k+1}^{d} f_{l,m}^n(y) \cdot \frac{\partial}{\partial\psi_n}(y) \tag{2.15}$$

für $f_{l,m}^n \in C^\infty(U_\psi, \mathbb{R})$.

Andererseits folgt aus der Linearität von $(\mathrm{t}_y\psi)^{-1}$, dass

$$Y_j(y) = \sum_{i=1}^{k} b_{ij}(y)X_i(y) \ \text{ bzw. } \ X_j(y) = \sum_{i=1}^{k} d_{ij}(y)Y_i(y). \tag{2.16}$$

Aus der ersten Gleichheit, der Voraussetzung und den schon verwendeten Rechenregeln ergibt sich

$$[Y_l, Y_m](y) = \sum_{i=1}^{k} g_{l,m}^i(y)X_i(y) \tag{2.17}$$

für $y \in U_\psi$ und mit Funktionen $g_{l,m}^i : U_\psi \to \mathbb{R}$. Wenden wir $\mathrm{t}_y\psi$ auf (2.15) und (2.17) an, so folgt

$$A(y)\begin{pmatrix} g_{l,m}^1(y) \\ \vdots \\ g_{l,m}^k(y) \end{pmatrix} = \mathrm{t}_y\psi\, [Y_l, Y_m](y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{l,m}^{k+1}(y) \\ \vdots \\ f_{l,m}^d(y) \end{pmatrix}.$$

Nun sind aber die ersten k-Zeilen der Spalten von $A(y)$ linear unabhängig, was $g_{l,m}^1(y) = \dots = g_{l,m}^k(y) = 0$ bzw. $[Y_l, Y_m](y) = 0$ zur Folge hat.

Nach Satz 2.5.1 existiert zu x eine Karte φ mit $x \in U_\varphi \subseteq U_\psi$, sodass auf U_φ

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial\varphi_i}, \ i = 1, \dots, k,$$

was wegen der zweiten Gleichheit in (2.16) die Behauptung beweist.

❑

2.5.3 Definition. Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $D : M \to \mathcal{P}(TM)$ heißt *Distribution*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq \dim M$ gibt, sodass $D(x)$ für alle $x \in M$ ein k-dimensionaler linearer Teilraum von T_xM ist. k heißt dann die Dimension von D.

Eine Distribution D heißt C^∞ (oder glatt), falls es um jedes $x \in M$ eine offene Umgebung U von x und C^∞-Vektorfelder $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathfrak{X}(U)$ gibt, sodass

$$D(y) = \operatorname{span}\{Y_1(y), \ldots, Y_k(y)\} \quad \text{für alle } y \in U.$$

Eine C^∞-Distribution D heißt *involutiv*, falls aus $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X(x), Y(x) \in D(x)$ für alle $x \in M$ folgt, dass

$$[X, Y](x) \in D(x), \quad \text{für alle } \ x \in M.$$

Eine Teilmannigfaltigkeit N von M heißt *Integralmannigfaltigkeit* einer Distribution $D : M \to \mathcal{P}(TM)$, falls

$$T_x\iota_N\,(T_xN) = D(x)$$

für alle $x \in N$.

Der Begriff Integralmannigfaltigkeit ist eine Art Verallgemeinerung des Begriffes der Integralkurve eines einzigen Vektorfeldes. In der Tat folgt unmittelbar aus Beispiel 2.4.11 zusammen mit Lemma 2.2.5, dass für ein $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X(x) \in D(x)$ für alle $x \in N$ der Fluss $\mathrm{Fl}^X(t, x)$ für alle $x \in N$ und betragsmäßig hinreichend kleine $t \in I_x$ ganz in N verläuft.

2.5.4 Lemma. *Ist $D : M \to \mathcal{P}(TM)$ eine C^∞-Distribution derart, dass es zu jedem $x \in M$ eine Teilmannigfaltigkeit N_x von M gibt, sodass $x \in N_x$ und sodass N_x Integralmannigfaltigkeit von D, dann ist D involutiv.*

Beweis. Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X(y), Y(y) \in D(y)$ für alle $y \in M$. Ist $x \in M$ fest, so gilt voraussetzungsgemäß $X(y), Y(y) \in D(y) = T_y\iota_{N_x}\,(T_yN_x)$ für alle $y \in N_x$, womit wir Lemma 2.2.5 anwenden können, um die Existenz zweier Vektorfelder $X_x, Y_x \in \mathfrak{X}(N_x)$ zu erhalten, sodass X_x und X sowie Y_x und Y jeweils ι_{N_x}-verwandt sind.

Nach Lemma 2.2.2 sind auch $[X_x, Y_x]$ und $[X, Y]$ ι_{N_x}-verwandt, was aber

$$[X, Y](x) = [X, Y](\iota_{N_x}(x)) = T_x\iota_{N_x}\,\underbrace{[X_x, Y_x](x)}_{\in T_xN_x} \in D(x)$$

bedingt. Da $x \in M$ beliebig war, ist D involutiv.

❑

Der Satz von *Frobenius* ist unter anderem eine Umkehrung von Lemma 2.5.4.

2.5.5 Satz. *Sei $D : M \to \mathcal{P}(TM)$ C^∞-Distribution. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *D ist involutiv.*

(2) *Zu jedem $x \in M$ gibt es eine Teilmannigfaltigkeit N_x von M, sodass $x \in N_x$ und sodass N_x Integralmannigfaltigkeit von D ist.*

(3) *Zu jedem $x \in M$ gibt es eine Karte φ mit $x \in U_\varphi$, sodass*

$$D(y) = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi_1}(y), \ldots, \frac{\partial}{\partial\varphi_k}(y)\right\}, \tag{2.18}$$

für alle $y \in U_\varphi$. Dabei ist k die Dimension von D.

Beweis.

(2) ⇒ (1) Das ist der Inhalt von Lemma 2.5.4.

(3) ⇒ (2) Sei $x \in M$ und φ eine Karte mit besagten Eigenschaften. Unmittelbar aus Definition 1.3.1 folgt, dass $N_x := \varphi^{-1}((\mathbb{R}^k \times \{p_{d-k}(\varphi(x))\}) \cap D_\varphi)$ eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von M ist, die x enthält.

Nach Bemerkung 1.3.6 ist $\varphi_{N_x} := p_k \circ \varphi|_{N_x}$ eine Karte von N_x mit $U_{\varphi_{N_x}} = N_x$. Nach Bemerkung 1.2.7 ist dann

$$\frac{\partial}{\partial(\varphi_{N_x})_j}(y) = [t \mapsto \varphi_{N_x}^{-1}(\varphi_{N_x}(y) + te_j)]_\sim, \ j = 1, \dots, k,$$

eine Basis von $T_y N_x$ für alle $y \in N_x$. Nach Proposition 1.3.7 spannt damit

$$T_y \iota_{N_x} \frac{\partial}{\partial(\varphi_{N_x})_j}(y) = T_y \iota_{N_x} [t \mapsto \varphi_{N_x}^{-1}(\varphi_{N_x}(y) + te_j)]_\sim = [t \mapsto \varphi_{N_x}^{-1}(\varphi_{N_x}(y) + te_j)]_\sim =$$

$$[t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(y) + te_j)]_\sim = \frac{\partial}{\partial \varphi_j}(y), \ j = 1, \dots, k,$$

ganz $T_y \iota_{N_x}(T_y N_x)$ auf. Voraussetzungsgemäß gilt daher $T_y \iota_{N_x}(T_y N_x) = D(y)$.

(1) ⇒ (3) Nach Definition 2.5.3 gibt es um jedes feste $x \in M$ eine offene Umgebung U von x und punktweise linear unabhängige C^∞-Vektorfelder $Y_1, \dots, Y_k \in \mathfrak{X}(U)$, sodass

$$D(y) = \operatorname{span}\{Y_1(y), \dots, Y_k(y)\}, \ \ y \in U.$$

Machen wir U nötigenfalls kleiner, so können wir U als Definitionsbereich einer Karte annehmen. Nach Beispiel 2.1.5 gibt es ein $g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ mit Werten in $[0, 1]$ und mit kompaktem Träger in U, sodass $g|_V \equiv 1$ für eine gewisse offene Umgebung V von x.

Die Vektorfelder $g \cdot Y_j$ lassen sich dann zu C^∞-Vektorfeldern auf M fortsetzen, indem man $g \cdot Y_j$ außerhalb von U identisch Null setzt. Diese Fortsetzung – wir bezeichnen sie auch mit $g \cdot Y_j$ – stimmt mit Y_j auf V überein. Offensichtlich gilt auch $(g \cdot Y_j)(y) \in D(y)$ für alle $y \in M$, und für $y \in V$ spannen diese ganz $D(y)$ auf. Nach Voraussetzung gilt daher für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$

$$[g \cdot Y_i, g \cdot Y_j](y) \in D(y) = \operatorname{span}\{(g \cdot Y_1)(y), \dots, (g \cdot Y_k)(y)\}, \quad \text{für alle } \ y \in V.$$

Nach Korollar 2.5.2 angewandt auf V gibt es eine Karte φ von V und daher von M mit $x \in U_\varphi$ und sodass für alle $i \in \{1, \dots, k\}$

$$Y_i(y) = g \cdot Y_i(y) \in \operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial \varphi_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_k}(y)\right\}, \ y \in U_\varphi.$$

Da sowohl die $Y_i(y) \in T_y M$, $i \in \{1, \dots, k\}$, als auch die $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}(y) \in T_y M$, $i \in \{1, \dots, k\}$ linear unabhängig sind folgt (2.18).

❑

Kapitel 3

Differentialformen

3.1 Etwas Lineare Algebra

3.1.1 Definition. Sei $\mathfrak{V}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung

$$\omega : \mathfrak{V}^k \; (= \mathfrak{V} \times \cdots \times \mathfrak{V}) \to \mathbb{R}$$

heißt *k-multilinear* oder auch *k-Form* auf $\mathfrak{V}$, wenn

$$\omega(v_1, \ldots, \underbrace{\lambda v_j + \mu u_j}_{j\text{-te Stelle}}, \ldots, v_k) = \lambda\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_k) + \mu\omega(v_1, \ldots, u_j, \ldots, v_k)$$

für alle $u_j, v_1, \ldots, v_k \in \mathfrak{V}$, alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und alle $j = 1, \ldots, k$.

Für eine k-Form ω auf $\mathfrak{V}$ und eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(\{1, \ldots, k\})$ der Menge $\{1, \ldots, k\}$ setzen wir

$$\sigma \star \omega : \mathfrak{V}^k \to \mathbb{R}, \;\; (v_1, \ldots, v_k) \mapsto \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$$

Eine k-multilineare Abbildung ω heißt *alternierend,* falls

$$\omega = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot (\sigma \star \omega)$$

für alle Permutationen $\sigma \in \mathfrak{S}(\{1, \ldots, k\})$ der Menge $\{1, \ldots, k\}$. Dabei ist $\operatorname{sgn}(\sigma)$ das Vorzeichen der Permutation σ, d.h.

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \;\in \{-1, +1\}.$$

Die Menge aller k-multilinearen Abbildungen auf $\mathfrak{V}$ werde mit $\mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ bezeichnet und die Menge aller k-multilinearen alternierenden Abbildungen auf $\mathfrak{V}$ mit $\mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$. Wir setzen auch noch $\mathcal{M}_0(\mathfrak{V}) = \mathcal{A}_0(\mathfrak{V}) = \mathbb{R}$.

Es sei bemerkt, dass wir schlussendlich hauptsächlich an $\mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$ interessiert sein werden, wobei es eher um die algebraischen Eigenschaften von $\mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$ gehen wird als um die Tatsache, dass es sich dabei um multilineare Abbildungen handelt.

Für das Folgende wollen wir aus der Linearen Algebra in Erinnerung rufen, dass $\operatorname{sgn} : \mathfrak{S}(\{1, \ldots, k\}) \to \{-1, +1\}$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Außerdem werden wir für $\sigma \in \mathfrak{S}(\{1, \ldots, k\})$ oft auch kurz $\mathfrak{S}_k$ schreiben.

3.1.2 Fakta.

1. Man überzeugt sich ganz leicht, dass $\mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$ ein linearer Teilraum davon ist. Offensichtlich gilt auch $\mathcal{M}_1(\mathfrak{V}) = \mathcal{A}_1(\mathfrak{V}) = \mathfrak{V}^*$, wobei $\mathfrak{V}^*$ den algebraischen Dualraum von $\mathfrak{V}$ bezeichnet.

2. Mit $\omega \in \mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ ist offensichtlich auch $\sigma \star \omega \in \mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ für alle $\sigma \in \mathfrak{S}(\{1, \dots, k\})$. Zudem gilt für $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}(\{1, \dots, k\})$

   $$\sigma \star (\tau \star \omega) = (\sigma \circ \tau) \star \omega.$$

   Die Abildung $\omega \mapsto \sigma \star \omega$ als Abbildung von $\mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ nach $\mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ ist linear. Diese Abbildung auf $\mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$ eingeschränkt stimmt mit $\operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{A}_k(\mathfrak{V})}$ überein.

3. Ist $(b_j)_{j\in J}$ eine Basis von $\mathfrak{V}$, so ist $\omega \in \mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ offenbar eindeutig dadurch bestimmt, welche Werte aus $\mathbb{R}$ sie den Tupeln $(b_{j_1}, \dots, b_{j_k})$ für alle $(j_1, \dots, j_k) \in J^k$ zuordnet.

   Ist umgekehrt zu jedem $(j_1, \dots, j_k) \in J^k$ eine reelle Zahl $\omega_{j_1,\dots,j_k}$ gegeben, so definiert (die $I_1, \dots, I_k$ sind endliche Teilmengen von J)

   $$\omega\left(\sum_{j_1\in I_1} \lambda_{j_1} b_{j_1}, \dots, \sum_{j_k\in I_k} \lambda_{j_k} b_{j_k}\right) := \sum_{j_1\in I_1,\dots,j_k\in I_k} \lambda_{j_1} \cdot \ \dots \ \cdot \lambda_{j_k} \omega_{j_1,\dots,j_k}$$

   offensichtlich eine k-Form, die $\omega_{j_1,\dots,j_k} = \omega(b_{j_1}, \dots, b_{j_k})$ erfüllt. Sie ist auch die eindeutige solche Form.

4. Für ein $\omega \in \mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ gilt $\omega \in \mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$ genau dann, wenn $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$ für alle $(v_1, \dots, v_k) \in \mathfrak{V}^k$, sodass $v_i = v_j$ für zwei verschiedene $i, j \in \{1, \dots, k\}$, bzw. genau dann, wenn

   $$\omega(b_{i_1}, \dots, b_{i_k}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \omega(b_{i_{\sigma(1)}}, \dots, b_{i_{\sigma(k)}})$$

   für alle $(i_1, \dots, i_k) \in J^k$ und $\sigma \in \mathfrak{S}(\{1, \dots, k\})$, wobei $(b_j)_{j\in J}$ wieder eine Basis von $\mathfrak{V}$ ist.

5. Sei nun $\mathfrak{V}$ endlichdimensional und sei $(b_j)_{j\in J}$ mit $\#J = \dim \mathfrak{V}$ wieder eine Basis. Aus 3 folgt leicht, dass $(\theta_{b_{i_1},\dots,b_{i_k}})_{(i_1,\dots,i_k)\in J^k}$ eine Basis von $\mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ ist, wobei $\theta_{b_{i_1},\dots,b_{i_k}} \in \mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ jene Form ist, die durch

   $$\theta_{b_{i_1},\dots,b_{i_k}}(b_{j_1}, \dots, b_{j_k}) = \delta_{i_1 j_1} \cdot \ \dots \ \cdot \delta_{i_k j_k}$$

   (Kronecker-δ) wohldefiniert ist. Für ein $\sigma \in \mathfrak{S}(\{1, \dots, k\})$ gilt wegen $i_1 = j_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, i_k = j_{\sigma^{-1}(k)} \Leftrightarrow i_{\sigma(1)} = j_1, \dots, i_{\sigma(k)} = j_k$ für $(i_1, \dots, i_k), (j_1, \dots, j_k) \in J^k$

   $$\sigma^{-1} \star \theta_{b_{i_1},\dots,b_{i_k}} = \theta_{b_{i_{\sigma(1)}},\dots,b_{i_{\sigma(k)}}} \tag{3.1}$$

   In der Tat zeigt man durch Einsetzen von verschiedenen Tupeln $b_{j_1}, \dots, b_{j_k}$, dass diese $\theta_{b_{i_1},\dots,b_{i_k}}$ linear unabhängig sind, und dass für ein $\omega \in \mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$

   $$\omega = \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in J^k} \omega(b_{i_1}, \dots, b_{i_k}) \cdot \theta_{b_{i_1},\dots,b_{i_k}}. \tag{3.2}$$

   Insbesondere hat damit $\mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ Dimension $(\dim \mathfrak{V})^k$.

