Topologie

Skriptum SS 2017

15. Januar 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbereitung

Dieses Skriptum baut auf dem Kapitel Topologische Grundlagen aus [**ana**] auf. Das Auswahlaxiom wird in einigen Beweisen benutzt, ohne explizit darauf hinzuweisen. Falls nicht anders angemerkt, sind Mengen grundsätzlich als nichtleer anzunehmen.
Im Folgenden werden $\uplus$ und $\biguplus$ als Symbole für die Vereinigung disjunkter Mengen verwendet. Weiters definiere für zwei Mengensysteme $\mathcal{B}, \mathcal{C}$

$$\mathcal{B} \vee \mathcal{C} := \{B \cap C : B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}.$$

Übungsaufgaben (Wiederholung)

1.1 Sei X eine unendliche Menge und sei $\mathcal{T}$ die Menge aller Komplemente endlicher Mengen, angereichert um die leere Menge (kofinite Topologie).

Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist. Zeigen Sie weiters, dass jede Umgebung eines Punktes von X schon offen ist. Ist $(X, \mathcal{T})$ kompakt, ist es Hausdorffsch? Sind einpunktige Mengen offen?

1.2 Sei M eine mit $\leq$ total geordnete Menge. Die Ordnungstopologie $\mathcal{T}_{\text{ord}}(M)$ auf M ist die von der Subbasis $\{(a, +\infty) : a \in M\} \cup \{(-\infty, a) : a \in M\}$ auf M erzeugte Topologie.

Unter welcher Bedingung ist $\{(a, b) : a < b\}$ eine Basis von $\mathcal{T}_{\text{ord}}$?

Zeigen Sie, dass die Topologie, welche von $\{(a, +\infty) : a \in M\} \cup \{(-\infty, a] : a \in M\}$ erzeugt wird, feiner als $\mathcal{T}_{\text{ord}}$ ist!

1.3 Geben Sie eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ an, sodass $\mathcal{T}_{\text{ord}}(M) \neq \mathcal{T}_{\text{ord}}(\mathbb{R})|_M$.

1.4 Sei X eine Menge und bezeichne $\mathfrak{T}(X)$ die Menge aller Topologien auf X.

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{T}(X)$ ein vollständiger Verband ist, d.h., dass $\mathfrak{T}(X)$ eine Halbordnung (bzgl. $\subseteq$) ist und jede Teilmenge von $\mathfrak{T}(X)$ eine kleinste obere Schranke (Supremum) und ein größte untere Schranke (Infimum) besitzt.

Was ist das Supremum bzw. Infimum einer Menge von Topologien und was ist die kleinste bzw. größte Topologie in diesem Verband?

1.5 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $h : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ heißt Kuratowski-Mengenfunktion, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

(a) $h(\emptyset) = \emptyset$.
(b) $A \subseteq h(A)$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$.
(c) $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$.
(d) $h \circ h = h$.

Zeigen Sie: Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, so ist h, definiert durch $h(A) := \overline{A}$ für $A \subseteq X$, eine Kuratowski-Mengenfunktion.

Zeigen Sie auch: Ist h eine Kuratowski-Mengenfunktion auf einer Menge X, so gibt es eine eindeutige Topologie, sodass $h(A) := \overline{A}$ für alle $A \subseteq X$.

1.6 Sei R ein kommutativer Ring und bezeichne $S := \operatorname{Spec}(R)$ die Menge aller echten Primideale. Dabei heißt ein Ideal I von R prim, wenn aus $xy \in I$ immer $x \in I$ oder $y \in I$ folgt. Sei $h : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ die Abbildung

$$h(B) := \left\{ P \in S : P \supseteq \bigcap_{I \in B} I \right\}.$$

Zeigen Sie, dass h eine Kuratowskische Mengenfunktion gemäß Aufgabe 1.5 ist. Die erzeugte Topologie $\mathcal{Z}$ heißt Zariski-Topologie.

Hinweis: Die Tatsache, dass die P Primideale sind, braucht man für die Eigenschaft $h(A \cup B) \subseteq h(A) \cup h(B)$ oder äquivalent für $P \notin h(A) \cup h(B) \Rightarrow P \notin h(A \cup B)$.

1.7 Mit der Notation aus Aufgabe 1.6 sei $M \subseteq \operatorname{Spec}(R)$. Zeigen Sie, dass für $A \subseteq M$ der Abschluss von A bzgl. $\mathcal{Z}|_M$ durch

$$\left\{ P \in M : P \supseteq \bigcap_{I \in A} I \right\}$$

gegeben ist.

Sei nun R ein nirgends identisch verschwindender Unterring von dem Ring $C(X, \mathbb{R})$ aller reellwertigen Funktion auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : (X, \mathcal{T}) \to (\operatorname{Spec}(R), \mathcal{Z})$; $x \mapsto \ker m_x$, wobei $m_x(f) := f(x)$, tatsächlich nach $\operatorname{Spec}(R)$ hinein abbildet und stetig ist.

Hinweis: Stetigkeit bedeutet auch $\varphi(\overline{C}) \subseteq \overline{\varphi(C)}$.

1.8 Sei $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge und ∞ ein nicht in I enthaltenes Element.

Versehen Sie $I \uplus \{\infty\}$ derart mit einer Topologie, sodass für jeden topologischen Raum X und jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ in X mit I als Indexmenge und jedes $x \in X$ folgende beiden Aussagen äquivalent sind:

- $\lim_{i \in I} x_i = x$.
- $f : I \uplus \{\infty\} \to X$ ist stetig, wobei $f(i) := x_i$ und $f(\infty) := x$.

1.9 Sei $[-\infty, +\infty)$ versehen mit $\mathcal{T} := \{[-\infty, a) : a \in [-\infty, +\infty]\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie ist, welche nicht Hausdorffsch ist und bestimmen Sie $\mathcal{U}(x)$ für $x \in [-\infty, +\infty)$!

Zeigen Sie, dass für eine gerichtete Menge $(I, \preceq)$ und ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ aus $[-\infty, +\infty)$, $\lim_{i \in I} x_i = x$ bzgl. $\mathcal{T}$ genau dann, wenn $x \in [\limsup_{i \in I} x_i, +\infty)$, wobei man allgemein für ein Netz aus $[-\infty, +\infty)$ definiert

$$\limsup_{i \in I} x_i := \inf_{k \in I} \sup_{I \ni i \succeq k} x_i \quad (\in [-\infty, +\infty]).$$

Zeigen Sie, dass eine Teilmenge von $[-\infty, +\infty)$ genau dann kompakt ist, wenn sie nach oben beschränkt ist und ihr Supremum enthält!

Gibt es in $[-\infty, +\infty)$ kompakte, nicht abgeschlossene Teilmengen?

1.10 Seien X eine nichtleere Menge und $d_i, i \in I$, eine Familie von Pseudometriken.

Zeigen Sie, dass für die initiale Topologie $\mathcal{T}$ auf X bzgl. der Abbildungen $\mathrm{id} : X \to (X, \mathcal{T}(d_i)), i \in I$ gilt:

$$O \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in O \exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall i_1, \ldots, i_n \in I : x \in U_\varepsilon^{d_{i_1}}(x) \cap \cdots \cap U_\varepsilon^{d_{i_n}}(x) \subseteq O.$$

Hier ist $U_\varepsilon^{d_i}(x)$ die offene Kugel um x mit dem Radius ε bzgl. der Pseudometrik d_i.

1.11 Zeigen Sie, dass $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}, (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} a_k$ stetig und injektiv ist, wobei $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie versehen sei. Zeigen Sie auch, dass $f(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}([0,1] \setminus U_n)$ übereinstimmt, wobei $U_1 := (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ und $(n \geq 2)$

$$U_n := U_{n-1} \cup \bigcup_{j=1}^{\frac{3^n-1}{2}} \left(\frac{2j-1}{3^n}, \frac{2j}{3^n} \right).$$

Somit ist $f(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ die Kantorsche Menge C und $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$ ist ein Homöomorphismus. Warum ist f ein Homöomorphismus?

1.12 Konstruieren Sie eine surjektive, stetige Abbildung von der kantorschen Menge $C \subseteq \mathbb{R}$ auf das Intervall $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

Hinweis: Die Abbildung ist ähnlich aufgebaut wie die in Aufgabe 1.11.

1.13 Geben Sie einen Homöomorphismus an, der die kantorschen Menge $C \subseteq \mathbb{R}$ auf $C \times C$ abbildet, wobei die rechte Seite mit der Produkttopologie versehen ist.

Bauen Sie mit Hilfe dieses Homöomorphismus und der Abbildung aus der Aufgabe 1.13 eine surjektive und stetige Abbildung von $[0,1]\times[0,1]$ (versehen mit der Produkttopologie) auf $[0,1]$. Kann eine derartige Abbildung injektiv sein?

1.14 Zeigen Sie: $[0,1]/_{\mathrm{R}}$ ist homöomorph zu $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, wobei $\mathrm{R} := \{(t,t) : t \in [0,1]\} \uplus \{(0,1),(1,0)\}$ eine Äquivalenzrelation auf $[0,1]$ ist und $[0,1]$ mit der euklidischen Topologie versehen sei.

Zeigen Sie weiters: $[0,1]/_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}$ ist homöomorph zu $[0,1]$, wobei $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ hier für jene Äquivalenzrelation auf $[0,1]$ stehe, für welche $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ und $\{t\}, t \in [0,1] \setminus [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ genau die Äquivalenzklassen sind.

1.15 Zeigen Sie, dass $K^d(0)/_{S^{d-1}}$ homöomorph zu S^d ist. Dabei seien $K^d(0) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq 1\}$, $S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}$ und $S^d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\|_2 = 1\}$. S^{d-1} stehe hier außerdem für jene Äquivalenzrelation auf $K^d(0)$, für welche S^{d-1} und $\{t\}, t \in K^d(0)\setminus S^{d-1}$ genau die Äquivalenzklassen sind.

1.16 Seien (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}(d)|_Y = \mathcal{T}(d|_{Y\times Y})$.

1.17 Seien (X_n, d_n) für $n \in \mathbb{N}$ metrische Räume. Zeigen Sie, dass für $X := \prod_{n=1}^{\infty} X_n$

$$d : X \times X \to \mathbb{R}; ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1 + d_n(x_n,y_n)}$$

eine Metrik auf X induziert, für welche $\mathcal{T}(d) = \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}(d_n)$ gilt.

1.18 Sei $X = \mathbb{N}$ und sei $\mathcal{T}$ die Menge aller Komplemente endlicher Teilmengen von X angereichert um die leere Menge (Kofinite Topologie).

Sei $A := \{1,2\}$ und $f : A \to [-1,1]$ mit $f(1) = -1, f(2) = 1$. Zeigen Sie, dass A abgeschlossen, f darauf stetig und derart ist, dass es keine stetige Fortsetzung von f zu einer Funktion auf X nach $[-1,1]$ gibt.

Hinweis: Gäbe es eine Fortsetzung, so schreibe man $[-1,1]$ geeignet als Vereinigung dreier unterschiedlicher Mengen und betrachte deren Urbilder! Können alle 3 dieser Urbilder abgeschlossen sein?

2 Filter

Erinnerung 2.1. Ein Filter auf einer Menge X ist ein Mengensystem $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$,
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$ und
- für $A \in \mathcal{F}$ und $A \subseteq B \in \mathcal{P}(X)$ gilt $B \in \mathcal{F}$.

Für zwei Filter $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ auf X sagt man $\mathcal{F}$ ist gröber als $\mathcal{G}$ respektive $\mathcal{G}$ ist feiner als $\mathcal{F}$, wenn $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ zutrifft.
Eine Filterbasis eines Filters $\mathcal{F}$ auf X ist ein Mengensystem $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, sodass es zu jedem $F \in \mathcal{F}$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq F$ gibt.
Ein Mengensystem $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist genau dann Filterbasis eines Filters $\mathcal{F}$ auf X wenn:

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$,
- $\emptyset \notin \mathcal{B}$ und
- zu $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ gibt es ein $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Dieser Filter $\mathcal{F}$ ist eindeutig definiert durch $\{F \in \mathcal{P}(X) | \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\}$ und sei mit $[\mathcal{B}]$ bezeichnet. //

Lemma 2.2. *Seien $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf X, dann ist $f(\mathcal{B})$ eine Filterbasis auf Y und es gilt*

$$[f(\mathcal{B})] = [f([\mathcal{B}])] = \{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in [\mathcal{B}]\}.$$

Beweis. $f(\mathcal{B})$ ist nicht leer, da $\mathcal{B}$ nicht leer ist und $\emptyset \notin \mathcal{B} \Rightarrow \emptyset \notin f(\mathcal{B})$. Für $f(B_1), f(B_2) \in f(\mathcal{B})$ existiert ein $\mathcal{B} \ni B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, welches $f(\mathcal{B}) \ni f(B_3) \subseteq f(B_1 \cap B_2) \subseteq f(B_1) \cap f(B_2)$ erfüllt. Damit ist $f(\mathcal{B})$ eine Filterbasis. $[f(\mathcal{B})] \subseteq [f([\mathcal{B}])]$ folgt unmittelbar aus der Monotonie von $[.]$. $[f([\mathcal{B}])] \subseteq \{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in [\mathcal{B}]\}$ gilt wegen:

$$\begin{aligned} E \in [f([\mathcal{B}])] &\Leftrightarrow \exists C \in f([\mathcal{B}]) : C \subseteq E \\ &\Rightarrow \exists D \in [\mathcal{B}] : C = f(D) \\ &\Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq D \\ &\Rightarrow f(B) \subseteq E \\ &\Rightarrow B \subseteq f^{-1}(E) \\ &\Rightarrow f^{-1}(E) \in [\mathcal{B}] \end{aligned}$$

$\{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in [\mathcal{B}]\} \subseteq [f(\mathcal{B})]$ folgt, weil für $E \subseteq Y$ mit $f^{-1}(E) \in [\mathcal{B}]$ ein $B \in \mathcal{B}$ existiert, welches $B \subseteq f^{-1}(E)$ erfüllt. Damit ist $E \supseteq f(B) \in f(\mathcal{B})$, also $E \in [f(\mathcal{B})]$. ■

Lemma 2.3. *Sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf Y. $f^{-1}(\mathcal{B})$ ist genau dann eine Filterbasis auf X, wenn $\emptyset \notin f^{-1}(\mathcal{B})$.*

Beweis. Folgt sofort aus der Operationstreue des Urbildes. ■

Erinnerung 2.4. Ein Mengensystem $\mathcal{C}$ auf einer Menge X erfüllt die endliche Durchschnittseigenschaft, wenn für $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ zu $n \in \mathbb{N}$ folgt, dass $C_1 \cap \cdots \cap C_n \neq \emptyset$. //

Lemma 2.5. *Seien X eine Menge und $\emptyset \neq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Es gibt genau dann einen Filter $\mathcal{F}$ auf X mit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$, wenn $\mathcal{C}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat. Dies ist äquivalent dazu, dass $\mathcal{B} := \{C_1 \cap \cdots \cap C_n : n \in \mathbb{N}, C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}\}$ eine Filterbasis ist. In diesem Falle ist $[\mathcal{B}]$ der gröbste Filter, welcher $\mathcal{C}$ enthält.*

Beweis. Aufgabe 2.2 ■

Korollar 2.6. *Seien $\mathcal{B}_i, i \in I$ Filterbasen auf der Menge X. Es existiert genau dann ein Filter $\mathcal{F}$ auf X mit $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{B}_i, i \in I$, wenn*

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall i_1, \ldots, i_n \in I \forall B_{i_k} \in \mathcal{B}_{i_k}, k = 1, \ldots, n : B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_n} \neq \emptyset,$$

also wenn $\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat. Dies ist gleichbedeutend dazu, dass $\mathcal{B} := \{B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_n} : n \in \mathbb{N}, i_1, \ldots, i_n \in I, B_{i_k} \in \mathcal{B}_{i_k}$ für $k = 1, \ldots, n\}$ eine Filterbasis ist. In diesem Falle ist $[\mathcal{B}]$ der gröbste Filter, welcher alle $\mathcal{B}_i$ enthält.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Lemma 2.5. ■

Definition 2.7. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Gibt es keinen echt feineren Filter, so nennt man $\mathcal{F}$ einen **Ultrafilter** auf X.

Satz 2.8. *Jeder Filter $\mathcal{F}$ auf X kann zu einem Ultrafilter verfeinert werden.*

Beweis. Man betrachte die Menge $\mathfrak{M} := \{\mathcal{G} : \mathcal{G}$ ist Filter auf X mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}$. Diese Menge enthält $\mathcal{F}$, ist also nicht leer, und ist bezüglich $\subseteq$ halbgeordnet. Für eine Kette auf $\mathfrak{M}$, also eine bezüglich $\subseteq$ totalgeordnete Teilmenge von $\mathfrak{M}$, überzeugt man sich leicht, dass die Vereinigung der Elementen der Kette wieder ein Filter ist und infolge in $\mathfrak{M}$ liegt. Nach dem Lemma von Zorn hat $\mathfrak{M}$ dann ein maximales Element. ■

Lemma 2.9. *Ist $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf X derart, dass $[\mathcal{B}]$ ein Ultrafilter ist, dann ist $[f(\mathcal{B})]$ ein Ultrafilter auf Y.*

Beweis. Sei $\mathcal{G} \supseteq [f(\mathcal{B})]$ ein Filter auf Y. Für $G \in \mathcal{G}$ gilt $f(B) \cap G \neq \emptyset$ und weiter $B \cap f^{-1}(G) \neq \emptyset$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Damit ist $\{B \cap f^{-1}(G) : B \in \mathcal{B}\}$ eine Filterbasis auf X, wobei klarerweise $[\{B \cap f^{-1}(G) : B \in \mathcal{B}\}] \supseteq [\mathcal{B}]$. Da $[\mathcal{B}]$ ein Ultrafilter ist, muss Gleichheit gelten. Insbesondere gilt für alle $B \in \mathcal{B} : B \cap f^{-1}(G) \in [\mathcal{B}]$, womit es ein $B' \in \mathcal{B}$ gibt, sodass $B' \subseteq B \cap f^{-1}(G)$. Ergo folgt $f(B') \subseteq G$ und $G \in [f(\mathcal{B})]$. ■

Beispiel 2.10. Für die Menge M und $m \in M$ ist $\mathcal{F} := \{N \in \mathcal{P}(M) : m \in N\}$ ein Ultrafilter. Die Filtereigenschaften sind klarerweise erfüllt. Wäre $\mathcal{G} \supsetneq \mathcal{F}$, so gäbe es ein $G \in \mathcal{G}$ mit $G \notin \mathcal{F}$. Das ist äquivalent zu $m \notin G$, womit aber $G \cap \{m\} = \emptyset$ erfüllt wäre. Wegen $\{m\} \in \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$ wäre $\mathcal{G}$ kein Filter.$\lightning$ //

Beispiel 2.11. Auf $\mathbb{N}$ ist $\mathcal{B} := \{\{n, n+1, \ldots\} : n \in \mathbb{N}\}$ eine Filterbasis. Somit kann $[\mathcal{B}]$ nach Satz 2.8 zu einem Ultrafilter verfeinert werden. Dieser ist aber nicht von der Form des Ultrafilters aus Beispiel 2.10, da für alle $m \in \mathbb{N}$ folgt, dass $\{m\} \cap \{m+1, m+2, \ldots\} = \emptyset$, wobei $\{m+1, m+2, \ldots\} \in \mathcal{B}$. //

Definition 2.12. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Seien $\mathcal{F}$ ein Filter, $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf X und $x \in X$. Man definiert:

$$\mathcal{F} \to x :\Leftrightarrow \mathcal{F} \supseteq \mathcal{U}(x)$$
$$\mathcal{B} \to x :\Leftrightarrow [\mathcal{B}] \to x.$$

Man sagt, $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ respektive $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ **konvergiert gegen** $\boldsymbol{x}$.

Bemerkung 2.13. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ Filter auf X und $\mathcal{B}$ eine Filterbasis. Dann gelten folgende Aussagen:

- $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}_2 \;\Rightarrow\; (\mathcal{F}_2 \to x \;\Rightarrow\; \mathcal{F}_1 \to x)$,
- $\mathcal{F} \to x \;\Leftrightarrow\; \forall U \in \mathcal{U}(x) \exists F \in \mathcal{F} : F \subseteq U$,
- $\mathcal{B} \to x \;\Leftrightarrow\; \forall U \in \mathcal{U}(x) \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq U$.

//

Bemerkung 2.14. Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $x \in X$. Dann gelten folgenden Aussagen:

- f ist stetig in $x \;\Leftrightarrow\; \forall U \in \mathcal{U}(f(x)) \exists V \in \mathcal{U}(x) : f(V) \subseteq U \;\Leftrightarrow\; f(\mathcal{U}(x)) \to f(x)$.
- Wenn $f(\mathcal{U}(x)) \to f(x)$, dann gilt für eine beliebige Filterbasis $\mathcal{B}$ auf X mit $\mathcal{B} \to x$, dass $[\mathcal{B}] \supseteq \mathcal{U}(x)$, womit auch $[f([\mathcal{B}])] \supseteq [f(\mathcal{U}(x))] \supseteq \mathcal{U}(f(x))$. Also folgt mit Lemma 2.2, dass $f(\mathcal{B}) \to f(x)$.
- f ist also genau dann stetig in x, wenn für alle Filterbasen $\mathcal{B}$ auf X gilt:
$$\mathcal{B} \to x \;\Rightarrow\; f(\mathcal{B}) \to f(x).$$

//

Bemerkung 2.15. Sei $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge. $\mathcal{B}_{(I,\preceq)} := \{\{j \in I : j \succeq i\} : i \in I\}$ bildet eine Filterbasis auf I. Für jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist nach Lemma 2.2 somit $x\left(\mathcal{B}_{(I,\preceq)}\right)$ eine Filterbasis auf X. //

Definition 2.16. Unter Berücksichtigung der Notation aus Bemerkung 2.15 nennt man $\left[x\left(\mathcal{B}_{(I,\preceq)}\right)\right]$ **Abschnittsfilter** von $(x_i)_{i \in I}$.

Korollar 2.17. *Unter Berücksichtigung der Notation aus Bemerkung 2.15 gilt* $\lim_{i \in I} x_i = x$ *genau dann, wenn der Abschnittsfilter von* $(x_i)_{i \in I}$ *gegen* x *konvergiert.*

Beweis. Nach Bemerkung 2.13 und aufgrund der Beschaffenheit von $x\left(\mathcal{B}_{(I,\preceq)}\right)$ gilt

$$x\left(\mathcal{B}_{(I,\preceq)}\right) \to x \;\Leftrightarrow\; \underbrace{\forall U \in \mathcal{U}(x) \exists i_0 \in I : \{x_i : i \succeq i_0\} \subseteq U}_{\Leftrightarrow \lim_{i \in I} x_i = x}.$$

■

Lemma 2.18. *Sei* $\mathcal{B}$ *eine Filterbasis auf* X*. Setzt man*

$$I := \{(y, B) \in X \times \mathcal{B} : y \in B\} \text{ und } (y_1, B_1) \preceq (y_2, B_2) :\Leftrightarrow B_1 \supseteq B_2,$$

so ist $I \neq \emptyset$ *und* $(I, \preceq)$ *eine gerichtete Menge. Sei* $(x_i)_{i \in I}$ *jenes Netz, welches durch* $x_i := y$ *für* $i = (y, B)$ *gegeben ist. Unter Berücksichtigung der Notation aus Bemerkung 2.15 gilt* $x\left(\mathcal{B}_{(I,\preceq)}\right) = \mathcal{B}$.

Beweis. Aufgabe 2.4 ■

Lemma 2.19. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $x \in X$. f ist genau dann stetig in x, wenn für alle Netze $(x_i)_{i\in I}$ auf X gilt, dass $\lim_{i\in I} x_i = x \Rightarrow \lim_{i\in I} f(x_i) = f(x)$.*

Beweis. Aufgabe 2.5 ■

Bemerkung 2.20. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $D \subseteq X$. Weil $x \in \overline{D}$ äquivalent ist zu $\forall U \in \mathcal{U}(x) : D \cap U \neq \emptyset$, folgt, dass $\mathcal{B} := \{D \cap U : U \in \mathcal{U}(x)\}$ eine Filterbasis ist und $\mathcal{B} \to x$.
Sei umgekehrt $\mathcal{B}$ eine Filterbasis aus Teilmengen von D, welche $\mathcal{B} \to x$ erfüllt. Da $\mathcal{C} := \{D\} \cup \mathcal{U}(x)$ eine Teilmenge von $[\mathcal{B}]$ ist, folgt aus Lemma 2.5, dass $\mathcal{C}$ die endliche Durchschnittseigenschaft hat und insbesondere $x \in \overline{D}$ erfüllt.
In Summe gilt $x \in \overline{D}$ genau dann, wenn es eine Filterbasis $\mathcal{B}$ aus Teilmengen von D mit $\mathcal{B} \to x$ gibt. //

Beispiel 2.21. Seien I eine Menge, $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$ topologische Räume und $f_i : X \to X_i$ Abbildungen. Weiters sei X versehen mit $\mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$ und sei $x \in X$. Für $i \in I$ ist $f_i^{-1}(\mathcal{U}(f_i(x)))$ nach Lemma 2.3 eine Filterbasis, da $x \in f_i^{-1}(U)$ für alle $U \in \mathcal{U}(f_i(x))$. Seien zu $n \in \mathbb{N}$ einerseits $i_1, \dots, i_n \in I$ und andererseits $U_{i_k} \in f_{i_k}^{-1}(\mathcal{U}(f_{i_k}(x)))$ für $k \in \{1, \dots, n\}$. Wegen $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n} \supseteq \{x\}$ gibt es nach Korollar 2.6 einen Filter $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{F} \supseteq f_i^{-1}(\mathcal{U}(f_i(x)))$ für alle $i \in I$.
Der gröbste solche Filter ist der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ bezüglich $\mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$, denn für $i \in I$ und $V \in \mathcal{U}(f_i(x))$ ist $f_i^{-1}(V) \supseteq f_i^{-1}(O) \ni x$ für ein $O \in \mathcal{T}_i$. Wegen $f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$ gilt $f_i^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$. Damit gilt $\mathcal{U}(x) \supseteq f_i^{-1}(\mathcal{U}(f_i(x)))$ für alle $i \in I$.
Sei $\mathcal{F}$ nun ein weiterer Filter mit $\mathcal{F} \supseteq f_i^{-1}(\mathcal{U}(f_i(x)))$ für alle $i \in I$. Für $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es ein $O \in \mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$ mit $x \in O \subseteq U$. Da $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(\mathcal{T}_i)$ eine Subbasis von $\mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$ bildet, gibt es eine bezüglich dieser Topologie offene Menge O' mit $x \in O' \subseteq O \subseteq U$ und $O' = f_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_n}^{-1}(O_{i_n}), f_{i_k}(x) \in O_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k} \cap \mathcal{U}(f_{i_k}(x)), k \in \{1, \dots, n\}$. Da damit $O' \in \mathcal{F}$, gilt auch $U \in \mathcal{F}$ und schließlich $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$. //

Bemerkung 2.22. Damit schließt man nun:

- Sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf X und $f : X \to Y$. Nach Lemma 2.2 ist $f(\mathcal{B})$ eine Filterbasis auf Y, welche, wie man leicht nachrechnet, $f^{-1}([f(\mathcal{B})]) \subseteq [\mathcal{B}]$ erfüllt.

- Seien I eine Menge, $(X_i, \mathcal{T}_i), i \in I$ topologische Räume und $f_i : X \to X_i$ Abbildungen Weiters sei X versehen mit $\mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$ und sei $x \in X$. Außerdem gelte $\mathcal{B} \to x$. Wegen Bemerkung 2.14 gilt $f_i(\mathcal{B}) \to f_i(x), i \in I$.
  Gelte nun umgekehrt $f_i(\mathcal{B}) \to f_i(x), i \in I$. Wegen $[\mathcal{B}] \supseteq f_i^{-1}([f_i(\mathcal{B})]) \supseteq f_i^{-1}(\mathcal{U}(f_i(x)))$ liefert Beispiel 2.21, dass $\mathcal{B} \to x$.
  Somit gilt unter den gegebenen Voraussetzungen, dass
  $$\mathcal{B} \to x \Leftrightarrow \forall i \in I : f_i(\mathcal{B}) \to f_i(x).$$

//

Definition 2.23. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf X. Die Menge
$$\text{HP}(\mathcal{B}) := \bigcap_{B\in\mathcal{B}} \overline{B}$$
nennt man die **Häufungspunkte** von $\mathcal{B}$.

Bemerkung 2.24. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Filterbasen auf X und $x \in X$. Wie man sich leicht überzeugt, gelten dann folgenden Aussagen:

- $\mathrm{HP}(\mathcal{B}) = \mathrm{HP}([\mathcal{B}])$,
- $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \;\Rightarrow\; \mathrm{HP}(\mathcal{B}_1) \supseteq \mathrm{HP}(\mathcal{B}_2)$,
- $[\mathcal{B}_1] \subseteq [\mathcal{B}_2] \;\Rightarrow\; \mathrm{HP}(\mathcal{B}_1) \supseteq \mathrm{HP}(\mathcal{B}_2)$,
- $x \in \mathrm{HP}(\mathcal{B}) \;\Leftrightarrow\; \forall B \in \mathcal{B}\; \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap B \neq \emptyset$,
- $\mathcal{B} \to x \;\Rightarrow\; x \in \mathrm{HP}(\mathcal{B})$,
- wenn $x \in \mathrm{HP}(\mathcal{B})$, dann ist $\mathcal{B} \vee \mathcal{U}(x)$ eine Filterbasis auf X mit $\mathcal{B} \vee \mathcal{U}(x) \to x$ und $[\mathcal{B} \vee \mathcal{U}(x)] \supseteq \mathcal{B}$ und
- $x \in \mathrm{HP}(\mathcal{B})$ genau dann, wenn es auf X einen feineren Filter $\mathcal{F}$ als $[\mathcal{B}]$ mit $\mathcal{F} \to x$ gibt.