6. Für $\omega \in \mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$ mit $\dim \mathfrak{V} < \infty$ gilt sicherlich $\omega(b_{i_1}, \dots, b_{i_k}) = 0$, wenn mindestens zwei der Indizes $i_1, \dots, i_k$ gleich sind, d.h. $\#\{i_1, \dots, i_k\} < k$.

   Sind alle Indizes $i_1, \dots, i_k$ verschieden, d.h. $\#\{i_1, \dots, i_k\} = k$, so gilt für jedes andere Tupel $(j_1, \dots, j_k) \in J^k$, sodass $\{i_1, \dots, i_k\} = \{j_1, \dots, j_k\}$, sicherlich

$$\omega(b_{j_1}, \dots, b_{j_k}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega(b_{i_1}, \dots, b_{i_k}),$$

   wobei $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ mit $i_{\sigma(s)} = j_s$. Also folgt aus (3.2) (wir nehmen an, dass J total geordnet ist; z.B. $J \subseteq \mathbb{N}$)

$$\omega = \sum_{\substack{K \subseteq J, \#K = k, \\ K = \{i_1 < \dots < i_k\}}} \omega(b_{i_1}, \dots, b_{i_k}) \cdot \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \theta_{b_{i_{\sigma(1)}}, \dots, b_{i_{\sigma(k)}}}}_{=:\theta_K} \tag{3.3}$$

   Da $\operatorname{sgn} : \mathfrak{S}_k \to \{-1, +1\}$ ein Homomorphismus ist (siehe Lineare Algebra), überprüft man mit (3.1) unmittelbar, dass $\theta_K \in \mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$, vgl. (3.5). Somit bilden die θ_K, $K \subseteq J, \#K = k$, eine Basis von $\mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$. Es folgt $\dim \mathcal{A}_k(\mathfrak{V}) = \binom{n}{k}$, wobei $n = \dim \mathfrak{V}$. Insbesondere enthält $\mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$ nur die Nullform für $k > n$.

   Man erkennt aus (3.3) auch sofort, dass $\omega \in \mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$ eindeutig durch alle Ausdrücke $\omega(b_{j_1}, \dots, b_{j_k})$, $\{j_1 < \dots < j_k\} \subseteq J$, bestimmt ist.

   Insbesondere ist θ_K jenes Element von $\mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$, für das $\theta_K(b_{j_1}, \dots, b_{j_k}) = 0$, falls $K \neq \{j_1 < \dots < j_k\}$ und $\theta_K(b_{j_1}, \dots, b_{j_k}) = 1$, falls $K = \{j_1 < \dots < j_k\}$.

7. Für $k = n$ mit $n = \dim \mathfrak{V}$ ist $\mathcal{A}_k(\mathfrak{V}) = \binom{n}{k} = 1$. Also gibt es bis auf skalare Vielfache genau eine alternierende n-Form auf einem n-dimensionalen Vektorraum. Wie aus der Linearen Algebra bekannt, ist das die Determinantenform.

   Im Falle $\mathfrak{V} = \mathbb{R}^k$ gilt daher für jedes $\omega \in \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^k)$

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = d \cdot \underbrace{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \alpha_{\sigma(1)1} \cdot \ \dots \ \cdot \alpha_{\sigma(k)k}}_{=:\Delta(v_1, \dots, v_k)} \tag{3.4}$$

   für ein von ω abhängiges $d \in \mathbb{R}$, wobei $v_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{kj} \end{pmatrix}$.

3.1.3 Definition. Seien $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ zwei Vektorräume über $\mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Weiters sei $A : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ linear. Für ein $\omega \in \mathcal{M}_k(\mathfrak{W})$ sei für $(v_1, \dots, v_k) \in \mathfrak{V}^k$

$$A^T(\omega)(v_1, \dots, v_k) := \omega(A(v_1), \dots, A(v_k)).$$

Im Falle $k = 0$ ist ω eine reelle Zahl, die von keiner Variablen abhängt. Also setzen wir sinnvollerweise $A^T(\omega) := \omega$.

Für $k = 1$ ist das nichts anderes, als die aus der Linearen Algebra bekannte Transponierte Abbildung.

3.1.4 Fakta.

1. Man überprüft leicht auch im allgemeinen Fall, dass $A^T(\omega) \in \mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ und dass $A^T : \mathcal{M}_k(\mathfrak{W}) \to \mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ linear ist. Wir sprechen auch hier von der *Transponierten Abbildung*.

2. Offensichtlich gilt $\sigma \star A^T(\omega) = A^T(\sigma \star \omega)$ für jedes $\sigma \in \mathfrak{S}(\{1, \ldots, k\})$.

3. Sind $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{H}$ drei Vektorräume und $A : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ sowie $B : \mathfrak{W} \to \mathfrak{H}$ linear, so gilt $(B \circ A)^T = A^T \circ B^T$ als Abbildung von $\mathcal{M}_k(\mathfrak{H})$ nach $\mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$. Insbesondere gilt $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ für bijektives A.

4. Jedes $\omega \in \mathcal{A}_k(\mathfrak{W})$ wird – wie man sich sofort überzeugt – auf eine alternierende k-Form abgebildet, d.h. $A^T|_{\mathcal{A}_k(\mathfrak{W})} : \mathcal{A}_k(\mathfrak{W}) \to \mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$.

5. Sei $\mathfrak{V}$ ein endlichdimensionaler Vektorraum mit $\dim \mathfrak{V} = k$ und sei $A : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ linear. Wegen $\dim \mathcal{A}_k(\mathfrak{V}) = 1$ hat $A^T : \mathcal{A}_k(\mathfrak{V}) \to \mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$ einen Eigenwert μ, d.h. $A^T \omega = \mu \cdot \omega,\ \omega \in \mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$. Den Eigenwert μ bezeichnen wir als *Determinante der Abbildung A* und schreiben auch $\det A$ dafür, vgl. Lineare Algebra.

6. Da $(A \circ B)^T = B^T \circ A^T$ auf $\mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$ den Eigenwert $(\det B) \cdot (\det A)$ hat, folgt unmittelbar $\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)$.

7. Da $\Delta(e_1, \ldots, e_k) = 1$ (vgl. (3.4)) gilt im Falle $\mathfrak{V} = \mathbb{R}^k$

$$\Delta(Ae_1, \ldots, Ae_k) = A^T(\Delta)(e_1, \ldots, e_k) = (\det A) \cdot \Delta(e_1, \ldots, e_k) = \det A,$$

also die bekannte Formel zur Berechnung von Determinanten.

8. Ist $R : \mathbb{R}^k \to \mathfrak{V}$ linear und bijektiv, und $A : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ linear, so hat $(R^{-1}AR)^T = R^T\ A^T\ (R^T)^{-1}$ auf $\mathcal{A}_k(\mathbb{R}^k)$ den selben Eigenwert wie A^T auf $\mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$. Also gilt

$$\det A = \det(R^{-1}AR) = \Delta(R^{-1}ARe_1, \ldots, R^{-1}ARe_k).$$

Das bedeutet, dass sich die Determinante von Abbildungen mit Hilfe von beliebigen Koordinaten berechnen lässt.

Um aus einer k-Form eine alternierende k-Form zu machen, wollen wir folgende Abbildung definieren.

3.1.5 Definition. Sei $\mathfrak{V}$ ein Vektorraum. Für $\omega \in \mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ mit $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\operatorname{Alt}(\omega) := \frac{1}{k!} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot (\sigma \star \omega).$$

Für $k = 0$ sei Alt definiert als die Identitätsabbildung auf $\mathcal{M}_0(\mathfrak{V}) = \mathcal{A}_0(\mathfrak{V}) = \mathbb{R}$.

3.1.6 Fakta.

1. Da $\operatorname{Alt}(\omega)$ Linearkombination von k-Formen ist, gilt $\operatorname{Alt}(\omega) \in \mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$. Außerdem ist für $\tau \in \mathfrak{S}_k$ die Abbildung $\omega \mapsto \tau \star \omega$ linear; also gilt wegen $\tau \star (\sigma \star \omega) = (\tau \circ \sigma) \star \omega$

$$\tau \star \operatorname{Alt}(\omega) = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \tau \star (\sigma \star \omega) = \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{k!} \cdot \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) \cdot (\tau \circ \sigma) \star \omega = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \operatorname{Alt}(\omega),$$

und damit $\operatorname{Alt}(\omega) \in \mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$.

2. Ist $A : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ linear und $\omega \in \mathcal{M}_k(\mathfrak{W})$, so folgt aus Fakta 3.1.4, 2, dass $A^T(\operatorname{Alt}(\omega)) = \operatorname{Alt}(A^T(\omega))$.

3. Die Abbildung $\mathrm{Alt} : \mathcal{M}_k(\mathfrak{V}) \to \mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$ $(\subseteq \mathcal{M}_k(\mathfrak{V}))$ ist als Linearkombination linearer Abbildungen selber linear. Wegen $\mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \sigma \star \omega = \omega$ für alternierendes ω gilt sogar $\mathrm{Alt} \circ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt}$, d.h. Alt ist eine Projektion.

4. Ist $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, so kann man auch $\mathrm{Alt}(I)$ definiert durch
$$\mathrm{Alt}(I)(\omega) = \frac{1}{(\#I)!} \cdot \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_k \\ \sigma|_{\{1,\ldots,k\}\setminus I} = \mathrm{id}\,|_{\{1,\ldots,k\}\setminus I}}} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \sigma \star \omega$$
betrachten. Genauso wie oben zeigt man, dass $\mathrm{Alt}(I)(\omega)$ tatsächlich in $\mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ liegt, dass $\mathrm{Alt}(I) : \mathcal{M}_k(\mathfrak{V}) \to \mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ linear ist, dass $\mathrm{Alt}(I)(\omega)$ alternierend in den Indizes I ist, und dass $\mathrm{Alt}(I)(\omega) = \omega$ für ein in den Indizes I alternierendes ω, d.h. $\mathrm{Alt}(I) \circ \mathrm{Alt}(I) = \mathrm{Alt}(I)$; alternierend für ein $\omega \in \mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ in den Indizes I bedeutet dabei $\tau \star \omega = \mathrm{sgn}(\tau) \cdot \omega$ für alle $\tau \in \mathfrak{S}_k$ mit $\tau|_{\{1,\ldots,k\}\setminus I} = \mathrm{id}\,|_{\{1,\ldots,k\}\setminus I}$. Offenbar gilt auch $\mathrm{Alt}(\{1, \ldots, k\}) = \mathrm{Alt}$.

5. Da $\mathrm{Alt}(\omega)$ insbesondere alternierend in den Indizes I ist, folgt $\mathrm{Alt}(I) \circ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt}$. Um auch $\mathrm{Alt} \circ \mathrm{Alt}(I) = \mathrm{Alt}$ zu zeigen, rechnen wir
$$\mathrm{Alt} \circ \mathrm{Alt}(I)(\omega) = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \sigma \star \mathrm{Alt}(I)(\omega) =$$
$$\frac{1}{(\#I)!k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}_k \\ \tau|_{\{1,\ldots,k\}\setminus I} = \mathrm{id}\,|_{\{1,\ldots,k\}\setminus I}}} \mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) \cdot (\sigma \circ \tau) \star \omega.$$
Für ein festes τ ist $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ eine Bijektion auf $\mathfrak{S}_k$, womit die Summe über die σ's genau $k! \cdot \mathrm{Alt}(\omega)$ ergibt. Also folgt
$$\mathrm{Alt} \circ \mathrm{Alt}(I)(\omega) = \frac{1}{(\#I)!k!} \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}_k \\ \tau|_{\{1,\ldots,k\}\setminus I} = \mathrm{id}\,|_{\{1,\ldots,k\}\setminus I}}} (k!)\,\mathrm{Alt}(\omega) = \mathrm{Alt}(\omega).$$

6. Ist $\mathfrak{V}$ endlichdimensional und $(b_j)_{j \in J}$ eine Basis mit $\#J = \dim \mathfrak{V}$, so gilt für die Basiselemente θ_K von $\mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$ bzw. $\theta_{b_{i_1},\ldots,b_{i_k}}$ von $\mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ (vgl. (3.2) und (3.3)) die Beziehung
$$k! \cdot \mathrm{Alt}(\theta_{b_{i_1},\ldots,b_{i_k}}) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \theta_K, & \#K = k \\ 0, & \#K < k \end{cases},$$
wobei $K = \{i_1, \ldots, i_k\}$ und $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, sodass $K = \{i_{\sigma(1)} < \cdots < i_{\sigma(k)}\}$.

3.1.7 Definition. Sind $\omega \in \mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$, $\varpi \in \mathcal{M}_l(\mathfrak{V})$, so setzen wir
$$\omega \otimes \varpi(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) := \omega(v_1, \ldots, v_k) \cdot \varpi(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}),$$
sowie im Falle $\omega \in \mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$, $\varpi \in \mathcal{A}_l(\mathfrak{V})$
$$\omega \wedge \varpi := \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \varpi).$$
Man spricht vom sogenannten *Hackprodukt*.

Man beachte, dass $\omega \otimes \varpi$ und $\omega \wedge \varpi$ auch definiert sind, wenn $k = 0$ oder $l = 0$. In dem Fall ist $\omega \otimes \varpi$ bzw. $\omega \wedge \varpi$ nichts anderes als die Multiplikation mit der entsprechenden Konstanten.

3.1.8 Fakta.

1. Offensichtlich ist $\omega \otimes \varpi \in \mathcal{M}_{k+l}(\mathfrak{V})$, wenn $\omega \in \mathcal{M}_k(\mathfrak{V}), \varpi \in \mathcal{M}_l(\mathfrak{V})$. Außerdem ist $\otimes : \mathcal{M}_k(\mathfrak{V}) \times \mathcal{M}_l(\mathfrak{V}) \to \mathcal{M}_{k+l}(\mathfrak{V})$ bilinear. Schließlich ist $\otimes$ assoziativ, d.h. $\omega \otimes (\varpi \otimes \theta) = (\omega \otimes \varpi) \otimes \theta$. Man lässt daher hier die Klammern weg.

2. Ist $\mathfrak{V}$ endlichdimensional, $(b_j)_{j\in J}$ eine Basis mit $\#J = \dim \mathfrak{V}$, und ist $(b_j^*)_{j\in J}$ die dazu duale Basis von $\mathfrak{V}^*$, d.h. $b_j^*(b_i) = \delta_{i,j}$, so gilt für die Basiselemente $\theta_{b_{i_1},\ldots,b_{i_k}}$ von $\mathcal{M}_k(\mathfrak{V})$ (vgl. (3.2)), dass $\theta_{b_i} = b_i^*$ $(\in \mathcal{M}_1(\mathfrak{V}) = \mathfrak{V}^*)$ und
$$\theta_{b_{i_1},\ldots,b_{i_k}} = b_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes b_{i_k}^*.$$

3. $\omega \wedge \varpi$ liegt in $\mathcal{A}_{k+l}(\mathfrak{V})$, und als Zusammensetzung einer bilinearen und einer linearen Abbildung ist $\wedge : \mathcal{A}_k(\mathfrak{V}) \times \mathcal{A}_l(\mathfrak{V}) \to \mathcal{A}_{k+l}(\mathfrak{V})$ auch bilinear.

4. $\wedge$ ist ebenfalls assoziativ. Um das zu verifizieren, werden wir
$$\begin{gathered}((\ldots(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \ldots) \wedge \omega_{r-1}) \wedge \omega_r = \\ \frac{(k_1 + \cdots + k_r)!}{k_1! \cdot \cdots \cdot k_r!} \operatorname{Alt}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_r) = \\ \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge (\cdots \wedge (\omega_{r-1} \wedge \omega_r)\ldots))\end{gathered} \tag{3.6}$$
für $\omega_j \in \mathcal{A}_{k_j}(\mathfrak{V}),\ j = 1, \ldots, r$, durch vollständige Induktion nach r nachweisen.

   Für $r = 2$ ist das die Definition von $\omega_1 \wedge \omega_2$. Gelte (3.6) für r, und seien nun $\omega_j \in \mathcal{A}_{k_j}(\mathfrak{V}),\ j = 1, \ldots, r+1$. Setzen wir $I = \{1, \ldots, k_1 + \cdots + k_r\}$, so folgt aus der Induktionsvoraussetzung
$$\begin{gathered}k_1! \cdot \cdots \cdot k_r! \cdot \Big(((\ldots(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \ldots) \wedge \omega_{r-1}) \wedge \omega_r\Big) \otimes \omega_{r+1}(v_1, \ldots, v_{k_1+\cdots+k_{r+1}}) = \\ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k_1+\cdots+k_r}} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\omega_1\otimes\cdots\otimes\omega_r\otimes\omega_{r+1}\,(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k_1+\cdots+k_r)}, v_{k_1+\cdots+k_r+1}, \ldots, v_{k_1+\cdots+k_{r+1}}) = \\ \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_{k_1+\cdots+k_{r+1}} \\ \sigma|_{\{1,\ldots,k_1+\cdots+k_{r+1}\}\setminus I} = \mathrm{id}|_{\{1,\ldots,k_1+\cdots+k_{r+1}\}\setminus I}}} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_r \otimes \omega_{r+1}\,(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k_1+\cdots+k_{r+1})}) = \\ (k_1 + \cdots + k_r)! \cdot \operatorname{Alt}(I)(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_{r+1}).\end{gathered}$$
   Wenden wir darauf Alt an und multiplizieren mit $\frac{(k_1+\cdots+k_{r+1})!}{(k_1+\cdots+k_r)!k_1!\cdot\cdots\cdot k_{r+1}!}$, so folgt aus Fakta 3.1.6, 5, dass
$$\begin{gathered}\Big(((\ldots(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \ldots) \wedge \omega_{r-1}) \wedge \omega_r\Big) \wedge \omega_{r+1} = \\ \frac{(k_1 + \cdots + k_{r+1})!}{k_1! \cdot \cdots \cdot k_{r+1}!} \operatorname{Alt}\left(\Big(((\ldots(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \ldots) \wedge \omega_{r-1}) \wedge \omega_r\Big) \otimes \omega_{r+1}\right) = \\ \frac{(k_1 + \cdots + k_{r+1})!}{k_1! \cdot \cdots \cdot k_{r+1}!} \operatorname{Alt}(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_{r+1}).\end{gathered}$$
   Genauso zeigt man die rechte Seite von (3.6) für $r+1$. Wegen der Assoziativität werden wir im Folgenden meist die Klammern beim Hackprodukt weglassen.

5. Ist $\mathfrak{V}$ endlichdimensional, $(b_j)_{j\in J}$ eine Basis mit einer total geordneten Indexmenge J mit $\#J = \dim\mathfrak{V}$, und ist $(b_j^*)_{j\in J}$ die dazu duale Basis von $\mathfrak{V}^*$, d.h. $b_j^*(b_i) = \delta_{i,j}$, so folgt aus 2, aus Fakta 3.1.6, 6, sowie aus (3.6), dass
$$b_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge b_{i_k}^* = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\theta_K, & \#K = k \\ 0, & \#K < k \end{cases},$$
wobei $K = \{i_1, \ldots, i_k\}$ und $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, sodass $K = \{i_{\sigma(1)} < \cdots < i_{\sigma(k)}\}$.
Insbesondere ist dann $(b_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge b_{i_k}^*)_{\{i_1<\cdots<i_k\}\subseteq J}$ eine Basis von $\omega \in \mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$.

6. Sind $\omega \in \mathcal{A}_k(\mathfrak{V})$ und $\varpi \in \mathcal{A}_l(\mathfrak{V})$, so gilt $\omega \wedge \varpi = (-1)^{kl}\varpi \wedge \omega$. Ist nämlich $\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}$, sodass
$$\sigma(1) = k+1, \ldots, \sigma(l) = k+l,\ \sigma(l+1) = 1, \ldots, \sigma(l+k) = k,$$
so gilt $\omega \otimes \varpi = \sigma \star (\varpi \otimes \omega)$. Wenden wir $\frac{(k+l)!}{k!l!} \cdot \mathrm{Alt}$ an, so folgt
$$\omega \wedge \varpi = \frac{\operatorname{sgn}(\sigma)}{k!l!} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\tau\circ\sigma)\cdot(\tau\circ\sigma)\star(\varpi\otimes\omega) = \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\varpi\wedge\omega.$$
Schließlich überzeugt man sich leicht, dass sich σ als Produkt von kl-vielen Transpositionen schreiben lässt, d.h. $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{kl}$.

7. Für $A : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ linear und $\omega \in \mathcal{M}_k(\mathfrak{W})$ folgt unmittelbar aus der Definition von $\otimes$, dass $A^T(\omega \otimes \varpi) = A^T(\omega) \otimes A^T(\varpi)$ für $\omega \in \mathcal{M}_k(\mathfrak{W}), \varpi \in \mathcal{M}_l(\mathfrak{W})$. Sind diese Formen sogar alternierend, so folgt aus Fakta 3.1.6, 2, dass auch $A^T(\omega \wedge \varpi) = A^T(\omega) \wedge A^T(\varpi)$.

8. Sind $v_1, \ldots, v_k \in \mathfrak{V}$ und $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathcal{A}_1(\mathfrak{V}) = \mathfrak{V}^*$, so folgt mit (3.6)
$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k(v_1, \ldots, v_k) =$$
$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\sigma\star(\omega_1\otimes\cdots\otimes\omega_k)(v_1, \ldots, v_k) =$$
$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\omega_1(v_{\sigma(1)})\cdot\cdots\cdot\omega_k(v_{\sigma(k)}) = \det\Big(\omega_j(v_i)\Big)_{i,j=1,\ldots,k}.$$

9. Im Falle $\mathfrak{V} = \mathbb{R}^k$ folgt daraus $(v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^k)$
$$e_1^* \wedge \cdots \wedge e_k^*(v_1, \ldots, v_k) = \det(B) = \Delta(v_1, \ldots, v_k),$$
wobei B die $k\times k$-Matrix ist, deren Spalten genau die v_j's sind, und Δ wie in (3.4) ist.

10. Wir betrachten $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* \in \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d)$ mit $\{i_1 < \cdots < i_k\} \subseteq \{1, \ldots, d\}$ (total geordnet) und $B \in \mathbb{R}^{d\times k}$ als Abbildung von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^d$. Nun liegt $B^Te_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* \in \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^k)$, wobei wegen 8,
$$B^Te_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*(e_1, \ldots, e_k) = e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*(Be_1, \ldots, Be_k) =$$
$$\det(e_{i_m}^* Be_n)_{m,n=1,\ldots,k} = \det B_{\{i_1,\ldots,i_k\}},$$

wobei $B_{\{i_1,\dots,i_k\}}$ die $k \times k$-Matrix, die aus B entsteht, wenn man alle Zeilen ungleich $i_1, \dots, i_k$ streicht. Da $\mathcal{A}_k(\mathbb{R}^k)$ eindimensional ist, folgt $B^T e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* = \det B_{\{i_1,\dots,i_k\}} \cdot \Delta$.

Für eine allgemeines $\omega \in \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d)$ geschrieben in der Form

$$\omega = \sum_{\{i_1<\cdots<i_k\}\subseteq\{1,\dots,d\}} \lambda_{\{i_1<\cdots<i_k\}} \cdot e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* \in \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d),$$

folgt

$$B^T \omega = \left(\sum_{\{i_1<\cdots<i_k\}\subseteq\{1,\dots,d\}} \lambda_{\{i_1<\cdots<i_k\}} \cdot \det B_{\{i_1,\dots,i_k\}} \right) \cdot \Delta \in \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^k).$$

3.1.9 Definition. Sei $\mathfrak{V}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Wir setzen

$$\mathcal{A}(\mathfrak{V}) := \bigoplus_{0\le k\le \dim \mathfrak{V}} \mathcal{A}_k(\mathfrak{V}),$$

und versehen $\mathcal{A}(\mathfrak{V})$ mit $\wedge : \mathcal{A}(\mathfrak{V}) \times \mathcal{A}(\mathfrak{V}) \to \mathcal{A}(\mathfrak{V})$, indem wir $\wedge : \mathcal{A}_k(\mathfrak{V}) \times \mathcal{A}_l(\mathfrak{V}) \to \mathcal{A}_{k+l}(\mathfrak{V})$ bilinear auf $\mathcal{A}(\mathfrak{V})$ fortsetzen. Man nennt $\mathcal{A}(\mathfrak{V})$ eine *äußere Algebra*.

Offensichtlich lassen sich auch die Abbildungen A^T und Alt auf ganz $\mathcal{A}(\mathfrak{W})$ bzw. $\mathcal{A}(\mathfrak{V})$ definieren.

3.2 Differentialformen auf $\mathbb{R}^d$

3.2.1 Definition. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $r \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$. Mit $C^r(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d))$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen $\omega : D \to \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d)$, welche die Eigenschaft haben, dass

$$\Big(t \mapsto \omega(t)(v_1, \dots, v_k)\Big) \in C^r(D, \mathbb{R}), \quad \text{für alle } \ v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^d$$

ist – im Fall $r = 0$ bedeutet das einfach die Stetigkeit. Diese Abbildungen wollen wir auch als r-mal stetig differenzierbare *Differentialformen auf* $\mathbb{R}^d$ bezeichnen.

3.2.2 Fakta.

1. $C^r(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d))$ versehen mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation ist offenbar eine Vektorraum über $\mathbb{R}$, der alle konstanten $\mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d)$-wertigen Funktionen enthält. Außerdem ist für $\omega \in C^r(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d)), \varpi \in C^r(D, \mathcal{A}_l(\mathbb{R}^d))$ die Abbildung $\omega \wedge \varpi : D \to \mathcal{A}_{k+l}(\mathbb{R}^d)$ auch punktweise definiert, d.h.

   $$(\omega \wedge \varpi)(t) := \omega(t) \wedge \varpi(t).$$

   Wie man leicht aus den jeweiligen Definitionen schließt, gilt $\omega \wedge \varpi \in C^r(D, \mathcal{A}_{k+l}(\mathbb{R}^d))$. Dabei ist

   $$\wedge : C^r(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d)) \times C^r(D, \mathcal{A}_l(\mathbb{R}^d)) \to C^r(D, \mathcal{A}_{k+l}(\mathbb{R}^d))$$

   bilinear. Offensichtlich gilt $C^r(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d)) = \{0\}$ für $k > d$ sowie $C^r(D, \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^d)) = C^r(D, \mathbb{R})$.

2. Wegen der Multilinearität und wegen der Eigenschaft alternierend zu sein, reicht für $\omega \in C^r(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d))$, dass

$$\phi_{\{i_1<\dots<i_k\}} := \Big(t \mapsto \omega(t)(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})\Big) \in C^r(D, \mathbb{R})$$

und zwar für alle $\{i_1 < \dots < i_k\} \subseteq \{1, \dots, d\}$, wobei $(e_j)_{j=1,\dots,d}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^d$ ist.

Insbesondere lässt sich dann jedes $\omega \in C^r(D, \mathbb{R})$ wegen Fakta 3.1.8, 5, eindeutig schreiben als

$$\sum_{\{i_1<\dots<i_k\}\subseteq\{1,\dots,d\}} \phi_{\{i_1<\dots<i_k\}} \cdot e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k},$$

wobei die $e^*_{i_r}$ und damit $e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k}$ als konstante $\mathcal{A}_1(\mathbb{R}^d)$-wertige bzw. $\mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d)$-wertige Funktionen auf D aufzufassen sind. In dieser Summe lässt sich $\phi_{\{i_1<\dots<i_k\}} \cdot e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k}$ auch als $\phi_{\{i_1<\dots<i_k\}} \wedge e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k}$ schreiben, da das Hackprodukt mit 0-Formen mit der skalaren Multiplikation mit der entsprechenden reellen Zahl übereinstimmt.

3. Andererseits ist auch wegen der Multilinearität die Tatsache, dass $\omega \in C^r(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d))$ äquivalent dazu, dass

$$\Big(t \mapsto \omega(t)(v_1(t), \dots, v_k(t))\Big) \in C^r(D, \mathbb{R})$$

und zwar für alle möglichen $v_1(.), \dots, v_k(.) \in C^r(D, \mathbb{R}^d)$.

Definition 3.2.1 und Fakta 3.2.2 lassen sich auch auf andere Funktionenklassen ausdehnen wie etwa die Borel-messbaren Funktionen.

3.2.3 Definition. Für offene $D \subseteq \mathbb{R}^d$, $Q \subseteq \mathbb{R}^l$ sei $S : D \to Q$ ein C^{r+1}-Abbildung. Für $\varpi \in C^r(Q, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^l))$ sei $S^*(\varpi) \in C^r(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d))$ definiert durch ($t \in D$ und $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^d$)

$$S^*(\varpi)(t)(v_1, \dots, v_k) := \varpi(S(t))(dS(t)\, v_1, \dots, dS(t)\, v_k),$$

wobei $dS(t) \in \mathbb{R}^{l \times d}$ die Ableitung im Sinne der Analysis II ist.

Aus Definition 3.2.1 folgt unmittelbar, dass $t \mapsto \varpi(S(t))$ aus $C^r(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^l))$ ist. Wegen Fakta 3.2.2, 3, folgt dann, dass $S^*(\varpi)$ tatsächlich in $C^r(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d))$ liegt. Wegen (vgl. Definition 3.1.3)

$$S^*(\varpi)(t)(v_1, \dots, v_k) = dS(t)^T \varpi(S(t))\,(v_1, \dots, v_k) \tag{3.7}$$

ist $S^* : C^r(Q, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^l)) \to C^r(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d))$ außerdem linear und mit $\wedge$ verträglich, vgl. Fakta 3.1.4.

3.2.4 Bemerkung. Im Spezialfall, dass $S : D \to Q$ ein C^{r+1}-Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen D und Q von $\mathbb{R}^d$ ist, und dass $k = d$ ist, folgt aus (3.7) und der Definition der Determinante einer Abbildung in Fakta 3.1.4

$$S^*(\varpi)(t) = \det dS(t) \cdot \varpi(S(t)).$$

3.2.5 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\omega \in C^{r+1}(D, \mathcal{M}_k(\mathbb{R}^d))$, was wie bei $\mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d)$-wertigen Funktion $\big(t \mapsto \omega(t)(v_1, \dots, v_k)\big) \in C^{r+1}(D, \mathbb{R})$ für alle $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^d$ bedeutet. Wir definieren $\hat{d}\omega : D \to \mathcal{M}_{k+1}(\mathbb{R}^d)$ durch ($t \in D$ und $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^d$)

$$\hat{d}\omega(t)(v_1, v_2, \dots, v_{k+1}) = \frac{\partial \omega(.)(v_2, \dots, v_{k+1})}{\partial v_1}(t).$$

Für $\omega \in C^{r+1}(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d))$ sei $d\omega \in C^r(D, \mathcal{A}_{k+1}(\mathbb{R}^d))$ definiert durch

$$d\omega(t)\,(v_1, v_2, \dots, v_{k+1}) = (k+1) \cdot \mathrm{Alt}(\hat{d}\omega(t))\,(v_1, v_2, \dots, v_{k+1}).$$

Dass $\hat{d}\omega(t)$ eine $(k+1)$-Form ist, folgt aus der Tatsache, dass die Richtungsableitung linear vom Richtungsvektor abhängt. Offensichtlich ist auch $\Big(t \mapsto \frac{\partial \omega(.)(v_2, \dots, v_{k+1})}{\partial v_1}(t)\Big) \in C^r(D, \mathbb{R})$ und damit $d\omega \in C^r(D, \mathcal{A}_{k+1}(\mathbb{R}^d))$. Die Abbildung d hat interessante Eigenschaften.

3.2.6 Satz. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Für die Abbildung*

$$d : C^{r+1}(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d)) \to C^r(D, \mathcal{A}_{k+1}(\mathbb{R}^d))$$

gelten folgende Eigenschaften.

(i) *Für konstante ω $(\in C^{r+1}(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d)))$, d.h. $\omega(t) = \omega(s)$ für alle $s, t \in D$, gilt $d\omega = 0$.*

(ii) *Für $f \in C^{r+1}(D, \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^d)) = C^{r+1}(D, \mathbb{R})$ ist $(df)(t)$ $(\in \mathcal{A}_1(\mathbb{R}^d) = (\mathbb{R}^d)^* \cong \mathbb{R}^{1\times d})$ nichts anderes, als die Ableitung von f an der Stelle t im Sinne der Analysis II. Also ist*

$$(df)(t) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial e_j}(t) \cdot e_j^*.$$

(iii) *d ist linear.*

(iv) *$d(\omega \wedge \varpi) = d(\omega) \wedge \varpi + (-1)^k \omega \wedge d(\varpi)$, wobei $\omega \in C^{r+1}(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d))$ und $\varpi \in C^{r+1}(D, \mathcal{A}_l(\mathbb{R}^d))$.*

(v) *$d \circ d = 0$.*

(vi) *Ist $\omega \in C^{r+1}(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d))$ gegeben in der Form (vgl. Fakta 3.2.2)*

$$\omega = \sum_{\{i_1 < \dots < i_k\} \subseteq \{1, \dots, d\}} \phi_{\{i_1 < \dots < i_k\}} \wedge e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*,$$

so gilt

$$d\omega = \sum_{\{i_1 < \dots < i_k\} \subseteq \{1, \dots, d\}} \underbrace{d\phi_{\{i_1 < \dots < i_k\}}}_{\in C^r(D, \mathcal{A}_1(\mathbb{R}^d)) \cong C^r(D, \mathbb{R}^{1\times d})} \wedge e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*. \tag{3.8}$$

(vii) *$d(S^*(\omega)) = S^*(d(\omega))$ für jede C^{r+2}-Abbildung $S : D \to Q$ $(\subseteq \mathbb{R}^l)$ und jedes $\omega \in C^{r+1}(Q, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^l))$.*

Beweis.