//

Lemma 2.25. *Seien $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf X und $x \in X$.*

$$\mathcal{B} \to x \;\Leftrightarrow\; x \in \mathrm{HP}(\mathcal{C}) \text{ für alle Filterbasen } \mathcal{C} \text{ auf } X \text{ mit } [\mathcal{C}] \supseteq [\mathcal{B}].$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: $[\mathcal{C}] \supseteq [\mathcal{B}] \supseteq \mathcal{U}(x) \;\Rightarrow\; \mathcal{C} \to x \;\Rightarrow\; x \in \mathrm{HP}(\mathcal{C})$.
„$\Leftarrow$“: Angenommen $\mathcal{B} \not\to x$. Das heißt, es existiert ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \notin [\mathcal{B}]$. Damit muss aber $U^{\complement} \cap B \neq \emptyset$ für alle $B \in \mathcal{B}$ gelten, da sonst $B \subseteq U$ für ein $B \in \mathcal{B}$ und infolge $U \in [\mathcal{B}]$. Damit ist $\mathcal{C} := \{U^{\complement}\} \vee \mathcal{B}$ eine Filterbasis auf X mit $[\mathcal{C}] \supseteq [\mathcal{B}]$. Wegen $U^{\complement} \in \mathcal{C}$ und $U \cap U^{\complement} = \emptyset$ gilt $x \notin \mathrm{HP}(\mathcal{C})$. ■

Erinnerung 2.26. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung beinhaltet. Dies ist genau dann der Fall, wenn für jede Familie abgeschlossener Mengen mit endlicher Durchschnittseigenschaft gilt, dass der Schnitt über die Familie nicht leer ist. //

Lemma 2.27. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann kompakt, wenn jede Filterbasis auf X einen Häufungspunkt hat.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf X. Die Menge $\{\overline{B} : B \in \mathcal{B}\}$ hat dann die endliche Durchschnittseigenschaft. Damit ist $\mathrm{HP}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$.
„$\Leftarrow$“: Sei $\mathcal{C}$ eine Familie abgeschlossener Mengen mit endlicher Durchschnittseigenschaft. Dann ist nach Lemma 2.5 $\mathcal{B} := \{C_1 \cap \cdots \cap C_n : n \in \mathbb{N}, C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}\}$ eine Filterbasis auf X und hat nach Voraussetzung einen Häufungspunkt. Also gilt

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \overline{C} \supseteq \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B} \neq \emptyset.$$

■

Korollar 2.28. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann kompakt, wenn jeder Ultrafilter auf X konvergiert.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Nach Lemma 2.27 gibt es ein $x \in \mathrm{HP}(\mathcal{F})$. Damit gibt es nach Bemerkung 2.24 einen Filter $\mathcal{G}$ auf X mit $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ und $\mathcal{G} \to x$. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, muss $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ gelten.
„$\Leftarrow$“: Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Dieser lässt sich nach Satz 2.8 zu einem Ultrafilter $\mathcal{G}$ verfeinern. Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{G} \to x$ für ein $x \in X$. Damit ist nach Bemerkung 2.24 $x \in \mathrm{HP}(\mathcal{F})$ und nach Lemma 2.27 ist $(X, \mathcal{T})$ kompakt. ■

Satz von Tychonoff 2.29. *Seien $I \neq \emptyset$, $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume für $i \in I$ und sei $X := \prod_{i \in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie $\mathcal{T} := \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i$.*

$$(X, \mathcal{T}) \text{ ist kompakt } \Leftrightarrow \forall i \in I : (X_i, \mathcal{T}_i) \text{ ist kompakt.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$": Da $\pi_i(X) = X_i$ und π_i stetig ist, folgt die Kompaktheit von X_i für alle $i \in I$.
„$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X. Nach Lemma 2.9 ist $[\pi_i(\mathcal{F})]$ ein Ultrafilter auf X_i für alle $i \in I$. Damit gilt nach Korollar 2.28, dass $\pi_i(\mathcal{F}) \to x_i$ für alle $i \in I$ und je ein $x_i \in X_i$. Nach Bemerkung 2.22 gilt nun $\mathcal{F} \to (x_i)_{i \in I}$ und nach Korollar 2.28 ist X kompakt.[1] ■

Satz 2.30. *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. $\mathcal{F}$ ist genau dann ein Ultrafilter, wenn*

$$\forall A \in \mathcal{P}(X) : A \in \mathcal{F} \vee A^{\complement} \in \mathcal{F}.$$

Beweis. „$\Rightarrow$": Sei $A \in \mathcal{P}(X)$ und $A^{\complement} \notin \mathcal{F}$. Es muss für alle $F \in \mathcal{F}$ gelten, dass $A \cap F \neq \emptyset$, da es sonst ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F \subseteq A^{\complement}$ gäbe. Damit ist aber $\{A\} \vee \mathcal{F}$ eine Filterbasis auf X mit $[\{A\} \vee \mathcal{F}] \supseteq \mathcal{F}$. Also muss $[\{A\} \vee \mathcal{F}] = \mathcal{F}$ und $A \in \mathcal{F}$ sein.
„$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{G}$ ein Ultrafilter nach Satz 2.8 mit $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ und $G \in \mathcal{G}$. Nach Voraussetzung gilt entweder $G \in \mathcal{F}$ oder $G^{\complement} \in \mathcal{F}$. Im Falle $G^{\complement} \in \mathcal{F}$ wäre $G \cap G^{\complement} = \emptyset \in \mathcal{G}$. $\lightning$ Damit folgt $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ und weiter $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. ■

[1] Im Beweis wird nicht weiter auf die Konstruktion von $(x_i)_{i \in I}$ eingegangen. Eigentlich liefert Korollar 2.28 nur, dass für $i \in I$ die Räume der Grenzwerte der $\pi_i(\mathcal{F})$ nicht leer sind. Erst das Auswahlaxiom garantiert die Existenz eines entsprechenden $(x_i)_{i \in I}$ als Element des Mengenproduktes all dieser Räume der Grenzwerte. Also folgt erst aus der Gültigkeit des Auswahlaxioms die Gültigkeit des Satzes von Tychonoff 2.29. Man kann auch die Gegenrichtung zeigen, also in Summe die Äquivalenz der Gültigkeiten des Auswahlaxioms und des Satzes von Tychonoff 2.29.

Übungsaufgaben

2.1 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ um die Punkte $x \in X$ folgende drei Eigenschaften haben:

(a) Für jedes $x \in X$ ist $\mathcal{U}(x)$ ein Filter.

(b) Für jedes $x \in X$ und jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt $x \in U$.

(c) Für jedes $x \in X$ und jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es ein $W \in \mathcal{U}(x)$ mit $W \subseteq U$, sodass für alle $y \in W$ gilt, dass $U \in \mathcal{U}(y)$.

Zeigen Sie auch umgekehrt, dass wenn für alle $x \in X$ ein Mengensystem $\mathcal{U}(x)$ mit obigen Eigenschaften gegeben ist, es eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}$ auf X gibt, sodass die $\mathcal{U}(x)$ genau die Umgebungsfilter sind.

Hinweis für die Umkehrung: Definieren Sie $\mathcal{T}$ als die Menge aller Mengen O mit $O \in \mathcal{U}(x)$ für alle $x \in O$. Zeigen Sie auch, dass für $U \in \mathcal{U}(x)$ die Menge $\{z \in U : U \in \mathcal{U}(z)\}$ offen ist.

2.2 Beweisen Sie Lemma 2.5!

2.3 Seien $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X.

Zeigen Sie, dass im Falle $\mathcal{F} \to x$ für ein $x \in X$, dann $\{x\} = \mathrm{HP}(\mathcal{F})$ gilt und dass Ultrafilter auf X immer entweder gegen ein $x \in X$ konvergieren oder gar keinen Häufungspunkt haben.

2.4 Beweisen Sie Lemma 2.18!

2.5 Beweisen Sie Lemma 2.19!

2.6 Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$.

Zeigen Sie, dass $x \in X$ genau dann ein Häufungspunkt von $(x_i)_{i \in I}$ ist, dh. $x \in \bigcap_{i \in I} \overline{\{x_i : j \succeq i\}}$, wenn x Häufungspunkt des Abschnittsfilters $\left[x\left(\mathcal{B}_{(I,\preceq)}\right)\right]$ ist.

Zeigen Sie weiters, dass $(x_{i(j)})_{j \in J}$ genau dann ein Teilnetz von $(x_i)_{i \in I}$ ist, dh. für jedes $i_0 \in I$ gibt es ein $j_0 \in J$ mit $\{i(j) : j \succeq j_0\} \subseteq \{i : i \succeq i_0\}$, wenn $\left[x\left(\mathcal{B}_{(I,\preceq)}\right)\right] \subseteq \left[i\left(\mathcal{B}_{(J,\preceq)}\right)\right] = \left[i\left(\left[\mathcal{B}_{(J,\preceq)}\right]\right)\right]$. Insbesondere ist die Eigenschaft Teilnetz zu sein, nicht von den Netzen, sondern nur von den betrachteten gerichteten Mengen und der Abbildung $i : J \to I$ abhängig.

Zeigen Sie damit, dass aus $\lim_{i \in I} x_i = x$ auch $\lim_{j \in J} x_{i(j)} = x$ folgt.

2.7 Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$.

Sei $\mathcal{C}$ eine Filterbasis auf X mit $[\mathcal{C}] \supseteq \left[x\left(\mathcal{B}_{(I,\preceq)}\right)\right]$. Setze

$$J := \{(k, C) : k \in I, C \in \mathcal{C}, x_k \in C\},$$

und definiere

$$(k_1, C_1) \preceq (k_2, C_2) :\Leftrightarrow k_1 \preceq k_2 \wedge C_1 \supseteq C_2.$$

Zeigen Sie, dass J eine gerichtete Menge ist!

Setzt man $i((k, C)) := k$, so zeigen Sie weiters, dass $(x_{i(j)})_{j \in J}$ ein Teilnetz ist, wobei $[\mathcal{C}] = \left[x \circ i\left(\mathcal{B}_{(J,\preceq)}\right)\right]$.

Zeigen Sie schließlich, dass x genau dann Häufungspunkt von $(x_i)_{i\in I}$ ist, wenn es ein gegen x konvergentes Teilnetz gibt!

2.8 Sei M eine nichtleere Menge und $\mathcal{F}$ ein Filter darauf. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- $\mathcal{F}$ ist ein Ultrafilter.
- $A \cup B \in \mathcal{F}$ bedingt $A \in \mathcal{F}$ oder $B \in \mathcal{F}$.
- Ist die Vereinigung endlich vieler Teilmengen von M in $\mathcal{F}$, so ist zumindest einer dieser Teilmengen schon in $\mathcal{F}$.

2.9 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Mit A^0 sei die Menge aller Kondensationspunkte bezeichnet, d.h. alle $x \in X$, sodass jede Umgebung einen überabzählbaren Schnitt mit A hat. Zeigen Sie, dass Kondensationspunkte Häufungspunkte sind, dass A^0 abgeschlossen ist, dass $(A \cup B)^0 = A^0 \cup B^0$. Zeigen Sie weiters, dass in Räumen mit dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom die Menge $A \setminus A^0$ immer abzählbar ist und dass $(A^0)^0 = A^0$. Zeigen Sie schließlich, dass sich jeder topologischer Raum mit dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom in der Form $A \cup B = X$ mit disjunkten A und B schreiben lässt, wobei $A = \overline{A}$ keine isolierten Punkte hat und wobei B abzählbar ist.

Hinweis: Für eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$ betrachte $\mathcal{C} := \{B \in \mathcal{B} : B \cap A \text{ ist abzählbar } \}$.

3 Zusammenhang und Trennungsaxiome

Definition 3.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien $A, B \subseteq X$. A und B heißen

- **schwach getrennt**, wenn $\overline{A} \cap B = \emptyset \;\vee\; A \cap \overline{B} = \emptyset$.
- **getrennt**, wenn $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$.
- **getrennt durch offene Mengen**, wenn $O_A, O_B \in \mathcal{T}$ existieren, sodass $O_A \supseteq A$, $O_B \supseteq B$ und $O_A \cap O_B = \emptyset$.

Bemerkung 3.2. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien $A, B \subseteq X$. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Es gilt:

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq \overline{A}^{\complement} \Leftrightarrow \exists O_B \in \mathcal{T} : B \subseteq O_B, O_B \cap A = \emptyset.$$

Damit sind A, B genau dann schwach getrennt, wenn

$$\exists O_B \in \mathcal{T} : B \subseteq O_B, O_B \cap A = \emptyset \;\vee\; \exists O_A \in \mathcal{T} : A \subseteq O_A, O_A \cap B = \emptyset$$

und genau dann getrennt, wenn

$$\exists O_A, O_B \in \mathcal{T} : A \subseteq O_A, B \subseteq O_B, O_A \cap B = \emptyset = O_B \cap A.$$

(ii) Sind A und B getrennt durch offene Mengen, so sind sie getrennt. Sind sie getrennt, so sind sie schwach getrennt. Sind sie schwach getrennt, so sind sie disjunkt.

(iii) Sei $A \cap B = \emptyset$ und $C := A \uplus B$. Betrachte den topologischen Raum $(C, \mathcal{T}|_C)$. Bekanntermaßen gilt $\overline{A}^C = \overline{A} \cap C = (\overline{A} \cap A) \uplus (\overline{A} \cap B)$. Also ist A genau dann abgeschlossen in C, wenn $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Damit sind A und B genau dann schwach getrennt, wenn A oder B abgeschlossen in C ist, was äquivalent dazu ist, dass A oder B offen in C ist. Weiters sind A und B genau dann getrennt, wenn A und B abgeschlossen in C sind, was äquivalent dazu ist, dass A und B offen in C sind.

(iv) Sei $Y \subseteq X$ und $Y \supseteq A, B$. Man schließt aus Punkt (iii), dass A und B genau dann auf $(X, \mathcal{T})$ (schwach) getrennt sind, wenn sie es auf $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ sind. Diese Aussage gilt im Allgemeinen nicht für durch offene Mengen getrennte A, B.

//

Definition 3.3. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das Trennungsaxiom

(T_0), falls je zwei Punkte $x \neq y$ aus X schwach getrennt sind.

(T_1), falls je zwei Punkte $x \neq y$ aus X getrennt sind.

(T_2), falls je zwei Punkte $x \neq y$ aus X getrennt durch offene Mengen sind. Man nennt $(X, \mathcal{T})$ auch **Hausdorff-Raum**.

(T_3), falls für A mit $A^{\complement} \in \mathcal{T}$ und $x \notin A$ gilt, dass x und A getrennt durch offene Mengen sind.

(T_4), falls je zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von X auch getrennt durch offene Mengen sind.

(T_5), falls je zwei getrennte Teilmengen von X getrennt durch offene Mengen sind. Man nennt $(X, \mathcal{T})$ wegen Satz 3.47 auch **erblich (T_4)**.

Bemerkung 3.4. Es gelten folgende Aussagen:

- Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt wegen Bemerkung 3.2 Punkt (i) das Axiom (T_0) genau dann, wenn

$$\forall x, y \in X, x \neq y : \exists O_x \in \mathcal{T} : x \in O_x, y \notin O_x \text{ oder } \exists O_y \in \mathcal{T} : y \in O_y, x \notin O_y$$

  und (T_1) genau dann, wenn

$$\forall x, y \in X, x \neq y : \exists O_x \in \mathcal{T} : x \in O_x, y \notin O_x \text{ und } \exists O_y \in \mathcal{T} : y \in O_y, x \notin O_y.$$

- (T_1) ist nach Satz 3.30 äquivalent dazu, dass Punkte abgeschlossen sind.
- Wegen Bemerkung 3.2 Punkt (ii) folgt aus (T_2) das Axiom (T_1) und daraus (T_0).
- Aus (T_5) folgt (T_4), weil disjunkte, abgeschlossene Mengen getrennt sind.
- Aus (T_4) und (T_1) folgt (T_3), weil wegen (T_1) Punkte abgeschlossen sind.
- Nach Korollar 3.36 folgt aus (T_3) und (T_0) das Axiom (T_2).

//

Definition 3.5. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $Z \subseteq X$ heißt **zusammenhängend**, wenn

$$\nexists A, B \subseteq X,\ A, B \neq \emptyset \text{ getrennt mit } A \uplus B = Z.$$

Korollar 3.6. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\emptyset \neq Z \subseteq Y \subseteq X$. Z ist genau dann zusammenhängend in X, wenn es in $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ zusammenhängend ist. Weiters ist Z genau dann zusammenhängend in X, wenn es nicht als Vereinigung zweier disjunkter, nichtleerer offener und damit abgeschlossener Mengen aus $(Z, \mathcal{T}|_Z)$ dargestellt werden kann.*

Beweis. Bemerkung 3.2 Punkt (iv) und Punkt (iii) ■

Satz 3.7. *Sei $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{O})$ stetig und $Z \in \mathcal{P}(X)$ zusammenhängend, dann ist $f(Z)$ ebenfalls zusammenhängend.*

Beweis. Man betrachte die Funktion $f|_Z : (Z, \mathcal{T}|_Z) \to (f(Z), \mathcal{O}|_{f(Z)})$. Wie man leicht einsieht ist diese Funktion stetig. Angenommen man könnte $f(Z)$ darstellen als $f(Z) = A \uplus B$ mit getrennten $\emptyset \neq A, B$. Nach Bemerkung 3.2 Punkt (iii) wären A und B dann in $f(Z)$ abgeschlossen. Nun gälte, dass $(f|_Z)^{-1}(A), (f|_Z)^{-1}(B) \neq \emptyset$ abgeschlossen in Z wären. Außerdem wären diese Mengen disjunkt, also in Summe getrennt und erfüllten $(f|_Z)^{-1}(A) \uplus (f|_Z)^{-1}(B) = Z$, womit Z in Z also nach Korollar 3.6 auch in X nicht zusammenhängend wäre.$\lightning$ ■

Korollar 3.8. *Seien $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $Z \in \mathcal{P}(X)$ zusammenhängend und $A, B \in \mathcal{P}(X)$ getrennt. Es gilt*

$$Z \subseteq A \uplus B \Rightarrow Z \subseteq A \vee Z \subseteq B.$$

Beweis. $Z = (Z \cap A) \uplus (Z \cap B)$ bedingt $Z \cap A = \emptyset$ oder $Z \cap B = \emptyset$, da $Z \cap A$ und $Z \cap B$ offensichtlich getrennt sind. ■

Beispiel 3.9. Als Anwendung von Korollar 3.8 kann man zeigen, dass der stetige Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = 2$ einen Wert auf dem Einheitskreisrand $\partial U_1(0)$ annimmt. Nach Satz 3.7 ist $\gamma([0,1]) \subseteq \mathbb{C}$ zusammenhängend. Da $\partial U_1(0)^\complement = U_1(0) \uplus K_1(0)^\complement$ eine Vereinigung getrennter Mengen ist, folgte aus $\gamma([0,1]) \subseteq \partial U_1(0)^\complement$ nach Korollar 3.8, dass entweder $\gamma([0,1]) \subseteq U_1(0)$ oder $\gamma([0,1]) \subseteq K_1(0)^\complement$.↯ //

Korollar 3.10. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien $E_i \subseteq X, i \in I$ zusammenhängend. Gibt es ein $j \in I$, sodass E_j nichtleeren Schnitt mit allen $E_i, i \in I$ hat, dann ist $E := \bigcup_{i \in I} E_i$ zusammenhängend.*

Beweis. Seien $A, B \subseteq X$ getrennt und $E = A \uplus B$. Nach Korollar 3.8 gilt o.B.d.A. , dass $E_j \subseteq A$. Es gilt mit dem gleichen Argument, dass $E_i \subseteq A$ oder $E_i \subseteq B$ für alle $i \in I$. Existierte nun ein $i \in I \setminus \{j\}$ mit $E_i \subseteq B$, so folgte $E_i \cap E_j = \emptyset$.↯ Also erhält man $E_i \subseteq A$ für alle $i \in I$, womit $E \subseteq A$ gilt und $B = \emptyset$ folgt. ∎

Korollar 3.11. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $Z \subseteq X$ zusammenhängend. Weiters sei $Z \subseteq C \subseteq \overline{Z}$. Unter diesen Voraussetzungen ist C ebenfalls zusammenhängend.*

Beweis. Seien $A, B \subseteq X$ getrennt und $C = A \uplus B$. Mit Korollar 3.8 gilt o.B.d.A. $Z \subseteq A$. Damit ist $B = C \cap B \subseteq \overline{Z} \cap B \subseteq \overline{A} \cap B = \emptyset$. ∎

Definition 3.12. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine offene und abgeschlossene Menge C, also $C \in \mathcal{T}$ und $C^\complement \in \mathcal{T}$, heißt **clopen**.

Definition 3.13. Auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ definiert man die beiden Relationen

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists Z \subseteq X \text{ zusammenhängend mit } x, y \in Z$$

und

$$x \approx y :\Leftrightarrow \forall C \subseteq X \text{ clopen} : x, y \in C \vee x, y \in C^\complement.$$

Bemerkung 3.14. Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und $x, y, z \in X$ gelten folgende Aussagen:

- Da in jedem topologischen Raum für beliebiges $x \in X$ die Menge $\{x\}$ zusammenhängend ist, ist $\sim$ reflexiv. Symmetrie von $\sim$ ist nach Definition erfüllt. Für $x \sim y$ und $y \sim z$ gibt es zusammenhängende Mengen $Z_{1,2} \subseteq X$ mit $x, y \in Z_1$ und $y, z \in Z_2$. Damit gilt $Z_1 \cap Z_2 \supseteq \{y\}$ und mit Korollar 3.10 folgt, dass $Z_1 \cup Z_2 \ni x, y, z$ zusammenhängend ist, also $x \sim z$. Damit liegt auch Transitivität vor und $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

- Sei $x \in X$. Nun gilt für jede Menge $A \subseteq X$, insbesondere für clopen Mengen, dass $x \in A \vee x \in A^\complement$, womit $\approx$ reflexiv ist. Die Symmetrie von $\approx$ folgt wiederum aus der Definition. Die Transitivität gilt, da für alle clopen $C \subseteq X$ aus $x \approx y$ und $y \approx z$ folgt, dass x, y, z alle entweder in C oder in $C^\complement$ liegen, insbesondere also $x \approx z$. Somit ist auch $\approx$ eine Äquivalenzrelation.

- Für $x \sim y$ gilt, dass es eine zusammenhängende Menge $Z \subseteq X$ gibt, sodass $x, y \in Z$. Für $C \subseteq X$ clopen ist $X = C \uplus C^\complement$. Da C und sein Komplement als clopen Mengen getrennt sind, liefert Korollar 3.8, dass $x, y \in Z \subseteq C \vee x, y \in Z \subseteq C^\complement$. Demnach gilt $x \approx y$. Das heißt also $\sim \subseteq \approx$ bzw. äquivalent $[x]_\sim \subseteq [x]_\approx$ für alle $x \in X$.

- Offenbar gilt $[x]_\approx = \bigcap\limits_{\substack{x\in C\subseteq X\\ C \text{ clopen}}} C$.

//

Lemma 3.15. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Für $x \in X$ ist $[x]_\sim$ abgeschlossen und die größte x enthaltende, zusammenhängende Menge.*

Beweis. Sei $Z \in \mathcal{P}(X)$ zusammenhängend. Man sieht sofort, dass aus $x \in Z$ immer $Z \subseteq [x]_\sim$ folgt. Nun gilt nach Definition für $y \in X$, dass $y \sim x$ genau dann, wenn es ein zusammenhängendes $Z_y \subseteq X$ gibt, sodass $x, y \in Z_y$. Damit erhält man

$$[x]_\sim = \bigcup_{y\sim x} \{y\} \subseteq \bigcup_{y\sim x} Z_y.$$

Da in all diesen Z_y zumindest x liegt, ist nach Korollar 3.10 $\bigcup_{y\sim x} Z_y$ zusammenhängend. Mit den bisherigen Überlegungen schließt man, dass $\bigcup_{y\sim x} Z_y = [x]_\sim$. Also ist $[x]_\sim$ die größte x enthaltende, zusammenhängende Menge. Korollar 3.11 liefert die Abgeschlossenheit von $[x]_\sim$. ∎

Definition 3.16. Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Für $x \in X$ nennt man die Restklassen $[x]_\sim$ **Zusammenhangskomponenten** von $\mathcal{T}$, die Restklassen $[x]_\approx$ **Quasikomponenten** von $\mathcal{T}$.

Beispiel 3.17. Zusammenhangskomponenten und Quasikomponenten eines topologischen Raumes stimmen im Allgemeinen nicht überein. Man betrachte dazu $\mathbb{R}^2 \supseteq X := \{(0,0),(1,0)\} \uplus \biguplus_{n\in\mathbb{N}} \left([0,1]\times\left\{\frac{1}{n}\right\}\right)$ versehen mit der euklidischen Spurtopologie. Die Mengen $[0,1]\times\left\{\frac{1}{n}\right\}, n \in \mathbb{N}$ sind nach Korollar 3.6 zusammenhängend in X, da sie es in $\mathbb{R}^2$ sind. Somit gilt $\left[\left(0,\frac{1}{n}\right)\right]_\sim \supseteq [0,1]\times\left\{\frac{1}{n}\right\}, n\in\mathbb{N}$. Wegen

$$\begin{aligned}[0,1]\times\left\{\frac{1}{n}\right\} &= \left((-1,2)\times\left(\frac{1}{n}-\varepsilon,\frac{1}{n}+\varepsilon\right)\right)\cap X\\ &= \left([-1,2]\times\left[\frac{1}{n}-\varepsilon,\frac{1}{n}+\varepsilon\right]\right)\cap X\end{aligned}$$

für hinreichend kleines $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ sind die Mengen $[0,1]\times\left\{\frac{1}{n}\right\}$ für $n\in\mathbb{N}$ clopen in X, womit $\left[\left(0,\frac{1}{n}\right)\right]_\approx \subseteq [0,1]\times\left\{\frac{1}{n}\right\}$ für $n \in\mathbb{N}$ gilt. Weil immer $\left[\left(0,\frac{1}{n}\right)\right]_\approx \supseteq \left[\left(0,\frac{1}{n}\right)\right]_\sim$ für $n\in\mathbb{N}$ gilt, ist $X\setminus\{(0,0),(1,0)\}$ in die Restklassen $[0,1]\times\left\{\frac{1}{n}\right\}, n\in\mathbb{N}$ zerlegt, wobei diese sowohl Quasi- als auch Zusammenhangskomponenten sind. Da $\{(0,0),(1,0)\}$ nicht zusammenhängend in $\mathbb{R}^2$ ist, ist es die Menge nach Korollar 3.6 auch nicht in X. Folglich ergeben sich die beiden Zusammenhangskomponenten $[(0,0)]_\sim = \{(0,0)\}$ und $[(1,0)]_\sim = \{(1,0)\}$. Sei jetzt $C \in \mathcal{P}(X)$ clopen mit $(0,0)\in C$. Da C offen ist, gibt es ein $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$, sodass $U_\varepsilon((0,0))\cap X \subseteq C$. Wählt man nun ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$, so bekommt man $\left(0,\frac{1}{n}\right) \in C \cap \left([0,1]\times\left\{\frac{1}{n}\right\}\right)$. Da C und $C^\complement$ in X clopen und deswegen insbesondere getrennt sind und $[0,1]\times\left\{\frac{1}{n}\right\}$ zusammenhängend ist, liefert Korollar 3.8, dass $[0,1]\times\left\{\frac{1}{n}\right\}\subseteq C$. Allen voran ist $\left(1,\frac{1}{n}\right)\in C$. Da C abgeschlossen ist, folgt $\lim_{n\to\infty}\left(1,\frac{1}{n}\right) = (1,0)\in C$. Weil aber $[(0,0)]_\approx$ gerade der Schnitt über alle $C\in\mathcal{P}(X)$, welche $(0,0)$ enthalten und clopen sind, ist, gilt $[(0,0)]_\approx = \{(0,0),(1,0)\}$. Damit ist X vollständig zerlegt und man erkennt die Ungleichheit von Zusammenhangs- und Quasikomponenten. //

Lemma 3.18. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum, der (T_2) erfüllt. Dann gelten auch (T_3) und (T_4).*

Beweis. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und sei $x \in A^\complement$. Da X kompakt ist, ist dies auch A. Da (T_2) gilt, folgert man

$$\forall y \in A \exists O_y, U_y \in \mathcal{T} : O_y \cap U_y = \emptyset \text{ und } O_y \ni y, U_y \ni x.$$

Bei $\{O_y : y \in A\}$ handelt es sich um eine offene Überdeckung von A, womit man wegen der Kompaktheit von A gewisse $y_1, \dots, y_n \in A$ findet, sodass $O := O_{y_1} \cup \dots \cup O_{y_n} \supseteq A$. Setzt man nun $U := U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$, so gelten $O, U \in \mathcal{T}$, $x \in U, A \subseteq O$ und $O \cap U = \emptyset$. Also erfüllt $(X,\mathcal{T})$ das Axiom (T_3).
Seien nun $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt, womit sie auch kompakt sind. Da (T_3) gilt, folgert man

$$\forall y \in A \exists O_y, U_y \in \mathcal{T} : O_y \cap U_y = \emptyset \text{ und } O_y \ni y, U_y \supseteq B.$$

Bei $\{O_y : y \in A\}$ handelt es sich um eine offene Überdeckung von A, womit man wegen der Kompaktheit von A gewisse $y_1, \dots, y_n \in A$ findet, sodass $O := O_{y_1} \cup \dots \cup O_{y_n} \supseteq A$. Setzt man nun $U := U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$, so gelten $O, U \in \mathcal{T}$, $B \subseteq U, A \subseteq O$ und $O \cap U = \emptyset$. Also erfüllt $(X,\mathcal{T})$ das Axiom (T_4). ∎

Satz 3.19. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Falls $\#\{[x]_\approx : x \in X\} < \infty$ oder, falls X kompakt ist und $(X,\mathcal{T})$ das Axiom (T_2) erfüllt, dann gilt $\sim = \approx$.*

Beweis. Da für $x \in X$ immer $[x]_\sim \subseteq [x]_\approx$ erfüllt ist und nach Lemma 3.15 $[x]_\sim$ die größte zusammmenhängende, x enthaltende Teilmenge von X ist, genügt es zu zeigen, dass $[x]_\approx$ für beliebiges $x \in X$ zusammenhängend ist.
Sei zunächst $\#\{[x]_\approx : x \in X\} < \infty$, also $\{[x]_\approx : x \in X\} = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Für $j \in \{1, \dots, n\}$ ist Q_j per definitionem abgeschlossen und wegen $Q_j = X \setminus \left(\bigcup_{i \neq j} Q_i\right)$ auch offen, also clopen. Für beliebige, getrennte $A, B \subseteq X$ mit $Q_j = A \uplus B$ sind nach Bemerkung 3.2 diese clopen bezüglich Q_j. Da Q_j selbst clopen ist, müssen diese auch bezüglich X clopen sein. Damit muss jetzt etweder $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$ zutreffen, weil sonst wäre Q_j keine Quasikomponente. Also ist Q_j zusammenhängend und die Behauptung bewiesen.
Sei nun $(X,\mathcal{T})$ kompakt und (T_2). Sei $x \in X$ und $Q := [x]_\approx$. Seien $F_{1,2} \subseteq X$ beliebige getrennte Mengen mit $Q = F_1 \uplus F_2$ mit o.B.d.A. $x \in F_1$. Da Q der Schnitt von Mengen, welche clopen sind, ist, ist Q abgeschlossen, womit es wegen Bemerkung 3.2 auch $F_{1,2}$ sind. Da $(X,\mathcal{T})$ nach Lemma 3.18 das Trennungsaxiom (T_4) erfüllt, existieren disjunkte $G_{1,2} \in \mathcal{T}$ mit $G_i \supseteq F_i, i = 1, 2$. Man betrachte jetzt

$$Q^\complement = \bigcup_{\substack{x \in A \subseteq X \\ A \text{ clopen}}} A^\complement \text{ und } X = Q^\complement \cup (G_1 \uplus G_2).$$

Die Kompaktheit liefert die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$ und gewisser $A_1^\complement, \dots, A_n^\complement$ aus der Vereinigung, welche $Q^\complement$ ergibt mit

$$X = (G_1 \uplus G_2) \cup A_1^\complement \cup \dots \cup A_n^\complement.$$

Damit erhält man $B := \bigcap_{j=1}^n A_j \subseteq G_1 \uplus G_2$. Natürlich gilt auch $F_1 \uplus F_2 = Q \subseteq B$. Nun ist $B \cap G_1$ als Schnitt offener Mengen offen und wegen $B \cap G_1 = B \setminus G_2 = B \cap G_2^\complement$ als Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen, sprich clopen. Wegen $B \cap G_1 \supseteq F_1 \ni x$ muss $Q \subseteq B \cap G_1 \subseteq G_1$. Aus $F_2 = Q \cap F_2 \subseteq Q \cap G_2 \subseteq G_1 \cap G_2 = \emptyset$ folgt $F_2 = \emptyset$, wodurch sich Q als zusammenhängend herausstellt. ∎

Definition 3.20. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Man nennt diesen

(i) **zusammenhangslos**, falls $[x]_\sim = \{x\}$ für alle $x \in X$.

(ii) **totalzusammenhangslos**, falls $[x]_\approx = \{x\}$ für alle $x \in X$.

(iii) **0-dimensional**, falls

$$\forall x \in X \forall U \in \mathcal{U}(x) \exists C \in \mathcal{U}(x) \text{ mit } x \in C \subseteq U \text{ und } C \text{ clopen.}$$

(iv) **diskret**, falls $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

Bemerkung 3.21. Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, $x, y \in X$ und die Notation aus Definition 3.20 gilt:

- (iv) $\Rightarrow$ (iii)
- Aus (iii) und (T_0) folgt (ii), weil $x \neq y$ impliziert wegen (T_0) die Existenz eines $O \in \mathcal{T}$ mit o.B.d.A. $x \in O \not\ni y$. Wegen (iii) gibt es ein $C \subseteq X$, C clopen mit $x \in C \subseteq O$. Da $y \notin C$, gilt $x \not\approx y$.
- (ii) $\Rightarrow$ (i)
- Aus (i) folgt (T_1), da nach Lemma 3.15 $[x]_\sim = \{x\}$ abgeschlossen ist und nach Satz 3.30 Abgeschlossenheit von Punkten (T_1) impliziert.
- Aus (ii) folgt (T_2), denn aus $x \neq y$ folgt $x \not\approx y$, was bedeutet, dass es ein $A \subseteq X$, A clopen, mit $x \in A, y \in A^\complement$ gibt.
- Aus (iii) folgt (T_3), denn für $x \notin A \subseteq X$, A abgeschlossen folgt $x \in A^\complement$, $A^\complement$ offen. Somit gibt es wegen (iii) ein $x \in C \subseteq A^\complement$, C clopen. Damit gilt aber $A \subseteq C^\complement$, wobei C und $C^\complement$ sicherlich disjunkt sind.