(i) Ist $\omega \in C^{r+1}(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d))$ konstant, so folgt $\frac{\partial \omega(.)(v_2, \dots, v_{k+1})}{\partial v_1} = 0$ und daher $d\omega = 0$.

(*ii*) Wegen Alt = id auf $\mathcal{A}_1(\mathbb{R}^d)$ folgt für $f \in C^{r+1}(D, \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^d))$,

$$df(t)(v) = \hat{d}f(t)(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(t) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial e_j}(t)v_j = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial e_j}(t)e_j^*(v) = df(t)v,$$

wobei rechts die Ableitung wie in der Analysis II steht.

(*iii*) Die Abbildung $\hat{d} : C^{r+1}(D, \mathcal{M}_k(\mathbb{R}^d)) \to C^r(D, \mathcal{M}_{k+1}(\mathbb{R}^d))$ ist offensichtlich linear. Aus der Linearität von Alt folgt daher $d(\lambda \cdot \omega) = \lambda \cdot d\omega$ und $d(\omega + \varpi) = d\omega + d\varpi$ für $\lambda \in \mathbb{R}, \omega, \varpi \in C^{r+1}(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d))$.

(*iv*) Für $\vartheta \in C^{r+1}(D, \mathcal{M}_k(\mathbb{R}^d))$ folgt aus der Linearität von $\hat{d}$, dass

$$\hat{d}(\mathrm{Alt}\,\vartheta(.))(t)\,(v_1, \ldots, v_{k+1}) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\{2,\ldots,k+1\})} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \hat{d}\vartheta(t)(v_1, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k+1)}) =$$

$$\frac{1}{k!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}(\{1,\ldots,k+1\}) \\ \sigma(1)=1}} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \hat{d}\vartheta(t)(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k+1)}) = \tag{3.9}$$

$$\mathrm{Alt}(\{2, \ldots, k+1\})\, \hat{d}\vartheta(t)\,(v_1, \ldots, v_{k+1}).$$

Für $\omega \in C^{r+1}(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d))$ und $\varpi \in C^{r+1}(D, \mathcal{A}_l(\mathbb{R}^d))$ folgt zunächst aus der klassischen Produktregel

$$\hat{d}(\omega \otimes \varpi)(t)(v_1, \ldots, v_{k+l+1}) = \frac{\partial \omega \otimes \varpi(.)(v_2, \ldots, v_{k+l+1})}{\partial v_1}(t) =$$

$$\frac{\partial \omega(.)(v_2, \ldots, v_{k+1})}{\partial v_1}(t) \cdot \varpi(t)(v_{k+2}, \ldots, v_{k+l+1}) +$$

$$\omega(t)(v_2, \ldots, v_{k+1}) \cdot \frac{\partial \varpi(.)(v_{k+2} \ldots, v_{k+l+1})}{\partial v_1}(t) =$$

$$(\hat{d}\omega)(t) \otimes \varpi(t)(v_1, v_2, \ldots, v_{k+l+1}) + \omega(t) \otimes (\hat{d}\varpi)(t)\,\underbrace{(v_2, \ldots, v_{k+1}, v_1, v_{k+2}, \ldots, v_{k+l+1})}_{=(v_{\tau(1)},\ldots,v_{\tau(k+l+1)})},$$

wobei $\tau \in \mathfrak{S}_{k+l+1}$ mit $\tau(1) = 2, \ldots, \tau(k) = k+1, \tau(k+1) = 1, \tau(j) = j,\; j > k+1$. Man rechnet leicht nach, dass $\mathrm{sgn}(\tau) = (-1)^k$. Aus (3.9) sowie Fakta 3.1.6, 5, folgt

$$d(\omega \wedge \varpi)(t) = (k+l+1) \cdot \mathrm{Alt}\left(\hat{d}\Big(\frac{(k+l)!}{k!l!}\,\mathrm{Alt}\,(\omega(.) \otimes \varpi(.))\Big)(t)\right) =$$

$$\frac{(k+l+1)!}{k!l!} \cdot \mathrm{Alt}\Big(\mathrm{Alt}(\{2, \ldots, k+l+1\})\, \hat{d}(\omega(.) \otimes \varpi(.))(t)\Big) =$$

$$\frac{(k+l+1)!}{k!l!}\,\mathrm{Alt}\Big((\hat{d}\omega)(t) \otimes \varpi(t)\Big) + \frac{(k+l+1)!}{k!l!}\,\underbrace{\mathrm{Alt}\Big(\tau \star (\omega(t) \otimes (\hat{d}\varpi)(t))\Big)}_{=(-1)^k\,\mathrm{Alt}(\omega(t)\otimes(\hat{d}\varpi))}.$$

Andererseits ist

$$\frac{(k+l+1)!}{k!l!}\,\mathrm{Alt}((\hat{d}\omega)(t) \otimes \varpi(t)) =$$

$$\frac{(k+l+1)!}{(k+1)!l!}\operatorname{Alt}\Big((k+1)\cdot\operatorname{Alt}(\{1,\ldots,k+1\})\,(\hat{d}\omega)(t)\otimes\varpi(t)\Big)=$$

$$\frac{(k+l+1)!}{(k+1)!l!}\operatorname{Alt}\Big((d\omega)(t)\otimes\varpi(t)\Big)=d(\omega)\wedge\varpi(t).$$

Ganz ähnlich sieht man $\frac{(k+l+1)!}{k!l!}\operatorname{Alt}(\omega(t)\otimes(\hat{d}\varpi))=\omega\wedge d(\varpi)(t)$.

(v) Für $d\circ d=0$ verwenden wir wieder (3.9):

$$\hat{d}(d\omega)(t)(v_1,v_2,\ldots,v_{k+2})=(k+1)\cdot\operatorname{Alt}(\{2,\ldots,k+2\})\hat{d}(\hat{d}\omega)(t)(v_1,v_2,\ldots,v_{k+2}).$$

Wegen Fakta 3.1.6, 5, stimmt $d(d\omega)(t)$ mit

$$(k+2)(k+1)\cdot\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(\{2,\ldots,k+2\})\hat{d}(\hat{d}\omega)(t))=(k+2)(k+1)\cdot\operatorname{Alt}(\hat{d}(\hat{d}\omega)(t))$$

überein. Nach Schwarz ist aber

$$\hat{d}(\hat{d}\omega)(t)(v_1,v_2,\ldots,v_{k+2})=\frac{\partial^2\omega(.)(v_3\ldots,v_{k+2})}{\partial v_2\partial v_1}(t)$$

symmetrisch in den ersten beiden Indizes, d.h. $\hat{d}(\hat{d}\omega)(t)=\tau\star\hat{d}(\hat{d}\omega)(t)$, wobei $\tau(1)=2,\tau(2)=1,\tau|_{\{3,\ldots,k+2\}}=\operatorname{id}|_{\{3,\ldots,k+2\}}$. Damit folgt

$$\operatorname{Alt}(\hat{d}(\hat{d}\omega)(t))=\frac{1}{(k+2)!}\cdot\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+2}}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\sigma\star(\hat{d}(\hat{d}\omega)(t))=$$

$$\frac{1}{(k+2)!}\cdot\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+2}}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot(\sigma\circ\tau)\star(\hat{d}(\hat{d}\omega)(t))=-\operatorname{Alt}(\hat{d}(\hat{d}\omega)(t)),$$

bzw. $\operatorname{Alt}(\hat{d}(\hat{d}\omega)(t))=0$.

(vi) Die Beziehung (3.8) folgt unmittelbar aus (iii), (i) und (iv).

(vii) Schließlich gilt für eine C^{r+2}-Abbildung $S\;:\;D\;\to\;Q\;(\subseteq\;\mathbb{R}^l)$ und $\omega\in C^{r+1}(Q,\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^l))$ nach der klassischen Kettenregel im Mehrdimensionalen

$$d(S^*(\omega))(t)\,(v_1)=\frac{\partial\omega\circ S(.)}{\partial v_1}(t)=(d\omega)(S(t))\,dS(t)\,v_1=(S^*(d\omega))(t)\,(v_1).$$

Für $\omega\in C^{r+1}(Q,\mathcal{A}_k(\mathbb{R}^l))$ schreiben wir ω gemäß Fakta 3.2.2 als

$$\omega=\sum_{\{i_1<\cdots<i_k\}\subseteq\{1,\ldots,l\}}\phi_{\{i_1<\cdots<i_k\}}\wedge e^*_{i_1}\wedge\cdots\wedge e^*_{i_k}.$$

Aus (3.8), der Linearität und der Verträglichkeit mit $\wedge$ von S^*, sowie dem schon behandelten Spezialfall $k=0$ folgt

$$S^*(d\omega)=\sum_{\{i_1<\cdots<i_k\}\subseteq\{1,\ldots,l\}}d(S^*(\phi_{\{i_1<\cdots<i_k\}}))\wedge S^*(e^*_{i_1})\wedge\cdots\wedge S^*(e^*_{i_k}).\qquad(3.10)$$

Andererseits ist

$$S^*(e^*_{i_r})(t)\,(v)=e^*_{i_r}dS(t)v=d(e^T_{i_r}S(.))(t)\,(v),$$

und damit $dS^*(e^*_{i_r}) = 0$, vgl. (v). Somit folgt aus der Linearität und der Verträglichkeit mit $\wedge$ von S^* sowie (iii) und (iv), dass auch

$$d(S^*(\omega)) = d\left(\sum_{\{i_1<\cdots<i_k\}\subseteq\{1,\ldots,l\}} S^*(\phi_{\{i_1<\cdots<i_k\}}) \wedge S^*(e^*_{i_1}) \wedge \cdots \wedge S^*(e^*_{i_k})\right) =$$
$$\sum_{\{i_1<\cdots<i_k\}\subseteq\{1,\ldots,l\}} d(S^*(\phi_{\{i_1<\cdots<i_k\}})) \wedge S^*(e^*_{i_1}) \wedge \cdots \wedge S^*(e^*_{i_k}).$$

❑

3.3 Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension d.

3.3.1 Definition. Für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei

$$\mathcal{A}_k(TM) := \dot{\bigcup}_{x\in M} \mathcal{A}_k(T_xM)$$

die disjunkte Vereinigung der Vektorräume $\mathcal{A}_k(T_xM)$. Sei $\pi : \mathcal{A}_k(TM) \to M$ die Abbildung, die ein $\omega \in \mathcal{A}_k(T_xM)$ auf x abbildet.

Wir nennen eine Abbildung $\omega : M \to \mathcal{A}_k(TM)$ mit $\omega(x) \in \mathcal{A}_k(T_xM)$ für alle $x \in M$, d.h. $\pi\circ\omega = \mathrm{id}_M$, eine C^∞-Abbildung, wenn für alle Karten φ aus dem gegebenen Atlas auf M

$$(\varphi^{-1})^*\omega \in C^\infty(D_\varphi, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d)),$$

wobei $(\varphi^{-1})^*\omega(t) \in \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d)$ definiert ist durch $(v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^d)$

$$(\varphi^{-1})^*\omega(t)\,(v_1, \ldots, v_k) = \omega(\varphi^{-1}(t))\left((\mathrm{t}_{\varphi^{-1}(t)}\varphi)^{-1}v_1, \ldots, (\mathrm{t}_{\varphi^{-1}(t)}\varphi)^{-1}v_k\right).$$

Wir sprechen von einer *Differentialform* k-ter Stufe auf M. Die Menge aller solchen k-Differentialformen bezeichnen wir mit $\Omega_k(M)$.

Die Definition von C^∞-Abbildung oben könnte ad hoc vom speziellen Atlas abhängen. In der Tat gilt aber für zwei mit dem gegebenen Atlas verträgliche Karten φ, ψ auf M mit $U_\varphi \cap U_\psi \neq \emptyset$ und $t \in \varphi(U_\varphi \cap U_\psi)$ sowie $x = \varphi^{-1}(t)$ (vgl. (1.3))

$$(\varphi^{-1})^*\omega(t)\,(v_1, \ldots, v_k) = \omega(\varphi^{-1}(t))\left((\mathrm{t}_x\varphi)^{-1}v_1, \ldots, (\mathrm{t}_x\varphi)^{-1}v_k\right) =$$
$$\omega(\psi^{-1}\circ(\psi\circ\varphi^{-1})(t))\left((\mathrm{t}_x\psi)^{-1}d(\psi\circ\varphi^{-1})(t)v_1, \ldots, (\mathrm{t}_x\psi)^{-1}d(\psi\circ\varphi^{-1})(t)v_k\right) = \tag{3.11}$$
$$(\psi\circ\varphi^{-1})^*((\psi^{-1})^*\omega)(t)\,(v_1, \ldots, v_k).$$

Dabei ist

$$(\psi\circ\varphi^{-1})^* : C^\infty(\psi(U_\varphi\cap U_\psi), \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d)) \to C^\infty(\varphi(U_\varphi\cap U_\psi), \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d))$$

im Sinne von Definition 3.2.3 zu verstehen. Nun wissen wir, dass letztere Abbildung die C^∞-Eigenschaft erhält, vgl. Definition 3.2.3. Damit ändert sich in Definition 3.3.1 nichts, wenn man von einem gegebenen Atlas auf M zu einem äquivalenten Atlas übergeht.

3.3.2 Fakta.

1. Offensichtlich gilt $\Omega_k(M) = \{0\}$ für $k > d$. Wegen $(\varphi^{-1})^*\omega = \omega \circ \varphi^{-1}$ für $\omega \in \Omega_0(M)$ folgt leicht, dass $\Omega_0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$.

2. Für U_φ betrachtet als Mannigfaltigkeit gilt offensichtlich, dass die Abbildung $(\varphi^{-1})^* : \Omega_k(U_\varphi) \to C^\infty(D_\varphi, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d))$ eine Bijektion ist, die wegen (vgl. Definition 3.1.3 und Fakta 3.1.4)

$$(\varphi^{-1})^*\omega(t) = ((\mathrm{t}_{\varphi^{-1}(t)}\varphi)^{-1})^T \omega(\varphi^{-1}(t))$$

   für jedes feste $t \in D_\varphi$ mit den punktweise definierten Operationen wie $+$, skalares Multiplizieren sowie $\wedge$ verträglich ist.

3. $\Omega_k(M)$ lässt sich somit als

$$\bigcap_\varphi \left\{\omega : M \to \mathcal{A}_k(TM) : \pi \circ \omega = \mathrm{id}_M,\ \omega|_{U_\varphi} \in \Omega_k(U_\varphi)\right\} \tag{3.12}$$

   schreiben. Dabei läuft φ durch irgendeinen mit dem auf M verträglichen Atlas.

   Damit ein $\omega : M \to \mathcal{A}_k(TM)$ mit $\pi \circ \omega = \mathrm{id}_M$ in $\Omega_k(M)$ liegt, reicht es somit, dass es um jedes $x \in M$ eine offene Umgebung V gibt mit $\omega|_V \in \Omega_k(V)$.

   Da $\{\omega : M \to \mathcal{A}_k(TM) : \pi \circ \omega = \mathrm{id}_M\}$ punktweise mit den Operationen $+$, skalares Multiplizieren sowie $\wedge$ versehen ist, erkennt man aus (3.12) auch, dass auch $\Omega_k(M)$ diese Operationen trägt. Man beachte, dass dabei $\Omega_k(M)|_{U_\varphi} \subseteq \Omega_k(U_\varphi)$, aber im Allgemeinen nicht Gleichheit herrscht.

4. Ist $x \in M$ und φ eine Karte mit $x \in U_\varphi$, so existiert eine Umgebung $D \subseteq D_\varphi$ von $\varphi(x)$ und eine C^∞-Funktion $h : D_\varphi \to \mathbb{R}$ mit $h(D_\varphi) \subseteq [0, 1]$, $h(D) = \{1\}$ und kompaktem Träger $\operatorname{supp} h \subseteq D_\varphi$, vgl. Lemma 1.1.11.

   Für $\omega \in \Omega_k(U_\varphi)$ ist auch $(h \circ \varphi) \cdot \omega \in \Omega_k(U_\varphi)$, da

$$(\varphi^{-1})^*\Big((h \circ \varphi) \cdot \omega\Big) = h \cdot ((\varphi^{-1})^*\omega).$$

   Setzen wir $(h \circ \varphi) \cdot \omega$ außerhalb von U_φ durch Null fort, so liegt diese Fortsetzung in $\Omega_k(M)$. Um das einzusehen, bemerken wir einfach, dass, wenn $\mathcal{A}$ der gegebene Atlas auf M ist,

$$\{\varphi\} \cup \{\phi|_{U_\phi \setminus \varphi^{-1}(\operatorname{supp} h)} : \phi \in \mathcal{A},\ \phi \neq \varphi\}$$

   ein Atlas ist, der mit $\mathcal{A}$ äquivalent ist. Nun ist für $\phi \neq \varphi$ sicherlich $(\phi|^{-1}_{U_\phi \setminus \varphi^{-1}(\operatorname{supp} h)})^*(h \circ \varphi) \cdot \omega = 0$ und damit ist die Fortsetzung von $(h \circ \varphi) \cdot \omega$ in $\Omega_k(M)$.

   Wegen $(h \circ \varphi) \cdot \omega|_U = \omega|_U$ für $U := \varphi^{-1}(D)$ sehen wir, dass es zu jedem $x \in M$ und jeder Karte φ mit $x \in U_\varphi$ eine offene Umgebung $U \subseteq U_\varphi$ von x gibt, sodass

$$\Omega_k(M)|_U = \Omega_k(U_\varphi)|_U \cong C^\infty(D_\varphi, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d))|_D.$$

   Diese Tatsache zeigt, dass $\Omega_k(M)$ verhältnismäßig groß sein muss.

5. Für eine Funktion $\omega : M \to \mathcal{A}_k(TM), \pi \circ \omega = \mathrm{id}_M$ und Vektorfelder $X_1, \dots, X_k : M \to TM$, d.h. $\pi \circ X_j = \mathrm{id}_M$, sowie Karten φ gilt ($t \in D_\varphi$)

$$\omega \circ \varphi^{-1}(t)\ (X_1 \circ \varphi^{-1}(t), \dots, X_k \circ \varphi^{-1}(t)) =$$
$$\omega \circ \varphi^{-1}(t) \left((\mathrm{t}_{\varphi^{-1}(t)}\varphi)^{-1} \alpha_2^1(t), \dots, (\mathrm{t}_{\varphi^{-1}(t)}\varphi)^{-1} \alpha_2^k(t) \right) =$$
$$(\varphi^{-1})^* \omega(t)\ (\alpha_2^1(t), \dots, \alpha_2^k(t)).$$

mit $\alpha_2^j(t) := \mathrm{t}_{\varphi^{-1}(t)}\varphi\ X_j \circ \varphi^{-1}(t) = \pi_2 \circ \hat{\varphi} \circ X_j \circ \varphi^{-1}(t)$ $(\in \mathbb{R}^d)$, vgl. (2.4).

Ist nun $\omega \in \Omega_k(M)$, und sind die X_j aus $\mathfrak{X}(M)$, so ist gemäß Definition 3.3.1 und Fakta 3.2.2 wegen der Beliebigkeit von φ die Abbildung $x \mapsto \omega(x)(X_1(x), \dots, X_k(x))$ in $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Ist $O \subseteq M$ offen, so folgt genauso, dass $x \mapsto \omega(x)(X_1(x), \dots, X_k(x))$ in $C^\infty(O, \mathbb{R})$ liegt, wenn die X_j aus $\mathfrak{X}(O)$ sind.

Ist umgekehrt $\omega : M \to \mathcal{A}_k(TM), \pi \circ \omega = \mathrm{id}_M$ derart, dass für alle $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ diese Abbildung C^∞ ist, so folgt $\omega \in \Omega_k(M)$.

Sind nämlich $\{i(1) < \cdots < i(k)\} \subseteq \{1, \dots, d\}$ und $X_j \in \mathfrak{X}(M)$ so, dass für eine Karte φ, $x \in U_\varphi$ und für eine gewisse Umgebung U von x

$$X_j|_U = \frac{\partial}{\partial \varphi_{i(j)}}|_U,$$

vgl. Beispiel 2.1.2 und Beispiel 2.1.5, so folgt für $t \in \varphi(U)$, dass $\mathrm{t}_{\varphi^{-1}(t)}\varphi\ X_j \circ \varphi^{-1}(t) = e_{i(j)}$ und damit

$$\omega \circ \varphi^{-1}(t)\ (X_1 \circ \varphi^{-1}(t), \dots, X_k \circ \varphi^{-1}(t)) = (\varphi^{-1})^* \omega(t)\ (e_{i(1)}, \dots, e_{i(k)}).$$

Somit ist die rechte Seite auf $\varphi(U)$ eine C^∞-Funktion. Da $x \in U_\varphi$ beliebig war, folgt $\omega \in \Omega_k(M)$.

3.3.3 Definition. Sind M und N zwei C^∞-Mannigfaltigkeiten und $h : M \to N$ eine C^∞-Abbildung, so definieren wir für $\omega \in \Omega_k(N)$ für jedes $x \in M$

$$(h^*\omega)(x)\ (\underbrace{X_1, \dots, X_k}_{\in T_x M}) = \omega(h(x))\ (T_x h\ X_1, \dots, T_x h\ X_k).$$

mit $t = (t_1, \dots, t_d)^T$

Für Karten φ auf M und ψ auf N mit $h(U_\varphi) \subseteq U_\psi$ und mit $x = \varphi^{-1}(t)$ gilt wegen $S := \psi \circ h \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(D_\varphi, D_\psi)$ und wegen $dS(t) = \mathrm{t}_{h(x)}\psi\ T_x h\ (\mathrm{t}_x\varphi)^{-1}$ (vgl. (1.4))

$$\begin{aligned} &(\varphi^{-1})^* h^* \omega(t)\ (v_1, \dots, v_k) = \\ &\omega(h \circ \varphi^{-1}(t))\ (T_x h\ (\mathrm{t}_x\varphi)^{-1} v_1, \dots, T_x h\ (\mathrm{t}_x\varphi)^{-1} v_k) = \\ &\omega(\psi^{-1} \circ S(t)) \left((\mathrm{t}_{h(x)}\psi)^{-1} dS(t) v_1, \dots, (\mathrm{t}_{h(x)}\psi)^{-1} dS(t) v_k \right) = \\ &S^*(\psi^{-1})^* \omega(t)\ (v_1, \dots, v_k). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Mit Definition 3.2.3 folgt $(\varphi^{-1})^* h^* \omega \in C^\infty(D_\varphi, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d))$ und damit $(h^*\omega) \in \Omega_k(M)$.

Wegen $(h^*\omega)(x) = (T_x h)^T\ \omega \circ h(x)$ (vgl. Definition 3.1.3) ist die Abbildung $h^* : \Omega_k(N) \to \Omega_k(M)$ linear und mit der punktweisen Operation $\wedge$ verträglich. Schließlich überprüft man elementar, dass auch

$$g^*(h^*\omega) = (h \circ g)^*\omega, \tag{3.14}$$

für jede C^∞-Abbildung $g : L \to M$ mit einer C^∞-Mannigfaltigkeit L.

Wir wollen nun eine Abbildung $d : \Omega_k(M) \to \Omega_{k+1}(M)$ ähnlich wie die Abbildung $d : C^\infty(D, \mathcal{A}_k(\mathbb{R}^d)) \to C^\infty(D, \mathcal{A}_{k+1}(\mathbb{R}^d))$ definieren. Dazu sei φ eine Karte auf M. Für $\omega \in \Omega_k(M)$ betrachten wir $d((\varphi^{-1})^*\omega) \in C^\infty(D_\varphi, \mathcal{A}_{k+1}(\mathbb{R}^d))$. Wegen Fakta 3.3.2, 2, gilt

$$d((\varphi^{-1})^*\omega) = (\varphi^{-1})^*\varpi \ \text{ für ein } \ \varpi = \varpi_\varphi \in \Omega_{k+1}(U_\varphi).$$

Ist nun ψ eine weitere Karte mit $U_\varphi \cap U_\psi \neq \emptyset$, und ist ϖ_ψ auf U_ψ entsprechend definiert, so folgt für $t \in \varphi(U_\varphi \cap U_\psi)$ wegen (3.11) und Satz 3.2.6, (vii),

$$(\varphi^{-1})^*\varpi_\varphi\ (t) = d((\varphi^{-1})^*\omega)\ (t) = d\Big((\psi \circ \varphi^{-1})^*((\psi^{-1})^*\ \omega)\Big)(t) =$$

$$(\psi \circ \varphi^{-1})^* d((\psi^{-1})^*\ \omega)(t) = (\psi \circ \varphi^{-1})^*((\psi^{-1})^*\ \varpi_\psi)\ (t) = (\varphi^{-1})^*\varpi_\psi\ (t).$$

Es folgt $\varpi_\varphi = \varpi_\psi$ auf $U_\varphi \cap U_\psi$. Somit ist für $x \in M$ und eine Karte φ aus dem auf M gegebenen Atlas mit $x \in U_\varphi$ durch

$$\varpi(x) := \varpi_\varphi(x)$$

eine Funktion $M \to \mathcal{A}_{k+1}(TM)$ mit $\varpi(x) \in A_{k+1}(T_x M)$ wohldefiniert. Wegen Fakta 3.3.2, 3, gilt $\varpi \in \Omega_{k+1}(M)$.

3.3.4 Definition. Für $\omega \in \Omega_k(M)$ sei $d\omega \in \Omega_{k+1}(M)$ definiert durch $d\omega := \varpi$. Die Abbildung $d : \Omega_k(M) \to \Omega_{k+1}(M)$ heißt die *Cartansche Ableitung*.

Also ist $d\omega$ jene Form aus $\Omega_{k+1}(M)$, die eindeutig dadurch definiert ist, dass

$$(\varphi^{-1})^*(d\omega)\ (t) = d((\varphi^{-1})^*\omega)(t),\ t \in D_\varphi. \tag{3.15}$$

für alle Karten φ aus einem Atlas auf M bzw. aus einem dazu äquivalenten Atlas.

Aus dieser Charakterisierung werden wir folgendes Analogon zu Satz 3.2.6 herleiten.

3.3.5 Satz. *Für die Abbildung*

$$d : \Omega_k(M) \to \Omega_{k+1}(M)$$

gelten folgende Eigenschaften.

(*i*) *Für* $f \in \Omega_0(M) = C^\infty(D, \mathbb{R})$ *und* $x \in M$ *ist* $(df)(x)$ *nichts anderes, als die Abbildung* $\mathrm{t}_{f(x)}(\mathrm{id}_\mathbb{R})\ T_x f : T_x M \to \mathbb{R}$. *Außerdem lässt sie sich auch schreiben als* $(X_x \mapsto X_x f)$ *(vgl. Definition 1.2.11), also*

$$\underbrace{df(x)}_{\in (T_x M)^* = \mathcal{A}_1(T_x M)}\ \underbrace{(X_x)}_{\in T_x M} = \mathrm{t}_{f(x)}(\mathrm{id}_\mathbb{R})\,(\underbrace{Tf(X_x)}_{\substack{\in T_{f(x)}\mathbb{R}, \\ \text{definiert wie in Proposition 1.2.19}}}).$$

(*ii*) *d ist linear.*

(*iii*) $d(\omega \wedge \varpi) = d(\omega) \wedge \varpi + (-1)^k \omega \wedge d(\varpi)$*, wobei* $\omega \in \Omega_k(M)$*.*

(*iv*) $d \circ d = 0$.

(*v*) $d(h^*(\omega)) = h^*(d(\omega))$ *für eine* C^∞*-Abbildung* $h : M \to N$ *(*M*,* N *sind* C^∞*-Mannigfaltigkeiten) und* $\omega \in \Omega_k(N)$*.*

Beweis. Wegen der Charakterisierung (3.15) zusammen mit der Verträglichkeit von $(\varphi^{-1})^*$ mit den punktweisen Operationen $+$, $\cdot$ und $\wedge$ folgen (ii), (iii) sowie (iv) unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften in Satz 3.2.6. Wir zeigen exemplarisch (iii):

Für Karten φ gilt

$$d((\varphi^{-1})^*(\omega \wedge \varpi))(t) = d((\varphi^{-1})^*(\omega) \wedge (\varphi^{-1})^*(\varpi))(t) =$$

$$d((\varphi^{-1})^*\omega)(t) \wedge (\varphi^{-1})^*\varpi(t) + (-1)^k (\varphi^{-1})^*\omega(t) \wedge d((\varphi^{-1})^*\varpi)(t) =$$

$$(\varphi^{-1})^*(d(\omega) \wedge \varpi + (-1)^k \omega \wedge d(\varpi))(t),$$

und wegen (3.15) folgt (iii).

(v) zeigt man ähnlich. Aus (3.13) und Satz 3.2.6, (vii), folgt nämlich

$$d((\varphi^{-1})^* h^*(\omega))(t) = d(S^*(\psi^{-1})^*\omega)(t) = S^* d((\psi^{-1})^*\omega)(t) =$$

$$S^*(\psi^{-1})^*(d\omega)(t) = (\varphi^{-1})^* h^*(d\omega)(t).$$

Wieder folgt aus (3.15) angewandt auf alle Karten φ mit $h(U_\varphi) \subseteq U_\psi$ für irgendeine Karte ψ auf N – man zeigt leicht, dass das ein äquivalenter Atlas ist –, dass (v) gilt.

Ist für (i) schließlich $f \in \Omega_0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$, so gilt (vgl. (1.4))

$$(\varphi^{-1})^*(df)(t) = d((\varphi^{-1})^* f)(t) = d(f \circ \varphi^{-1})(t) = (\mathrm{t}_{f(x)}\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})\; T_x f\; (\mathrm{t}_x \varphi)^{-1}$$

mit $x = \varphi^{-1}(t)$. Wegen Definition 1.2.11 stimmt das mit $(X_x \mapsto X_x f)$ überein. Der Rest folgt aus der Begriffsbildung in Proposition 1.2.19.

❑

3.4 Integration von Differentialformen

In diesem Kapitel wollen wir ein $\omega \in \Omega_d(M)$ integrieren, wobei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Leider funktioniert das nicht mit jeder derartigen Mannigfaltigkeit. In der Tat funktioniert das nur, wenn man einen Atlas $\mathcal{A}$ auf M findet, der orientiert ist.

3.4.1 Definition. Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Zwei (mit dem auf M gegebenen Atlas verträgliche) Karten φ und ψ heißen im Punkt $x \in U_\varphi \cap U_\psi$ *gleich orientiert* bzw. *entgegengesetzt orientiert*, falls (Ableitung im Sinne der Analysis II)[1]

$$\det d(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) > 0 \;\text{ bzw. }\; \det d(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) < 0.$$

[1]Man beachte, dass diese Determinante immer $\neq 0$ ist.

Die Karten φ und ψ heißen *gleich orientiert*, falls sie in allen Punkten von $U_\varphi \cap U_\psi$ gleich orientiert sind[2]. Entsprechend sind *entgegengesetzt orientierte Karten* definiert.

Zwei Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von Karten nennt man gleich bzw. entgegengesetzt orientiert, falls je zwei Karten $\varphi \in \mathcal{A}$ und $\psi \in \mathcal{B}$ diese Eigenschaft haben.

Ein (mit dem auf M gegebenen Atlas verträglicher) Atlas $\mathcal{A}$ auf M heißt *orientiert*, wenn je zwei $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ gleich orientiert sind. Gibt es auf M einen orientierten Atlas, so spricht man von einer *orientierbaren Mannigfaltigkeit*.

3.4.2 Fakta.

1. Sind φ, ψ zwei Karten mit $x \in U_\varphi \cap U_\psi$, so folgt aus
$$d(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = \left(d(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x))\right)^{-1},$$
dass die Beziehungen gleich und entgegengesetzt orientiert in x symmetrisch sind. Ist ϕ eine dritte Karte mit $x \in U_\varphi \cap U_\psi \cap U_\phi$, so folgt aus
$$d(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(x))\, d(\phi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = d(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$$
und der Multiplikativität der Determinante, dass gleich orientiert in x zu sein auch transitiv ist.

2. Ist $\mathcal{A}$ ein orientierter Atlas und ist $\mathcal{B}$ eine Menge von (mit dem Atlas veträglichen) Karten, sodass $\mathcal{B}$ und $\mathcal{A}$ gleich orientiert sind, so folgt aus 1, dass auch $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ orientiert ist.

3. Sei $\mathcal{A}$ ein orientierter Atlas, und sei ψ eine Karte. Ist $x \in U_\psi$, und ist ψ in x gleich orientiert zu einer Karte $\varphi \in \mathcal{A}$ mit $x \in U_\varphi$, so folgt aus 1, dass ψ zu allen Karten aus $\mathcal{A}$ gleich orientiert ist.