//

Erinnerung 3.22. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei R eine Äquivalenzrelation auf X. Eine Menge $B \subseteq X$ nennt man gesättigt, wenn $x \in B$ impliziert, dass $[x]_\mathrm{R} \subseteq B$. Dies ist äquivalent zu $\pi^{-1}(\pi(B)) = B$, wobei $\pi : X \to X/_\mathrm{R}$ die kanonische Einbettung bezeichne. Ist nämlich B gesättigt, so hat man

$$B \subseteq \bigcup_{x \in B} \{x\} \subseteq \underbrace{\bigcup_{x \in B} [x]_\mathrm{R}}_{=\pi^{-1}(\pi(B))} \subseteq B.$$

Gelte umgekehrt $\pi^{-1}(\pi(B)) = B$. Für $x \in B$ und $y \in [x]_\mathrm{R}$ folgt, dass $\pi(y) = \pi(x) \in \pi(B)$ und somit $y \in \pi^{-1}(\pi(B)) = B$, also ist B gesättigt.
Jede Menge $M \subseteq X/_\mathrm{R}$ liefert offensichtlich mit $\pi^{-1}(M)$ eine gesättigte Menge. Da π surjektiv ist, gilt auch $\pi(\pi^{-1}(M)) = M$. Damit bildet in Summe π die gesättigten Mengen von X bijektiv auf $\mathcal{P}(X/_\mathrm{R})$ ab.
$X/_\mathrm{R}$ ist mit der Finaltopologie bezüglich π versehen, welche als Quotiententopologie $\mathcal{T}/_\mathrm{R}$ bezeichnet wird. Siehe dazu [**ana**]. Wie bei allen finalen Topologien erhält man $O \in \mathcal{T}/_\mathrm{R}$ genau dann, wenn $\pi^{-1}(O) \in \mathcal{T}$. $\pi^{-1}(O)$ ist also offen und, wie oben gezeigt, gesättigt. Außerdem gilt $\pi(\pi^{-1}(O)) = O$, da π surjektiv ist. Umgekehrt ist für jede gesättigte Menge $U \in \mathcal{T}$ die Gleichung $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$ erfüllt, womit $\pi(U) \in \mathcal{T}/_\mathrm{R}$ gilt. Wegen Damit ist π eine Bijektion zwischen den offenen, gesättigten Mengen von X und $\mathcal{T}/_\mathrm{R}$. Analoges gilt für abgeschlossene Mengen. //

Lemma 3.23. *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, dann ist $(X/_\sim, \mathcal{T}/_\sim)$ zusammenhangslos.*

Beweis. Sei $C \subseteq X/_\sim$ mindestens zweielementig und abgeschlossen in $X/_\sim$. Damit ist nach Erinnerung 3.22 $\pi^{-1}(C) \subseteq X$ gesättigt und abgeschlossen in X und es gibt $x, y \in X$ mit $x \not\sim y$ und $x, y \in \pi^{-1}(C)$. Wegen Lemma 3.15 kann $\pi^{-1}(C)$ nicht zusammenhängend sein. Damit existieren $A, B \subseteq X$, A, B getrennt und nicht leer mit $\pi^{-1}(C) = A \uplus B$. Da $\pi^{-1}(C)$ abgeschlossen ist, müssen A und B, da sie getrennt sind, ebenfalls abgeschlossen in X sein. Sei $x \in A$. Wiederum wegen Lemma 3.15 ist $[x]_\sim$ zusammenhängend und, weil $\pi^{-1}(C)$ gesättigt ist $[x]_\sim \subseteq \pi^{-1}(C)$. Nach Korollar 3.8 muss $[x]_\sim \subseteq A$ gelten, sprich A ist gesättigt. Analog verhält es sich mit B. Wegen Erinnerung 3.22 sind $\pi(A)$ und $\pi(B)$ abgeschlossen in $X/_\sim$. Aufgrund der Surjektivität von π erhält man $C = \pi(\pi^{-1}(C)) = \pi(A) \uplus \pi(B)$. Somit kann C nicht zusammenhängend sein und $(X/_\sim, \mathcal{T}/_\sim)$ ist nach Lemma 3.15 zusammenhangslos. ■

Lemma 3.24. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, dann ist $(X/_\approx, \mathcal{T}/_\approx)$ totalzusammenhangslos.*

Beweis. Zu $x, y \in X$ mit $[x]_\approx \neq [y]_\approx$ gibt es eine clopen Menge $C \subseteq X$ mit $x \in C, y \notin C$. C ist gesättigt, da für $z \in C$ gilt, dass

$$C \supseteq \bigcap_{\substack{z \in Z \subseteq X \\ Z \text{ clopen}}} Z = [z]_\approx.$$

Gemäß Erinnerung 3.22 ist $\pi(C)$ clopen in $X/_\approx$ mit $[x]_\approx \in \pi(C), [y]_\approx \notin \pi(C)$. Das heißt $[x]_\approx \not\approx [y]_\approx$, womit $(X/_\approx, \mathcal{T}/_\approx)$ totalzusammenhangslos ist. ■

Satz 3.25. *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und gilt (T_2), dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *$(X, \mathcal{T})$ ist zusammenhangslos.*
- *$(X, \mathcal{T})$ ist totalzusammenhangslos.*
- *$(X, \mathcal{T})$ ist 0-dimensional.*

Beweis. Da aus (T_2) immer (T_0) folgt, ist die Implikationskette von unten nach oben wegen Bemerkung 3.21 bereits bekannt. Somit ist nur noch zu zeigen, dass aus der Zusammenhangslosigkeit die 0-Dimensionalität folgt. Sei dazu $x \in X$. Nach Satz 3.19 gilt

$$\{x\} = [x]_\sim = [x]_\approx = \bigcap_{\substack{x \in C \subseteq X \\ C \text{ clopen}}} C.$$

Für $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O$ erhält man

$$X = O \cup \bigcup_{\substack{x \in C \subseteq X \\ C \text{ clopen}}} C^\complement.$$

Die Kompaktheit liefert ein $n \in \mathbb{N}$ und $C_1, \ldots, C_n$ aus obiger Vereinigung, sodass $X = O \cup (C_1 \cap \cdots \cap C_n)^\complement$. Daraus folgt $C_1 \cap \cdots \cap C_n \subseteq O$. Nun gilt $x \in C_1 \cap \cdots \cap C_n$ und $C_1 \cap \cdots \cap C_n$ ist clopen. Ergo ist $(X, \mathcal{T})$ 0-dimensional. ■

Lemma 3.26. *Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume für $i \in I$ und $f_i : X \to X_i$ Abbildungen für $i \in I$. Weiters sei X versehen mit der Topologie $\mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$. Falls für alle $i \in I$ $(X_i, \mathcal{T}_i)$ das Axiom (T_0) ((T_1)) ((T_2)) erfüllt und falls $\{f_i : i \in I\}$ punktetrennend ist, so erfüllt auch $(X, \mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\}))$ das Axiom (T_0) ((T_1)) ((T_2)).*

Beweis. Exemplarisch sei hier der Beweis für (T_2) angeführt. Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Da die Familie von Funktionen punktetrennend ist, findet man ein $i \in I$, sodass $f_i(x) \neq f_i(y)$. Weil $(X_i, \mathcal{T}_i)$ das Axiom (T_2) erfüllt, gibt es disjunkte $O_{1,2} \in \mathcal{T}_i$ mit $f_i(x) \in O_1$ und $f_i(y) \in O_2$. Daraus schließt man, dass $x \in f_i^{-1}(O_1) \in \mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$ und $y \in f_i^{-1}(O_2) \in \mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$. Urbilder disjunkter Mengen sind wiederum disjunkt, also erfüllt $(X, \mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\}))$ das Axiom (T_2). ■

Bemerkung 3.27. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. (T_0) gilt genau dann, wenn

$$\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow \mathcal{U}(x) \neq \mathcal{U}(y).$$

Also gilt (T_0) genau dann nicht, wenn es $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(y)$ gibt. Auf Basis dieser Überlegung definiert man die folgende Äquivalenzrelation. //

Definition 3.28. Auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ definiert man die Äquivalenzrelation

$$x \simeq y :\Leftrightarrow \mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(y).$$

Lemma 3.29. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Alle in X offenen oder abgeschlossenen Mengen sind bezüglich $\simeq$ gesättigt. Die mit der Quotiententopologie versehenen Restklassen $(X/_{\simeq}, \mathcal{T}/_{\simeq})$ erfüllen (T_0). $(X, \mathcal{T})$ erfüllt (T_0) genau dann, wenn die kanonische Einbettung $\pi : X \to X/_{\simeq}$ ein Homöomorphismus ist.*

Beweis. Sei $x \in O \in \mathcal{T}$. $x \simeq y$ für $y \in X$ bedeutet, dass $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(y)$. Aus $O \in \mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(y)$ folgt $y \in O$, also ist O gesättigt. Wenn $A \subseteq X$ abgeschlossen ist, heißt dies $A^{\complement} \in \mathcal{T}$. Somit ist $A^{\complement}$ gesättigt. Wie man leicht einsieht müssen Komplemente gesättigter Mengen, und damit insbesondere A, ebenfalls gesättigt sein.
Seien $[x]_{\simeq}, [y]_{\simeq} \in X/_{\simeq}$ mit $[x]_{\simeq} \neq [y]_{\simeq}$. Dies bedeutet $\mathcal{U}(x) \neq \mathcal{U}(y)$. Man findet also o.B.d.A. ein $\mathcal{T} \ni O \in \mathcal{U}(x)$, welches $O \notin \mathcal{U}(y)$ erfüllt. Weil in X offene Mengen gesättigt sind, ist nach Erinnerung 3.22 $\pi(O)$ offen in $X/_{\simeq}$. Außerdem folgt $[x]_{\simeq} \in \pi(O), [y]_{\simeq} \notin \pi(O)$, also (T_0).
π ist stets surjektiv und nach Konstruktion von $\mathcal{T}/_{\simeq}$ stetig. Da offene Mengen gesättigt sind, ist π nach Erinnerung 3.22 auch offen. Nun erfüllt $(X, \mathcal{T})$ das Trennungsaxiom (T_0) genau dann, wenn

$$\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow \mathcal{U}(x) \neq \mathcal{U}(y) \Rightarrow x \not\simeq y \Rightarrow [x]_{\simeq} \neq [y]_{\simeq},$$

sprich wenn π injektiv ist. ■

Satz 3.30. *Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sind äquivalent:*

- *Es gilt (T_1).*
- $\forall x \in X : \overline{\{x\}} = \{x\}$
- *Alle endlichen Teilmengen von X sind abgeschlossen.*

Beweis. Wenn endliche Teilmengen von X abgeschlossen sind, dann sind es insbesondere Punkte. Umgekehrt ist die endliche Vereinigung abgeschlossener Punkte wieder abgeschlossen. Gelte nun (T_1). Sei $x \in X$ und $y \in X, y \neq x$. Dann gibt es wegen Bemerkung 3.2 Punkt (i) $O_x, O_y \in \mathcal{T}$, sodass $x \in O_x, y \notin O_x$ und $y \in O_y, x \notin O_y$. Wegen $O_y \subseteq \{x\}^{\complement}$ gilt

$$\{x\}^{\complement} = \bigcup_{X \ni y \neq x} \{y\} \subseteq \bigcup_{X \ni y \neq x} O_y \subseteq \{x\}^{\complement},$$

womit $\{x\}^\complement$ offen und $\{x\}$ abgeschlossen ist. Umgekehrt setzt man für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ einfach $y \in \{x\}^\complement := O_y$ und $x \in \{y\}^\complement := O_x$ und hat wegen Bemerkung 3.2 Punkt (i) das Axiom (T_1). ■

Satz 3.31. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt genau dann (T_2), wenn alle konvergenten Filterbasen einen eindeutigen Grenzwert haben.*

Beweis. „⇒“: Wäre $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf X mit $\mathcal{B} \to x$ und $\mathcal{B} \to y$ für $x, y \in X$ und $x \neq y$, so wäre $O_x \cap O_y$ aus $[\mathcal{B}]$, wobei $\mathcal{T} \ni O_x \in \mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{T} \ni O_y \in \mathcal{U}(y)$ jene disjunkte, offenen Umgebungen seien, welche x und y trennen. Damit wäre $\emptyset \in [\mathcal{B}]$ ↯.
„⇐“: Wären $x, y \in X$ mit $x \neq y$ nicht durch offene Mengen getrennt, so hätte $\mathcal{U}(x) \cup \mathcal{U}(y)$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Nach Korollar 2.6 gäbe es einen Filter $\mathcal{F}$ auf X, welcher $\mathcal{F} \to x$ und $\mathcal{F} \to y$ erfüllte. ↯ ■

Lemma 3.32. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume. Erfülle $(Y, \mathcal{O})$ das Axiom (T_2) und sei $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{O})$ stetig. Unter diesen Voraussetzungen ist der Graph $G_f \subseteq X \times Y$ von f bezüglich $\mathcal{T} \times \mathcal{O}$ abgeschlossen.*

Beweis. $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$. Sei nun $(a, b) \in \overline{G_f}$. Nach Bemerkung 2.20 gibt es eine Filterbasis $\mathcal{B}$ aus Teilmengen von G_f mit $\mathcal{B} \to (a, b)$ bezüglich $\mathcal{T} \times \mathcal{O}$. Nun ist die Produkttopologie $\mathcal{T} \times \mathcal{O}$ gerade jene Initialtopologie, bezüglich welcher die kanonischen Projektionen π_X und π_Y stetig sind. Damit gilt wegen Bemerkung 2.14, dass $\pi_X(\mathcal{B}) \to a$ und $\pi_Y(\mathcal{B}) \to b$. Klarerweise gilt $\pi_Y(\mathcal{B}) = f(\pi_X(\mathcal{B}))$. Aus der Stetigkeit von f folgt wiederum mit Bemerkung 2.14, dass $\pi_Y(\mathcal{B}) = f(\pi_X(\mathcal{B})) \to f(a)$. Da gemäß Satz 3.31 die Filterbasis $\pi_Y(\mathcal{B})$ einen eindeutigen Grenzwert hat, erhält man $b = f(a)$, also $\overline{G_f} = G_f$. ■

Bemerkung 3.33. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Es gilt für $A, B \in \mathcal{P}(X)$:

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B^\complement \Leftrightarrow B \subseteq A^\complement.$$

Weiters gilt, dass A und B genau dann getrennt durch offene Mengen sind, wenn

$$\exists O \in \mathcal{T} : A \subseteq O \subseteq \overline{O} \subseteq B^\complement.$$

Nämlich: Gilt die Teilmengenkette, so sind O und $\overline{O}^\complement$ zwei disjunkte, offene Mengen mit $A \subseteq O$ und $B \subseteq \overline{O}^\complement$. Umgekehrt gebe es nun disjunkte $O_A, O_B \in \mathcal{T}$ mit $A \subseteq O_A$ und $B \subseteq O_B$. Auf jeden Fall gelten $A \subseteq O_A \subseteq \overline{O_A}$, $O_B^\complement \subseteq B^\complement$ und $O_A \subseteq O_B^\complement$. Da $O_B^\complement$ abgeschlossen ist gilt auch $\overline{O_A} \subseteq O_B^\complement$. //

Satz 3.34. *Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *Es gilt (T_3).*
- $\forall x \in X \ \forall O \in \mathcal{T} : x \in O \ \Rightarrow \ \exists P \in \mathcal{T} : x \in P \subseteq \overline{P} \subseteq O$
- *Für $x \in X$ hat $\mathcal{U}(x)$ eine Filterbasis, bestehend aus abgeschlossenen Mengen.*

Beweis. Die Äquivalenz der ersten beiden Punkte folgt unmittelbar aus Bemerkung 3.33, angewandt auf $\{x\}$ und $O^\complement$.
Gelte nun der zweite Punkt. Für $x \in X$ ist die Menge $\{V \in \mathcal{U}(x) : V^\complement \in \mathcal{T}\}$ eine Filterbasis von $\mathcal{U}(x)$, denn für $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es ein $O \in \mathcal{T}$, sodass $x \in O \subseteq U$. Somit gibt es ein $P \in \mathcal{T}$ mit $x \in P \subseteq \overline{P} \subseteq O \subseteq U$. Also ist $\overline{P} \in \mathcal{U}(x)$ und $\overline{P}^\complement \in \mathcal{T}$, sprich $\overline{P} \in \{V \in \mathcal{U}(x) : V^\complement \in \mathcal{T}\}$.

Habe nun umgekeht der Umgebungsfilter von jedem beliebigen x eine Filterbasis aus abgeschlossenen Mengen. Seien $x \in X$ und $O \in \mathcal{T}$, sodass $x \in O$. Dann findet man wegen $O \in \mathcal{U}(x)$ ein abgeschlossenes $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $x \in V \subseteq O$. Aufgrund der Definition von $\mathcal{U}(x)$ existiert ein $P \in \mathcal{T}$, sodass $x \in P \subseteq V \subseteq O$. Außerdem ist auch $P \subseteq \overline{P} \subseteq V$ erfüllt, da V abgeschlossen ist. ■

Definition 3.35. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Man nennt diesen **regulär**, falls dieser (T_3) und (T_0) erfüllt.

Korollar 3.36. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist dieser regulär, so erfüllt er auch (T_2) und (T_1). Insbesondere ist dieser also genau dann regulär, wenn er (T_3) und (T_2) erfüllt, respektive genau dann, wenn er (T_3) und (T_1) erfüllt.*

Beweis. Es muss nur gezeigt werden, dass aus der Regularität (T_2) folgt. Seien dazu $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Wegen (T_0) gibt es o.B.d.A. ein $O \in \mathcal{T}$, sodass $x \in O, y \notin O$. Wegen Satz 3.34 liefert (T_3) ein $P \in \mathcal{T}$, welches $x \in P \subseteq \overline{P} \subseteq O$ erfüllt. Nun hat man $x \in P$ und $y \in \overline{P}^{\complement} \in \mathcal{T}$. Das heißt, (T_2) gilt, da $P \cap \overline{P}^{\complement} = \emptyset$. ■

Lemma 3.37. *Seien $I \neq \emptyset$, $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume für $i \in I$ und $f_i : X \to X_i$ Abbildungen für $i \in I$. Weiters sei X versehen mit der Topologie $\mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$. Falls für alle $i \in I$ $(X_i, \mathcal{T}_i)$ (T_3) erfüllt, so erfüllt auch $(X, \mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\}))$ das Axiom (T_3).*

Beweis. Seien $x \in X$ und $O \in \mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$, sodass $x \in O$. Da die Urbilder der Mengen aus $\mathcal{T}_i, i \in I$ eine Subbasis von $\mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$ bilden, gilt $x \in f_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_n}^{-1}(O_{i_n}) \subseteq O$ für gewisse $i_1, \ldots, i_n \in I$ und $O_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$ für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $f_{i_k}(x) \in O_{i_k}$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$. (T_3) liefert mit Satz 3.34 für $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Existenz eines $P_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$: $f_{i_k}(x) \in P_{i_k} \subseteq \overline{P_{i_k}} \subseteq O_{i_k}$. Da die f_i für $i \in I$ nach Konstruktion von $\mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$ stetig sind, erhält man

$$x \in \overbrace{f_{i_1}^{-1}(P_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_n}^{-1}(P_{i_n})}^{\text{offen in } X} \subseteq \underbrace{f_{i_1}^{-1}(\overline{P_{i_1}}) \cap \cdots \cap f_{i_n}^{-1}(\overline{P_{i_n}})}_{\text{abg. in } X} \subseteq O,$$

womit nach Satz 3.34 $\mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$ das Trennungsaxiom (T_3) erfüllt. ■

Satz 3.38. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume und erfülle letzterer (T_3). Sei $A \subseteq X$ eine dichte Teilmenge und $f : A \to Y$ stetig bezüglich $(A, \mathcal{T}|_A)$. Falls für alle $x \in X \setminus A$ eine stetige Fortsetzung $f_x : A \uplus \{x\} \to Y$ von f existiert, so existiert auch eine stetige Fortsetzung $g : X \to Y$ von f.*

Beweis. Man wähle für alle $x \in X \setminus A$ eine beliebige stetige Fortsetzung f_x aus und betrachte die Funktion

$$g : \begin{cases} X & \to \quad Y \\ x & \mapsto \quad \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A, \\ f_x(x) & \text{sonst.} \end{cases} \end{cases}$$

g ist offensichtlich eine wohldefinierte Fortsetzung von f. Sei nun $x \in X$ und $V \in \mathcal{U}(g(x))$. Wegen Satz 3.34 gibt es ein $W \in \mathcal{O}$, sodass $g(x) \in W \subseteq \overline{W} \subseteq V$.
Für den Fall $x \in A$ liefert die Stetigkeit von f die Existenz eines $U \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{T} : f(A \cap U) \subseteq W$. Nun folgt $g(U) \subseteq V$. Wäre dem nämlich nicht so, hieße dies, es gäbe ein $z \in U \cap A^{\complement}$ mit

$g(z) \in V^{\complement} \subseteq \overline{W}^{\complement}$. Jetzt gäbe es, da f_z auf $(A \uplus \{z\}, \mathcal{T}|_{A\uplus\{z\}})$ stetig ist, ein $U' \in \mathcal{U}(z) \cap \mathcal{T}$ mit o.B.d.A. $U' \subseteq U$ (weil $U \in \mathcal{U}(z) \cap \mathcal{T}$ gilt, betrachte man andernfalls $U \cap U' \in \mathcal{U}(z) \cap \mathcal{T}$), sodass $f_z(U' \cap (A \uplus \{z\})) \subseteq \overline{W}^{\complement}$. Aufgrund der Dichtheit von A in X fände man ein $a \in A \cap U'$. Es wäre folglich, weil f_z ein Fortsetzung von f ist, $f(a) = f_z(a) \in \overline{W}^{\complement} \cap W = \emptyset.\lightning$
Für den Fall $x \notin A$ liefert die Stetigkeit von f_x die Existenz eines $U \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{T} : f_x((A \uplus \{x\}) \cap U) \subseteq W$. Nun ist $g(U) \subseteq V$. Wäre dem nämlich nicht so, hieße dies, es gäbe ein $\exists z \in U \setminus (A \uplus \{x\})$ mit $g(z) \in V^{\complement} \subseteq \overline{W}^{\complement}$. Jetzt gäbe es, da f_z bezüglich $(A \uplus \{z\}, \mathcal{T}|_{A\uplus\{z\}})$ stetig ist, ein $U' \in \mathcal{U}(z) \cap \mathcal{T}$ mit o.B.d.A. $U' \subseteq U$ (weil $U \in \mathcal{U}(z) \cap \mathcal{T}$ gilt, betrachte man andernfalls $U \cap U' \in \mathcal{U}(z) \cap \mathcal{T}$), sodass $f_z(U' \cap (A \uplus \{z\})) \subseteq \overline{W}^{\complement}$. Aufgrund der Dichtheit von A in X fände man ein $a \in A \cap U'$. Es wäre folglich, weil f_x und f_z Fortsetzungen von f sind, $f_x(a) = f(a) = f_z(a) \in \overline{W}^{\complement} \cap W = \emptyset.\lightning$
Alles in allem gilt also

$$\forall x \in X \forall V \in \mathcal{U}(g(x)) \exists U \in \mathcal{U}(x) : g(U) \subseteq V,$$

sprich g ist stetig. ■

Definition 3.39. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Man nennt diesen **normal**, wenn dieser (T_4) und (T_1) erfüllt.

Bemerkung 3.40. Jeder normale topologische Raum ist, weil aus (T_4) und (T_1) das Axiom (T_3) folgt und weil aus (T_1) das Axiom (T_0) folgt, regulär und erfüllt somit nach Korollar 3.36 auch (T_2). Insbesondere ist ein topologischer Raum genau dann normal, wenn er (T_4) und (T_2) erfüllt. //

Beispiel 3.41. Im Allgemeinen sind reguläre Räume nicht normal. Man betrachte dazu die Menge $X := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \right\}$. Für ein $\binom{x}{y} \in X$ mit $y \neq 0$ sei $\mathcal{U}\binom{x}{y} := \left[\left\{ U_\varepsilon\binom{x}{y} : 0 < \varepsilon < y \right\} \right]$ und sei

$$\mathcal{U}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} := \left[\left\{ U_\varepsilon \begin{pmatrix} x \\ \varepsilon \end{pmatrix} \uplus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\} : \varepsilon > 0 \right\} \right].$$

Wie man leicht nachprüft, handelt es sich dabei um Filter mit:

- $\forall \binom{x}{y} \in X \forall U \in \mathcal{U}\binom{x}{y} : \binom{x}{y} \in U$,
- $\forall \binom{x}{y} \in X \forall U \in \mathcal{U}\binom{x}{y} \exists W \in \mathcal{U}\binom{x}{y} : W \subseteq U$ mit $\forall \binom{a}{b} \in W : U \in \mathcal{U}\binom{a}{b}$.

Damit existiert nach Aufgabe 2.1 eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}$ auf X, sodass für alle $\binom{x}{y} \in X$ der Filter $\mathcal{U}\binom{x}{y}$ der Umgebungsfilter von $\binom{x}{y}$ ist. Ein Menge, welche in einer der obigen Filterbasen liegt, ist offensichtlich Umgebung all ihrer Elemente, womit die obigen Filterbasen aus in X offenen Mengen bestehen.
Man erhält unmittelbar (T_2). Wie man leicht einsieht, handelt es sich für $\binom{x}{y} \in X$ mit $y \neq 0$ bei $\left\{ K_\varepsilon\binom{x}{y} : 0 < \varepsilon < y \right\}$ um eine Umgebungsbasis bestehend aus in X abgeschlossenen Mengen. Wegen $\overline{U_\varepsilon\binom{x}{\varepsilon} \uplus \left\{\binom{x}{0}\right\}} = K_\varepsilon\binom{x}{\varepsilon} \cup \left\{\binom{x}{0}\right\}$ für $\varepsilon > 0$ gilt selbiges für $\binom{x}{0}$. Damit hat jeder Punkt in X eine Umgebungsbasis aus abgeschlossenen Mengen und mit Satz 3.34 folgt (T_3), also ist $(X, \mathcal{T})$ regulär. Schließlich betrachte man

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq X \text{ und } B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \right\} \subseteq X.$$

Offenbar gilt $A \cap B = \emptyset$. Außerdem sind beide Mengen abgeschlossen, da sich exemplarisch $A^\complement$ darstellen lässt als die offene Menge

$$\bigcup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}\\ y>0}} U_{\varepsilon_y}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \cup \bigcup_{x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \left(U_\varepsilon\begin{pmatrix}x\\\varepsilon\end{pmatrix} \uplus \left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\right\}\right),$$

wobei $\varepsilon, \varepsilon_y > 0$ hinreichend klein seien. Seien jetzt $O_{A,B} \in \mathcal{T} : O_A \supseteq A, O_B \supseteq B$. Da $\binom{x}{0} \in O_B \in \mathcal{U}\binom{x}{0}$ für $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ gilt, schließt man, dass es ein $\varepsilon_x > 0$ mit $U_{\varepsilon_x}\binom{x}{\varepsilon_x} \subseteq O_B$ gibt. Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man $M_n := \left\{x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} : \varepsilon_x \geq \frac{1}{n}\right\}$. Klarerweise ist

$$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n.$$

Wäre $\overline{M_n}^\circ = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so hieße dies, weil in jedem topologischen Raum für eine beliebige Teilmenge Y gilt $Y^\circ = \overline{Y^\complement}^\complement$, dass die offenen Mengen $\overline{M_n}^\complement$ für $n \in \mathbb{N}$ dicht in $\mathbb{R}$ lägen. Genauso ist für alle $q \in \mathbb{Q}$ die Menge $\{q\}^\complement$ in $\mathbb{R}$ offen und dicht. Da $\mathbb{R}$ ein vollständiger metrischer Raum ist, lieferte der Satz von Baire

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{M_n}^\complement\right) \cap \left(\bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}^\complement\right) \neq \emptyset \Leftrightarrow\\ \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{M_n}\right) \cup \mathbb{Q} \neq \mathbb{R} \Rightarrow\\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{M_n} \not\supseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \lightning\end{aligned}$$

Folglich gilt $\exists n \in \mathbb{N} : \overline{M_n}^\circ \neq \emptyset$. Da es sich hier um eine offene Menge handelt und weil $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt, erhält man als ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q \in \overline{M_n}^\circ \subseteq \overline{M_n}$. Demnach gilt, weil die um q symmetrischen Intervalle eine Umgebungsbasis von q bilden, dass es für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in M_n \cap \left(q - \frac{1}{k}, q + \frac{1}{k}\right)$ gibt. Das heißt nach Definition von M_n auch $\varepsilon_{x_k} \geq \frac{1}{n}$. Wegen $\binom{q}{0} \in O_A$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit o.B.d.A. $\varepsilon < \frac{1}{n}$, sodass $U_\varepsilon\binom{q}{\varepsilon} \subseteq O_A$. Wählt man jetzt $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|x_k - q| < \varepsilon$, so gilt $\binom{x_k}{\varepsilon} \in U_{\varepsilon_{x_k}}\binom{x_k}{\varepsilon_{x_k}} \subseteq O_B$, aber auch $\binom{x_k}{\varepsilon} \in U_\varepsilon\binom{q}{\varepsilon} \subseteq O_A$. Somit ist $O_A \cap O_B \neq \emptyset$ und (T_4) gilt nicht. //

Satz 3.42. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist $(X, \mathcal{T})$ regulär und erfüllt $(X, \mathcal{T})$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so ist $(X, \mathcal{T})$ normal.*

Beweis. Nach Korollar 3.36 muss nur (T_4) gezeigt werden. Seien dazu $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt und sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{T}$. Aus Satz 3.34 und den Eigenschaften einer Basis folgen:

$$\begin{aligned}&\forall a \in A \exists U_a \in \mathcal{U}(a) \cap \mathcal{B} : a \in U_a \subseteq \overline{U_a} \subseteq B^\complement,\\ &\forall b \in B \exists V_b \in \mathcal{U}(b) \cap \mathcal{B} : a \in V_b \subseteq \overline{V_b} \subseteq A^\complement.\end{aligned}$$

Diese Umgebungen von a und b lassen sich abzählen, also $\{U_a : a \in A\} =: \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\{V_b : b \in B\} =: \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Man definiert

$$G := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \cap \left(\overline{V_1}^\complement \cap \cdots \cap \overline{V_n}^\complement\right) \text{ und } H := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n \cap \left(\overline{U_1}^\complement \cap \cdots \cap \overline{U_n}^\complement\right).$$

Es gelten $A \subseteq G, B \subseteq H$ und $G, H \in \mathcal{T}$. Wäre $x \in G \cap H$, so bedeutete dies die Existenz von $m, n \in \mathbb{N}$ mit

$$x \in U_m \cap \left(\overline{V_1}^{\complement} \cap \cdots \cap \overline{V_m}^{\complement}\right) \text{ und } x \in V_n \cap \left(\overline{U_1}^{\complement} \cap \cdots \cap \overline{U_n}^{\complement}\right).$$

Für o.B.d.A. $n \leq m$ gälte also $x \in V_n \wedge x \in \overline{V_n}^{\complement} \lightning$. Somit ist auch $G \cap H = \emptyset$ erfüllt und (T_4) gilt. ■

Lemma 3.43. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist $(X, \mathcal{T}(d))$ normal.*

Beweis. Dass (T_2) gilt, ist bekannt. Seien also $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Da $B^{\complement}$ und $A^{\complement}$ offen sind und $A \subseteq B^{\complement}, B \subseteq A^{\complement}$ gilt, hat man

$$\forall a \in A \exists \varepsilon_a \in \mathbb{R}, \varepsilon_a > 0 : U_{3\varepsilon_a}(a) \subseteq B^{\complement} \text{ und } \forall b \in B \exists \varepsilon_b \in \mathbb{R}, \varepsilon_b > 0 : U_{3\varepsilon_b}(b) \subseteq A^{\complement}.$$

Man definiert nun

$$G := \bigcup_{a \in A} U_{\varepsilon_a}(a) \supseteq A \text{ und } H := \bigcup_{b \in B} U_{\varepsilon_b}(b) \supseteq B.$$

$G, H \in \mathcal{T}(d)$ ist offensichtlich. Wäre $x \in G \cap H$, so gäbe es $a \in A, b \in B$ mit $x \in U_{\varepsilon_a}(a) \cap U_{\varepsilon_b}(b)$. Es gälte $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) \leq \varepsilon_a + \varepsilon_b \leq 2\varepsilon_a$ für o.B.d.A. $\varepsilon_b \leq \varepsilon_a$. Damit wäre $b \in B \cap U_{3\varepsilon_a}(a) \lightning$. Ergo ist $G \cap H = \emptyset$ und (T_4) ist erfüllt, sprich $(X, \mathcal{T})$ ist normal. ■

Lemma 3.44. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, welcher (T_4) erfülle. Ist $Y \subseteq X$ in X abgeschlossen, so erfüllt $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ ebenfalls (T_4).*

Beweis. Seien $A, B \subseteq Y$ disjunkt und in Y abgeschlossen. Da Y abgeschlossen ist, sind es diese Mengen dann auch in X. Damit gibt es $O_A, O_B \in \mathcal{T}$ mit $O_A \supseteq A, O_B \supseteq B$ und $O_A \cap O_B = \emptyset$. Infolge sind $O_A \cap Y, O_B \cap Y \in \mathcal{T}|_Y$ mit $O_A \cap Y \supseteq A, O_B \cap Y \supseteq B$ und $(O_A \cap Y) \cap (O_B \cap Y) = \emptyset$. ■

Definition 3.45. Einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ nennt man **vollständig normal**, falls dieser (T_5) und (T_1) erfüllt.