   Somit gilt auch, dass wenn ψ in x zu einer Karte aus $\mathcal{A}$ entgegengesetzt orientiert, dann ψ in x zu allen Karten aus $\mathcal{A}$ entgegengesetzt orientiert ist.

4. Sei wieder $\mathcal{A}$ ein orientierter Atlas, und sei ψ eine Karte. Wegen 3 und wegen der Stetigkeit der involvierten Ausdrücke ist sowohl die Menge aller $x \in U_\psi$, bei denen ψ zu allen Karten aus $\mathcal{A}$ gleich orientiert ist, als auch die Menge aller $x \in U_\psi$, bei denen ψ zu allen Karten aus $\mathcal{A}$ entgegengesetzt orientiert ist, offen.

   Ist U_ψ (oder äquivalent D_ψ) zusammenhängend, so muss genau eine dieser Mengen leer sein und die andere mit U_ψ übereinstimmen. Also ist eine solche Karte entweder zu allen Karten aus $\mathcal{A}$ gleich orientiert, oder zu allen Karten aus $\mathcal{A}$ entgegengesetzt orientiert.

5. Ist schließlich ψ eine zu allen Karten aus $\mathcal{A}$ entgegengesetzt orientierte Karte, so sieht man leicht, dass dann $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1) \circ \psi$ eine zu allen Karten aus $\mathcal{A}$ gleich orientierte Karte ist.

Um $\varrho \in \Omega_d(M)$ sinnvoll ein Integral zuzuordnen sei $\mathcal{A}$ ein abzählbarer orientierter Atlas auf M. Wegen Korollar 1.1.6 findet man zu jedem orientierten Atlas einen abzählbaren orientierten Teilatlas.

Nun sei Q_φ, $\varphi \in \mathcal{A}$, eine abzählbare, paarweise disjunkte Familie von Teilmengen von M mit $Q_\varphi \subseteq U_\varphi$, sodass $\varphi(Q_\varphi)$ $(\subseteq D_\varphi)$ eine Borelteilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist und sodass
$$\dot{\bigcup} Q_\varphi = M.$$

[2]Insbesondere ist das erfüllt, wenn $U_\varphi \cap U_\psi = \emptyset$.

3.4.3 Definition. Für *messbare* $B \subseteq M$ – also liegt B in der von den offenen Teilmengen von M erzeugten σ-Algebra, oder äquivalent, $\varphi(B)$ ist für alle $\varphi \in \mathcal{A}$ eine Borelteilmenge von $\mathbb{R}^d$ – nennen wir $\varrho \in \Omega_d(M)$ integrierbar über B, wenn

$$\int_B |\varrho| := \sum_{\varphi\in\mathcal{A}} \int_{\varphi(Q_\varphi\cap B)} |(\varphi^{-1})^*\varrho(t)(e_1,\dots,e_d)|\, d\lambda_d(t) < +\infty. \tag{3.16}$$

In dem Fall setzen wir

$$\int_B \varrho := \sum_{\varphi\in\mathcal{A}} \int_{\varphi(Q_\varphi\cap B)} (\varphi^{-1})^*\varrho(t)(e_1,\dots,e_d)\, d\lambda_d(t)$$

und nennen diese Zahl das Integral von ϱ bzgl. des orientierten Atlanten $\mathcal{A}$.

3.4.4 Fakta.

1. Sei nun $\mathcal{B}$ ein weiterer orientierter und abzählbarer Atlas, der zu $\mathcal{A}$ gleich orientiert ist. Nach Fakta 3.4.2, 2, ist dann $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ auch orientiert. Weiters sei $P_\psi,\ \psi\in\mathcal{B}$ eine zu $\mathcal{B}$ passende Partition mit den entsprechenden Eigenschaften wie $Q_\varphi,\ \varphi\in\mathcal{A}$.

   Für $\varphi\in\mathcal{A}$ und $\psi\in\mathcal{B}$ mit $U_\varphi\cap U_\psi\neq\emptyset$ folgt aus (3.11) und aus Bemerkung 3.2.4 angewandt auf $S=\varphi\circ\psi^{-1}:\psi(U_\varphi\cap U_\psi)\to\varphi(U_\varphi\cap U_\psi)$

   $$(\psi^{-1})^*\varrho(t) = S^*(\varphi^{-1})^*\varrho(t) = \det dS(t)\cdot(\varphi^{-1})^*\varrho(S(t)).$$

   Die Transformationsregel ergibt nun

   $$\begin{aligned} &\int_{\psi(Q_\varphi\cap P_\psi\cap B)} |(\psi^{-1})^*\varrho(t)(e_1,\dots,e_d)|\, d\lambda_d = \\ &\int_{\psi(Q_\varphi\cap P_\psi\cap B)} |(\varphi^{-1})^*\varrho(S(t))(e_1,\dots,e_d)|\cdot|\det dS(t)|\, d\lambda_d = \\ &\int_{\varphi(Q_\varphi\cap P_\psi\cap B)} |(\varphi^{-1})^*\varrho(t)(e_1,\dots,e_d)|\, d\lambda_d. \end{aligned} \tag{3.17}$$

   Summiert man in (3.17) links zuerst über alle $\varphi\in\mathcal{A}$ und dann über alle $\psi\in\mathcal{B}$ und rechts in umgekehrter Reihenfolge, so sieht man, dass die Integrierbarkeit von ϖ nicht vom konkreten Atlas und einer passenden Partition abhängt.

   Im Falle der Integrierbarkeit gilt zudem

   $$\begin{aligned} &\int_{\psi(Q_\varphi\cap P_\psi\cap B)} (\psi^{-1})^*\varrho(t)(e_1,\dots,e_d)\, d\lambda_d = \\ &\int_{\psi(Q_\varphi\cap P_\psi\cap B)} (\varphi^{-1})^*\varrho(S(t))(e_1,\dots,e_d)\cdot|\det dS(t)|\, d\lambda_d = \\ &\int_{\varphi(Q_\varphi\cap P_\psi\cap B)} (\varphi^{-1})^*\varrho(t)(e_1,\dots,e_d)\, d\lambda_d. \end{aligned}$$

   Also hängt auch $\int_B\varrho$ nicht vom konkreten orientierten Atlas samt passender Partition ab, solange der Atlas nur gleiche Orientierung hat.

2. Man sieht leicht, dass die Relation ‚gleich orientiert' zu sein eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller orientierten Atlanten ist. Aus dem letzten Punkt erkennt man auch, dass das Integral einer Differentialform nur von der Äquivalenzklasse abhängt, in der der entsprechende abzählbare und orientierte Atlas liegt.

3. Falls ein orientierter Atlas existiert, so sieht man elementar, dass man daraus einen gleich orientierten und abzählbaren Atlas $\mathcal{A}$ konstruieren kann, sodass für alle $\varphi \in \mathcal{A}$ die Mengen D_φ beschränkt in $\mathbb{R}^d$ sind. Insbesondere sind dann alle Ausdrücke
$$\int_{\varphi(Q_\varphi \cap B)} |(\varphi^{-1})^* \varrho(t)(e_1, \dots, e_d)| \, d\lambda_d(t)$$
in (3.16) endlich. Hat ϱ noch einen kompakten Träger – verschwindet also außerhalb einer kompakten Menge –, so gibt es eine endliche Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ von Karten, deren Definitionsbereiche den Träger überdecken.

   Wählt man dann noch die Q_φ so, dass
$$\dot{\bigcup_{\varphi \in \mathcal{F}}} Q_\varphi = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{F}} U_\varphi,$$
so verschwinden für alle $\varphi \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}$ die Integrale $\int_{\varphi(Q_\varphi \cap B)} |(\varphi^{-1})^T \varrho(t)(e_1, \dots, e_d)| \, d\lambda_d(t)$. Also ist ω integrierbar, wobei
$$\int_M \varrho := \sum_{\varphi \in \mathcal{F}} \int_{\varphi(Q_\varphi \cap B)} (\varphi^{-1})^* \varrho(t)(e_1, \dots, e_d) \, d\lambda_d(t). \tag{3.18}$$

3.4.5 Satz. *Seien M und N zwei d-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeiten und sei $h : M \to N$ ein C^∞-Diffeomorphismus. Dann ist M genau dann orientierbar – hat also einen orientierten Atlas–, wenn N es ist. In der Tat ist $\mathcal{A}$ genau dann ein orientierter Atlas auf N, wenn $\mathcal{A} \circ h := \{\varphi \circ h : \varphi \in \mathcal{A}\}$ ein solcher auf M ist.*

In dem Fall gilt für jedes $\varrho \in \Omega_d(N)$
$$\int_{h(B)} \varrho = \int_B h^*(\varrho),$$
wobei links ein Integral bzgl. eines orientierten Atlanten $\mathcal{A}$ und rechts ein Integral bzgl. des orientierten Atlanten $\mathcal{A} \circ h$ steht.

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ ein abzählbarer, orientierter Atlas auf N. Man sieht unmittelbar, dass dann $\mathcal{A} \circ h$ ein orientierter Atlas auf M ist. Ist Q_φ, $\varphi \in \mathcal{A}$, eine mit $\mathcal{A}$ verträgliche Partition von N, so ist auch $h^{-1}(Q_\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{A}$ eine mit $\mathcal{A} \circ h$ verträgliche Partition von M.

Für eine Karte $\varphi \in \mathcal{A}$ gilt wegen (3.13) angewandt auf $\varphi \circ h$ und φ die Beziehung $((\varphi \circ h)^{-1})^* h^* \varrho = (\varphi^{-1})^* \varrho$ und damit
$$\int_{\varphi(Q_\varphi \cap h(B))} (\varphi^{-1})^* \varrho(t)(e_1, \dots, e_d) \, d\lambda_d(t) = \int_{\varphi \circ h(h^{-1}(Q_\varphi) \cap B)} ((\varphi \circ h)^{-1})^* h^* \varrho(t)(e_1, \dots, e_d) \, d\lambda_d(t).$$

Die Gleichheit gilt auch, wenn man die Integranden in Beträge setzt. Aufsummieren ergibt dann die Behauptung.

❏

3.5 Stokesscher Integralsatz

Man beachte, dass folgende Definition den Fall $M = O$ und damit verbunden $\partial O = \emptyset$ nicht ausschließt.

3.5.1 Definition. Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit. Ist $O \subseteq M$ offen und ∂O derart, dass man für jedes $x \in \partial O$ eine mit dem Atlas auf M verträgliche Karte φ mit $x \in U_\varphi$ findet, sodass

$$\varphi(U_\varphi \cap \partial O) = D_\varphi \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}), \text{ und } \varphi(U_\varphi \cap O) = D_\varphi \cap ((-\infty, 0) \times \mathbb{R}^{d-1}),$$

dann nennen wir $\overline{O}$ eine *berandete Teilmannigfaltigkeit* von M.

3.5.2 Bemerkung. Man sieht ganz leicht, dass wenn wir für eine Karte φ von der Bauart wie in Definition 3.5.1 mit $x \in U_\varphi$ den Definitionsbereich U_φ um x derart kleiner machen, dass U_φ konvex ist, dann auch die neue Karte ebenfalls die Eigenschaften wie in Definition 3.5.1 hat.

Im Folgenden bezeichne $p_{d-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d-1}$ die Projektion auf die hinteren $d-1$ Einträge und $\iota_{d-1} : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}^d$ die Einbettung $\eta \mapsto (0, \eta)^T$.

3.5.3 Proposition. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\overline{O} \subseteq M$ eine berandete Teilmannigfaltigkeit von M. Dann ist ∂O eine Untermannigfaltigkeit mit der Dimension $d-1$.*

Falls M orientierbar ist, so ist es auch ∂O. Genauer gilt für jeden orientierten Atlas $\mathcal{A}$ von M, dass man ∂O mit einer Menge C von zu $\mathcal{A}$ gleich orientierten Karten mit der Eigenschaft wie in Definition 3.5.1 abdecken kann. Dann ist

$$\mathcal{B} = \{p_{d-1} \circ \varphi|_{\partial O \cap U_\varphi} : \varphi \in C\}$$

ein orientierter Atlas von ∂O.

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus Definition 1.3.1.

Sei $\mathcal{A}$ ein orientierter Atlas auf M. Ist $x \in \partial O$ und φ eine Karte mit $x \in U_\varphi$ und zusammenhängendem U_φ (vgl. Bemerkung 3.5.2) von der Bauart wie in Definition 3.5.1, so folgt aus Fakta 3.4.2, 4, dass φ zu $\mathcal{A}$ entweder gleich oder entgegengesetzt orientiert ist, wobei wir im zweiten Fall zu $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, -1) \circ \psi$ übergehen können.

Somit erhalten wir zu jedem $x \in \partial O$ eine zu $\mathcal{A}$ gleich orientierte Karte φ mit $x \in U_\varphi$ von der Bauart wie in Definition 3.5.1. Sei C die Menge dieser Karten. Beachte, dass nach Fakta 3.4.2, 2, auch $\mathcal{A} \cup C$ ein orientierter Atlas ist.

Nach Bemerkung 1.3.6 ist dann $\mathcal{B}$ ein Atlas auf ∂O. Für zwei Karten

$$\phi_j := p_{d-1} \circ \varphi_j|_{\partial O \cap U_{\varphi_j}}, \ j = 1, 2,$$

aus $\mathcal{B}$ mit $U_{\phi_1} \cap U_{\phi_2} \neq \emptyset$ gilt für $x \in U_{\phi_1} \cap U_{\phi_2}$ die Beziehung

$$\iota_{d-1} \circ \phi_j(x) = \varphi_j(x)$$

und damit ($t = \phi_1(x) \in \phi_1(U_{\phi_1} \cap U_{\phi_2})$)

$$\iota_{d-1} \circ \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(t) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \circ \iota_{d-1}(t).$$

Durch Ableiten folgt (p_1 ist die Projektion auf die erste Komponente)

$$d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(\iota_{d-1}(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(p_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})}{\partial e_1}(\iota_{d-1}(t)) & 0 \\ * & d(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})(t) \end{pmatrix}.$$

Aus der speziellen Bauart der Karten (siehe Definition 3.5.1) folgt für kleine $\epsilon > 0$

$$p_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\iota_{d-1}(t) - \epsilon e_1)) \in (-\infty, 0),$$

womit $\frac{\partial(p_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})}{\partial e_1}(\iota_{d-1}(t)) \geq 0$ folgt. Da $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist, kann dieser Ausdruck aber nicht verschwinden. Es folgt $\det d(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})(t) > 0$, womit $\mathcal{B}$ orientiert und daher ∂O orientierbar ist.

❑

3.5.4 Satz. *Sei M eine orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension d, und sei $\overline{O}$ eine berandete Teilmannigfaltigkeit von M. Weiters sei $\mathcal{A}$ ein orientierter Atlas auf M und sei $\mathcal{B}$ der gemäß Proposition 3.5.3 daraus hervorgegangene orientierte Atlas auf ∂O.*

Hat $\varrho \in \Omega_{d-1}(M)$ kompakten Träger, so gilt bzgl. obiger orientierter Atlanten [3]

$$\int_O d\varrho = \int_{\partial O} \iota_{\partial O}^* \varrho. \tag{3.19}$$

Beweis. Zu jedem $x \in O$ sei $\varphi_x \in \mathcal{A}$ mit $x \in U_{\varphi_x}$ und setze $P_x := O \cap U_{\varphi_x}$. Zu jedem $x \in \partial O$ sei $\varphi_x \in \mathcal{C}$ (wie in Proposition 3.5.3 ausgehend von $\mathcal{A}$ konstruiert) und setze $P_x := U_{\varphi_x}$. Nun ist

$$\{P_x : x \in \overline{O}\}$$

eine offene Überdeckung von $\overline{O}$ und daher von $\overline{O} \cap \operatorname{supp} \varrho$. Gemäß Satz 1.1.12 gibt es endlich viele $x_1, \dots, x_n \in \overline{O}$ und C^∞-Funktionen $\chi_1, \dots, \chi_n$, sodass $\sum_{j=1}^n \chi_j = 1$ auf $\overline{O} \cap \operatorname{supp} \varrho$ und sodass der kompakte Träger $\operatorname{supp} \chi_j$ in P_{x_j} enthalten ist.

Da beide Seiten in (3.19) linear von ϱ abhängen und da $\sum_{j=1}^n \chi_j \cdot \varrho = \varrho$ sowohl auf O also auch auf ∂O, genügt es, (3.19) für die Differentialformen $\chi_j \cdot \varrho$, $j = 1, \dots, n$, zu beweisen. Damit reicht es, die Aussage des Satzes für Differentialformen ϱ zu beweisen, deren Träger im Definitionsbereich einer einzigen Karte enthalten sind. Dabei können wir auch annehmen, dass diese Karte aus $\mathcal{C}$ (wie in Proposition 3.5.3 ausgehend von $\mathcal{A}$ konstruiert) ist, falls der Träger nicht ganz in O enthalten ist.