Bemerkung 3.46. Weil aus (T_5) das Trennungsaxiom (T_4) folgt, ist jeder vollständig normale Raum auch normal und infolge auch regulär. Er erfüllt also auch (T_3), (T_2) und (T_0). Folglich ist ein topologischer Raum genau dann vollständig normal, wenn er (T_5) und (T_2) erfüllt. //

Satz 3.47. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dieser erfüllt genau dann (T_5), wenn für alle $Y \subseteq X$ der Raum $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ das Trennungsaxiom (T_4) erfüllt.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $Y \subseteq X$. Seien $A, B \subseteq Y$ disjunkt und abgeschlossen in Y. Dann sind sie auch getrennt in Y. Damit sind sie nach Bemerkung 3.2 auch in X getrennt. Wegen (T_5) gibt es $O_A, O_B \in \mathcal{T}$, sodass $A \subseteq O_A, B \subseteq O_B$ und $O_A \cap O_B = \emptyset$. Nun gilt $O_A \cap Y, O_B \cap Y \in \mathcal{T}|_Y$ und weiterhin $A \subseteq O_A \cap Y, B \subseteq O_B \cap Y$. Da diese in Y offenen Mengen klarerweise auch disjunkt sind, erfüllt $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ das Axiom (T_4).
„$\Leftarrow$“: Seien $A, B \subseteq X$ getrennt und definiere $(\overline{A} \cap \overline{B})^{\complement} =: Y \in \mathcal{T}$. Offensichtlich folgt aus der Tatsache, dass A und B getrennt sind, dass $A, B \subseteq Y$. Weil $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ nach Voraussetzung (T_4) erfüllt, gibt es wegen $\overline{A}^Y \cap \overline{B}^Y = \overline{A} \cap \overline{B} \cap Y = \emptyset$ disjunkte $O_A, O_B \in \mathcal{T}|_Y$ mit $A \subseteq O_A, B \subseteq O_B$. Weil Y offen in X ist, erhält man $O_A, O_B \in \mathcal{T}$, womit A, B in X getrennt durch offene Mengen sind. ■

Bemerkung 3.48. Aus Satz 3.47 folgt wegen der Assoziativität der Spurtopologie auch, dass für einen topologischen Raum mit (T_5) auch jeder Teilraum $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ für $Y \subseteq X$ das Trennungsaxiom (T_5) erfüllt. //

Korollar 3.49. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein regulärer topologischer Raum und erfülle dieser das zweite Abzählbarkeitsaxiom, dann ist $(X, \mathcal{T})$ vollständig normal.*

Beweis. Sei $Y \subseteq X$. Da die kanonische Einbettung $\iota : Y \to X$ offensichtlich punktetrennend ist und $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ genau die initiale Topologie bezüglich ι ist liefert Lemma 3.26, dass $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ das Axiom (T_0) erfüllt und Lemma 3.37, dass $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ das Axiom (T_3) erfüllt. Also ist $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ regulär. Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{T}$. Offensichtlich ist $\mathcal{B} \cap Y := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ eine abzählbare Basis von $(Y, \mathcal{T}|_Y)$. Somit ist $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ nach Satz 3.42 normal. Aus Satz 3.47 die Behauptung. ■

Korollar 3.50. *Für einen metrischen Raum (X, d) ist $(X, \mathcal{T}(d))$ vollständig normal.*

Beweis. Für $Y \subseteq X$ gilt nach Aufgabe 1.16, dass $(Y, \mathcal{T}(d)|_Y) = (Y, \mathcal{T}(d|_{Y \times Y}))$. Dieser Raum ist gemäß Lemma 3.43 normal, erfüllt also auch (T_4), womit die Aussage aus Satz 3.47 folgt. ■

Lemma 3.51. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, seien $M_k := \left\{\frac{\ell}{2^k} : \ell = 0, \dots, 2^k\right\}, k \in \mathbb{N}_0$ und $M := \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k$. Weiters gebe es eine Abbildung, welche jedem $r \in M$ ein $O_r \in \mathcal{T}$ zuweist, sodass aus $r, s \in M, r < s$ folgt, dass $\overline{O_r} \subseteq O_s$ und $O_0 = \emptyset, O_1 = X$ gilt. Unter diesen Voraussetzungen ist*

$$f : \begin{cases} X & \to \quad [0,1] \\ x & \mapsto \quad \inf\{r \in M : x \in O_r\} \end{cases}$$

stetig.

Beweis. Offensichtlich folgt aus $O_1 = X$, dass $\{r \in M : x \in O_r\}$ für $x \in X$ niemals leer ist und infolge von $M \subseteq [0,1]$, dass f wohldefiniert ist. Genauso folgt aus $O_0 = \emptyset$, dass $\left\{r \in M : x \in \overline{O_r}^{\complement}\right\} \neq \emptyset$, womit auch

$$g : \begin{cases} X & \to \quad [0,1] \\ x & \mapsto \quad \sup\left\{r \in M : x \in \overline{O_r}^{\complement}\right\} \end{cases}$$

wohldefiniert ist. Für $s \in \left\{r \in M : x \in \overline{O_r}^{\complement}\right\}$ und $t \in \{r \in M : x \in O_r\}$ bei festem $x \in X$ gilt $s < t$, da man anderenfalls den Widerspruch $x \in \overline{O_s}^{\complement} \cap O_t \subseteq \overline{O_s}^{\complement} \cap O_s = \emptyset$ erhielte. Demnach gilt $g(x) \leq f(x)$ für $x \in X$. Gäbe es ein $x \in X$ mit $g(x) \leq f(x)$, so gälte wegen der Dichtheit von M in $[0,1]$, dass man $r, s \in M$ mit $g(x) < r < s < f(x)$ fände. Wegen $\overline{O_r} \subseteq O_s$ gilt $x \in O_s$ oder $x \in O_s^{\complement} \subseteq \overline{O_r}^{\complement}$ also $f(x) \leq s$ oder $g(x) \geq r$.↯ Also gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$.
Die Stetigkeit von $f : X \to [0,1]$ zu zeigen ist äquivalent dazu, die Stetigkeit von $f : X \to \mathbb{R}$ zu zeigen, da die Spurtopologie auf $[0,1]$ eine initiale Topologie ist und damit f genau dann stetig ist, wenn es $\iota \circ f$ ist, wobei $\iota : [0,1] \to \mathbb{R}$ die kanonische Einbettung bezeichne. Darüber hinaus genügt es zu zeigen, dass die Urbilder einer geeigneten Subbasis der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$ in $\mathcal{T}$ liegen. Dazu wählt man die Mengen $(-\infty, t), (t, +\infty), t \in \mathbb{R}$. Nun gelten

$$f(x) = \inf\{r \in M : x \in O_r\} < t \Leftrightarrow \exists r \in M, r < t : x \in O_r \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\substack{r \in M \\ r < t}} O_r \text{ und}$$

$$g(x) = \sup\left\{r \in M : x \in \overline{O_r}^{\complement}\right\} > t \Leftrightarrow \exists r \in M, r > t : x \in \overline{O_r}^{\complement} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\substack{r \in M \\ r > t}} \overline{O_r}^{\complement}.$$

Damit hat man $f^{-1}(-\infty, t) = \bigcup_{\substack{r \in M \\ r<t}} O_r \in \mathcal{T}$ und $f^{-1}(t, +\infty) = \bigcup_{\substack{r \in M \\ r>t}} \overline{O_r}^{\complement} \in \mathcal{T}$ Also ist f stetig. ∎

Definition 3.52. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von $\mathcal{T}$ heißt **normal**, wenn es zu je zwei $O, P \in \mathcal{B}$ mit $O^{\complement} \cap P^{\complement} = \emptyset$ disjunkte $G, H \in \mathcal{B}$ gibt, sodass $G \supseteq O^{\complement}, H \supseteq P^{\complement}$.

Bemerkung 3.53. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt klarerweise genau dann (T_4), wenn $\mathcal{T}$ eine normale Basis von sich selbst ist. //

Lemma 3.54. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine normale Basis, dann lassen sich je zwei disjunkte $A, B \in \mathcal{B}^{\complement} := \left\{B^{\complement} : B \in \mathcal{B}\right\}$ durch eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ trennen, also $f(A) \subseteq \{0\}, f(B) \subseteq \{1\}$.*

Beweis. Da $\mathcal{B}$ normal ist, existieren $G_0, H_0 \in \mathcal{B} : G_0 \supseteq A, H_0 \supseteq B, G_0 \cap H_0 = \emptyset$. Setzt man $H_1 := \emptyset$ und $G_1 := B^{\complement} \supseteq H_0^{\complement} \supseteq \overline{G_0}$, so gilt $G_1 \in \mathcal{B}$ und mit der Notation aus Lemma 3.51 offensichtlich für $k = 0$

$$\forall \zeta, \xi \in M_k : \zeta < \xi \Rightarrow \overline{G_\zeta} \subseteq H_\zeta^{\complement} \subseteq G_\xi. \tag{3.1}$$

Seien für $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $\zeta \in M_n$ Mengen $G_\zeta, H_\zeta \in \mathcal{B}$ definiert und gelte (3.1) für $k = n$. Sei nun $\zeta \in M_{n+1}$. Also hat ζ die Form $\frac{\ell}{2^{n+1}}$ für ein $\ell \in \{0, \dots, 2^{n+1}\}$. Ist ℓ gerade, so sind G_ζ, H_ζ bereits definiert, da $\zeta \in M_n$. Ist ℓ ungerade, so sind G_ζ, H_ζ noch nicht definiert und es gilt $M_n \ni \zeta' := \frac{\ell-1}{2^{n+1}} < \zeta < \frac{\ell+1}{2^{n+1}} =: \zeta'' \in M_n$. Aus (3.1) folgt $G_{\zeta'} \subseteq H_{\zeta'}^{\complement} \subseteq G_{\zeta''}$ also $H_{\zeta'}^{\complement} \cap G_{\zeta''}^{\complement} = \emptyset$. Wegen $\zeta' \neq 1$ gilt $H_{\zeta'}, G_{\zeta''} \in \mathcal{B}$. Damit gibt es disjunkte $G_\zeta, H_\zeta \in \mathcal{B}$ mit $G_\zeta \supseteq H_{\zeta'}^{\complement}, H_\zeta \supseteq G_{\zeta''}^{\complement}$. Daraus folgt $\overline{G_{\zeta'}} \subseteq H_{\zeta'}^{\complement} \subseteq G_\zeta$ und $\overline{G_\zeta} \subseteq H_\zeta^{\complement} \subseteq G_{\zeta''}$, womit, wie man leicht einsieht, auch (3.1) auf M_{n+1} gilt. Setzt man nun für $t \in M \setminus \{1, 0\}$ die Mengen $O_t := G_t$ und $O_0 := \emptyset, O_1 := X$, so erfüllen diese Mengen die Voraussetzungen von Lemma 3.51, womit

$$f : \begin{cases} X & \to \quad [0,1] \\ x & \mapsto \quad \inf\{r \in M : x \in O_r\} \end{cases}$$

stetig ist. Für $x \in A$ gilt $x \in G_0$, also $x \in O_t$, falls $M \ni t > 0$, womit $f(x) = 0$. Nach Konstruktion gilt $G_\zeta \subseteq B^{\complement}$ für alle $\zeta \in M$. Insbesondere gilt damit für $M \ni t < 1$, dass $B \subseteq O_t^{\complement}$. Daraus folgt $f(x) = 1$ für $x \in B$. ∎

Lemma von Urysohn 3.55. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dieser erfüllt (T_4) genau dann, wenn es zu je zwei disjunkten, abgeschlossenen Teilmengen $A, B \in \mathcal{P}(X)$ eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $f(A) \subseteq \{0\}$ und $f(B) \subseteq \{1\}$ gibt.*

Beweis. „$\Leftarrow$“: Seien $A, B \in \mathcal{P}(X)$ disjunkt und abgeschlossen, so gibt es eine Funktion f mit obigen Eigenschaften. Nun sind die Mengen $\left[0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ in $[0,1]$ offen und disjunkt. Damit folgt aus der Stetigkeit von f, dass $f^{-1}\left[0, \frac{1}{2}\right) \supseteq A$ und $f^{-1}\left(\frac{1}{2}, 1\right] \supseteq B$ ebenfalls offen und disjunkt sind, womit (T_4) gilt.
„$\Rightarrow$“: $\mathcal{T}$ ist klarerweise eine Basis von sich selbst und aus (T_4) folgt, dass $\mathcal{T}$ eine normale Basis von sich selbst ist. Nun ist die Menge aller Komplemente von $\mathcal{T}$ gerade die Menge aller abgeschlossenen Mengen in X. Somit folgt aus Lemma 3.54 die Aussage. ∎

Lemma 3.56. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und erfülle dieser (T_4). Seien $A \subseteq X$ abgeschlossen und $u : A \to [-1, 1]$ stetig, dann existiert eine stetige Funktion $v : X \to \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$, sodass $|u(x) - v(x)| \leq \frac{2}{3}$ für alle $x \in A$.*

Beweis. Die Mengen $\left[-1,-\frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3},1\right]$ sind disjunkt und abgeschlossen in $[-1,1]$ und damit sind es auch $C := u^{-1}\left[-1,-\frac{1}{3}\right], D := u^{-1}\left[\frac{1}{3},1\right]$ in A, da u stetig ist. Da A abgeschlossen ist, sind jene Mengen auch in X abgeschlossen und disjunkt. Wegen des Lemmas von Urysohn 3.55 gibt es eine stetige Abbildung $\hat{v} : X \to [0,1]$ mit $\hat{v}(C) \subseteq \{0\}$ und $\hat{v}(D) \subseteq \{1\}$. Die Abbildung $v : X \to \left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$, definiert durch $v(x) := \frac{2}{3}\hat{v}(x) - \frac{1}{3}$, ist ebenfalls stetig und erfüllt $v(C) \subseteq \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ und $v(D) \subseteq \left\{\frac{1}{3}\right\}$. Offensichtlich erfüllt v das Gewünschte. ∎

Fortsetzungssatz von Tietze 3.57. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und erfülle dieser (T_4). Seien $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung von f auf X, also eine stetige Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ mit $g|_A = f$, welche auch $\sup_{t\in A}|f(t)| = \sup_{t\in X}|g(t)|$ erfüllt.*

Beweis. Erfülle f zunächst $\|f\|_\infty = 1$, womit $f(A) \subseteq [-1,1]$. Mit Lemma 3.56 erhält man ein $h_0 : X \to \left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ mit $|f(x) - h_0(x)| \leq \frac{2}{3}$ für alle $x \in A$. Seien nun für $j = 0,\dots,n$ stetige Funktionen $h_j : X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^j, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^j\right]$ gegeben, sodass

$$\left|f(x) - \sum_{j=0}^{n} h_j(x)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \quad \text{für } x \in A. \tag{3.2}$$

Die Funktion $u(x) := \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\left(f(x) - \sum_{j=0}^{n} h_j(x)\right)$ ist auf A stetig mit Bild in $[-1,1]$. Somit liefert Lemma 3.56 ein $v : X \to \left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ mit $|u(x) - v(x)| \leq \frac{2}{3}$ für alle $x \in A$. Man schließt daraus

$$\left|f(x) - \sum_{j=0}^{n} h_j(x) - \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} v(x)}_{=:h_{n+1}(x)}\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} \quad \text{für } x \in A.$$

Damit ist eine Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wohldefiniert.
Wegen

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|h_j\|_\infty \leq \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j = 1 \tag{3.3}$$

konvergiert die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} h_j$ absolut als Funktionenreihe und insbesondere gleichmäßig gegen eine stetige, beschränkte Funktion $h : X \to \mathbb{R}$, da $C_b(X,\mathbb{R})$ mit $\|.\|_\infty$ wegen [**ana**] ein Banachraum ist. Außerdem folgt aus (3.3) $\|h\|_\infty \leq 1$. Bildet man in (3.2) den Grenzwert, so gilt $f(x) = h(x)$ für $x \in A$, woraus auch $\|h\|_\infty = \|f\|_\infty = 1$ folgt.
$f \equiv 0$ hat die Nullfunktion als stetige Fortsetzung, die die Supremumsnorm erhält.
Ist f nun allgemein beschränkt mit $\|f\|_\infty > 0$, so betrachte man die stetige Funktion $\frac{f}{\|f\|_\infty} : A \to [0,1]$ mit $\|\frac{f}{\|f\|_\infty}\|_\infty = 1$. Nach dem obigen Teil des Beweises gibt es eine Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ mit $g|_A = f$ und $\|g\|_\infty = 1$. Nun ist $g\|f\|_\infty$ ebenfalls stetig und setzt f fort. Außerdem gilt $\|g\|f\|_\infty\|_\infty = \|g\|_\infty\|f\|_\infty = \|f\|_\infty$.
Zuletzt sei $f : A \to \mathbb{R}$ unbeschränkt. Bekanntermaßen gibt es einen Homöomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \to (-1,1)$ mit $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 1$ und $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = -1$.[2] Mit diesem ist $\varphi \circ f : A \to [-1,1]$ ebenfalls stetig mit $\|\varphi \circ f\|_\infty = 1$. Ergo liefert der bisherige Beweis eine stetige Funktion $g : X \to \mathbb{R}$

[2] $\tan : \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ ist homöomorph.

mit $\|g\|_\infty = 1$, welche $\varphi \circ f$ fortsetzt. Da $A \subseteq g^{-1}(-1,1)$ und $g^{-1}\{-1,1\}$ in X abgeschlossen und disjunkt sind, schließt man aus dem Lemma von Urysohn 3.55 auf die Existenz einer stetigen Funktion $s : X \to [0,1]$ mit $s(A) \subseteq \{1\}$ und $s(g^{-1}\{-1,1\}) \subseteq \{0\}$. Die Funktion $sg : X \to [-1,1]$ ist ebenfalls stetig und nimmt die Werte $-1, 1$ nicht an. Damit ist auch $\varphi^{-1}(sg) : X \to \mathbb{R}$ wohldefiniert und stetig. Für $x \in A$ gilt $\varphi^{-1}(sg)(x) = f(x)$. Also ist $\varphi^{-1}(sg)$ die gesuchte, unbeschränkte Fortsetzung. ■

Bemerkung 3.58. Die Aussage des Fortsetzungssatzes von Tietze 3.57 ist sogar äquivalent zu (T_4). Denn gelte diese auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Die Funktion

$$f : \begin{cases} A \uplus B & \to \quad \mathbb{R} \\ \quad x & \mapsto \quad \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases} \end{cases}$$

ist, wie man leicht nachrechnet, auf $(A \uplus B, \mathcal{T}|_{A \uplus B})$ stetig. Damit gibt es eine auf $(X, \mathcal{T})$ stetige Fortsetzung $g : X \to \mathbb{R}$ von f. Diese trennt nun A, B durch in X offene Mengen. Es gilt $A \subseteq g^{-1}\left(-\infty, \frac{1}{2}\right), B \subseteq g^{-1}\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Damit sind (T_4), die Aussage des Fortsetzungssatzes von Tietze 3.57 und die Aussage des Lemmas von Urysohn 3.55 äquivalent. //

Übungsaufgaben

3.1 Sei $(G,\mathcal{T})$ eine topologische Gruppe, also die Abbildungen $(x,y)\mapsto xy$ von G^2 nach G und $x\mapsto x^{-1}$ von G nach G seien stetig, mit neutralem Element e. Zeigen Sie, dass die e enthaltende Zusammenhangskomponente ein Normalteiler ist!

3.2 Betrachten Sie den reellen Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{N})$ aller reellen und quadratisch summierbaren Folgen. Dabei sei $X\subseteq\ell^2(\mathbb{N})$ die Menge aller Folgen mit rationalen Folgengliedern.

Zeigen Sie, dass X, versehen mit der Spurtopologie, total zusammenhangslos, aber nicht 0-dimensional ist.

Hinweis: Für total zusammenhangslos zeigen Sie, dass für zwei verschiedene Folgen $x,y\in X$ zwei in X offene, disjunke G_x,G_y existieren, sodass $x\in G_x, y\in G_y$ und $X=G_x\uplus G_y$. Für den zweiten Teil konstruieren Sie für jede beschränkte und offene Nullumgebung $V\subseteq\ell^2(\mathbb{N})$ ein Element $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in X$, welches im Rand von V liegt.

3.3 Seien $(X_i,\mathcal{T}_i), i\in I$ und $(X,\mathcal{T})$ topologische Räume. Zeigen Sie, dass $(X,\mathcal{T})$ genau dann homöomorph zu einem $A\subseteq\prod_{i\in I}X_i$ (versehen mit der Spurtopologie der Produkttopologie) ist, wenn es eine Punkte trennende Familie $f_i:X\to X_i, i\in I$ von Funktionen gibt, sodass $\mathcal{T}$ genau die initiale Topologie bezügliche dieser Funktionen ist.

Nach Lemma 3.26 vererben sich (T_0), (T_1) und (T_2) von den $\mathcal{T}_i, i\in I$ auf $\mathcal{T}$. Sei nun $\{f_i: i\in I\}$ nicht punktetrennend. Kann dann $(X,\mathcal{T})$ (T_0), (T_1) oder (T_2) sein?

3.4 Zeigen Sie, dass $(X/_\sim,\mathcal{T}/_\sim)$ kompakt, (T_2) und 0-dimensional ist, falls $(X,\mathcal{T})$ kompakt und (T_2) ist.

3.5 Sei $Y:=\{0,1\}$ und $\mathcal{O}:=\{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\}$. Zeigen Sie, dass $(Y,\mathcal{O})$ ein topologischer Raum ist. Weiters zeigen Sie, dass ein beliebiger topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ genau dann (T_0) erfüllt, wenn es zu $x\neq y$ aus X ein stetiges $f:X\to Y$ gibt, sodass $f(x)\neq f(y)$. Zeigen Sie auch, dass $(X,\mathcal{T})$ genau dann das Axiom (T_0) erfüllt, wenn $(X,\mathcal{T})$ homöomorph zu einer Teilmenge von Y^I ist, wobei I eine hinreichend große Indexmenge, Y^I mit der Produkttopologie versehen und betreffliche Teilmenge mit der Spurtopologie versehen ist.

3.6 Man betrachte $X:=\{(x,y)\in\mathbb{Q}^2: y\geq 0\}$. Weiters seien zu $\varepsilon>0$ und $(x,y)\in X$

$$\begin{aligned}
U_\varepsilon^+(x,y) &:= \{(z,0)\in\mathbb{Q}^2: |z-(x-\frac{y}{\sqrt{2}})|<\varepsilon\},\\
U_\varepsilon^-(x,y) &:= \{(z,0)\in\mathbb{Q}^2: |z-(x+\frac{y}{\sqrt{2}})|<\varepsilon\},\\
U_\varepsilon(x,y) &:= \{(x,y)\}\cup U_\epsilon^+(x,y)\cup U_\varepsilon^-(x,y).
\end{aligned}$$

Skizzieren Sie $U_\varepsilon(x,y)$. Zeigen Sie, dass es auf X eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}$ gibt, sodass $\{U_\varepsilon(x,y):\varepsilon>0\}$ Filterbasen der Umgebungsfilter sind.

Zeigen Sie, dass $(X,\mathcal{T})$ das Axiom (T_2) erfüllt!

3.7 Mit der Notation aus Aufgabe 3.6 bestimmen Sie den Abschluss von $U_\varepsilon(x,y)$ für ein festes $(x,y)\in X$ und ein festes $\varepsilon>0$. Zeigen Sie weiters, dass für $(x,y),(a,b)\in X$ und $\varepsilon,\delta>0$ immer $\overline{U_\varepsilon(x,y)}\cap\overline{U_\delta(a,b)}\neq\emptyset$.

Ist $(X,\mathcal{T})$ regulär?

Schließlich leiten Sie her, dass jede stetige $\mathbb{R}$-wertige Funktion auf X konstant ist.

Hinweis: Aus $f : X \to \mathbb{R}$ stetig mit $0, 1 \in f(X)$ folgt

$$f\left(\overline{f^{-1}\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)}\right) \cap f\left(\overline{f^{-1}\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)}\right) = \emptyset.$$

Warum ?

3.8 Sei $\mathbb{R}$ versehen mit der Topologie $\mathcal{T}$, welche $\mathcal{C} := \{[a, b) : a < b\}$ als Subbasis hat. Dies Topologie heißt Sorgenfrey Topologie. Ist $\mathcal{C}$ sogar eine Basis? Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ vollständig normal ist und das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist.

Hinweis: Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}$ getrennt, so wähle für $a \in \mathbb{R} \setminus \overline{B}$ ein $x_a \in (a, +\infty)$ derart, dass $[a, x_a) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{B}$. Betrachten Sie $O_A := \bigcup_{a \in A}[a, x_a)$ und definieren Sie O_B in analoger Weise. Zeigen Sie, dass O_A und O_B disjunkt sind.

3.9 Zeigen Sie: Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $D \subseteq X$ dicht und $S \subseteq X$ abgeschlossen und so, dass die Spurtopologie auf S mit der diskreten Topologie übereinstimmt, so ist die Mächtigkeit von $\mathcal{P}(S)$ kleiner oder gleich der von $\mathcal{P}(D)$, wenn X normal ist. Insbesondere muss dann die Mächtigkeit von S kleiner als die $\mathcal{P}(D)$ sein.

Hinweis: Für $\emptyset \neq T \subseteq S$ wähle in X offene und disjunkte $U(T), V(T)$ mit $T \subseteq U(T)$ und $S \setminus T \subseteq V(T)$. Definieren Sie $f(T) := D \cap U(T)$, $f(\emptyset) := \emptyset$ und zeigen Sie, dass $f : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(D)$ injektiv ist. Verwenden Sie dabei, dass aus $T_1 \neq T_2$ folgt, dass $T_1 \cap (S \setminus T_2) \neq \emptyset$ oder $T_2 \cap (S \setminus T_1) \neq \emptyset$.

3.10 Mit der Notation aus Aufgabe 1.7 sei $(X, \mathcal{T})$ kompakt und gelte (T_2), und sei $R = C(X, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass dann das Bild von ϕ genau die Menge aller maximalen Ideal von R ist, und dass $\phi : X \to \phi(X)$ ein Homöomorphismus ist.

Hinweis: Für $f_1, \dots, f_n \in I$ (I maximales Ideal) zeige man, dass $\bigcap_{j=1,\dots,n} f_j^{-1}\{0\}$ nicht leer ist, indem man aus dem Gegenteil die Existenz einer Nullstellenfreien Funktion aus I herleitet. Nun verwende die Kompaktheit, um auf $I \in \phi(X)$ schließen zu können. Für den 2ten Teil zeige $\overline{\phi(A)} \subseteq \phi(\overline{A})$.

3.11 Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum mit (T_2) und einer Basis $\mathcal{B}$ der Topologie. Zeigen Sie, dass X dann stetiges Bild einer abgeschlossenen Teilmenge A von $\{0, 1\}^{\mathcal{B}}$ ist.

Hinweis: Setze $C(0, B) = \overline{B}$ und $C(1, B) = X \setminus B = B^c$ für $B \in \mathcal{B}$. Für $(\xi_B)_{B \in \mathcal{B}} \in \{0, 1\}^{\mathcal{B}}$ definiere $\phi((\xi_B)_{B \in \mathcal{B}}) := \bigcap_{B \in \mathcal{B}} C(\xi_B, B)$. Zeigen Sie mit Hilfe der kompaktheit von X, dass $A := \{(\xi_B)_{B \in \mathcal{B}} \in \{0, 1\}^{\mathcal{B}} : \phi((\xi_B)_{B \in \mathcal{B}}) \neq \emptyset\}$ abgeschlossen in $\{0, 1\}^{\mathcal{B}}$ ist. Zeigen Sie auch, dass $\phi((\xi_B)_{B \in \mathcal{B}})$ höchstens einpunktig ist, indem Sie $x \neq y$ aus dieser Menge auf einen Widerspruch führen. Nun definiere man $f : A \to X$ geeignet, sodass f stetig wird.

3.12 Zeigen Sie, dass jeder kompakte metrische Raum stetiges Bild der Kantorschen Menge C ist.

Anmerkung: Daraus und aus der Funktionalanalysis leitet man unschwer her, dass jeder separable Banachraum Y isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von $C(C)$ ist. In der Tat ist die abgeschlossene Einheitskugel $K_1^{Y'}(0)$ des Dualraumes von Y bzgl. der schwach* Topologie kompakt und metrisierbar, also das stetige Bild $f(C)$ der Kantorschen Menge. Zudem ist gemäß Hahn-Banach $y \mapsto (y' \mapsto y'(y))$ eine lineare Isometrie von Y nach $C(K_1^{Y'}(0))$. Schließlich ist dann $y \mapsto (t \mapsto f(t)(y))$ eine lineare Isometrie von Y nach $C(C)$.

3.13 Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten C eines Produktraumes $\prod_{i\in I} X_i$ versehen mit der Produkttopologie $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ immer von der Form $\prod_{i\in I} C_i$ sind, wobei die C_i Zusammenhangskomponenten von $(X_i, \mathcal{T}_i)$ sind!

4 vollständig reguläre Räume und Kompaktifizierungen

Definition 4.1. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt

$(T_{3,5})$, falls es für alle abgeschlossenen $A \subseteq X$ und alle $x \in A^\complement$ eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ gibt, sodass $f(x) = 0$ und $f(A) \subseteq \{1\}$.

Bemerkung 4.2. Aus $(T_{3,5})$ folgt (T_3). Seien nämlich $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen und $x \in X, x \notin A$. Erfüllt $(X, \mathcal{T})$ das Axiom $(T_{3,5})$, sprich es gibt eine stetige Abbildung $f : X \to [0,1]$ mit $f(x) = 0$ und $f(A) \subseteq \{1\}$, so sind x und A durch die offenen Mengen $x \in f^{-1}\left[0, \frac{1}{2}\right)$ und $A \subseteq f^{-1}\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ getrennt. //

Definition 4.3. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **vollständig regulär**, falls dieser $(T_{3,5})$ und (T_0) erfüllt.

Bemerkung 4.4. Jeder (vollständig) normale topologische Raum erfüllt (T_1), was nach Satz 3.30 äquivalent zur Abgeschlossenheit von Punkten ist. Damit folgt unmittelbar aus dem Lemma von Urysohn 3.55 und weil aus (T_1) das Axiom (T_0) folgt, dass jeder normale topologische Raum auch vollständig regulär ist.
Weil aus $(T_{3,5})$ das Trennungsaxiom (T_3) folgt, ist jeder vollständig reguläre topologische Raum auch regulär und erfüllt somit auch (T_1) und (T_2). Insbesondere ist also ein topologischer Raum genau dann vollständig regulär, wenn er $(T_{3,5})$ und (T_2) erfüllt, respektive genau dann, wenn er $(T_{3,5})$ und (T_1) erfüllt. //

Lemma 4.5. *Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume und $f_i : X \to X_i$ Abbildungen für $i \in I$. Weiters sei X versehen mit der Topologie $\mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$. Falls $(X_i, \mathcal{T}_i)$ für alle $i \in I$ das Axiom $(T_{3,5})$ erfüllt, so erfüllt auch $(X, \mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\}))$ das Axiom $(T_{3,5})$.*

Beweis. Sei $A \subseteq X$ bezüglich $\mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$ abgeschlossen und sei $x \in A^\complement \in \mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$. Da die Urbilder der Mengen aus $\mathcal{T}_i, i \in I$ eine Subbasis von $\mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$ bilden, gilt $x \in f_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_n}^{-1}(O_{i_n}) \subseteq A^\complement$ für gewisse $O_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}, k \in \{1, \ldots, n\}$ für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $k \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig. Es gilt $f_{i_k}(x) \in O_{i_k}$ und $O_{i_k}^\complement$ ist abgeschlossen in $\mathcal{T}_{i_k}$. Somit folgt aus $(T_{3,5})$ die Existenz einer stetigen Funktion $h_{i_k} : X_{i_k} \to [0,1]$, welche $h_{i_k}(f_{i_k}(x)) = 0$ und $h_{i_k}\left(O_{i_k}^\complement\right) \subseteq \{1\}$ erfüllt. Die Abbildung

$$h : \begin{cases} X & \to \quad [0,1] \\ y & \mapsto \quad \max_{k=1,\ldots,n} h_{i_k} \circ f_{i_k}(y) \end{cases}$$

ist als Maximum stetiger Funktionen stetig und erfüllt $h(x) = 0$. Weiters folgt aufgrund von $A \subseteq \left(f_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \cdots \cap f_{i_n}^{-1}(O_{i_n})\right)^\complement = f_{i_1}^{-1}\left(O_{i_1}^\complement\right) \cup \cdots \cup f_{i_n}^{-1}\left(O_{i_n}^\complement\right)$, dass es für jedes $a \in A$ ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $f_{i_k}(a) \in O_{i_k}^\complement$. Ergo ist $h_{i_k}(f_{i_k}(a)) = 1$ und damit auch $h(a) = 1$, was $(T_{3,5})$ zeigt. ■

Lemma 4.6. *Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{O})$ topologische Räume. Ist $\mathcal{F}$ eine Menge, bestehend aus stetigen Funktionen $f : X \to Y$, sodass für ein $P \in \mathcal{O}$ das Mengensystem $\{f^{-1}(P) : f \in \mathcal{F}\}$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist, so gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{init}}(\mathcal{F})$.*
Erfüllt $\mathcal{T}$ das Axiom (T_0), dann ist $\mathcal{F}$ punktetrennend.

Beweis. Nach Definition der initialen Topologie gilt $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}_{\text{init}}(\mathcal{F})$, denn alle $f \in \mathcal{F}$ sind bezüglich $\mathcal{T}$ stetig und $\mathcal{T}_{\text{init}}(\mathcal{F})$ ist die gröbste solche Topologie. Umgekehrt ist $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie, welche $\{f^{-1}(P) : f \in \mathcal{F}\}$ enthält, da es sich um eine Subbasis handelt. Dieses Mengensystem liegt auch in $\mathcal{T}_{\text{init}}(\mathcal{F})$, da $P \in \mathcal{O}$ und da alle $f \in \mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{T}_{\text{init}}(\mathcal{F})$ stetig sind. Also gilt auch $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\text{init}}(\mathcal{F})$.
Erfüllt $\mathcal{T}$ das Trennungsaxiom (T_0) so gibt es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ eine Menge $O \in \mathcal{T}$ mit o.B.d.A. $x \in O$ und $y \notin O$. Wäre $f(x) = f(y)$ für alle $f \in \mathcal{F}$ erfüllt, so hätte man $x, y \in f^{-1}(P)$ oder $x, y \notin f^{-1}(P)$ für $f \in \mathcal{F}$. Weil $\{f^{-1}(P) : f \in \mathcal{F}\}$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist, folgte offensichtlich $x, y \in O$ oder $x, y \notin O$ für alle $O \in \mathcal{T}$.$\lightning$ Damit existert ein $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x) \neq f(y)$. ■

Lemma 4.7. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Man betrachte die beiden Mengensysteme $\mathcal{C} := \{f^{-1}\{0\} | f : X \to [0,1], f$ stetig bzgl. $\mathcal{T}\}$ und $\mathcal{B} := \left\{C^{\complement} : C \in \mathcal{C}\right\}$. Falls $(X, \mathcal{T})$ das Axiom $(T_{3,5})$ erfüllt, ist $\mathcal{B}$ eine Basis und es gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{init}}(\{f | f : X \to [0,1], f$ stetig bzgl. $\mathcal{T}\})$. Ist $(X, \mathcal{T})$ sogar vollständig regulär, so ist $\{f | f : X \to [0,1], f$ stetig bzgl. $\mathcal{T}\}$ punktetrennend.*

Beweis. Für $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$ ist $O^{\complement}$ abgeschlossen und enthält x nicht. Also liefert $(T_{3,5})$ eine stetige Abbildung $f : X \to [0,1]$ mit $f(x) = 0$ und $f\left(O^{\complement}\right) \subseteq \{1\}$. Die Funktion $g : X \to [0,1]$ definiert durch $g(y) := 1 - f(y)$ ist ebenfalls stetig und erfüllt $g(x) = 1$ und $g\left(O^{\complement}\right) \subseteq \{0\}$, womit $O^{\complement} \subseteq g^{-1}\{0\}$, also $x \in \left(g^{-1}\{0\}\right)^{\complement} \subseteq O$. Die Menge $\left(g^{-1}\{0\}\right)^{\complement}$ liegt in $\mathcal{B}$, woraus folgt, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}$ ist.
Wegen $\left(f^{-1}\{0\}\right)^{\complement} = f^{-1}(0,1]$ und weil $(0,1]$ in $[0,1]$ offen ist, folgt aus Lemma 4.6, dass $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{init}}(\{f | f : X \to [0,1], f$ stetig bzgl. $\mathcal{T}\})$. Ist $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär, so gilt (T_0) und wiederum nach Lemma 4.6 ist $\{f | f : X \to [0,1], f$ stetig bzgl. $\mathcal{T}\}$ punktetrennend. ■

Definition 4.8. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Basis $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von $\mathcal{T}$ heißt **schwach regulär**, wenn sie

$$\forall B \in \mathcal{B} \forall x \in B \exists C \in \mathcal{B} : x \in C^{\complement} \subseteq B$$

erfüllt.
Sie heißt **(T_0)-Basis**, falls es zu je zwei Punkten $x \neq y$ aus X eine Menge $B \in \mathcal{B}$ gibt, sodass

$$(x \in B \wedge y \notin B) \vee (y \in B \wedge x \notin B).$$

Bemerkung 4.9. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Basis. Aus der Tatsache, dass $(X, \mathcal{T})$ genau dann (T_0) erfüllt, wenn es für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $O \in \mathcal{T}$ gibt, sodass $x \in O, y \notin O$ oder $y \in O, x \notin O$, sowie aus der Basiseigenschaft

$$\forall O \in \mathcal{T} \forall x \in O \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subseteq O$$

folgt, dass $(X, \mathcal{T})$ genau dann (T_0) ist, wenn $\mathcal{B}$ eine (T_0)-Basis ist. //

Lemma 4.10. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und erfülle dieser $(T_{3,5})$. Mit der Notation aus Lemma 4.7 ist dann $\mathcal{B}$ eine normale und schwach reguläre Basis. Genau dann, wenn $(X, \mathcal{T})$ auch vollständig regulär ist, ist $\mathcal{B}$ auch eine (T_0)-Basis.*

Beweis. Zunächst ist $\mathcal{B}$ nach Lemma 4.7 eine Basis von $\mathcal{T}$.
Seien $A, B \in \mathcal{C}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Nach Definition gibt es stetige Abbildungen f, g von X nach $[0,1]$ mit $A = f^{-1}\{0\}$ und $B = g^{-1}\{0\}$. Die Abbildung $f + g : X \to [0,2]$ ist ebenfalls stetig.

Außerdem ist sie auf gesamt X größer 0, da für jedes $x \in X$ immer $x \notin A$ oder $x \notin B$ und damit $f(x) > 0$ oder $g(x) > 0$ gilt. Die Abbildung

$$h : \begin{cases} X & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \frac{f(x)}{f(x)+g(x)} \end{cases}$$

ist wohldefiniert und stetig. Weiters gelten offensichtlich $A \subseteq h^{-1}\left[0, \frac{1}{4}\right)$ und $B \subseteq h^{-1}\left(\frac{3}{4}, 1\right]$ sowie $h^{-1}\left[0, \frac{1}{4}\right) \cap h^{-1}\left(\frac{3}{4}, 1\right] = \emptyset$. Die Abbildung $\hat{h}(x) := \frac{1}{4} - \min\left(\frac{1}{4}, h(x)\right)$ für $x \in X$ bildet X auf $[0,1]$ ab und ist stetig. Außerdem gilt $\hat{h}(x) = 0$ genau dann, wenn $h(x) \geq \frac{1}{4}$. Das bedeutet zusammen mit der Stetigkeit $\mathcal{C} \ni \hat{h}^{-1}\{0\} = h^{-1}\left[\frac{1}{4}, 1\right]$, woraus $h^{-1}\left[0, \frac{1}{4}\right) \in \mathcal{B}$ folgt. Völlig analog liefert die Abbildung $\tilde{h}(x) := \frac{1}{4} - \min\left(\frac{1}{4}, 1 - h(x)\right)$ für $x \in X$, dass $h^{-1}\left(\frac{3}{4}, 1\right] \in \mathcal{B}$, womit $\mathcal{B}$ normal ist.
Sei $B \in \mathcal{B}$ und sei $x \in B$. Nach Definition von $\mathcal{B}$ existiert eine stetige Abbildung $f : X \to [0,1]$, sodass $B = f^{-1}(0,1] \ni x$. Damit gilt $1 \geq f(x) > 0$ und die Abbildung $h : X \to [0,1]$ definiert durch $h(y) := f(x) - \min(f(x), f(y))$ ist stetig, wodurch $h^{-1}\{0\} \in \mathcal{C}$. Für $y \in h^{-1}\{0\}$ folgt $f(y) \geq f(x) > 0$ und damit $y \in f^{-1}(0,1] = B$. Somit ist $h^{-1}\{0\} \subseteq B$ und folglich $\mathcal{B}$ schwach regulär.
Schließlich folgt aus Bemerkung 4.9, dass $(X, \mathcal{T})$ genau dann (T_0) ist, wenn $\mathcal{B}$ eine (T_0)-Basis ist. ■

Satz 4.11. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dieser erfüllt $(T_{3,5})$ genau dann, wenn er eine normale, schwach reguläre Basis besitzt. Genau dann, wenn $\mathcal{T}$ eine normale, schwach reguläre (T_0)-Basis besitzt, ist der Raum vollständig regulär.*

Beweis. „$\Rightarrow$": In beiden Fällen handelt es sich nach Lemma 4.10 bei $\mathcal{B}$ aus Lemma 4.7 um eine entsprechende Basis.
„$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine normale, schwach reguläre Basis von $\mathcal{T}$ und seien $A \subseteq X$ abgeschlossen und $x \in A^\complement \in \mathcal{T}$. Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq A^\complement$. Da $\mathcal{B}$ schwach regulär ist, gibt es weiters ein $C \in \mathcal{B}$ mit $x \in C^\complement \subseteq B \subseteq A^\complement$. Da B und C aus $\mathcal{B}$ sind, $C^\complement$ und $B^\complement$ disjunkt sind und $\mathcal{B}$ normal ist, folgt mit Lemma 3.54, dass es eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ gibt, sodass $f\left(C^\complement\right) \subseteq \{0\}$ und $f\left(B^\complement\right) \subseteq \{1\}$. Aus $x \in C^\complement$ und $A \subseteq B^\complement$ folgen $f(x) = 0$ und $f(A) \subseteq \{1\}$, also gilt $(T_{3,5})$. Die Eigenschaft (T_0)-Basis ist nach Bemerkung 4.9 äquivalent zu (T_0). Somit folgt in diesem Falle, dass $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär ist. ■

Satz 4.12. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dieser ist genau dann vollständig regulär, wenn er homöomorph zu einem $A \subseteq [0,1]^I$ mit einer gewissen Indexmenge I ist. Dabei lässt sich I als $\mathcal{F} := \{f | f : X \to [0,1], f \text{ stetig bzgl. } \mathcal{T}\}$ wählen.*

Beweis. „$\Leftarrow$": Die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$ ist, da sie von d_2 induziert wird, nach Lemma 3.43 normal. Weil $[0,1]$ mit der Spurtopologie versehen ist und diese eine initiale Topologie ist, liefern Lemma 4.5 und Lemma 3.26, dass auch $[0,1]$ vollständig regulär ist. Analoge Argumentationen mit der Produkttopologie auf $[0,1]^I$ und der Spurtopologie auf $A \subseteq [0,1]^I$ zeigen, dass A vollständig regulär ist. Wie man leicht einsieht, erhalten Homöomorphismen die Axiome $(T_{3,5})$ und (T_0), womit $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär ist.
„$\Rightarrow$": Unter der Voraussetzung, dass $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär ist, besagt Lemma 4.7, dass $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{init}}(\mathcal{F})$ und dass $\mathcal{F}$ punktetrennend ist. Mit Aufgabe 3.3 erhält man, dass $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einem $A \subseteq [0,1]^{\mathcal{F}}$ ist. ■

Lemma 4.13. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ Basen von $\mathcal{T}$. Es gibt dann eine Basis $\mathcal{B}'' \subseteq \mathcal{B}'$ von $\mathcal{T}$, sodass es eine surjektive Abbildung von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}''$ gibt, falls $\mathcal{B}$ nicht endlich ist, respektive sodass es eine surjektive Abbildung von $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}''$ gibt, falls $\mathcal{B}$ endlich ist.*

Beweis. Falls $\mathcal{B}$ unendlich ist, gibt es laut Mengenlehre eine Bijektion zwischen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Somit müssen in beiden Fällen nur eine surjektive Abbildung von $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}''$ und ein entsprechendes $\mathcal{B}''$ angegeben werden. Sei dazu

$$\mathcal{M} := \{(G, B) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} | \exists B' \in \mathcal{B}' : G \subseteq B' \subseteq B\} \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{B}.$$

Man kann also zu $(G, B) \in \mathcal{M}$ ein $B'(G, B) \in \mathcal{B}'$ auswählen, sodass $G \subseteq B'(G, B) \subseteq B$. Damit setzt man

$$\mathcal{B}'' := \{B'(G, B) : (G, B) \in \mathcal{M}\} \subseteq \mathcal{B}'.$$

B' ist dann eine surjektive Abbildung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{B}''$, welche man beliebig auf $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ fortsetzen kann.
Seien schließlich $x \in X$ und $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O$. Da $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basen sind, existieren $G, B \in \mathcal{B}$ und $B' \in \mathcal{B}'$ mit $x \in G \subseteq B' \subseteq B \subseteq O$. Somit ist $B'(G, B)$ wohldefiniert und liegt in $\mathcal{B}''$ mit $x \in G \subseteq B'(G, B) \subseteq B \subseteq O$. Ergo ist $\mathcal{B}''$ eine Basis. ∎

Satz 4.14. *Seien $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer Raum und $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine nicht endliche Basis dieses Raumes. $(X, \mathcal{T})$ ist unter diesen Voraussetzungen homöomorph zu einem $A \subseteq [0, 1]^{\mathcal{C}}$. Ist $\mathcal{C}$ endlich, so ist $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einem $A \subseteq [0, 1]^{\mathcal{C} \times \mathcal{C}}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ nicht endlich. Man betrachte die Basis $\mathcal{B}$ aus Lemma 4.7 und $\mathcal{F} \subseteq [0, 1]^X$ aus Satz 4.12. Mit dieser Notation gilt $\mathcal{B} = \left\{ \left(f^{-1}\{0\}\right)^{\complement} : f \in \mathcal{F} \right\}$. Lemma 4.13 bedingt die Existenz einer Basis $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ des zu Grunde liegenden Raumes, zu welcher es eine surjektive Abbildung von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}'$ gibt. Wegen des Auswahlaxioms gibt es dann eine injektive Abbildung von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{C}$. Sei $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ so gewählt, dass $f \mapsto \left(f^{-1}\{0\}\right)^{\complement}$ eine Bijektion von $\mathcal{F}'$ auf $\mathcal{B}'$ darstellt.[3] Damit gibt es eine injektive Abbildung ι von $\mathcal{F}'$ nach $\mathcal{C}$. Außerdem liefert aufgrund von $\left(f^{-1}\{0\}\right)^{\complement} = f^{-1}(0, 1]$ für $f \in \mathcal{F}'$ und weil $(0, 1]$ in $[0, 1]$ offen ist, Lemma 4.6, dass $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{init}}(\mathcal{F}')$. Weiters ist$(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär, es gilt also (T_0) und wiederum nach Lemma 4.6, dass $\mathcal{F}'$ punktetrennend ist. Wegen Aufgabe 3.3 ist dann $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einem $A' \subseteq [0, 1]^{\mathcal{F}'}$. Die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} [0, 1]^{\mathcal{F}'} & \to \quad [0, 1]^{\mathcal{C}} \\ (x_i)_{i \in \mathcal{F}'} & \mapsto \quad (x_j)_{j \in \mathcal{C}} \text{ mit } x_j := \begin{cases} x_i, & \text{für } j = \iota(i) \in \iota(\mathcal{F}') \\ 0, & \text{für } j \notin \iota(\mathcal{F}') \end{cases} \end{cases}$$

ist wegen der Injektivität von $\iota : \mathcal{F}' \to \mathcal{C}$ wohldefiniert und injektiv. Darüber hinaus ist φ offensichtlich stetig und auf das Bild eingeschränkt, also

$$\varphi : [0, 1]^{\mathcal{F}'} \to \varphi\left([0, 1]^{\mathcal{F}'}\right) = [0, 1]^{\iota(\mathcal{F}')} \times \{0\}^{\mathcal{C} \setminus \iota(\mathcal{F}')},$$

sogar ein Homöomorphismus. Infolge ist $A := \varphi(A') \subseteq [0, 1]^{\mathcal{C}}$ homöomorph zu A' und damit auch zu $(X, \mathcal{T})$.
Für endliche $\mathcal{C}$ ist der Beweis ebenso gültig. Man muss nur $\mathcal{C}$ durch $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ersetzen. ∎

[3] Man kann zum Beispiel mit dem Auswahlaxiom zu jedem $B' \in \mathcal{B}'$ ein $f \in \mathcal{F}$, das B erzeugt, auswählen.

Definition 4.15. Seien $(X, \mathcal{T})$ und $(K, \mathcal{O})$ topologische Räume und $c : X \to K$ eine Abbildung. $((K, \mathcal{O}), c)$ heißt **(T_2)-Kompaktifizierung** von $(X, \mathcal{T})$, falls

- $(K, \mathcal{O})$ kompakt ist und (T_2) erfüllt,
- $c : X \to c(X)$ ein Homöomorphismus (bezüglich $\big(c(X), \mathcal{O}|_{c(X)}\big)$) ist und
- $c(X)$ dicht in K liegt.

Beispiel 4.16. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter, aber nicht kompakter topologischer Raum, welcher (T_2) erfüllt. Dann ist nach [**ana**] der Raum $(Y, \mathcal{O})$ mit $Y := X \uplus \{\infty\}$ und

$$\mathcal{O} := \mathcal{T} \uplus \{\{\infty\} \uplus (X \setminus K) : K \subseteq X, K \text{ kompakt}\},$$

wobei $\infty \notin X$, der bis auf Homöomorphie eindeutige topologische Raum, sodass $X \in \mathcal{O}$ ist, $Y \setminus X$ einelementig ist, $\mathcal{T} = \mathcal{O}|_X$ gilt und $(Y, \mathcal{O})$ kompakt und (T_2) ist. Man nennt $(Y, \mathcal{O})$ Einpunkt-Komapktifizierung oder Alexandroff-Kompaktifizierung. Sei $\iota : X \to Y$ die kanonische Einbettung. Wegen $\iota(X) = X$, $\mathcal{O}|_{\iota(X)} = \mathcal{O}|_X = \mathcal{T}$ ist $\iota : X \to \iota(X) = X$ (es handelt sich hier um die Identität) ein Homöomorphismus. Y ist kompakt und (T_2). Wäre X abgeschlossen in $(Y, \mathcal{O})$, so wäre X kompakt in $(Y, \mathcal{O})$ und damit bekanntermaßen auch kompakt in $(X, \mathcal{O}|_X = \mathcal{T})$.↯ Also ist X in $(Y, \mathcal{O})$ nicht abgeschlossen und damit $\overline{\iota(X)} = Y$. Alles in allem ist die Alexandroff-Kompaktifizierung also eine (T_2)-Kompaktifizierung. //

Satz 4.17. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann vollständig regulär, wenn er eine (T_2)-Kompaktifizierung besitzt.*

Beweis. „$\Leftarrow$“: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(K, \mathcal{O})$ eine (T_2)-Kompaktifizierung dieses Raumes bezüglich $c : X \to K$. Nach Lemma 3.18 ist $(K, \mathcal{O})$ normal und damit auch vollständig regulär. Lemma 4.5 und Lemma 3.26 übertragen diese Eigenschaft auf $\big(c(X), \mathcal{O}|_{c(X)}\big)$ und, wie man leicht einsieht, der Homöomorphismus c in weiterer Folge auf $(X, \mathcal{T})$.
„$\Rightarrow$“: Nach Satz 4.12 ist ein vollständig reguläres $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einem $A \subseteq [0,1]^I$ mit einer gewissen Inexmenge I. Sei c der entsprechende Homöomorphismus. Man betrachte $\overline{c(X)} = \overline{A}$ bezüglich der euklidischen Produkttopologie auf $[0,1]^I$. $[0,1]^I$ ist gemäß dem Satz von Tychonoff 2.29 kompakt und damit auch $\overline{A}$ als abgeschlossene Teilmenge. Bekanntermaßen ist dann auch $\overline{A}$ bezüglich der Spurtopologie von sich selbst kompakt. Wegen Lemma 3.26 vererbt sich auch (T_2) auf diese Spurtopologie. Da die Spurtopologie von A in $\overline{A}$ mit jener in $[0,1]^I$ übereinstimmt, und da $\overline{c(X)}^{\overline{A}} = \overline{A}^{\overline{A}} = \overline{A} \cap \overline{A} = \overline{A}$, ist $\overline{A}$ mit der Spurtopologie, welche $[0,1]^I$ auf dieser Menge hinterlässt, eine (T_2)-Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$. ∎

Korollar 4.18. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter topologischer Raum, welcher (T_2) erfüllt. Dieser ist vollständig regulär.*

Beweis. Ist $(X, \mathcal{T})$ nicht kompakt, so existiert wegen Beispiel 4.16 eine (T_2)-Kompaktifizierung, weswegen aus Satz 4.17 die Aussage folgt. Ist $(X, \mathcal{T})$ kompakt, so ist $(X, \mathcal{T})$ wegen Lemma 3.18 normal, also auch vollständig regulär. ∎

Korollar 4.19. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dieser ist kompakt und erfüllt (T_2) genau dann, wenn er homöomorph zu einer abgeschlossene Teilmenge A von $[0,1]^I$ für eine gewisse Indexmenge I ist. Insbesondere lässt sich I als $\mathcal{F} := \{f | f : X \to [0,1], f \text{ stetig bzgl. } \mathcal{T}\}$ wählen.*

Beweis. „$\Leftarrow$“: Sei A eine entsprechende Mengen. $[0,1]^I$ ist nach dem Satz von Tychonoff 2.29 kompakt und damit auch A als abgeschlossene Teilmenge. A ist dann auch kompakt bezüglich der eigenen Spurtopologie. Homöomorphismen erhalten Kompaktheit. Wegen Lemma 3.26

vererbt sich auch (T_2) auf die Spurtopologie von A und wird von Homöomorphismen erhalten. Demnach ist $(X, \mathcal{T})$ kompakt und (T_2).
„$\Rightarrow$“: Sei $(X, \mathcal{T})$ kompakt und gelte (T_2). Nach Lemma 3.18 ist $(X, \mathcal{T})$ normal und daher vollständig regulär. Nach Satz 4.12 ist $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einem $A \subseteq [0,1]^I$ mit einer gewissen Menge I, welche als $\mathcal{F}$ gewählt werden kann. Homöomorphie erhält Kompaktheit, womit A bezüglich seiner Spurtopologie und deshalb auch als Teilmenge von $[0,1]^I$ kompakt ist. Da $[0,1]^I$ das Axiom (T_2) erfüllt, ist A in $[0,1]^I$ abgeschlossen. ∎

Lemma 4.20. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und erfülle dieser das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Unter diesen Voraussetzungen ist $(X, \mathcal{T})$ separabel, das heißt, es existiert eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge.*

Beweis. Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine höchstens abzählbare Basis von $\mathcal{T}$. Man wähle für jedes $\emptyset \neq B \in \mathcal{B}$ ein $x_B \in B$ aus. Die Menge $D := \{x_B : \emptyset \neq B \in \mathcal{B}\}$ ist dann höchstens abzählbar. Zu $x \in X$ und $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es dann ein $O \in \mathcal{T}$, sodass $x \in O \subseteq U$ und, da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq O \subseteq U$. Wegen $B \neq \emptyset$ gilt $U \cap D \supseteq O \cap D \supseteq B \cap D \ni x_B$. Also ist $U \cap D$ nicht leer. Da $U \in \mathcal{U}(x)$ beliebig war, folgt $x \in \overline{D}$. Da auch $x \in X$ beliebig war folgt $\overline{D} = X$. ∎

Korollar 4.21. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. $(X, \mathcal{T}(d))$ ist genau dann separabel, wenn $(X, \mathcal{T}(d))$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.*

Beweis. Erfüllt $(X, \mathcal{T}(d))$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so ist der Raum nach Lemma 4.20 auch separabel.
Sei $(X, \mathcal{T}(d))$ separabel mit $D \subseteq X$, also $\overline{D} = X$. Das Mengensystem $\mathcal{B} := \{U_q(x) : x \in D, q \in \mathbb{Q}, q > 0\}$ ist dann höchstens abzählbar. Seien $O \in \mathcal{T}(d)$ und $y \in O$. Man wähle nun $\varepsilon > 0$ so klein, dass $U_\varepsilon(y) \subseteq O$. Da D dicht in X liegt und $U_{\frac{\varepsilon}{3}}(y)$ eine Umgebung von y ist, gibt es ein $x \in D \cap U_{\frac{\varepsilon}{3}}(y)$. Für ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{\varepsilon}{3} < q < \frac{2\varepsilon}{3}$ gilt dann $y \in U_q(x)$ und für $z \in U_q(x)$

$$d(y,z) \leq \overbrace{d(x,y)}^{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d(x,z)}_{<\frac{2\varepsilon}{3}} < \varepsilon,$$

also $y \in U_q(x) \subseteq U_\varepsilon(y) \subseteq O$ und $U_q(x) \in \mathcal{B}$, womit $\mathcal{B}$ eine höchstens abzählbare Basis ist. ∎

Metrisierungssatz von Urysohn 4.22. *Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $(X, \mathcal{T})$ ist kompakt und erfüllt (T_2), sowie das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

(ii) $(X, \mathcal{T})$ ist kompakt und metrisierbar, sprich es gibt eine Metrik d auf X, sodass $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$.

(iii) $(X, \mathcal{T})$ ist homöomorph zu einer abgeschlossenen Teilmenge A von $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (iii)“: Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine höchstens abzählbare Basis von $(X, \mathcal{T})$ und sei $(X, \mathcal{T})$ kompakt und (T_2). Nach Lemma 3.18 ist $(X, \mathcal{T})$ normal und daher vollständig regulär. Wenn $\mathcal{B}$ abzählbar ist, gibt es eine bijektive Abbildung $\kappa : \mathcal{B} \to \mathbb{N}$. Außerdem liefert Satz 4.14, dass es ein $A' \subseteq [0,1]^{\mathcal{B}}$ gibt, zu welchem $(X, \mathcal{T})$ homöomorph ist. Da $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist und Homöomorphie Kompaktheit erhält, ist auch A' kompakt. Die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} A' & \to \quad [0,1]^{\mathbb{N}} \\ (x_i)_{i \in \mathcal{B}} & \mapsto \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ wobei } x_n := x_i \text{ für } i = \kappa^{-1}(n), \end{cases}$$

ist wohldefiniert und injektiv, sowie als Abbildung von A' nach $A := \varphi(A')$ offensichtlich homöomorph. Folglich ist A kompakt und damit auch als Teilmenge von $[0,1]^{\mathbb{N}}$ kompakt. Wegen (T_2) auf $[0,1]^{\mathbb{N}}$ ist A dann auch abgeschlossen als Teilmenge von $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Wenn $\mathcal{B}$ endlich ist, ist nach Satz 4.14 der Raum $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einem $A' \subseteq [0,1]^{\mathcal{B}\times\mathcal{B}}$. Da $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ ebenfalls endlich ist gilt $\mathcal{B}\times\mathcal{B} = \{C_1, \dots, C_m\}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene $C_i, i \in \{1, \dots, m\}$. Völlig analog zum abzählbaren Falle ist A' kompakt. Die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} A' & \to \quad [0,1]^{\mathbb{N}} \\ (x_i)_{i\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}} & \mapsto \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ wobei } x_n := \begin{cases} x_{C_n} & \text{falls } n \in \{1,\dots,m\}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \end{cases}$$

ist wohldefiniert und injektiv, sowie als Abbildung von A' nach $A := \varphi(A')$ offensichtlich homöomorph. Folglich ist A kompakt und damit auch als Teilmenge von $[0,1]^{\mathbb{N}}$ kompakt. Wegen (T_2) auf $[0,1]^{\mathbb{N}}$ ist A dann auch abgeschlossen als Teilmenge von $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

„(iii) ⇒ (ii)“: Sei $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einer abgeschlossenen Teilmenge A von $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Da $[0,1]$ kompakt ist, ist es wegen des Satzes von Tychonoff 2.29 auch $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Daher ist A kompakt als Teilmenge von $[0,1]^{\mathbb{N}}$ und somit auch kompakt bezüglich seiner Spurtopologie. Als homöomorphes Bild ist also auch $(X, \mathcal{T})$ kompakt. Die euklidische Spurtopologie auf $[0,1]$ entsprich nach Aufgabe 1.16 der Topologie $\mathcal{T}(d_2|_{[0,1]\times[0,1]})$. Damit gibt es gemäß Aufgabe 1.17 eine Metrik d auf $[0,1]^{\mathbb{N}}$, welche die Produkttopologie induziert. $d|_{A\times A}$ induziert dann wiederum nach Aufgabe 1.16 die Spurtopologie auf A. Wie man leicht einsieht ist dann $d|_{X\times X}(\varphi(.), \varphi(.))$, wobei $\varphi : X \to A$ der Homöomorphismus sei, eine Metrik auf X, welche $\mathcal{T}$ induziert.