Für ein solches $\varrho \in \Omega_{d-1}(M)$ und die entsprechende Karte φ lässt sich $(\varphi^{-1})^* \varrho \in C^\infty(D_\varphi, \mathcal{A}_{d-1}(\mathbb{R}^d))$ gemäß Fakta 3.2.2, 2, als

$$(\varphi^{-1})^* \varrho = \sum_{j=1}^d f_{\{1,\dots,d\}\setminus\{j\}} \wedge e_1^* \wedge \dots \underbrace{e_j^*}_{\text{fehlt}} \dots \wedge e_d^* \tag{3.20}$$

schreiben, wobei die $f_{\{1,\dots,d\}\setminus\{j\}}$ in $C^\infty(D_\varphi, \mathbb{R})$ liegen. Da der Träger von $(\varphi^{-1})^* \varrho$ kompakt und in D_φ enthalten ist, haben die Funktionen $f_{\{1,\dots,d\}\setminus\{j\}}$ dieselbe Eigenschaft.

Setzen wir diese Funktionen außerhalb von D_φ durch Null fort, so erhalten wir Funktion $f_{\{1,\dots,d\}\setminus\{j\}} \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, und mit (3.20) auch eine C^∞-Fortsetzung von $(\varphi^{-1})^* \varrho$ auf ganz $\mathbb{R}^d$, d.h. $(\varphi^{-1})^* \varrho \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}_{d-1}(\mathbb{R}^d))$ mit kompaktem Träger $\subseteq D_\varphi$. Nach (3.15) und Satz 3.2.6, (ii), gilt dann (siehe auch Fakta 3.1.8, 5 und 6)

$$(\varphi^{-1})^* d\varrho(t) = d(\varphi^{-1})^* \varrho(t) = \sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial f_{\{1,\dots,d\}\setminus\{j\}}}{\partial e_i}(t) \wedge e_i^* \right) \wedge e_1^* \wedge \dots \underbrace{e_j^*}_{\text{fehlt}} \dots \wedge e_d^* =$$

[3] Für die rechte Seite schreibt man üblicherweise $\int_{\partial O} \varrho$, was aber ungenau ist, da ϱ eine Differentialform auf M und nicht auf ∂O ist.

$$\sum_{j=1}^{d}(-1)^{j-1}\frac{\partial f_{\{1,\dots,d\}\setminus\{j\}}}{\partial e_j}(t)\wedge\underbrace{e_1^*\wedge\cdots\wedge e_d^*}_{=\Delta}.$$

Ist nun ϱ so, dass $\operatorname{supp}\varrho\subseteq O$, so gilt zunächst offenbar $\int_{\partial O}\iota_{\partial O}^*\,\varrho=0$. Andererseits gilt wegen $\operatorname{supp}(\varphi^{-1})^*\varrho\subseteq D_\varphi=\varphi(U_\varphi\cap O)$ zusammen mit (3.18) und nach dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mit $t=(t_1,\dots,t_d)^T$

$$\int_O d\varrho=\int_{\varphi(U_\varphi\cap O)}(\varphi^{-1})^*d\varrho(t)\,(e_1,\dots,e_d)\,d\lambda_d(t)=\int_{\mathbb{R}^d}d(\varphi^{-1})^*\varrho(t)\,(e_1,\dots,e_d)\,d\lambda_d(t)=$$

$$\sum_{j=1}^{d}(-1)^{j-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f_{\{1,\dots,d\}\setminus\{j\}}}{\partial e_j}(t)\,dt_j}_{\substack{\lim_{\eta\to+\infty}(f_{\{1,\dots,d\}\setminus\{j\}}(t_1,\dots,\eta,\dots,t_d)^T-\\ f_{\{1,\dots,d\}\setminus\{j\}}(t_1,\dots,-\eta,\dots,t_d)^T)\;=\;0}}\quad dt_1\;\dots\underbrace{dt_j}_{\text{fehlt}}\dots\;dt_d=0.$$

Ist dagegen ϱ so, dass $\operatorname{supp}\varrho\not\subseteq O$, so gilt aber $\operatorname{supp}\varrho\subseteq U_\varphi$ für eine Karte $\varphi\in\mathcal{C}$. Dann gilt $\varphi(U_\varphi\cap O)=D_\varphi\cap((-\infty,0)\times\mathbb{R}^{d-1})$ und $\operatorname{supp}(\varphi^{-1})^*\varrho\subseteq D_\varphi$, womit

$$\int_O d\varrho=\int_{\varphi(U_\varphi\cap O)}(\varphi^{-1})^*d\varrho(t)\,(e_1,\dots,e_d)\,d\lambda_d(t)=\int_{(-\infty,0)\times\mathbb{R}^{d-1}}d(\varphi^{-1})^*\varrho(t)\,(e_1,\dots,e_d)\,d\lambda_d(t)=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\int_{-\infty}^{0}\frac{\partial f_{\{2,\dots,d\}}}{\partial e_1}(t)\,dt_1}_{=f_{\{2,\dots,d\}}(0,t_2,\dots,t_d)^T}\;dt_2\;\dots\;dt_d+$$

$$\sum_{j=2}^{d}(-1)^{j-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{0}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f_{\{1,\dots,d\}\setminus\{j\}}}{\partial e_j}(t)\,dt_j}_{=0}\;dt_1\;\dots\underbrace{dt_j}_{\text{fehlt}}\dots\;dt_d=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\{2,\dots,d\}}(0,t_2,\dots,t_d)^T\;dt_2\;\dots\;dt_d.$$

Andererseits gilt für die Karte[4] $\phi:=p_{d-1}\circ\varphi|_{\partial O\cap U_\varphi}$ von ∂O

$$\operatorname{supp}\iota_{\partial O}^*\,\varrho\subseteq\operatorname{supp}\varrho\cap\partial O\subseteq U_\varphi\cap\partial O=U_\phi,$$

und somit wegen (3.18)

$$\int_{\partial O}\iota_{\partial O}^*\,\varrho=\int_{D_\phi}(\phi^{-1})^*\iota_{\partial O}^*\,\varrho(s)\,(\underbrace{e_1,\dots,e_{d-1}}_{\in\mathbb{R}^{d-1}})\,d\lambda_{d-1}(s).$$

Wegen $\varphi\circ\iota_{\partial O}\circ\phi^{-1}=\iota_{d-1}|_{D_\phi}$ folgt aus (3.13)

$$(\phi^{-1})^*\iota_{\partial O}^*\,\varrho=\iota_{d-1}|_{D_\phi}^*(\varphi^{-1})^*\,\varrho=\sum_{j=1}^{d}\underbrace{(\iota_{d-1}|_{D_\phi}^*f_{\{1,\dots,d\}\setminus\{j\}})}_{=f_{\{1,\dots,d\}\setminus\{j\}}\circ\iota_{d-1}|_{D_\phi}}\wedge\;\iota_{d-1}|_{D_\phi}^*\,(e_1^*\wedge\dots\underbrace{e_j^*}_{\text{fehlt}}\cdots\wedge e_d^*),$$

[4] p_{d-1} ist wieder die Projektion auf die hinteren $d-1$ Koordinaten.

wobei $\iota_{d-1} : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}^d$ die Einbettung $t \mapsto (0,t)^T$ ist. Diese Abbildung ist linear und lässt sich durch die Matrix $\binom{0}{I} \in \mathbb{R}^{d\times(d-1)}$ realisieren, wobei $I \in \mathbb{R}^{(d-1)\times(d-1)}$ die Einheitsmatrix ist. Nach Fakta 3.1.8, 10, gilt dann

$$\iota_{d-1}|_{D_\phi}^* (e_1^* \wedge \dots \underbrace{e_j^*}_{\text{fehlt}} \dots \wedge e_d^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}^T e_1^* \wedge \dots \underbrace{e_j^*}_{\text{fehlt}} \dots \wedge e_d^* =$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}_{\{1,\dots,d\}\setminus\{j\}} \cdot \underbrace{\Delta}_{\in \mathcal{A}_{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})} = \delta_{j1} \cdot \Delta.$$

Also erhalten wir zusammen mit $D_\phi = p_{d-1}(D_\varphi \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{d-1})$ und der Tatsache, dass $f_{\{2,\dots,d\}}$ kompakten Träger in D_φ hat,

$$\int_{\partial O} \iota_{\partial O}^* \varrho = \int_{D_\phi} f_{\{2,\dots,d\}} \circ \iota_{d-1}|_{D_\phi}(s) \cdot \Delta(e_1, \dots, e_{d-1})\, d\lambda_{d-1}(s) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\{2,\dots,d\}}(0, t_2, \dots, t_d)^T\, dt_2 \, \dots \, dt_d.$$

❑

3.5.5 Beispiel. Als kleine Anwendung von Satz 3.5.4 wollen wir zeigen, dass es keine C^∞-Abbildung f von der abgeschlossenen Einheitskugel $K_1(0)$ im $\mathbb{R}^{d+1}$ auf ihren Rand S^d geben kann, welche $f|_{S^d} = \mathrm{id}|_{S^d}$ erfüllt. Dabei bedeutet C^∞ auf $K_1(0)$, dass f die Einschränkung einer C^∞-Funktion auf einer gewissen offenen Obermenge M von $K_1(0)$ ist.

Wir nehmen an, dass es ein solches $f : M \to S^d$ gibt. Für jedes $\varrho \in \Omega_d(S^d)$ gilt $d\varrho = 0$, was mit Satz 3.3.5, (v), $d\, f^* \varrho = f^*\, d\, \varrho = 0$ nach sich zieht. Nach Satz 3.5.4 angewandt auf $O = U_1(0)$ mit $\partial O = S^d$ folgt

$$\int_{S^d} \iota_{S^d}^*\, f^* \varrho = 0.$$

Andererseits gilt wegen (3.14)

$$\iota_{S^d}^*\, f^* \varrho = (f \circ \iota_{S^d})^* \varrho = \mathrm{id}|_{S^d}^* \varrho = \varrho.$$

Also wäre $\int_{S^d} \varrho = 0$ für jedes $\varrho \in \Omega_d(S^d)$. Mit Hilfe einer Karte φ auf S^d konstruiert man aber leicht ein $\varrho \in \Omega_d(S^d)$ mit kompaktem, in U_φ enthaltenem Träger mit

$$(\varphi^{-1})^* \varrho = h \cdot \underbrace{\Delta}_{\in \mathcal{A}_d(\mathbb{R}^d)},$$

wobei h eine Funktion der Bauart wie in Lemma 1.1.11 ist. Für dieses $\varrho \in \Omega_d(S^d)$ gilt aber $\int_{S^d} \varrho > 0$.

3.5.6 Korollar. *Es gibt keine stetige Funktion $f : K_1(0)\ (\subseteq \mathbb{R}^{d+1}) \to S^d$ mit $f|_{S^d} = \mathrm{id}|_{S^d}$.*

Beweis. Gäbe es eine solche Funktion $f : K_1(0) \to S^d \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$, so könnten wir nach dem Satz von Stone-Weierstrass die Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_{d+1}$ beliebig gut durch Einschränkungen von Funktionen $g_1, \dots, g_{d+1}$ von Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R})$ approximieren. Die Funktion $g = (g_1, \dots, g_{d+1})^T$ ist dann aus $C^\infty(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R}^{d+1})$ mit

$$||f - g|_{K_1(0)}|| < \epsilon$$

für ein vorgegebenes $\epsilon > 0$.

Andererseits ist f auf dem Kompaktum $K_1(0)$ gleichgradig stetig. Also gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$ mit oBdA. $\delta(\epsilon) \leq \epsilon$ und mit $||f(x) - f(y)|| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $||x - y|| < \delta(\epsilon)$. Insbesondere gilt wegen $f|_{S^d} = \mathrm{id}\,|_{S^d}$

$$||f(x) - x|| \leq ||f(x) - f(\frac{x}{||x||})|| + ||\frac{x}{||x||} - x|| < \epsilon,$$

für alle $x \in K_1(0)$ mit $||\frac{x}{||x||} - x|| = ||x||(\frac{1}{||x||} - 1) = 1 - ||x|| < \delta(\epsilon)$.

Zu $\epsilon \in (0, 1)$ gibt es auch eine C^∞-Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Werten in $[0, 1]$, mit $\operatorname{supp} h \subseteq ((1 - \delta(\epsilon))^2, (1 + \delta(\epsilon))^2)$ sowie mit $h(1) = 1$. Zu jedem $\epsilon \in (0, 1)$ betrachte nun die Funktion

$$\phi(x) := (1 - h(||x||^2))g(x) + h(||x||^2)x$$

definiert für $x \in \mathbb{R}^{d+1}$. Offensichtlich ist ϕ eine $C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$-Funktion, die für $x \in S^d$

$$\phi(x) = (1 - h(||x||^2))g(x) + h(||x||^2)x = x$$

erfüllt. Außerdem gilt

$$||\phi(x) - f(x)|| = ||(1 - h(||x||^2))(g(x) - f(x)) + h(||x||^2)(x - f(x))|| \leq$$
$$(1 - h(||x||^2))||g(x) - f(x)|| + h(||x||^2)||x - f(x)||.$$

Für alle $x \in K_1(0)$ ist dabei immer $||g(x) - f(x)|| < \epsilon$. Ist zusätzlich $1 - ||x|| < \delta(\epsilon)$, so gilt auch $||x - f(x)|| < 2\epsilon$ und damit $||\phi(x) - f(x)|| < \epsilon$. Im Falle $||x|| \leq 1 - \delta(\epsilon)$ gilt dagegen $h(||x||^2) = 0$, womit ebenfalls $||\phi(x) - f(x)|| < \epsilon$.

Für ein festes $0 < \epsilon < 1$ folgt also

$$||\phi(x)|| \geq ||f(x)|| - ||f(x) - \phi(x)|| > 0$$

für alle $x \in K_1(0)$. Da $K_1(0)$ kompakt ist, folgt aus Stetigkeitsgründen, dass $\phi(x) \neq 0$ für eine gewisse offene Obermenge M von $K_1(0)$. Die Funktion

$$x \mapsto \frac{1}{||\phi(x)||}\phi(x)$$

wäre dann C^∞ auf $M \supseteq K_1(0)$, hätte Werte in S^d mit $\phi|_{S^d} = \mathrm{id}\,|_{S^d}$, was aber in Beispiel 3.5.5 ausgeschlossen wurde.

❑

Aus diesem Resultat folgt der *Fixpunktsatz von Brouwer*.

3.5.7 Satz. *Jede stetige Abbildung $\phi : K_1(0) \to K_1(0)$, wobei $K_1(0)$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^{d+1}$ ist, hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Angenommen wir hätten $\phi(x) \neq x$ für alle $x \in K_1(0)$, dann hat für festes x die Gleichung $||\phi(x) + \tau \cdot (x - \phi(x))| = 1$ mit der Unbekannten $\tau \in \mathbb{R}$ immer zwei Lösungen, wobei immer genau eine davon – wir bezeichnen sie mit $\tau(x)$ – positiv ist.

Nun hängt $\tau(x)$ stetig von x ab, und damit auch die Funktion $f(x) = \phi(x) + \tau(x) \cdot (x - \phi(x))$. Also ist $f : K_1(0) \to S^d$ stetig, was aber Korollar 3.5.6 widerspricht.

❑

3.6 Ergänzendes zu orientierbaren Mannigfaltigkeiten

Der Inhalt diese Abschnittes ist nicht Teil der Vorlesung, stellt aber eine interessante Ergänzung dar.

Wir wollen die Orientierung auf einer Mannigfaltigkeit auf eine zweite Art angehen. Dafür sei daran erinnert, dass $\mathcal{A}_d(T_xM)$ eindimensional ist und dass ein $\omega \in \mathcal{A}_d(T_xM)$ eindeutig durch $\omega(X_1, \dots, X_d)$ für jedes feste linear unabhängige Tupel $X_1, \dots, X_d \in T_xM$ eindeutig bestimmt ist, vgl. Fakta 3.1.2, 6. Insbesondere verschwindet $\omega(X_1, \dots, X_d)$ genau dann, wenn $\omega = 0$.

3.6.1 Definition. Sei M eine d-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit. Wir sagen, dass man M mit einer Orientierung versehen kann, wenn es ein $\omega \in \Omega_d(M)$ gibt, sodass $\omega(x) \neq 0$ für alle $x \in M$.