„(ii) ⇒ (i)“: Sei $(X, \mathcal{T})$ kompakt und metrisierbar. Dann erfüllt $(X, \mathcal{T})$ wegen der Metrisierbarkeit auch (T_2). Kompakte metrische Räume sind total beschränkt; siehe [**ana**]. Das heißt

$$\forall i \in \mathbb{N} \exists x_1^i, \dots, x_{n(i)}^i : X = \bigcup_{j=1}^{n(i)} U_{\frac{1}{i}}\left(x_j^i\right).$$

Seien nun für alle $i \in \mathbb{N}$ solche Punkte ausgewählt. Die Menge $D := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left\{x_1^i, \dots, x_{n(i)}^i\right\}$ ist abzählbar. Für ein $x \in X$ und ein $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $x \in U_\varepsilon(x) \subseteq U$. Wählt man nun $i \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{i} < \varepsilon$, so gibt es wegen der totalen Beschränktheit von X ein $j \in \{1, \dots, n(i)\}$, sodass $x \in U_{\frac{1}{i}}\left(x_j^i\right)$. Aufgrund der Wahl von n schließt man daraus $x_j^i \in U_\varepsilon(x)$, wodurch $D \cap U \neq \emptyset$ und infolge $x \in \overline{D} = X$. Das heißt $(X, \mathcal{T}(d))$ ist separabel und wegen Korollar 4.21 erfüllt der Raum das zweie Abzählbarkeitsaxiom. ■

Satz von Stone-Čech 4.23. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann existieren ein kompakter topologischer Raum $(\beta X, \beta\mathcal{T})$, welcher (T_2) erfüllt, und eine stetige Abbildung $h : X \to \beta X$, sodass für jeden kompakten topologischen (T_2) Raum $(K, \mathcal{O})$ und jede stetige Abbildung $f : X \to K$ eine eindeutige stetige Abbildung $\beta f : \beta X \to K$ mit $\beta f \circ h = f$ existiert und sodass $\overline{h(X)} = \beta X$ gilt.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[dl, dotted, "\beta f"] \\ K & \end{tikzcd}$$

Das Tupel $((\beta X, \beta\mathcal{T}), h)$ ist bis auf Homöomorphie eindeutig. Das heißt für einen kompakten topologischen Raum $(\gamma X, \gamma\mathcal{T})$, auf welchem (T_2) gilt, und eine stetige Abbildung $k : X \to \gamma X$, sodass für jeden kompakten topologischen (T_2) Raum $(K, \mathcal{O})$ und jede stetige Abbildung $f : X \to K$

eine eindeutige stetige Abbildung $\gamma f : \gamma X \to K$ mit $\gamma f \circ k = f$ existiert, gibt es einen Homöomorphismus $\varphi : \beta X \to \gamma X$ mit $\varphi \circ h = k$ und es gilt $\overline{k(X)} = \gamma X$.

$$\begin{tikzcd}
\gamma X \arrow[dr, dotted, "\gamma f"'] & X \arrow[l, "k"'] \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "f"] & \beta X \arrow[ll, dashed, bend right, "\varphi"'] \arrow[dl, dotted, "\beta f"] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Seien $(K, \mathcal{O})$ ein kompakter topologischer Raum, welcher (T_2) erfüllt, und $f : X \to K$ stetig. Solche Tupel $((K, \mathcal{O}), f)$ existieren. Man nehme beispielsweise $(\{0\}, \{\emptyset, \{0\}\})$ und die stetige Abbildung $f : X \to \{0\}, f \equiv 0$. Sei

$$\psi : \begin{cases} \overline{f(X)} & \to & \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \\ y & \mapsto & \psi(y) := \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}(y)\}. \end{cases}$$

Für $y_1, y_2 \in \overline{f(X)}$ mit $y_1 \neq y_2$ gibt es wegen (T_2) auf $(K, \mathcal{O})$ disjunkte Umgebungen $U_j \in \mathcal{U}(y_j), j = 1, 2$. $f^{-1}(U_1)$ liegt in $\psi(y_1)$. Gäbe es ein $V_2 \in \mathcal{U}(y_2)$, sodass $f^{-1}(U_1) = f^{-1}(V_2)$, so gälte $f^{-1}(V_2) \cap f^{-1}(U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Andererseits folgte aber wegen $U_2 \cap V_2 \in \mathcal{U}(y_2)$ und $y_2 \in \overline{f(X)}$, dass $f(X) \cap (U_2 \cap V_2) \neq \emptyset$, womit $f^{-1}(V_2) \cap f^{-1}(U_2) = f^{-1}(U_2 \cap V_2) \neq \emptyset \lightning$. Also gilt $f^{-1}(U_1) \notin \psi(y_2)$ und infolge $\psi(y_1) \neq \psi(y_2)$, womit ψ injektiv ist.
Betrachtet man $K_0 := \psi\left(\overline{f(X)}\right)$ und $\mathcal{O}_0 := \psi\left(\mathcal{O}|_{\overline{f(X)}}\right)$, so ist, wie man leicht nachrechnet, $(K_0, \mathcal{O}_0)$ ein topologischer Raum und ψ ein Homöomorphismus von $\left(\overline{f(X)}, \mathcal{O}|_{\overline{f(X)}}\right)$ nach $(K_0, \mathcal{O}_0)$. Als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes, welcher (T_2) erfüllt, ist $\overline{f(X)} \subseteq K$ in K kompakt und somit ist auch $\left(\overline{f(X)}, \mathcal{O}|_{\overline{f(X)}}\right)$ kompakt. Außerdem gilt nach Lemma 3.26 auf $\left(\overline{f(X)}, \mathcal{O}|_{\overline{f(X)}}\right)$ das Axiom (T_2). Homöomorphismen erhalten Kompaktheit und auch (T_2), was $(K_0, \mathcal{O}_0)$ zu einem kompakten topologischen (T_2) Raum macht. Weil $f : X \to K$ stetig ist, ist es auch $f : X \to \overline{f(X)}$. Folglich ist auch $f_0 := \psi \circ f$ von $(X, \mathcal{T})$ nach $(K_0, \mathcal{O}_0)$ eine stetige Abbildung. Schließlich sei angemerkt, dass K_0 offensichtlich ein Element von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))$ ist.
Man definiert nun

$$\begin{aligned} \mathcal{M} := \{((K_0, \mathcal{O}_0), f_0) : K_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))), (K_0, \mathcal{O}_0) &\text{ ist kompakter topologischer} \\ \text{Raum mit } (T_2), f_0 : X \to K_0 \text{ ist stetig}\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{M}$ ist eine Menge, denn für $((K_0, \mathcal{O}_0), f_0) \in \mathcal{M}$ gilt $K_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))$, $\mathcal{O}_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))))$ und $f_0 \in \mathcal{P}(X \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))$. Ergo ist $((K_0, \mathcal{O}_0), f_0)$ im Produkt dieser drei Mengen, welches eine Menge ist, enthalten. Deshalb ist auch $\mathcal{M}$ eine Teilmenge des Produktes, also eine Menge. Aufgrund der anfänglichen Überlegungen gilt $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Man versieht nun $\prod_{((K_0, \mathcal{O}_0), f_0) \in \mathcal{M}} K_0$ mit der Produkttopologie $\prod_{((K_0, \mathcal{O}_0), f_0) \in \mathcal{M}} \mathcal{O}_0$ und definiert

$$h : \begin{cases} X & \to & \prod_{((K_0, \mathcal{O}_0), f_0) \in \mathcal{M}} K_0 \\ x & \mapsto & (f_0(x))_{((K_0, \mathcal{O}_0), f_0) \in \mathcal{M}}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Nach der Definition von $\mathcal{M}$ respektive der f_0 ist h komponentenweise stetig und damit stetig. Der Satz von Tychonoff 2.29 liefert, dass $\prod_{((K_0, \mathcal{O}_0), f_0) \in \mathcal{M}} K_0$ versehen mit $\prod_{((K_0, \mathcal{O}_0), f_0) \in \mathcal{M}} \mathcal{O}_0$ als Produkt kompakter Räume selbst kompakt ist. Weiters gilt wegen Lemma 3.26 das Axiom (T_2).

Setze $\beta X := \overline{h(X)}$ und $\beta\mathcal{T} := \prod_{((K_0,\mathcal{O}_0),f_0)\in\mathcal{M}} \mathcal{O}_0|_{\overline{h(X)}}$. βX ist als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes in $\prod_{((K_0,\mathcal{O}_0),f_0)\in\mathcal{M}} K_0$ kompakt, womit $(\beta X, \beta\mathcal{T})$ ein kompakter (T_2) Raum ist. Darüber hinaus ist $h : X \to \beta X$ stetig.
Seien $(K, \mathcal{O})$ ein beliebiger kompakter topologischer Raum, welcher (T_2) erfüllt, und $f : X \to K$ stetig. Unter diesen Umständen liefert der erste Teil des Beweises ein Tupel $((K_1, \mathcal{O}_1), f_1) \in \mathcal{M}$ und einen Homöomorphismus ψ von $\left(\overline{f(X)}, \mathcal{O}|_{\overline{f(X)}}\right)$ nach $(K_1, \mathcal{O}_1)$, welcher auch $f_1 = \psi \circ f$ erfüllt. Die kanonische Einbettung $\iota_{\beta X} : \beta X \to \prod_{((K_0,\mathcal{O}_0),f_0)\in\mathcal{M}} K_0$ ist, da βX die Spurtopologie trägt, stetig. Ist $\pi_{((K_1,\mathcal{O}_1),f_1)} : \prod_{((K_0,\mathcal{O}_0),f_0)\in\mathcal{M}} K_0 \to K_1$ die Projektion auf die Komponente $((K_1, \mathcal{O}_1), f_1)$, so ist $\beta f := \psi^{-1} \circ \pi_{((K_1,\mathcal{O}_1),f_1)} \circ \iota_{\beta X} : \beta X \to \overline{f(X)}$ stetig. Da $\overline{f(X)}$ mit der Spurtopologie versehen ist, erhält man sogar die Stetigkeit von $\beta f : \beta X \to K$. Die Abbildung $h : X \to \beta X$ zusammengesetzt mit $\iota_{\beta X}$ ist gerade die Abbildung in (4.1) und erfüllt $\pi_{((K_1,\mathcal{O}_1),f_1)} \circ \iota_{\beta X} \circ h = f_1 = \psi \circ f$. Wendet man darauf ψ^{-1} an, so erhält man $\beta f \circ h = f$.
Erfülle ein beliebiges stetiges $\widetilde{\beta f} : \beta X \to K$ ebenfalls $\widetilde{\beta f} \circ h = f$. Zu $y \in h(X)$ gibt es ein $x \in X$, sodass $h(x) = y$. Damit gilt $\widetilde{\beta f}(y) = \widetilde{\beta f} \circ h(x) = f(x) = \beta f \circ h(x) = \beta f(y)$. Ergo stimmen $\widetilde{\beta f}$ und βf auf $h(X)$ überein, was wegen $\beta X = \overline{h(X)}$ und (T_2) Gleichheit $\widetilde{\beta f} = \beta f$ auf gesamt βX nach sich zieht. βf ist somit eindeutig.
$\beta X = \overline{h(X)}$ gilt nach Definition, wobei der Abschluss in $\prod_{((K_0,\mathcal{O}_0),f_0)\in\mathcal{M}} K_0$ zu verstehen ist. Bekanntermaßen gilt $\overline{h(X)}^{\beta X} = \overline{h(X)}^{\overline{h(X)}} = \overline{h(X)} \cap \overline{h(X)} = \overline{h(X)}$, womit $\beta X = \overline{h(X)}$ auch in βX.
Zusammenfassend erfüllt also das Tupel $((\beta X, \beta\mathcal{T}), h)$ genau die Aussage des Satzes.
Zuletzt sei $((\gamma X, \gamma\mathcal{T}), k)$ ein weiters Tupel mit analogen Eigenschaften. $(\beta X, \beta\mathcal{T})$ und $(\gamma X, \gamma\mathcal{T})$ sind also komapkt und erfüllen (T_2). Weiters sind $h : X \to \beta X$ und $k : X \to \gamma X$ stetig. Demnach gibt es nach Voraussetzung eine eindeutige stetige Abbildung $\beta k : \beta X \to \gamma X$ mit $\beta k \circ h = k$, sowie eine eindeutige stetige Abbildung $\gamma h : \gamma X \to \beta X$ mit $\gamma h \circ k = h$. Die Abbildung $\gamma h \circ \beta k : \beta X \to \beta X$ erfüllt $(\gamma h \circ \beta k) \circ h = h$ und ist stetig. Genauso ist $\beta k \circ \gamma h : \gamma X \to \gamma X$ stetig und erfüllt $(\beta k \circ \gamma h) \circ k = k$. Selbiges erfüllen aber auch $\mathrm{id}_{\beta X}$ beziehungsweise $\mathrm{id}_{\gamma X}$. Diese jeweiligen Abbildungen müssen aber nach Voraussetzung eindeutig sein. Daraus folgt

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h"'] & \beta X \arrow[dl, dotted, "\gamma h \circ \beta k"] \\ \beta X & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h"'] & \beta X \arrow[dl, dotted, "\mathrm{id}_{\beta X}"] \\ \beta X & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "k"] \arrow[d, "k"'] & \gamma X \arrow[dl, dotted, "\beta k \circ \gamma h"] \\ \gamma X & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "k"] \arrow[d, "k"'] & \gamma X \arrow[dl, dotted, "\mathrm{id}_{\gamma X}"] \\ \gamma X & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{id}_{\beta X} = \gamma h \circ \beta k$ und $\mathrm{id}_{\gamma X} = \beta k \circ \gamma h$, womit γh eine stetige Inverse vom stetigen βk ist. Also ist $\varphi := \beta k : \beta X \to \gamma X$ ein Homöomorphismus mit $\varphi \circ h = k$. Abschließend liefern diese Gleichung und die Homöomorphie von φ, dass $\gamma X \supseteq \overline{k(X)} = \overline{\varphi(h(X))} \supseteq \varphi(\overline{h(X)}) = \varphi(\beta X) = \gamma X$, womit der Satz bewiesen ist. ■

Definition 4.24. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Mit der Notation des Satzes von Stone-Čech 4.23 nennt man das bis auf Isomorphie eindeutige Tupel $((\beta X, \beta\mathcal{T}), h)$ **Stone-Čech-Kompaktifizierung** von $(X, \mathcal{T})$.

Lemma 4.25. *Seien $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $((\beta X, \beta\mathcal{T}), h)$ die entsprechende Stone-Čech-Kompaktifizierung. Weiters seien $(\gamma X, \gamma\mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum, auf welchem (T_2) gilt, und $k : X \to \gamma X$ eine stetige Abbildung, sodass für alle stetigen $f : X \to [0, 1]$ genau eine stetige Funktion $\gamma f : \gamma X \to [0, 1]$ mit $\gamma f \circ k = f$ existiert. Unter diesen Voraussetzungen gibt es eine homöomorphe Abbildung $\varphi : \beta X \to \gamma X$, welche $k = \varphi \circ h$ erfüllt.*

$$\begin{tikzcd}
\gamma X \arrow[dr, dotted, "\gamma f"'] & X \arrow[l, "k"'] \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & \beta X \arrow[ll, dashed, bend right, "\varphi"'] \\
& {[0,1]} &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $(K, \mathcal{O})$ ein kompakter topologischer Raum mit (T_2). Weiters sei $f : X \to K$ stetig. Nach Korollar 4.19 ist $(K, \mathcal{O})$ homöomorph zu einer abgeschlossenen Teilmenge A von $[0,1]^I$ mit einer Indexmenge I. Sei g der Homöomorphismus von K nach A. Da A mit der Spurtopologie versehen ist, ist g betrachtet als $g : K \to [0,1]^I$ ebenfalls stetig. Bezeichnet $\pi_i : [0,1]^I \to [0,1]$ die Projektion auf die i-te Komponente, so ist die Abbildung $\pi_i \circ g \circ f : X \to [0,1]$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig für alle $i \in I$. Somit existiert nach Voraussetzung eine eindeutige stetige Abbildung $\gamma(\pi_i \circ g \circ f) : \gamma X \to [0,1]$ mit $\gamma(\pi_i \circ g \circ f) \circ k = \pi_i \circ g \circ f$. Definiere

$$s : \begin{cases} \gamma X & \to \quad [0,1]^I \\ y & \mapsto \quad (\gamma(\pi_i \circ g \circ f)(y))_{i \in I}. \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig, da sie komponentenweise stetig ist. Für $x \in X$ gilt $(\pi_i \circ s \circ k)(x) =$

$$\begin{tikzcd}
\beta X \arrow[rr, dashed, bend left, "\varphi"] \arrow[dr, dotted, "\beta f"'] & X \arrow[l, "h"'] \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"] & \gamma X \arrow[dl, dotted, "s"] \arrow[ddd, dotted, "\gamma(\pi_i \circ g \circ f)"] \\
& K \arrow[d, bend right, "g"'] & \\
& A \arrow[u, dotted, bend right, "g^{-1}"'] \arrow[dd, squiggly] & \\
& & \\
& {[0,1]^I} \arrow[r, "\pi_i"] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

$\gamma(\pi_i \circ g \circ f)(k(x)) = (\gamma(\pi_i \circ g \circ f) \circ k)(x) = (\pi_i \circ g \circ f)(x)$ für alle $i \in I$, womit $(s \circ k)(x) = (g \circ f)(x) \in A$ für $x \in X$. Folglich gilt $s^{-1}(A) \supseteq k(X)$. Da A abgeschlossen ist und s stetig, folgt $s\left(\overline{k(X)}\right) \subseteq \overline{s(k(X))} \subseteq \overline{A} = A$. Sei also $y \in \gamma X$ nicht aus $\overline{k(X)}$. γX ist kompakt und (T_2) also wegen Lemma 3.18 normal und erfüllt damit $(T_{3,5})$. Es existiert also eine stetige Funktion $r : \gamma X \to [0,1]$ mit $r(y) = 0$ und $r\left(\overline{k(X)}\right) \subseteq \{1\}$, sprich $r \circ k \equiv 1$. Da die Einsabbildung χ_X von X nach $[0,1]$ stetig ist, muss nach Voraussetzung $\gamma\chi_X = r$ gelten. Weil $y \in \overline{k(X)}^{\complement}$ beliebig gewählt war und χ_X nicht von y abhängt, hängt r nicht von y ab und es müssen $r\left(\overline{k(X)}\right) \subseteq \{1\}$ und $r\left(\overline{k(X)}^{\complement}\right) \subseteq \{0\}$ gelten. Man kann den Wert von r auf $\overline{k(X)}^{\complement}$ nun auf $\frac{1}{2}$ setzen ohne die Stetigkeit oder $r \circ k \equiv 1$ zu verletzen. Wegen der Eindeutigkeit von $\gamma\chi_X = r$ muss also $\overline{k(X)}^{\complement} = \emptyset$ folgen. Es gilt damit $s : \gamma X \to A$ und weiters wegen der Homöomorphie von g, dass $(g^{-1} \circ s) \circ k = f$ gilt und $g^{-1} \circ s : \gamma X \to K$ stetig ist. Jede weitere stetige Funktion $\widetilde{\gamma f} : \gamma X \to K$ mit $\widetilde{\gamma f} \circ k = f$ muss offensichtlich auf $k(X)$ mit $g^{-1} \circ s$ übereinstimmen. Aus $\overline{k(X)} = \gamma X$ und (T_2) auf K schließt man $g^{-1} \circ s = \widetilde{\gamma f}$. Wegen der Beliebigkeit von $(K, \mathcal{O})$ und $f : X \to K$ folgt die Aussage aus dem Satz von Stone-Čech 4.23. ■

Satz 4.26. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann vollständig regulär, wenn seine Stone-Čech-Kompaktifizierung $((\beta X, \beta\mathcal{T}), h)$ eine (T_2)-Kompaktifizierung ist.*

Beweis. „$\Leftarrow$": Nach Voraussetzung besitzt $(X, \mathcal{T})$ mit $((\beta X, \beta\mathcal{T}), h)$ eine (T_2)-Kompaktifizierung. Damit ist $(X, \mathcal{T})$ wegen Satz 4.17 vollständig regulär.
„$\Rightarrow$": Nach dem Satz von Stone-Čech 4.23 erfüllt $(\beta X, \beta\mathcal{T})$ das Axiom (T_2) und ist kompakt. Weiters liegt $h(X)$ dicht in βX. Es bleibt also zu zeigen, dass $h : X \to h(X)$ homöomorph ist. Weil $h(X) \subseteq \beta X$ mit der Spurtopologie versehen ist, ist $h : X \to h(X)$ stetig. Nach Satz 4.17 existiert eine (T_2)-Kompaktifizierung $((K, \mathcal{O}), c)$ von $(X, \mathcal{T})$. Nach dem Satz von Stone-Čech 4.23 ist jetzt $\beta c : \beta X \to K$ die eindeutige stetige Abbildung mit $c = \beta c \circ h$, also hat man die stetige Abbildung $\beta c : \beta X \to c(X)$. Aus der Injektivität von c folgt jene von h. Somit ist $h : X \to h(X)$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[dr, bend right, "c"'] & h(X) \arrow[r, "\iota_{h(X)}"] & \beta X \arrow[dl, dotted, "\beta c"] \\
& c(X) \arrow[ul, dotted, "c^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

eine Bijektion, woraus sofort $h^{-1} = c^{-1} \circ \beta c \circ \iota_{h(X)} : h(X) \to X$ folgt. Diese Abbildung ist als Verkettung stetiger Abbildungen stetig, weshalb $h : X \to h(X)$ ein Homöomorphismus ist. ∎

Definition 4.27. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien $((K_1, \mathcal{O}_1), c_1)$ und $((K_2, \mathcal{O}_2), c_2)$ zwei (T_2)-Kompaktifizierungen ebendieses Raumes. Man definiert folgende Relation auf den (T_2)-Kompaktifizierungen von $(X, \mathcal{T})$:

$$((K_1, \mathcal{O}_1), c_1) \lesssim ((K_2, \mathcal{O}_2), c_2) :\Leftrightarrow \exists f : K_2 \to K_1 \text{ stetig mit } c_1 = f \circ c_2.$$

Definition 4.28. Zwei (T_2)-Kompaktifizierungen $((K, \mathcal{O}), c)$ und $((K', \mathcal{O}'), c')$ eines topologischen Raumes nennt man **bis auf Isomorphie gleich**, wenn es einen Homöomorphismus $\varphi : K' \to K$ mit $c = \varphi \circ c'$ gibt, und damit auch den Homöomorphismus $\varphi^{-1} : K \to K'$ mit $c' = \varphi^{-1} \circ c$.

Bemerkung 4.29. Gleichheit bis auf Isomorphie ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation. Man kann also die (T_2)-Kompaktifizierungen eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ in die entsprechenden Restklassen zerlegen. Wie man unmittelbar einsieht, ist $\lesssim$ mit dieser Zerlegung verträglich, kann also in kanonischer Weise als Relation auf den Restklassen betrachtet werden. Im Rest dieses Kapitels wird $\lesssim$ auf den Restklassen betrachtet, ohne notationell zwischen Restklasse und Repräsentant zu unterscheiden. //

Korollar 4.30. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien $((K_1, \mathcal{O}_1), c_1)$ und $((K_2, \mathcal{O}_2), c_2)$ zwei (T_2)-Kompaktifizierungen ebendieses Raumes. Genau dann, wenn sowohl $((K_1, \mathcal{O}_1), c_1) \lesssim ((K_2, \mathcal{O}_2), c_2)$ als auch $((K_1, \mathcal{O}_1), c_1) \gtrsim ((K_2, \mathcal{O}_2), c_2)$ gilt, sind $((K_1, \mathcal{O}_1), c_1)$ und $((K_2, \mathcal{O}_2), c_2)$ bis auf Isomorphie gleich, das heißt $\lesssim$ ist reflexiv und antisymmetrisch.*
$\lesssim$ ist auch transitiv, also eine Halbordnung.

Beweis. „$\Leftarrow$": Das folgt unmittelbar aus der Definition der Gleichheit bis auf Isomorphie.
„$\Rightarrow$": Sei also $f : K_2 \to K_1$ stetig mit $c_1 = f \circ c_2$ und sei $g : K_1 \to K_2$ stetig mit $c_2 = g \circ c_1$. Man erhält $(g \circ f)(c_2(x)) = g(c_1(x)) = c_2(x) = \mathrm{id}_{K_2}(c_2(x))$ und analog $(f \circ g)(c_1(x)) = c_1(x) = \mathrm{id}_{K_1}(c_1(x))$ für alle $x \in X$. Also gilt auf $c_1(X)$, dass $f \circ g = \mathrm{id}_{K_1}$, respektive auf $c_2(X)$, dass $g \circ f = \mathrm{id}_{K_2}$. Da $(K_1, \mathcal{O}_1)$ und $(K_2, \mathcal{O}_2)$ das Axiom (T_2) erfüllen und $c_1(X)$ und $c_2(X)$ jeweils dicht liegen, gelten die Gleichheiten auf ganz K_1 respektive K_2. Deswegen gilt $f^{-1} = g$, womit

$f : K_2 \to K_1$ ein Homöomorphismus ist, der $c_1 = f \circ c_2$ erfüllt. Also sind $((K_1, \mathcal{O}_1), c_1)$ und $((K_2, \mathcal{O}_2), c_2)$ bis auf Isomorphie gleich.
Die Transitivität ist offensichtlich. ■

Korollar 4.31. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer topologischer Raum. Dessen Stone-Čech-Kompaktifizierung $((\beta X, \beta\mathcal{T}), h)$ ist dann bezüglich $\lesssim$ das größte Element.*

Beweis. Zunächst ist $((\beta X, \beta\mathcal{T}), h)$ nach Satz 4.26 eine (T_2)-Kompaktifizierung. Für jede andere (T_2)-Kompaktifizierung $((K, \mathcal{O}), c)$ existiert wegen des Satzes von Stone-Čech 4.23 eine eindeutige stetige Abbildung $\beta c : \beta X \to K$ mit $\beta c \circ h = c$, wodurch $((K, \mathcal{O}), c) \lesssim ((\beta X, \beta\mathcal{T}), h)$. ■

Bemerkung 4.32. Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, eine dichte Teilmenge $D \subseteq X$ und eine Menge $O \in \mathcal{T}$ trifft sicherlich $\overline{O} \supseteq \overline{O \cap D}$ zu. Für beliebiges $x \in \overline{O}$ folgt bekanntermaßen $U \cap O \neq \emptyset$ für $U \in \mathcal{U}(x)$. Darüber hinaus folgt aus der Dichtheit von D und da $U \cap O$ wegen der Beschaffenheit von $\mathcal{U}(x)$ eine nichtleere offene Teilmenge enthält, dass $U \cap (D \cap O) \neq \emptyset$ für $U \in \mathcal{U}(x)$, also $x \in \overline{D \cap O}$. Alles in allem heißt dies, $\overline{O} = \overline{O \cap D}$. //

Lemma 4.33. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter topologischer Raum, welcher (T_2) erfüllt. Weiters sei $((K, \mathcal{O}), c)$ eine (T_2)-Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$. Unter diesen Bedingungen ist $c(X)$ eine offene Teilmenge von K.*

Beweis. Für beliebiges $x \in X$ sei $O \in \mathcal{T}$ so, dass $x \in O \subseteq \overline{O}$ und $\overline{O}$ kompakt ist. Das ist wegen der Lokalkompaktheit möglich. Da $c : X \to c(X)$ stetig ist, ist $c(\overline{O})$ kompakt in $c(X)$ und damit auch kompakt in K. Wegen (T_2) ist $c(\overline{O})$ als Teilmenge von K abgeschlossen. Weil $c : X \to c(X)$ auch eine offene Abbildung ist, ist $c(O)$ offen in $c(X)$, was bedeutet, dass es eine Menge $P \in \mathcal{O}$ mit $c(O) = c(X) \cap P$ gibt. Mit Bemerkung 4.32, der Abgeschlossenheit von $c(\overline{O})$ und der Homöomorphie von $c : X \to c(X)$ erhält man

$$\overline{P}^K = \overline{c(X) \cap P}^K = \overline{c(O)}^K = \overline{\overline{c(O)}^{c(X)}}^K = \overline{c(\overline{O})}^K = c(\overline{O}) \subseteq c(X).$$

Insbesondere bedeutet dies $P \subseteq c(X)$, also $c(x) \in c(O) = P \in \mathcal{O}$, was wegen der beliebigen Wahl von $x \in X$ die Offenheit von $c(X)$ in K zeigt. ■

Satz 4.34. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter, aber nicht kompakter topologischer Raum, welcher (T_2) erfüllt. Dessen Alexandroff-Kompaktifizierung $((Y, \mathcal{O}), \iota)$ ist dann bezüglich $\lesssim$ das kleinste Element.*

Beweis. Zunächst ist $((Y, \mathcal{O}), \iota)$ nach Beispiel 4.16 eine (T_2)-Kompaktifizierung. Sei $((Y', \mathcal{O}'), c)$ nun eine beliebige (T_2)-Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$ und definiere

$$f : \begin{cases} Y' & \to \quad Y \\ y & \mapsto \begin{cases} \iota(x) & \text{falls } y = c(x) \text{ mit } x \in X, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \end{cases}$$

Aufgrund der Bijektivität von $c : X \to c(X)$ ist diese Abbildung wohldefiniert. Offensichtlich erhält man $f \circ c = \iota : X \to Y$. Sei $P \in \mathcal{O}$, sprich $P \in \mathcal{T}$ oder $P = \{\infty\} \uplus (X \setminus K)$ für ein kompaktes $K \subseteq X$. Im ersten Falle hat man $f^{-1}(P) = c(P)$. Da $c : X \to c(X)$ eine offene Abbildung ist, ist $c(P)$ offen in $c(X)$. Wegen Lemma 4.33 folgt $f^{-1}(P) = c(P) \in \mathcal{O}'$. Im zweiten Falle, also $P = \{\infty\} \uplus (X \setminus K)$ mit kompaktem $K \subseteq X$, hat man $f^{-1}(P) = \left(f^{-1}\left(P^{\complement}\right)\right)^{\complement} = \left(f^{-1}(K)\right)^{\complement} = (c(K))^{\complement}$. Aus der Stetigkeit von $c : X \to c(X)$ folgt die Kompaktheit von $c(K)$ in $c(X)$ und damit in Y'. Mit (T_2) auf $(Y', \mathcal{O}')$ erhält man die Abgeschlossenheit von $c(K) = f^{-1}(K)$ und somit $f^{-1}(P) = \left(f^{-1}(K)\right)^{\complement} \in \mathcal{O}'$. Alles in allem ist $f : Y' \to Y$ stetig und erfüllt $f \circ c = \iota$, sprich $((Y, \mathcal{O}), \iota) \lesssim ((Y', \mathcal{O}'), c)$. ■

Lemma 4.35. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, auf welchem (T_2) gilt, und sei $(Y, \mathcal{O})$ ein weiterer topologischer Raum. Weiters sei $A \subseteq X$ eine dichte Teilmenge. Sei $f : X \to Y$ stetig, sodass $f|_A : A \to f(A)$ homöomorph ist. Unter diesen Voraussetzungen gilt $f(A) \cap f(X \setminus A) = \emptyset$.*

Beweis. Man nehme an, es gäbe ein $x \in X \setminus A$ und ein $a \in A$ mit $f(x) = f(a)$. Aus (T_2) folgte die Existenz von $O_a, O_x \in \mathcal{T}$ mit $a \in O_a, x \in O_x$ und $O_a \cap O_x = \emptyset$. Damit gälte $O_x \subseteq O_a^{\complement}$ und weil $O_a^{\complement}$ abgeschlossen wäre, gälte auch $\overline{O_x} \subseteq O_a^{\complement}$, also $\overline{O_x} \cap O_a = \emptyset$. Man erhielte wegen der Offenheit von $f|_A : A \to f(A)$, dass $f(A \cap O_a)$ und $f(A \cap O_x)$ offen in $f(A)$ wären. Dies hieße

$$\exists O'_a, O'_x \in \mathcal{O} : (f(A \cap O_a) = f(A) \cap O'_a) \ \wedge \ (f(A \cap O_x) = f(A) \cap O'_x).$$

Wegen der Dichtheit von A träfe nach Bemerkung 4.32 auch $\overline{O_x} = \overline{O_x \cap A}$ zu. Es folgte, da $f : X \to Y$ stetig ist, $f(x) \in f(\overline{O_x}) = f(\overline{O_x \cap A}) \subseteq \overline{f(O_x \cap A)} = \overline{f(A) \cap O'_x}$ und $f(x) = f(a) \in f(A \cap O_a) = f(A) \cap O'_a \subseteq O'_a$. Somit gälte $O'_a \in \mathcal{U}(f(x))$, wodurch $\emptyset \neq O'_a \cap O'_x \cap f(A) = f(A \cap O_a) \cap f(A \cap O_x)$. Wegen der Injektivität von $f|_A : A \to f(A)$ und wegen $O_a \cap O_x = \emptyset$ folgte schließlich $\emptyset \neq f(A \cap O_a) \cap f(A \cap O_x) = f(A \cap O_a \cap O_x) = \emptyset \lightning$. ∎

Korollar 4.36. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer topologischer Raum und seien $((K_1, \mathcal{O}_1), c_1)$ und $((K_2, \mathcal{O}_2), c_2)$ zwei (T_2)-Kompaktifizierungen ebendieses Raumes, welche $((K_1, \mathcal{O}_1), c_1) \lesssim ((K_2, \mathcal{O}_2), c_2)$ erfüllen, also $c_1 = f \circ c_2$ für ein stetiges $f : K_2 \to K_1$. Es gilt dann $f(K_2 \setminus c_2(X)) \subseteq K_1 \setminus c_1(X)$.*

Beweis. $c_2(X)$ ist eine dichte Teilmenge von K_2 und $f|_{c_2(X)} : c_2(X) \to c_1(X)$ ist wegen $f|_{c_2(X)} = c_1 \circ c_2^{-1}$ ein Homöomorphismus. Folglich liefert Lemma 4.35

$$\emptyset = f(c_2(X)) \cap f(K_2 \setminus c_2(X)) = c_1(X) \cap f(K_2 \setminus c_2(X)), \text{ also } f(K_2 \setminus c_2(X)) \subseteq K_1 \setminus c_1(X).$$

∎

Übungsaufgaben

4.1 Zeigen Sie, dass $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ versehen mit $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$, wobei $\mathcal{T}$ wie in Aufgabe 3.8 ist, vollständig regulär, aber nicht normal ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Gerade g mit Steigung -1 durch $(0,0)$. Zeigen Sie, dass g abgeschlossen ist, und dass die Spurtopologie auf g die diskrete Topologie ist. Betrachten Sie nun die Teilmenge A (B) von g, deren Punkte rationale (irrationale) Koordinaten haben.

4.2 Sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Für $A \subseteq \mathbb{N}$ sei

$$A^* := \{\mathcal{M} \in \mathfrak{M} : A \in \mathcal{M}\}.$$

Zeigen Sie, dass $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$, $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$ sowie $(A^c)^* = (A^*)^c$. Weiters zeige man, dass $\{A^* : A \subseteq \mathbb{N}\}$ die Basis einer Topologie $\mathcal{O}$ auf $\mathfrak{M}$ ist, die aus zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen besteht.

Man zeige schließlich, dass diese Topologie (T_2) und kompakt ist.

Hinweis: Für die Kompaktheit genügt es zu zeigen (warum?), dass jede offene Überdeckung bestehend aus Mengen der Form A^* eine endliche Teilüberdeckung hat. Aus dem Gegenteil dieser Aussage folgt, dass die Komplemente der entsprechenden $A \subseteq \mathbb{N}$ einen Filter erzeugen, der in einem Ultrafilter enthalten ist...

4.3 Zeigen Sie mit der Notation aus Aufgabe 4.2, dass $((\mathfrak{M}, \mathcal{O}), \psi)$ eine Kompaktifizierung von $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ (diskrete Topologie) ist, wobei $\psi(n) := \{B \subseteq \mathbb{N} : n \in B\}$. Zeigen Sie weiters, dass dabei $A = \psi^{-1}(A^* \cap \psi(\mathbb{N}))$.

Zeigen Sie schließlich, dass $((\mathfrak{M}, \mathcal{O}), \psi)$ eine Stone-Čech-Kompaktifizierung ist.

4.4 Zeigen Sie mit der Notation aus Aufgabe 4.2: In $(\mathfrak{M}, \mathcal{O})$ gibt es keine konvergente Folge, die aus paarweise verschiedenen Folgengliedern besteht.

Hinweis: Nehmen Sie das Gegenteil an, dh. $\mathcal{M}_n \to \mathcal{M}$, und auch, dass alle Folgenglieder paarweise verschieden sind. Konstruieren sie dann induktiv paarweise disjunkte Mengen $A_n \subseteq \mathbb{N}$ mit $\mathcal{M}_n \in A_n^*$. Nun betrachte $C := \bigcup_{n \in 2\mathbb{N}} A_n$ und $D := \bigcup_{n \in 2\mathbb{N}-1} A_n$ in Bezug auf den Ultrafilter $\mathcal{M}$.

4.5 Geben sie ein Beispiel für einen topologischen Raum an, der kompakt, aber nicht folgenkompakt (jede Folge hat konvergente Teilfolge(!!)) ist.

4.6 Zeigen Sie für einen vollständig regulären Raum X, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn βX es ist. (Hinweis: Zeigen Sie für eine clopen Teilmenge A von X, dass βA zu $\overline{A}^{\beta X}$ homöomorph ist.)

Zeigen Sie auch, dass für ein normales X und ein abgeschlossenes $A \subseteq X$ immer βA zu $\overline{A}^{\beta X}$ homöomorph ist.

4.7 Sei X ein regulärer topologischer Raum und $F \subseteq X$ eine unendliche Menge. Zeigen Sie, dass es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in F und paarweise disjunkte O_n, $n \in \mathbb{N}$, gibt, sodass $a_n \in O_n$. Zeigen Sie auch dass jede Funktion $f : \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

4.8 Sei $F \subseteq \beta\mathbb{N}$ abgeschlossen und unendlich. Zeigen Sie, dass F eine zu $\beta\mathbb{N}$ homöomorphe Teilmenge hat!

Hinweis: Sei A wie in Aufgabe 4.7. Ist $f : A \to [0,1]$, so betrachte man $g : \mathbb{N} \to [0,1]$ definiert durch $g(n) = f(a_j)$, falls $n \in O_j$ und $g(n) = 0$, falls $n \notin \bigcup_j O_j$. Betrachte nun eine stetige Fortsetzung von g auf $\beta\mathbb{N}$ eingeschränkt auf $\overline{A}^{\beta\mathbb{N}}$ und vergleichen Sie diese mit f auf A. Beachte dabei, dass $\overline{\mathbb{N} \cap O_j}^{\beta\mathbb{N}} = \overline{O_j}^{\beta\mathbb{N}}$ wegen der Dichtheit von $\mathbb{N}$ in $\beta\mathbb{N}$, vgl. Bemerkung 4.32

4.9 Zeigen Sie, dass in $\beta\mathbb{N}$ nur die ab einem Index konstanten Folgen konvergieren.

Hinweis: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen x, so ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ abgeschlossen.

5 Uniforme Strukturen

Definition 5.1. Ein Filter $\mathcal{U}$ auf $M \times M$ für eine nichtleere Menge M heißt **uniforme Struktur** oder **Uniformität auf M** und $(M,\mathcal{U})$ **uniformer Raum**, falls

- Für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt $\Delta := \{(x,x) : x \in M\} \subseteq U$.
- Für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt $U^{-1} := \{(y,x) : (x,y) \in U\} \in \mathcal{U}$.
- Für alle $U \in \mathcal{U}$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}$, sodass $V \circ V \subseteq U$, wobei

$$V \circ V := \{(x,z) : \exists y \in M, (x,y) \in V, (y,z) \in V\}$$

  (Relationenprodukt).

Definition 5.2. Sei $(M,\mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Dann gibt es nach Aufgabe 5.2 genau eine Topologie auf M, sodass für $x \in M$ gilt

$$\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_x := \{U_x : U \in \mathcal{U}\}, \text{ wobei } U_x := \{y \in M : (x,y) \in U\}.$$

Diese Topologie heißt die **von der Uniformität $\mathcal{U}$ induzierte Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{U})$**.

Erinnerung 5.3. Eine Pseudometrik auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y, z \in X$:

- $d(x,y) \geq 0$
- $d(x,x) = 0$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

//

Definition 5.4. Sei (X,d) ein pseudometrischer Raum. Für $\varepsilon > 0$ sei

$$U_\varepsilon := \{(x,y) \in M \times M : d(x,y) < \varepsilon\}.$$

Der von der Filterbasis $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ erzeugte Filter ist nach Aufgabe 5.3 eine Uniformität auf $X \times X$ und man nennt diese Uniformität die **von der Pseudometrik d induzierte Uniformität $\mathcal{U}(d)$**.

Lemma 5.5. *Sei (X,d) ein pseudometrischer Raum. Dann stimmt $\mathcal{T}(d)$ mit $\mathcal{T}(\mathcal{U}(d))$ überein.*

Beweis. Aufgabe 5.3 ∎

Lemma 5.6. *Sei $(M,\mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Folgende sind äquivalent:*

- $(M,\mathcal{T}(\mathcal{U}))$ *erfüllt* (T_0).
- $(M,\mathcal{T}(\mathcal{U}))$ *erfüllt* (T_1).
- $(M,\mathcal{T}(\mathcal{U}))$ *erfüllt* (T_2).
- $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \Delta$.

Beweis. Aufgabe 5.6 ■

Korollar 5.7. *Sei $(M,\mathcal{U})$ ein uniformer Raum. $(M,\mathcal{T}(\mathcal{U}))$ erfüllt dann (T_3).*

Beweis. Aufgabe 5.9 ■

Bemerkung 5.8. Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Wie man leicht einsieht ist dann auch

$$f \times f : \begin{cases} M \times M & \to \quad N \times N \\ (x,y) & \mapsto \quad (f(x), f(y)) \end{cases}$$

eine Abbildung. //

Definition 5.9. Seien $(M,\mathcal{U})$ und $(N,\mathcal{V})$ zwei uniforme Räume. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls der nach Lemma 2.2 von $(f \times f)(\mathcal{U})$ erzeugte Filter auf $N \times N$ feiner ist als $\mathcal{V}$.

Lemma 5.10. *Seien $(M,\mathcal{U})$, $(N,\mathcal{V})$ uniforme Räume. Dann gelten:*

- *$f : M \to N$ ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn es für alle $V \in \mathcal{V}$ ein $U \in \mathcal{U}$ gibt, sodass $(f \times f)(U) \subseteq V$.*
- *Jede gleichmäßig stetige Abbildung ist stetig bzgl. der von den Uniformitäten erzeugten Topologien.*
- *Die Hintereinanderausführung gleichmäßig stetiger Abbildungen ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Aufgabe 5.5 ■

Bemerkung 5.11. Sollten die beteiligten Uniformitäten von Metriken erzeugt werden, so ist der Begriff „gleichmäßig stetig“ hier äquivalent zur bekannten Begriffbildung „gleichmäßig stetig“ zwischen metrischen Räumen, vgl. Beweis Aufgabe 5.5. //

Bemerkung 5.12. Sei $\mathcal{U}_i$ für $i \in I$ eine Familie von Uniformitäten auf einer Menge M. Dann ist $[\{U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_m} : m \in \mathbb{N}, i_1, \ldots i_m \in I, U_{i_1} \in \mathcal{U}_{i_1}, \ldots, U_{i_m} \in \mathcal{U}_{i_m}\}] =: [\bigvee_{i \in I} \mathcal{U}_i]$ die gröbste Uniformität, die alle Uniformitäten $\mathcal{U}_i$ umfasst, vgl. Aufgabe 5.7. //

Definition 5.13. Seien I eine Indexmenge, $(M_i,\mathcal{U}_i), i \in I$ uniforme Räume, M eine nichtleere Menge und $f_i : M \to M_i, i \in I$ Funktionen. Dann gibt es nach Aufgabe 5.8 eine eindeutige gröbste Uniformität auf M mit der Filterbasis $\{(f_{i_1} \times f_{i_1})^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap (f_{i_n} \times f_{i_n})^{-1}(U_{i_n}) : n \in \mathbb{N}, i_1, \ldots, i_n \in I, U_{i_k} \in \mathcal{U}_{i_k}, k \in \{1, \ldots, n\}\}$, sodass die Funktionen $f_i : M \to M_i, i \in I$ gleichmäßig stetig sind. Diese nennt man die **initiale Uniformität $\mathcal{U}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$**.

Lemma 5.14. *Seien I eine Indexmenge, $(M_i,\mathcal{U}_i), i \in I$, uniforme Räume, M eine nichtleere Menge und $f_i : M \to M_i, i \in I$ Funktionen und sei M mit $\mathcal{U}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$ versehen. Sei $(N,\mathcal{V})$ ein weiterer uniformer Raum. Eine Funktion $f : N \to M$ ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn alle Abbildungen $f_i \circ f : N \to M_i, i \in I$ gleichmäßig stetig sind.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Offensichtlich sind sämtliche Funktionen $f_i \circ f : N \to M_i$ als Zusammensetzungen gleichmäßig stetiger Funktionen gleichmäßig stetig.
„$\Leftarrow$“: Man betrachte $U \in \mathcal{U}_{\text{init}}(\{f_i : i \in I\})$, was ja nach Definition

$$\exists n \in \mathbb{N}, i_1, \ldots, i_n \in I, U_{i_k} \in \mathcal{U}_{i_k} : (f_{i_1} \times f_{i_1})^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap (f_{i_n} \times f_{i_n})^{-1}(U_{i_n}) \subseteq U$$

bedeutet. Setze $V := (f\times f)^{-1}\left[(f_{i_1}\times f_{i_1})^{-1}(U_{i_1})\right]\cap\dots\cap(f\times f)^{-1}\left[(f_{i_n}\times f_{i_n})^{-1}(U_{i_n})\right] = ((f_{i_1}\circ f)\times(f_{i_1}\circ f))^{-1}(U_{i_1})\cap\dots\cap((f_{i_n}\circ f)\times(f_{i_n}\circ f))^{-1}(U_{i_n})$. Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit der Abbildungen $f_{i_k}\circ f$ muss jede einzelne Menge dieses endlichen Schnittes in $\mathcal{V}$ liegen. Da $\mathcal{V}$ ein Filter ist, folgt auch $V\in\mathcal{V}$. Aus $(f\times f)(V)\subseteq(f_{i_1}\times f_{i_1})^{-1}(U_{i_1})\cap\dots\cap(f_{i_n}\times f_{i_n})^{-1}(U_{i_n})\subseteq U$ folgt damit die gleichmäßige Stetigkeit von $f: N\to M$. ■

Korollar 5.15. *Seien I eine Indexmenge, $(M_i,\mathcal{U}_i), i\in I$, uniforme Räume, M eine nichtleere Menge und $f_i: M\to M_i, i\in I$ Funktionen. Dann ist $\mathcal{T}(\mathcal{U}_{\text{init}}(\{f_i : i\in I\})) = \mathcal{T}_{\text{init}}(\{f_i : i\in I\})$, wobei die Mengen M_i mit den Topologien $\mathcal{T}(\mathcal{U}_i)$ versehen seien.*

Beweis. Aufgabe 5.8 ■

Definition 5.16. Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt **uniformisierbar**, falls es eine Uniformität $\mathcal{U}$ auf $X\times X$ gibt, sodass $\mathcal{T}=\mathcal{T}(\mathcal{U})$.

Lemma 5.17. *Ist $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum und erfüllt dieser das Axiom $(T_{3,5})$, so ist dieser uniformisierbar.*

Beweis. Nach Lemma 4.7 ist $\mathcal{T}=\mathcal{T}_{\text{init}}(\{f | f: X\to[0,1], f \text{ stetig bzgl. } \mathcal{T}\})$. $[0,1]$ trägt die euklidische Spurtopologie. Die euklidische Topologie auf $[0,1]$ stimmt mit $\mathcal{T}\left(d_2|_{[0,1]\times[0,1]}\right)$ überein. Nach Lemma 5.5 gilt $\mathcal{T}\left(d_2|_{[0,1]\times[0,1]}\right)=\mathcal{T}\left(\mathcal{U}\left(d_2|_{[0,1]\times[0,1]}\right)\right)$. Aus Korollar 5.15 folgt, dass wenn man $[0,1]$ mit $\mathcal{U}\left(d_2|_{[0,1]\times[0,1]}\right)$ versieht, $\mathcal{T}(\mathcal{U}_{\text{init}}(\{f|f: X\to[0,1], f \text{ stetig bzgl. } \mathcal{T}\}) = \mathcal{T}_{\text{init}}(\{f|f: X\to[0,1], f \text{ stetig bzgl. } \mathcal{T}\})$, wobei $[0,1]$ mit $\mathcal{T}\left(d_2|_{[0,1]\times[0,1]}\right)=\mathcal{T}\left(\mathcal{U}\left(d_2|_{[0,1]\times[0,1]}\right)\right)$ versehen ist. Also gilt $\mathcal{T}(\mathcal{U}_{\text{init}}(\{f|f: X\to[0,1], f \text{ stetig bzgl. } \mathcal{T}\}))=\mathcal{T}$. ■

Definition 5.18. Ein uniformer Raum $(M,\mathcal{U})$ heißt **pseudometrisierbar**, falls es eine Pseudometrik d auf M gibt, sodass $\mathcal{U}=\mathcal{U}(d)$. Ist d sogar eine Metrik auf M, so nennt man $(M,\mathcal{U})$ **metrisierbar**.

Satz 5.19. *Ein uniformer Raum $(M,\mathcal{U})$ ist genau dann pseudometrisierbar, wenn $\mathcal{U}$ eine abzählbare Filterbasis hat.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $(M,\mathcal{U})$ ein uniformer Raum, sodass $\mathcal{U}=\mathcal{U}(d)$ mit einer Pseudometrik d auf M. Gemäß Definition 5.4 gilt $\mathcal{U}=[\{U_\varepsilon : \varepsilon>0\}]$. Wie man leicht einsieht, ist $[\{U_\varepsilon : \varepsilon>0\}] = \left[\left\{U_{\frac{1}{n}} : n\in\mathbb{N}\right\}\right]$, womit $\mathcal{U}$ eine abzählbare Filterbasis hat.
„$\Leftarrow$“: Sei $(M,\mathcal{U})$ ein uniformer Raum und $\{V_n : n\in\mathbb{N}\}$ eine abzählbare Filterbasis von $\mathcal{U}$. Man definiere induktiv $Z_1 := V_1\cap V_1^{-1}\in\mathcal{U}$ und für definierte $Z_1,\dots,Z_n$ sei Z_{n+1} eine symmetrische Menge aus $\mathcal{U}$, sodass $Z_{n+1}^3\subseteq V_{n+1}\cap Z_n\in\mathcal{U}$. Eine solche Menge existiert wegen Aufgabe 5.1. Offensichtlich gilt für $n\in\mathbb{N}$:

- $Z_{n+1}^3\subseteq Z_n$,
- $Z_{n+1}\subseteq Z_n$, sprich $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine absteigende Mengenfolge,
- $Z_n = Z_n^{-1}$ und
- $Z_n\subseteq V_n$.

Insbesondere ist $\{Z_n : n\in\mathbb{N}\}$ also Filterbasis von $\mathcal{U}$.
Man betrachte die Funktion

$$g: M\times M\to\{0\}\uplus\left\{\frac{1}{2^k} : k\in\mathbb{N}\uplus\{0\}\right\}$$

definiert durch

$$g(x,y) := \begin{cases} 0, & (x,y) \in Z_k \forall k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2^n}, & n = \max\{k : (x,y) \in Z_k\} \\ 1, & (x,y) \notin Z_k \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Für alle $x \in M$ gilt $g(x,x) = 0$, da (x,x) in allen Z_k liegt. Für $(x,y) \in M \times M$ gilt $g(x,y) = g(y,x)$, weil die $Z_k, k \in \mathbb{N}$ symmetrisch sind. Zudem will man

$$g(a,d) \leq 2 \max\{g(a,b), g(b,c), g(c,d)\} \text{ für alle } a,b,c,d \in M \tag{5.1}$$

nachweisen. Gilt $(a,d) \in Z_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so folgt (5.1) wegen $g(a,d) = 0$. Wenn $(a,d) \notin Z_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt $g(a,d) = 1$. Angenommen $(a,b), (b,c), (c,d)$ wären aus Z_2. Dann müsste $(a,d) \in Z_2^3 \subseteq Z_1$ gelten.↯ Also ist o.B.d.A. $(a,b) \notin Z_2$, womit $g(a,b) \geq \frac{1}{2}$ und infolge (5.1) gilt. Zuletzt sei $(a,d) \in Z_n, (a,d) \notin Z_{n+1}$, also $g(a,d) = \frac{1}{2^n}$. Wären $(a,b), (b,c), (c,d) \in Z_{n+2}$, so müsste analog zum vorherigen Punkt $(a,d) \in Z_{n+1}$.↯ Demnach ist o.B.d.A. $(a,b) \notin Z_{n+2}$. Also gilt $g(a,b) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$ und (5.1) ist bewiesen.
Die Funktion $d : M \times M \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(x,y) := \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\ell} g(w_{j-1}, w_j) : \ell \in \mathbb{N}, w_0, \ldots, w_\ell \in M, w_0 = x \text{ und } w_\ell = y \right\},$$

ist wohldefiniert, da die betreffliche Menge $d(x,y)$ enthält und somit nichtleer und durch 0 nach unten beschränkt ist. Man zeigt jetzt, dass d eine Pseudometrik ist. Wegen $0 \leq d(x,y) \leq g(x,y)$ für $x,y \in M$ folgt $d(x,x) = 0$. Die Symmetrieeigenschaft von d folgt auch direkt aus der Symmetrieeigenschaft von g. Zuletzt bleibt noch die Dreiecksungleichung zu zeigen. Sei also $\varepsilon > 0$ und seien $x = w_0, \ldots, w_\ell = y \in M$ bzw. $y = v_0, \ldots, v_m = z \in M$ so, dass $d(x,y) \leq \sum_{j=1}^{\ell} g(w_{j-1}, w_j) < d(x,y) + \frac{\varepsilon}{2}$ bzw. $d(y,z) \leq \sum_{k=1}^{m} g(v_{k-1}, v_k) < d(y,z) + \frac{\varepsilon}{2}$. Offensichtlich gilt

$$d(x,z) \leq \sum_{j=1}^{\ell} g(w_{j-1}, w_j) + \sum_{k=1}^{m} g(v_{k-1}, v_k) < d(x,y) + d(y,z) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Dreiecksungleichung.
Nun bleibt noch $\mathcal{U} = \mathcal{U}(d)$ zu zeigen. Man zeigt zuerst für alle $\ell \in \mathbb{N}$

$$\frac{g(x,y)}{2} \leq \sum_{j=1}^{\ell} g(w_{j-1}, w_j), \forall w_0, \ldots, w_\ell \in M \text{ mit } w_0 = x \text{ und } w_\ell = y. \tag{5.2}$$

Dazu führt man eine Induktion nach ℓ durch. Für $\ell = 1$ ist (5.2) offensichtlich richtig. Sei nun $L > 1$ und (5.2) für alle $(x,y) \in M \times M$ und alle $\ell < L$ als bewiesen angenommen. Wenn $0 = \sum_{j=1}^{L} g(w_{j-1}, w_j) =: \alpha$ für $x = w_0, \ldots, w_L = y \in M$, dann folgt wegen $\alpha = 0$, dass $g(w_0, w_2) \leq 2 \max\{g(w_0, w_1), g(w_1, w_2)\} = 0$. Induktiv folgt damit auch $0 = g(w_0, w_L) = g(x,y)$, womit auch (5.2) für $\ell = L$ gilt. Im Falle $\alpha > 0$ wähle $\ell \in \{0, \ldots, L\}$ maximal so, dass $\sum_{j=1}^{\ell} g(w_{j-1}, w_j) \leq \frac{\alpha}{2}$. Offensichtlich ist $\ell < L$. Wegen $\sum_{j=1}^{\ell+1} g(w_{j-1}, w_j) > \frac{\alpha}{2}$ gilt $\sum_{\ell+2}^{L} g(w_{j-1}, w_j) < \frac{\alpha}{2}$. Aus der Induktionsvorraussetzung folgt $\frac{g(w_{\ell+1}, w_L)}{2} \leq \frac{\alpha}{2}$, sowie $\frac{g(w_0, w_\ell)}{2} \leq \frac{\alpha}{2}$. Aus (5.1) zusammen mit $g(w_\ell, w_{\ell+1}) \leq \alpha$ schließt man auf

$$g(x,y) \leq 2 \max\{g(x, w_\ell), g(w_\ell, w_{\ell+1}), g(w_{\ell+1}, y)\} \leq 2\alpha,$$

womit (5.2) für $\ell = L$ bewiesen ist. Weil (5.2) für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt, folgt

$$\frac{g(x,y)}{2} \leq d(x,y) \text{ für alle } x,y \in M.$$

Zu $U \in \mathcal{U}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $Z_n \subseteq U$. Man betrachte $U_{\frac{1}{2^{n+1}}} \in \mathcal{U}(d)$. Für ein beliebiges Tupel $(x,y) \in \mathcal{U}_{\frac{1}{2^{n+1}}}$ gilt $\frac{g(x,y)}{2} \leq d(x,y) < \frac{1}{2^{n+1}}$ und somit $g(x,y) < \frac{1}{2^n}$, also $(x,y) \in Z_n$. Damit folgt $U_{\frac{1}{2^{n+1}}} \subseteq Z_n \subseteq U \in \mathcal{U}(d)$. Das heißt $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}(d)$.
Andererseits gibt es zu $U \in \mathcal{U}(d)$ sicherlich ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon \subseteq U$. Wählt man $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, dann gilt offensichtlich $U_{\frac{1}{2^n}} \subseteq U_\varepsilon$. Für $(x,y) \in Z_{n+1}$ gilt $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n+1}} \geq g(x,y) \geq d(x,y)$, also $(x,y) \in U_{\frac{1}{2^n}}$. Folglich ist $Z_{n+1} \subseteq U_{\frac{1}{2^n}} \subseteq U \in \mathcal{U}$, womit $\mathcal{U}(d) \subseteq \mathcal{U}$.

■

Korollar 5.20. *Ein uniformer Raum $(M,\mathcal{U})$ ist genau dann metrisierbar, wenn $\mathcal{U}$ eine abzählbare Filterbasis hat und $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = \Delta$ gilt.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Die abzählbare Filterbasis hat man wegen Satz 5.19. Die Eigenschaft $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = \Delta$ ist wegen Lemma 5.6 äquivalent zu (T_2) auf $(M,\mathcal{T}(\mathcal{U})) = (M,\mathcal{T}(\mathcal{U}(d))) = (M,\mathcal{T}(d))$. Bekanntermaßen erfüllt jede von einer Metrik induzierte Topologie (T_2).
„$\Leftarrow$“: Wegen Satz 5.19 existiert eine Pseudometrik d auf M mit $\mathcal{U} = \mathcal{U}(d)$. Gilt für $x,y \in M$ dann $d(x,y) = 0$, so folgt, da nach Definition $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ eine Filterbasis von $\mathcal{U}(d)$ ist, $(x,y) \in \bigcap_{U\in\mathcal{U}(d)} U = \Delta$, also $x = y$, womit d eine Metrik auf M ist. ■

Satz 5.21. *Sei $(M,\mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Dann existiert eine Familie $(d_i)_{i\in I}$ von Pseudometriken, sodass $\mathcal{U} = [\bigvee_{i\in I} \mathcal{U}(d_i)]$, vgl. Bemerkung 5.12.*

Beweis. Sei $I := \mathcal{U}$. Zu festem $i \in I$ sei $U_1 := i \in \mathcal{U}$. Sind $U_1,\dots,U_n \in \mathcal{U}$ definiert, dann sei $U_{n+1} \in \mathcal{U}$ so gewählt, dass $U_{n+1}^2 \subseteq U_n$ und $U_{n+1} = U_{n+1}^{-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Existenz solcher Mengen folgt direkt aus der Definition einer Uniformität. Wie man leicht nachrechnen kann, ist $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Filterbasis und der davon erzeugte Filter $\mathcal{U}(i)$ ist der gröbste Filter, der $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ enthält, womit $\mathcal{U}(i) \subseteq \mathcal{U}$. Außerdem ist, wie man leicht einsieht, $\mathcal{U}(i)$ eine Uniformität. Wegen $\mathcal{U}(i) \subseteq \mathcal{U}$ für alle $i \in I$ gilt $[\bigvee_{i\in I} \mathcal{U}(i)] \subseteq \mathcal{U}$. Da für alle $U \in \mathcal{U}$ für $i = U$ gilt, dass $U \in \mathcal{U}(i)$, ist $\mathcal{U} \subseteq [\bigvee_{i\in I} \mathcal{U}(i)]$ und somit $\mathcal{U} = [\bigvee_{i\in I} \mathcal{U}(i)]$. Nach Satz 5.19 gibt es für alle $i \in I$ eine Pseudometrik d_i, sodass $\mathcal{U}(i) = \mathcal{U}(d_i)$. ■

Definition 5.22. Auf einem uniformen Raum $(M,\mathcal{U})$ definiert man die Relation

$$\cong := \bigcap_{U\in\mathcal{U}} U.$$

Lemma 5.23. *Für einen uniformer Raum $(M,\mathcal{U})$ ist $\cong$ eine Äquivalenzrelation. Mit dieser ist*

$$\mathcal{U}/_{\cong} := [(\pi \times \pi)(\mathcal{U})] \subseteq \mathcal{P}(M/_{\cong} \times M/_{\cong})$$

eine Uniformität auf $M/_{\cong}$, wobei $\pi : M \to M/_{\cong}$ die kanonische Einbettung bezeichne. Versieht man M mit $\mathcal{T}(\mathcal{U})$, so gilt $\cong = \simeq$, vgl. Definition 3.28. Man erhält sogar $\mathcal{T}(\mathcal{U}/_{\cong}) = \mathcal{T}(\mathcal{U})/_{\simeq}$.