Falls wir M mit einer Orientierung versehen können und falls $\omega(x) \neq 0$ für alle $x \in M$, so nennen wir die Funktion

$$\varepsilon : (x; X_1, \dots, X_d) \mapsto \frac{\omega(x)(X_1, \dots, X_d)}{|\omega(x)(X_1, \dots, X_d)|}, \tag{3.21}$$

wobei $x \in M$ und $X_1, \dots, X_d \in T_xM$ linear unabhängig sind. eine *Orientierung* auf M.

Eine Karte φ heißt bzgl. der Orientierung ε aus (3.21) *positiv orientiert*, falls $\varepsilon\Big(x; \frac{\partial}{\partial\varphi_1}|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial\varphi_d}|_x\Big) > 0$ für alle $x \in U_\varphi$, wobei $\frac{\partial}{\partial\varphi_j}|_x = (\mathrm{t}_x\varphi)^{-1}e_j \in T_xM$ wie in Bemerkung 1.2.7.

3.6.2 Fakta.

1. Für ein festes x ist $\varepsilon(x; \cdot\cdot\cdot\cdot)$ eindeutig durch $\varepsilon(x; X_1, \dots, X_d)$ für ein linear unabhängiges Tupel $X_1, \dots, X_d$ festgelegt.

2. Ist ε eine Orientierung auf M, so auch $-\varepsilon$.

3. Für eine Karte φ auf M mit zusammenhängenden U_φ (bzw. D_φ) ist entweder $\omega(x)\Big(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial\varphi_d}|_x\Big) > 0$ auf ganz U_φ oder $\omega(x)\Big(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial\varphi_d}|_x\Big) < 0$ auf ganz U_φ. Also ist entweder φ oder $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1) \circ \varphi$ positiv orientiert bzgl. ε.

4. Seien $\varepsilon_j(x; X_1, \dots, X_d) = \frac{\omega_j(x)(X_1,\dots,X_d)}{|\omega(x)(X_1,\dots,X_d)|}$, $j = 1, 2$, zwei Orientierungen auf M.

   Zu einem $x \in M$ sei φ eine Karte mit $x \in U_\varphi$ und $U \subseteq U_\varphi$ offen und zusammenhängend und $X_j \in \mathfrak{X}(M)$ wie in Beispiel 2.1.5, d.h. $x \in U$ und auf U stimmt X_j mit den punktweise linear unabhängigen $\frac{\partial}{\partial\varphi_j}$ überein.

   Nach Fakta 3.3.2, 5, ist nun $y \mapsto \omega_j(y; X_1(y), \dots, X_d(y))$, $j = 1, 2$, stetig. Auf U verschwinden diese Funktionen nicht, haben also auf U immer positives bzw. negatives Vorzeichen. Insbesondere gilt entweder $\varepsilon_1(y; X_1(y), \dots, X_d(y)) = \varepsilon_2(y; X_1(y), \dots, X_d(y))$, $y \in U$, oder $\varepsilon_1(y; X_1(y), \dots, X_d(y)) = -\varepsilon_2(y; X_1(y), \dots, X_d(y))$, $y \in U$.

   Wegen 1 stimmen ε_1 und ε_2 entweder auf ganz U überein oder haben auf ganz U entgegengesetztes Vorzeichen. Somit sind die Mengen, wo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ bzw. wo $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, beide offen.

   Ist M zusammenhängend, so gibt es also immer genau zwei Orientierungen.

3.6.3 Lemma. *Kann man M mit einer Orientierung versehen, so ist die Menge aller positiv orientierten Karten $\mathcal{A}$ bezüglich einer Orientierung ε ein orientierter Atlas, der jede Karte enthält, die gleich orientiert ist wie jede Karte aus $\mathcal{A}$.*

Beweis. Sei $\varepsilon(x; X_1, \ldots, X_d) = \frac{\omega(x)(X_1,\ldots,X_d)}{|\omega(x)(X_1,\ldots,X_d)|}$. Zunächst gilt wegen

$$(\varphi^{-1})^* \omega\, (\varphi(x))\, (e_1, \ldots, e_d) = ((t_x\varphi)^{-1})^T \omega(x)\, (e_1, \ldots, e_d) = \omega(x)((t_x\varphi)^{-1} e_1, \ldots, (t_x\varphi)^{-1} e_d)$$

für eine Karte φ, dass

$$(\varphi^{-1})^* \omega = (\varphi^{-1})^* \omega(.)\, (e_1, \ldots, e_d) \cdot \Delta \in C^\infty(D_\varphi, \mathcal{A}_d(\mathbb{R}^d))$$

nirgends auf D_φ verschwindet. Aus obiger Gleichung lesen wir auch ab, dass φ genau dann in $\mathcal{A}$ liegt, wenn $(\varphi^{-1})^* \omega$ auf ganz D_φ ein positives Vielfaches von Δ ist.

Ist nun D_φ zusammenhängend, so muss die stetige Funktion $(\varphi^{-1})^* \omega(.)\, (e_1, \ldots, e_d)$ darauf dasselbe Vorzeichen haben. Tauscht man φ nötigenfalls gegen $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1) \circ \varphi$ aus, so folgt, dass jedes $x \in M$ im Definitionsbereich einer positiv orientierten Karte liegt.

Also ist $\mathcal{A}$ ein Atlas, wobei für zwei Karten $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ mit $U_\varphi \cap U_\psi \neq \emptyset$ wegen (3.11)

$$(\varphi^{-1})^* \omega = (\psi \circ \varphi^{-1})^* ((\psi^{-1})^* \omega)$$

und daher ($x \in U_\varphi \cap U_\psi$)

$$(\varphi^{-1})^* \omega(\varphi(x))(e_1, \ldots, e_d) = (\psi^{-1})^* \omega(\psi(x))(d(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) e_1, \ldots, d(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) e_d) =$$

$$(\psi^{-1})^* \omega(\psi(x))(e_1, \ldots, e_d) \cdot \Delta(d(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) e_1, \ldots, d(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) e_d) =$$

$$(\psi^{-1})^* \omega(\psi(x))(e_1, \ldots, e_d) \cdot \det d(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)).$$

Also muss $\det d(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) > 0$. Aus dieser Gleichung folgt auch sofort, dass wenn $\varphi \in \mathcal{A}$ und ψ eine mit $\mathcal{A}$ gleich orientierte Karte ist, dann auch $\psi \in \mathcal{A}$.

❑

3.6.4 Satz. *Eine d-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit M kann genau dann mit einer Orientierung versehen werden, wenn M orientierbar ist. Genauer gibt es zu jedem orientierten Atlas eine Orientierung bezüglicher derer dieser Atlas positiv orientiert ist. Diese Orientierung ist nach Lemma 3.6.3 eindeutig.*

Beweis. Die Hinrichtung folgt aus Lemma 3.6.3.

Für die Rückrichtung sei $\mathcal{A}$ ein orientierter Atlas. Man wähle zu jedem $\varphi \in \mathcal{A}$ und jedem $x \in U_\varphi$ ein offenes $U =: U_{\varphi,x}$ mit $x \in U_{\varphi,x} \subseteq U_\varphi$ wie in Fakta 3.3.2, 4. Wir wissen dann, dass

$$\Omega_d(M)|_{U_{\varphi,x}} = \Omega_d(U_\varphi)|_{U_{\varphi,x}} \cong C^\infty(D_\varphi, \mathcal{A}_d(\mathbb{R}^d))|_{\varphi(U_{\varphi,x})},$$

wobei $\Omega_d(U_\varphi)$ vermöge $(\varphi^{-1})^*$ isomorph zu $C^\infty(D_\varphi, \mathcal{A}_d(\mathbb{R}^d))$ ist. Insbesondere gibt es ein $\omega_{\varphi,x} \in \Omega_d(M)$, sodass $(\varphi^{-1})^* \omega_{\varphi,x} = \Delta$.

Wegen Satz 1.1.12 gibt es zu der Überdeckung $U_{\varphi,x}$, $\varphi \in \mathcal{A}, x \in U_\varphi$, von M eine abzählbare Zerlegung der Eins; also höchstens abzählbar viele $[0, +\infty)$-wertige C^∞-Funktionen χ_j, $j \in \{1, \ldots, l\}$ mit einem $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, sodass $\mathrm{supp}\, \chi_j$ kompakt und in einem $U_{\varphi(j),x(j)}$ enthalten ist, und sodass

$$\sum \chi_j = 1,$$

wobei die Summation lokal endlich ist. Definieren wir nun

$$\omega := \sum \chi_j \cdot \omega_{\varphi(j),x(j)},$$

so ist ω auf einer hinreichend kleinen offenen Umgebung V_x um jeden Punkt $x \in M$ eine endliche Summe von Produkten von $C^\infty(M, \mathbb{R})$-Funktionen und Formen auf $\Omega_d(M)$. Nach Fakta 3.3.2, 2, ist diese endliche Summe zumindest in $\Omega_d(V_x)$. Da das für alle x der Fall ist, folgt $\omega \in M$, vgl. Fakta 3.3.2, 3.

Für ein $x \in M$ und jedes j mit $\chi_j(x) > 0$ gilt $x \in \operatorname{supp}\chi_j \subseteq U_{\varphi(j),x(j)}$. Sind $\frac{\partial}{\partial\varphi(j)_1}|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial\varphi(j)_d}|_x \in T_xM$ wie in Bemerkung 1.2.7, so gilt

$$\omega_{\varphi(j),x(j)}(x)(\frac{\partial}{\partial\varphi(j)_1}|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial\varphi(j)_d}|_x) = (\varphi(j)^{-1})^*\omega_{\varphi(j),x(j)}(\varphi(j)(x))(e_1, \ldots, e_d) = 1.$$

Für jeden weiteren Index i mit $\chi_i(x) > 0$ gilt wegen (1.3) sowie Fakta 3.1.8, 9

$$\omega_{\varphi(i),x(i)}(x)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi(j)_1}|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial\varphi(j)_d}|_x\right) =$$

$$(\varphi(i)^{-1})^*\omega_{\varphi(i),x(i)}(\varphi(i)(x))\left(\mathrm{t}_x\varphi(i)\frac{\partial}{\partial\varphi(j)_1}|_x, \ldots, \mathrm{t}_x\varphi(i)\frac{\partial}{\partial\varphi(j)_d}|_x\right) =$$

$$\underbrace{(\varphi(i)^{-1})^*\omega_{\varphi(i),x(i)}(\varphi(i)(x))}_{=\Delta}\ (d(\varphi(i)\circ\varphi(j)^{-1})(\varphi(j)(x))e_1, \ldots, d(\varphi(i)\circ\varphi(j)^{-1})(\varphi(j)(x))e_d) =$$

$$\det d(\varphi(i)\circ\varphi(j)^{-1})(\varphi(j)(x)) > 0.$$

Also ist $\omega\Big(\frac{\partial}{\partial\varphi(j)_1}|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial\varphi(j)_d}|_x\Big) = (\varphi(i)^{-1})^*\omega_{\varphi(i),x(i)}(\varphi(i)(x))$ als endliche Summe positiver Summanden positiv und damit nicht Null.

❑

3.6.5 Lemma. *Sei M eine orientierbare d-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit, sei N eine Untermannigfaltigkeit von M mit Dimension* $\dim M - 1$ *und sei $\Psi : N \to \mathcal{P}(TM)$ eine Funktion derart, dass $\Psi(x)$ immer ein eindimensionaler zu $d\iota_x T_x N$ komplimentärer Unterraum von T_xM ist und dass diese Abbildung C^∞ ist, was bedeutet, dass für jedes $x \in N$ auf einer gewissen Umgebung $U \subseteq N$ von x in U*

$$\Psi(x) = \operatorname{span}\{Y_U(x)\}$$

für eine C^∞-Funktion $Y_U : U \to TM$ mit $\pi \circ Y_U = \mathrm{id}_U$, vgl. Definition 2.5.3.

Dann ist N genau dann orientierbar, wenn es eine C^∞-Funktion $Y : N \to TM$ mit $\pi \circ Y = \mathrm{id}_N$ gibt, sodass $\Psi(x) = \operatorname{span}\{Y(x)\}$ für alle $x \in N$.

Beweis. Sei $\varepsilon = \frac{\omega}{|\omega|}$ eine Orientierung auf M.

Gibt es eine Funktion $Y : M \to TM$ mit den erwähnten Eigenschaften, so liegt $\varpi(x) : (Z_1, \ldots, Z_{d-1}) \mapsto \omega(x)(Y(x), T_x\iota Z_1, \ldots, T_x\iota Z_{d-1})$ in $\mathcal{A}_{d-1}(T_xN)$. Außerdem zeigt man unschwer ähnlich wie in (3.13), dass

$$x \mapsto \omega(x)(Y(x), T_x\iota Z_1(x), \ldots, T_x\iota Z_{d-1}(x)),\ \ x \in N,$$

für alle $Z_1, \ldots, Z_{d-1} \in \mathfrak{X}(N)$ eine C^∞-Funktion ist. Es folgt $\varpi \in \Omega_{d-1}(N)$, wobei $\varpi(x) \neq 0$ für alle $x \in N$.

Sei umgekehrt $\varpi \in \Omega_{d-1}(N)$ nirgends verschwindend. Wir definieren $0 \neq Y(x) \in \Psi(x)$ derart, dass

$$\omega(x)(Y(x), T_x\iota Z_1, \ldots, T_x\iota Z_{d-1}) = \varpi(x)(Z_1, \ldots, Z_{d-1}),$$

für alle $Z_1, \dots, Z_{d-1} \in T_x N$. Das ist möglich, da links für jedes $0 \neq Y(x) \in \Psi(x)$ ein nichtverschwindendes Element von $\mathcal{A}_{d-1}(T_x N)$ steht, und da $\mathcal{A}_{d-1}(T_x N)$ ja nur eindimensional ist.

Ist $x \in N$ und $U \ni x$ so klein, dass es eine Funktion Y_U gibt, und sodass für gewisse $Z_1, \dots, Z_{d-1} \in \mathfrak{X}(N)$ diese auf U punktweise linear unabhängig sind, so muss

$$Y(y) = \frac{\varpi(y)(Z_1(y), \dots, Z_{d-1}(y))}{\omega(y)(Y_U(y), T_y\iota\, Z_1(y), \dots, T_y\iota\, Z_{d-1}(y))} \cdot Y_U(y),$$

womit $Y(y)$ auf U und in folge auf ganz N eine C^∞-Funktion ist.

❑

3.6.6 Beispiel. Sei M eine $(d-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$. Ist φ eine Karte auf M, so ist

$$n_\varphi(x) := \frac{1}{\| \times d(\iota_M \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\|} \cdot \times d(\iota_M \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$$

ein auf den klassischen Tangentialraum $d(\iota_M \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))(\mathbb{R}^{d-1})$ von M in x normal stehender Vektor in $\mathbb{R}^d$. Wegen (vgl. (1.4))

$$d(\iota_M \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))(\mathbb{R}^{d-1}) = \mathrm{t}_x\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}\, T_x\iota_M\, T_x M$$

ist $x \mapsto \mathrm{t}_x\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}{}^{-1} n_\varphi(x)$ eine C^∞-Funktion auf U_φ mit Werten in $T_x\mathbb{R}^d$, sodass

$$\operatorname{span}\{\mathrm{t}_x\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}{}^{-1} n_\varphi(x)\} = \mathrm{t}_x\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}{}^{-1} d(\iota_M \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))(\mathbb{R}^{d-1})^\perp =: \Psi(x).$$

Aus Lemma 3.6.5 erkennen wir, dass M genau dann orientierbar ist, wenn es eine auf ganz M definierte C^∞-Funktion $\nu : M \to TM$ mit $\nu(x) \in T_x M$ gibt, sodass $0 \neq \mathrm{t}_x\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}\, \nu(x) \perp \mathrm{t}_x\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}\, T_x\iota_M T_x M$. Da Normieren ein C^∞-Vorgang ist, sehen wir, dass das äquivalent dazu ist, dass es eine C^∞-Normalenfunktion auf M gibt.

Literaturverzeichnis

[C] L.Conlon: *Differentiable Manifolds*, 2.Auflage, Birkhäuser Verlag 2001.

[D] Ph.Dörsek: *Differentialformen mit Anwendungen*, Skriptum zum Vorlesung von Prof. Schnabl 2005, fsmat.htu.tuwien.ac.at/ pdoersek/getfile.php/diffformen.pdf.

[J] K.Jänich: *Vektor Analysis*, Springer Verlag 2001.

[K] A.Kriegl: *Differentialgeometrie*, Skriptum, www.mat.univie.ac.at/ kriegl/Skripten/diffgeom.pdf.

[M] P.Michor: *Foundations of Differential Geometry*, .

[Wal] J.Wallner: *Differentialgeometrie*, Skriptum, www.geometrie.tugraz.at/wallner/diffg.pdf.

[War] F.Warner: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer Verlag 1983.

Index