Beweis. Aufgabe 5.10 ■

Lemma 5.24. *Sei $(M,\mathcal{U})$ ein uniformer Raum und $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Uniformitäten mit $\mathcal{U} = [\bigvee_{i\in I} \mathcal{U}_i]$, vgl. Bemerkung 5.12. Man betrachte für $i \in I$ die Räume $(M/_{\cong i},\mathcal{U}_i/_{\cong i})$ und die kanonischen Einbettungen $\pi_i : M \to M/_{\cong i}$, wobei zwecks besserer Verständlichkeit $\cong i$ die Äquivalenzrelation $\cong$ bezüglich $\mathcal{U}_i$ bezeichne. Dann gilt*

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\text{init}}(\{\pi_i : M \to (M/_{\cong i},\mathcal{U}_i/_{\cong i}), i \in I\}).$$

Beweis. „$\supseteq$“: Die Abbildungen $\pi_i : (M,\mathcal{U}_i) \to (M/_{\cong i},\mathcal{U}_i/_{\cong i})$ sind nach Definition von $\mathcal{U}_i/_{\cong i}$ gleichmäßig stetig, womit wegen $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{U}_i$ auch die Abbildungen $\pi_i : (M,\mathcal{U}) \to (M/_{\cong i},\mathcal{U}_i/_{\cong i})$ gleichmäßig stetig sind. Die initiale Uniformität ist die gröbste Uniformität mit dieser Eigenschaft.
„$\subseteq$“: Für $i \in I$ ist die Uniformität $\mathcal{U}_i$ die gröbste, sodass π_i gleichmäßig stetig ist. Ist nämlich $\mathcal{V}_i$ eine weitere solche Uniformität und U aus $\mathcal{U}_i$, so muss es offensichtlich ein $V \in \mathcal{V}_i$ mit $(\pi_i \times \pi_i)(V) \subseteq (\pi_i \times \pi_i)(U) \in \mathcal{U}_i/_{\cong i}$ geben. Zu $(v,w) \in V$ müssen dann $(x,y) \in U$ mit $([v]_{\cong i},[w]_{\cong i}) = ([x]_{\cong i},[y]_{\cong i})$, sprich $v \cong i\ x$ und $w \cong i\ y$, existieren. Aus der Definition von $\cong i$ folgt $(v,w) \in U \circ U \circ U$, also $V \subseteq U \circ U \circ U$. Weil $U \in \mathcal{U}_i$ beliebig war folgt aus Aufgabe 5.1 ($\widehat{\mathcal{U}_i}^3$ ist eine Filterbasis) $\mathcal{V}_i \supseteq \mathcal{U}_i$. Damit müssen alle $\mathcal{U}_i$ in der initialen Uniformität liegen, womit es nach Definition auch $\mathcal{U}$ muss. ■

Lemma 5.25. *Ist (M,d) ein pseudometrischer Raum, so existiert eine Metrik $d/_{\cong}$ auf $M/_{\cong}$ mit $\mathcal{U}(d/_{\cong}) = \mathcal{U}(d)/_{\cong}$. Außerdem erfüllt $(M,\mathcal{T}(d))$ das Axiom $(T_{3,5})$.*

Beweis. Man betrachte dazu $\mathcal{U}(d)$ mit der Äquivalenzrelation $\cong$ und $\mathcal{T}(\mathcal{U}(d)) = \mathcal{T}(d)$ mit $\simeq$. Weiters definiert man

$$d/_{\cong} : \begin{cases} M/_{\cong} \times M/_{\cong} & \to \quad \mathbb{R}^+ \\ ([x]_{\cong},[y]_{\cong}) & \mapsto \quad d(x,y). \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn gelten $x \cong v$ und $y \cong w$ für $x,y,v,w \in M$, so folgt aus den Definitionen von $\cong$, dass $(x,v),(y,w) \in U_\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, wodurch $d(x,v) = 0 = d(y,w)$ und mit der Dreiecksungleichung $d(x,y) \leq d(x,v) + d(v,w) + d(w,y) = d(v,w)$ und $d(v,w) \leq d(v,x) + d(x,y) + d(y,w) = d(x,y)$, also $d(x,y) = d(v,w)$. Man überprüft sofort, dass $d/_{\cong}$ auch eine Pseudometrik auf $M/_{\cong}$ ist. Im Falle $d/_{\cong}([x]_{\cong},[y]_{\cong}) = 0$ folgert man aus $d(x,y) = 0$, dass $(x,y) \in U$ für alle $U \in \mathcal{U}(d)$, womit $x \cong y$, also $[x]_{\cong} = [y]_{\cong}$ zutrifft. Daher ist $d/_{\cong}$ eine Metrik. Man überzeugt sich unmittelbar von $\mathcal{U}(d/_{\cong}) = \mathcal{U}(d)/_{\cong}$. Nach Lemma 3.43 und mit Lemma 5.23 ist

$$\begin{aligned}(M/_{\cong},\mathcal{T}(d/_{\cong}))) &= (M/_{\cong},\mathcal{T}(\mathcal{U}(d/_{\cong}))) = (M/_{\cong},\mathcal{T}(\mathcal{U}(d)/_{\cong})) \\ &= (M/_{\simeq},\mathcal{T}(\mathcal{U}(d))/_{\simeq}) = (M/_{\simeq},\mathcal{T}(d)/_{\simeq})\end{aligned}$$

normal, erfüllt also $(T_{3,5})$. Sei nun $A \subseteq M$ bezüglich $\mathcal{T}(d)$ abgeschlossen und sei x aus $A^\complement$. Da A nach Lemma 3.29 gesättigt ist, hat man einerseits $\pi(x) \in \pi(A)^\complement$ und andererseits mit Erinnerung 3.22, dass $\pi(A)$ in $\mathcal{T}(d)/_{\simeq}$ abgeschlossen ist. Also existiert eine stetige Funktion $f : (M/_{\simeq},\mathcal{T}(d)/_{\simeq}) \to [0,1]$ mit $f(\pi(x)) = 0$ und $f(\pi(A)) \subseteq \{1\}$. Da $f \circ \pi : M \to [0,1]$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig ist, erfüllt $(M,\mathcal{T}(d))$ dann ebenfalls $(T_{3,5})$. ■

Satz 5.26. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dieser ist genau dann uniformisierbar, wenn er $(T_{3,5})$ erfüllt.*

Beweis. „$\Leftarrow$“: Lemma 5.17
„$\Rightarrow$“: Sei also $\mathcal{U}$ eine Uniformität auf X, sodass $\mathcal{T}(\mathcal{U}) = \mathcal{T}$ zutrifft. Satz 5.21 liefert nun eine Familie $(d_i)_{i\in I}$ von Pseudometriken mit $\mathcal{U} = [\bigvee_{i\in I}\mathcal{U}(d_i)]$. Mit Bemerkung 5.12 erhält man, dass $\mathcal{U} = [\bigvee_{i\in I}\mathcal{U}(d_i)] = \mathcal{U}_{\text{init}}(\{\text{id} : X \to (X,\mathcal{U}(d_i)), i \in I\})$ gilt. Aus Korollar 5.15 und Lemma 5.5 folgt $\mathcal{T}(\mathcal{U}) = \mathcal{T}_{\text{init}}(\{\text{id} : X \to (X,\mathcal{T}(d_i)), i \in I\})$. Die Räume $(X,\mathcal{T}(d_i))$ erfüllen nach Lemma 5.25 das Axiom $(T_{3,5})$ und wegen Lemma 4.5 deshalb auch $(X,\mathcal{T}(\mathcal{U})) = (X,\mathcal{T})$. ■

Definition 5.27. Sei $(M,\mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ auf M heißt **Cauchy-Netz**, falls es für alle $U \in \mathcal{U}$ ein $i(U) \in I$ gibt, sodass $i,j \succeq i(U) \;\Rightarrow\; (x_i,x_j) \in U$ gilt.

Lemma 5.28. *Seien $(M,\mathcal{U})$, $(N,\mathcal{V})$ uniforme Räume. Dann gelten:*

- *Gleichmäßig stetige Abbildungen $f : M \to N$ bilden Cauchy-Netze auf M auf Cauchy-Netze auf N ab.*
- *Ein bezüglich $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ konvergentes Netz ist bezüglich $\mathcal{U}$ ein Cauchy-Netz.*

Beweis. Aufgabe 5.11 ■

Definition 5.29. Ein uniformer Raum $(M,\mathcal{U})$ heißt **vollständig**, wenn jedes Cauchy-Netz in $(M,\mathcal{T}(\mathcal{U}))$ konvergiert.

Bemerkung 5.30. Offensichtlich deckt sich die Definition der Cauchy-Netze eines uniformen Raumes $(M,\mathcal{U})$ mit jener der Cauchy-Netze eines metrischen Raumes (M,d), falls $\mathcal{U} = \mathcal{U}(d)$ gilt. Außerdem ist ein metrischer Raum (M,d) genau dann vollständig, wenn es $(M,\mathcal{U}(d))$ ist, vgl. Aufgabe 5.12. //

Lemma 5.31. *Sei $(M,\mathcal{U})$ ein vollständiger uniformer Raum und erfülle $(M,\mathcal{T}(\mathcal{U}))$ das Axiom (T_2). Eine Teilmenge $T \subseteq M$ ist bezüglich $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ genau dann abgeschlossen, wenn $(T,\mathcal{U}|_T)$ vollständig ist, wobei $\mathcal{U}|_T$ hier die initiale Uniformität bezüglich der kanonischen Einbettung $\iota : T \to M$ bezeichne.*

Beweis. Aufgabe 5.11 ■

Lemma 5.32. *Seien $(M,\mathcal{U})$, $(N,\mathcal{V})$ uniforme Räume. Weiters sei $(N,\mathcal{V})$ vollständig und erfülle $(N,\mathcal{T}(\mathcal{V}))$ das Axiom (T_2). Ist $f : (T,\mathcal{U}|_T) \to (N,\mathcal{V})$ für eine Menge $T \subseteq M$ mit $\overline{T} = M$ gleichmäßig stetig, so lässt sich diese Funktion zu einer eindeutigen gleichmäßig stetigen Funktion $\hat{f} : (M,\mathcal{U}) \to (N,\mathcal{V})$ fortstetzen.*

Beweis. Aufgabe 5.13 ■

Lemma 5.33. *Seien $(M,\mathcal{U})$, $(N,\mathcal{V})$ uniforme Räume. Weiters sei $f : (M,\mathcal{T}(\mathcal{U})) \to (N,\mathcal{T}(\mathcal{V}))$ stetig und sei $(M,\mathcal{T}(\mathcal{U}))$ kompakt. Dann ist $f : (M,\mathcal{U}) \to (M,\mathcal{V})$ gleichmäßig stetig.*

Beweis. Aufgabe 5.15 ■

Definition 5.34. Seien $(M,\mathcal{U})$ und $(N,\mathcal{V})$ uniforme Räume und $\Psi : M \to N$ eine Abbildung. $((N,\mathcal{V}),\Psi)$ heißt **Vervollständigung** von $(M,\mathcal{U})$, falls

- $(N,\mathcal{V})$ vollständig ist und $(N,\mathcal{T}(\mathcal{V}))$ das Axiom (T_2) erfüllt,
- $\Psi : (M,\mathcal{U}) \to (\Psi(M),\mathcal{V}|_{\Psi(M)})$ bijektiv und gleichmäßig stetig in beide Richtungen ist,
- $\Psi(M)$ dicht in N bezüglich $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ liegt.

Erinnerung 5.35. Jeder metrische Raum (X,d) besitzt eine Vervollständigung im metrischen Sinne. Das heißt, es existieren ein vollständiger metrischer Raum (Y,d_Y) und eine isometrische, damit insbesondere auf ihr Bild eingeschränkt bijektive und in beide Richtungen gleichmäßig stetige, Abbildung $\iota : X \to Y$ mit $\overline{\iota(X)} = Y$, siehe [**ana**]. Offensichtlich handelt es sich dabei auch um Vervollständigungen, falls man die metrischen Räume als uniforme Räume auffasst. //

Satz 5.36. *Sei $(M,\mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Erfüllt $(M,\mathcal{T}(\mathcal{U}))$ (T_2), so besitzt $(M,\mathcal{U})$ eine bis auf Isomorphie[4] eindeutige Vervollständigung.*

[4] Isomorphie beudeutet hier: Sind $((N_1,\mathcal{V}_1),\Psi_1)$ und $((N_2,\mathcal{V}_2),\Psi_2)$ zwei Vervollständigungen von $(M,\mathcal{U})$, so existiert eine bijektive in beide Richtungen gleichmäßig stetige Abbildung $f : N_2 \to N_1$ mit $\Psi_1 = f \circ \Psi_2$.

Beweis. Zunächst liefert Satz 5.21 eine Familie $(d_i)_{i\in I}$ von Pseudometriken mit $\mathcal{U} = [\bigvee_{i\in I}\mathcal{U}(d_i)]$. Man betrachte für $i \in I$ die Räume $(M/_{\cong i}, \mathcal{U}(d_i)/_{\cong i})$ und die kanonischen Einbettungen $\pi_i : M \to M/_{\cong i}$, wobei zwecks besserer Verständlichkeit $\cong i$ die Äquivalenzrelation $\cong$ bezüglich $\mathcal{U}(d_i)$ bezeichne. Nach Lemma 5.24 gilt

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\text{init}}(\{\pi_i : M \to (M/_{\cong i}, \mathcal{U}(d_i)/_{\cong i}), i \in I\}). \tag{5.3}$$

Außerdem gilt für $i \in I$ mit der Metrik $d_i/_{\cong i}$ aus Lemma 5.25, dass $(M/_{\cong i}, \mathcal{U}(d_i)/_{\cong i}) = (M/_{\cong i}, \mathcal{U}(d_i/_{\cong i}))$. Nun existieren für die metrischen Räume $(M/_{\cong i}, d_i/_{\cong i})$ Vervollständigungen im metrischen Sinne, welche Vervollständigungen im Sinne des Satzes liefern. Seien diese mit $((N_i, \mathcal{U}(d_i')), \iota_i), i \in I$ bezeichnet. Man definiert jetzt

$$\Psi : \begin{cases} M & \to \quad \prod_{i\in I} N_i \\ x & \mapsto \quad (\iota_i(\pi_i(x)))_{i\in I}. \end{cases}$$

Gelte nun $\Psi(x) = \Psi(y)$ für $x, y \in M$. Das bedeutet $\iota_i(\pi_i(x)) = \iota_i(\pi_i(y))$ für alle $i \in I$ und mit der Injektivität der ι_i sogar $\pi_i(x) = \pi_i(y)$, also $(x, y) \in U$ für $U \in \mathcal{U}(d_i)$. Mit Bemerkung 5.12 hat man auch $(x, y) \in U$ für alle $U \in \mathcal{U} = [\bigvee_{i\in I}\mathcal{U}(d_i)]$. Da $(M, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$ das Axiom (T_2) erfüllt, schließt man wegen Lemma 5.6 auf $x = y$. Somit ist $\Psi : M \to \Psi(M)$ injektiv und damit auch bijektiv.
Man versieht $\prod_{i\in I} N_i$ mit der Produktuniformität $\prod_{i\in I}\mathcal{U}(d_i')$, also der initialen Uniformität bezüglich den kanonischen Projektionen. $\prod_{i\in I} N_i$ ist dann noch immer vollständig, da die kanonischen Projektionen als gleichmäßig stetige Funktionen Cauchy-Netze auf Cauchy-Netze abbilden und ein Netz in der Produkttopologie auf $\prod_{i\in I} N_i$ genau dann konvergiert, wenn es das komponentenweise tut, vgl. Bemerkung 2.22. Betrachte $\overline{\Psi(M)}$ bezüglich $\mathcal{T}(\prod_{i\in I}\mathcal{U}(d_i')) = \prod_{i\in I}\mathcal{T}(d_i')$ und dann den Raum $\left(\overline{\Psi(M)}, (\prod_{i\in I}\mathcal{U}(d_i'))|_{\overline{\Psi(M)}}\right)$.
Zunächst liegt $\Psi(M)$ bezüglich der von der Spuruniformität induzierten Spurtopologie von $\overline{\Psi(M)}$ in diesem Raum dicht.
Außerdem erfüllt $\prod_{i\in I}\mathcal{T}(d_i')$ wegen Lemma 3.26 das Axiom (T_2), da die kanonischen Projektionen offensichtlich punktetrennend sind. Infolge erfüllt auch der Raum $(\prod_{i\in I}\mathcal{T}(d_i'))|_{\overline{\Psi(M)}} = \mathcal{T}\left((\prod_{i\in I}\mathcal{U}(d_i'))|_{\overline{\Psi(M)}}\right)$ das Trennungsaxiom (T_2). Weiters sind alle Voraussetzungen von Lemma 5.31 erfüllt, also ist $\left(\overline{\Psi(M)}, (\prod_{i\in I}\mathcal{U}(d_i'))|_{\overline{\Psi(M)}}\right)$ vollständig.
Unmittelbar aus Lemma 5.14 und der gleichmäßigen Stetigkeit der Abbildungen $x \mapsto \iota_i(\pi_i(x))$ von $(M, \mathcal{U})$ nach $(N_i, \mathcal{U}(d_i'))$ folgt die gleichmäßige Stetigkeit von $\Psi : M \to \prod_{i\in I} N_i$. Damit ist auch $\Psi : (M, \mathcal{U}) \to \left(\Psi(M), (\prod_{i\in I}\mathcal{U}(d_i'))|_{\Psi(M)}\right)$ gleichmäßig stetig.
Zuletzt betrachtet man $\Psi^{-1} : \Psi(M) \to M$. Lemma 5.14 macht wegen (5.3) die gleichmäßige Stetigkeit von Ψ^{-1} zu jener aller $\pi_i \circ \Psi^{-1} : \Psi(M) \to M/_{\cong i}$ äquivalent. Diese ist aber wegen $\pi_i \circ \Psi^{-1} = \iota_i^{-1} \circ \pi_i' \circ \iota_{\Psi(M)}$ klar[5]. Hier meint $\iota_{\Psi(M)} : \left(\Psi(M), (\prod_{i\in I}\mathcal{U}(d_i'))|_{\Psi(M)}\right) \to (\prod_{i\in I} N_i, \prod_{i\in I}\mathcal{U}(d_i'))$ die kanonische Einbettung und $\pi_i' : (\prod_{i\in I} N_i, \prod_{i\in I}\mathcal{U}(d_i')) \to (N_i, \mathcal{U}(d_i'))$ die kanonische Projektion. Alles in allem ist bewiesen, dass $\left(\left(\overline{\Psi(M)}, (\prod_{i\in I}\mathcal{U}(d_i'))|_{\overline{\Psi(M)}}\right), \Psi\right)$ eine Vervollständigung von $(M, \mathcal{U})$ ist.
Seine nun $((N_1, \mathcal{V}_1), \Psi_1)$ und $((N_2, \mathcal{V}_2), \Psi_2)$ zwei Vervollständigungen von $(M, \mathcal{U})$. Die beiden Abbildungen $\Psi_2 \circ \Psi_1^{-1} : (\Psi_1(M), \mathcal{V}_1|_{\Psi_1(M)}) \to (N_2, \mathcal{V}_2)$ und $\Psi_1 \circ \Psi_2^{-1} : (\Psi_2(M), \mathcal{V}_2|_{\Psi_2(M)}) \to$

[5] Eigentlich ist zuerst nur $\pi_i' \circ \iota_{\Psi(M)} : \left(\Psi(M), (\prod_{i\in I}\mathcal{U}(d_i'))|_{\Psi(M)}\right) \to (N_i, \mathcal{U}(d_i'))$ gleichmäßig stetig. Da das Bild dieser Abbildung aber offensichtlich im Bild von ι_i liegt, liefert Lemma 5.14 die gleichmäßige Stetigkeit von $\pi_i' \circ \iota_{\Psi(M)} : \left(\Psi(M), (\prod_{i\in I}\mathcal{U}(d_i'))|_{\Psi(M)}\right) \to \left(\iota_i(M/_{\cong i}), \mathcal{U}(d_i')|_{\iota_i(M/_{\cong i})}\right)$, worauf man das gleichmäßig stetige ι_i^{-1} anwenden kann.

$(N_1, \mathcal{V}_1)$ sind dann klarerweise gleichmäßig stetig. Zu diesen Funktionen liefert Lemma 5.32 eindeutige gleichmäßig stetige Fortsetzungen $f_1 : (N_1, \mathcal{V}_1) \to (N_2, \mathcal{V}_2)$ respektive $f_2 : (N_2, \mathcal{V}_2) \to (N_1, \mathcal{V}_1)$. Man sieht unmittelbar $f_1 \circ f_2 = \mathrm{id}_{N_2}$ auf $\Psi_2(M)$ und $f_2 \circ f_1 = \mathrm{id}_{N_1}$ auf $\Psi_1(M)$ ein. Da diese Funktionen stetig sind, $(N_{1,2}, \mathcal{T}(\mathcal{V}_{1,2}))$ beide (T_2) erfüllen und $\Psi_{1,2}(M)$ beide dicht liegen, gelten diese Gleichheiten auf den gesamten Räumen. $f_2 : (N_2, \mathcal{V}_2) \to (N_1, \mathcal{V}_1)$ ist somit bijektiv und in beide Richtungen gleichmäßig stetig mit $f_2 \circ \Psi_2 = \Psi_1$. ■

Definition 5.37. Sei $(M, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Eine Menge $A \subseteq M$ nennt man **total beschränkt**, wenn es zu jedem $U \in \mathcal{U}$ ein $n \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_1, \dots, x_n \in A$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}$$

gibt.

Bemerkung 5.38. Sollte eine Uniformität von einer Metrik induziert sein, so ist eine Menge, wie man leicht einsieht, genau dann bezüglich der Uniformität total beschränkt, wenn sie es bezüglich der Metrik ist. //

Lemma 5.39. *Seien $(M, \mathcal{U})$ und $(N, \mathcal{V})$ uniforme Räume und sei $f : M \to N$ gleichmäßig stetig. Ist $A \subseteq M$ total beschränkt, so ist es auch $f(A) \subseteq N$.*

Beweis. Zu $V \in \mathcal{V}$ gibt es wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f ein $U \in \mathcal{U}$ mit $(f \times f)(U) \subseteq V$. Wegen der totalen Beschränktheit von A findet man $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in A$ mit

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}.$$

Man erhält

$$f(A) \subseteq f\left(\bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}\right) = \bigcup_{k=1}^{n} f(U_{x_k}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (f \times f)(U)_{f(x_k)} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{f(x_k)},$$

womit $f(A)$ total beschränkt ist. ■

Satz 5.40. *Sei $(M, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum. $(M, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$ ist genau dann kompakt, wenn $(M, \mathcal{U})$ vollständig und total beschränkt ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Aufgabe 5.22
„$\Leftarrow$“: Sei zunächst angenommen, dass $(M, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$ (T_2) erfüllt. Man greift dann auf die Konstruktion aus dem Beweis des Satzes 5.36 zurück. Sei also die Notation aus ebendiesem Beweis übernommen. Offensichtlich folgt unmittelbar aus $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{U}(d_i)$ für $i \in I$ und der Definition von totaler Beschränktheit, dass die Räume $(M, \mathcal{U}(d_i))$ ebenfalls total beschränkt sind. Wegen Lemma 5.39 und $\pi_i(M) = M/_{\cong_i}$ ist auch $(M/_{\cong_i}, \mathcal{U}(d_i)/_{\cong_i}) = (M/_{\cong_i}, \mathcal{U}(d_i/_{\cong_i}))$ total beschränkt und folglich $(M/_{\cong_i}, d_i/_{\cong_i})$ total beschränkt im metrischen Sinne. Man sieht leicht ein, dass aus der Isometrie von ι_i die totale Beschränktheit von $\iota_i(M/_{\cong_i})$ als Teilmenge des Raumes (N_i, d_i') folgt. Diese überträgt sich auch auf $\overline{\iota_i(M/_{\cong_i})} = N_i$, vgl. [**ana**], womit (N_i, d_i') total beschränkt ist. Da dieser Raum auch vollständig im metrischen Sinne ist, folgt bekanntermaßen Kompaktheit im topologischen Sinne. Mit dem Satz von Tychonoff 2.29 ist auch $(\prod_{i \in I} N_i, \prod_{i \in I} \mathcal{T}(d_i'))$ kompakt. Aus der Vollständigkeit von M im uniformen Sinne folgt jene von $\left(\Psi(M), (\prod_{i \in I} \mathcal{U}(d_i'))|_{\Psi(M)}\right)$, denn Ψ identifiziert als Homöomorphismus die konvergenten Netze des Urbild- und Bildraumes bijektiv

miteinander und als in beide Richtungen gleichmäßig stetige Abbildung gilt dasselbe für Cauchy-Netze. Damit ist $\Psi(M)$ wegen Lemma 5.31 in dem vollständigen Raum $(\prod_{i\in I} N_i, \prod_{i\in I} \mathcal{T}(d_i'))$ abgeschlossen, also als abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes selbst kompakt und damit auch bezüglich $(\prod_{i\in I} \mathcal{T}(d_i'))|_{\Psi(M)}$ kompakt. Die Stetigkeit von $\Psi^{-1} : \Psi(M) \to M$ überträgt diese Eigenschaft auf $(M, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$.
Für den Fall, dass $(M, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$ nicht (T_2) erfüllt, siehe Aufgabe 5.23. ∎

Übungsaufgaben

5.1 Sei $\mathcal{U}$ eine Uniformität auf $M \times M$.

Zeigen Sie: $\mathcal{U}$ hat eine Filterbasis bestehend aus symmetrischen Mengen ($U = U^{-1}$). Aus $V, W \in \mathcal{U}$ folgt $V \circ W \in \mathcal{U}$. $\mathcal{U}^n := \{V_1 \circ \cdots \circ V_n : V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{U}\}$ und auch $\widehat{\mathcal{U}}^n := \{\underbrace{V \circ \cdots \circ V}_{n \text{ mal}} : V \in \mathcal{U}\}$ sind jeweils Filterbasen von $\mathcal{U}$.

5.2 Sei $\mathcal{U}$ eine Uniformität auf M. Für $x \in M$ sei

$$\mathcal{U}_x := \{U_x : U \in \mathcal{U}\}, \text{ wobei } U_x := \{y \in M : (x, y) \in U\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}_x$ für jedes $x \in M$ ein Filter ist, und dass es genau eine Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ auf M gibt, sodass die $\mathcal{U}_x$ die Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ dieser Topologie sind.

5.3 Sei (M, d) ein pseudometrischer Raum. Sei für $\varepsilon > 0$ definiert: $U_\varepsilon := \{(x, y) \in M \times M : d(x, y) < \varepsilon\}$.

Zeigen Sie, dass der von der Filterbasis (?) $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ erzeugte Filter eine Uniformität $\mathcal{U}(d)$ auf M ist. Zeigen Sie weiters, dass $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(\mathcal{U}(d))$. Dabei ist $O \in \mathcal{T}(d)$ genau dann, wenn für alle $x \in O$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $U_\varepsilon(x) \subseteq O$.

5.4 Sei $(G, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe, also die Abbildungen $(x, y) \mapsto xy$ und $x \mapsto x^{-1}$ seien stetig, und sei $\mathcal{U}(e)$ der Umgebungsfilter des neutralen Elementes e. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_r &:= [\{U_r(W) : W \in \mathcal{U}(e)\}] \\ \mathcal{U}_\ell &:= [\{U_\ell(W) : W \in \mathcal{U}(e)\}] \\ \mathcal{U} &:= [\{U_r(W) \cap U_\ell(W) : W \in \mathcal{U}(e)\}] \end{aligned}$$

drei Uniformitäten definieren, wobei

$$\begin{aligned} U_r(W) &:= \{(x, y) \in G \times G : xy^{-1} \in W\} \\ U_\ell(W) &:= \{(x, y) \in G \times G : x^{-1}y \in W\}. \end{aligned}$$

Weiters zeigen Sie, dass jede dieser Uniformitäten $\mathcal{T}$ erzeugt.

5.5 Eine Abbildung $f : (M, \mathcal{U}) \to (N, \mathcal{V})$ heißt gleichmäßig stetig, falls der nach Lemma 2.2 von $(f \times f)(\mathcal{U})$ erzeugte Filter auf $N \times N$ feiner ist als $\mathcal{V}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

- $f : M \to N$ ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn es für alle $V \in \mathcal{V}$ ein $U \in \mathcal{U}$ gibt, sodass $(f \times f)(U) \subseteq V$.
- Jede gleichmäßig stetige Abbildung ist stetig bzgl. der von den Uniformitäten erzeugten Topologien.
- Die Hintereinanderausführung gleichmäßig stetiger Abbildungen ist gleichmäßig stetig.
- Sollten die beteiligten Uniformitäten von (Pseudo)-Metriken erzeugt werden, so ist der Begriff „gleichmäßig stetig“ hier äquivalent zur bekannten Begriffsbildung „gleichmäßig stetig“ zwischen (Pseudo)-metrischen Räumen.

5.6 Beweisen Sie Lemma 5.6!

5.7 Zeigen Sie: Ist $\mathcal{U}_i, i \in I$ eine Familie von Uniformitäten auf M, so ist der von

$$\{U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_m} : m \in \mathbb{N}, i_1, \dots i_m \in I, U_{i_1} \in \mathcal{U}_{i_1}, \dots, U_{i_m} \in \mathcal{U}_{i_m}\}$$

erzeugte Filter $\mathcal{U}$ die gröbste Uniformität auf M, die feiner als alle $\mathcal{U}_i$ sind. Dabei heißt eine Uniformität $\mathcal{V}$ feiner (gröber) als eine Uniformität $\mathcal{W}$, wenn $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{W}$ ($\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$).

Zeigen Sie weiters, dass wenn $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}(d_i)$ für Pseudometriken d_i auf M, dann

$$\{\{(x, y) \in M \times M : d_{i_1}(x, y) < \varepsilon, \dots, d_{i_n}(x, y) < \varepsilon\} : n \in \mathbb{N}; i_1, \dots, i_n \in I,\ \varepsilon > 0\}$$

eine Filterbasis von $\mathcal{U}$ ist.

Schließlich zeigen Sie, dass die von $\mathcal{U}$ erzeugte Topologie mit der Topologie aus Aufgabe 1.10 übereinstimmt.

5.8 Für eine Indexmenge I seien M_i nichtleere Mengen und $\mathcal{U}_i$ jeweils Uniformitäten auf M_i. Weiters sei M eine nichtleere Menge und $f_i : M \to M_i$ seien Funktionen.

Zeigen Sie: Es gibt eine eindeutige gröbste uniforme Struktur $\mathcal{U}$ auf M, sodass alle f_i gleichmäßig stetig sind, wobei $\{(f_{i_1} \times f_{i_1})^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap (f_{i_n} \times f_{i_n})^{-1}(U_{i_n}) : n \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_n \in I, U_{i_k} \in \mathcal{U}_{i_k}, k \in \{1, \dots, n\}\}$ eine Filterbasis (?) dieser Uniformität ist. Zeigen Sie weiters, dass die von $\mathcal{U}$ induzierte Topologie genau die initiale Topologie bzgl. aller f_i ist, wenn man die Mengen M_i mit der von $\mathcal{U}_i$ induzierten Topologie versieht.

5.9 Sei M eine nichtleere Menge versehen mit einer uniformen Struktur $\mathcal{U}$. Weiters sei $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ die von $\mathcal{U}$ induzierte Topologie.

Zeigen Sie: Der Abschluss einer Menge $A \subseteq M$ stimmt mit $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U(A)$ überein, wobei $U(A) := \{y :$ es gibt ein $x \in A$ mit $(x, y) \in U\}$. Weiters zeigen Sie, dass für $T \subseteq M \times M$ gilt $\overline{T} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \circ T \circ U$, wobei der Abschluss bzgl. $\mathcal{T}(\mathcal{U}) \times \mathcal{T}(\mathcal{U})$ ist und $\circ$ für das Relationenprodukt steht.

Schließlich zeigen Sie, dass das Axiom (T_3) für $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ erfüllt ist, und dass $\{\overline{U} : U \in \mathcal{U}\}$ und $\{U^\circ : U \in \mathcal{U}\}$ jeweils eine Filterbasis von $\mathcal{U}$ abgeben.

5.10 Beweisen Sie Lemma 5.23!

5.11 Sei $(M, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf M heißt Cauchy-Filter, wenn es für jedes $U \in \mathcal{U}$ ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F \times F \subseteq U$ gibt.

Zeigen Sie, dass $(x_i)_{i \in I}$ genau dann ein Cauchy-Netz ist, wenn der davon erzeugte Filter ein Cauchy-Filter ist.

Zeigen Sie weiters, dass gleichmäßig stetige Abbildungen Cauchy-Netze bzw. Cauchy-Filter auf Cauchy-Netze bzw. Cauchy-Filter abbilden.

Zeigen Sie schließlich, dass konvergente Netze bzw. Filter auch Cauchy- sind und dass, wenn $(M, \mathcal{U})$ vollständig ist und (T_2) erfüllt, eine Teilmenge $T \subseteq M$ genau dann abgeschlossen (bzgl. $\mathcal{T}(\mathcal{U})$) ist, wenn $(T, \mathcal{U}|_T)$ vollständig ist. Hier ist $\mathcal{U}|_T$ die initiale Uniformität auf T bzgl. der kanonischen Einbettung.

5.12 Zeigen Sie, dass metrische Räume genau dann vollständig sind, wenn es die entsprechenden uniformen Räume sind!

5.13 Beweisen Sie Lemma 5.32!

Hinweis: Das Mischen von Folgen lässt sich für zwei Netze $(x_i)_{i \in I}$, $(y_j)_{j \in J}$ mit $\lim x_i = x = \lim y_j$ durch das Netz $(z_{(i,j,k)})_{(i,j,k) \in I \times J \times \{1,2\}}$ mit $z_{(i,j,1)} = x_i, z_{(i,j,2)} = y_j$ nachbauen, wobei $(i_1, j_1, k_1) \preceq (i_2, j_2, k_2) \Leftrightarrow i_1 \preceq i_2 \wedge i_2 \preceq j_2$.

5.14 Geben Sie ein Beispiel einer Menge M und zweier verschiedener Uniformitäten darauf an, sodass die von den Uniformitäten erzeugte Topologie übereinstimmt.

5.15 Seien M, N nichtleere Mengen und $\mathcal{U}$ eine Uniformität auf M und $\mathcal{V}$ eine solche auf N. Weiters seien $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ bzw. $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ die von diesen Uniformitäten auf M bzw. N erzeugten Topologien. Schließlich sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

Zeigen Sie, dass wenn $f : (M, \mathcal{T}(\mathcal{U})) \to (N, \mathcal{T}(\mathcal{V}))$ stetig ist und wenn $(M, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$ kompakt ist, dann f sogar gleichmäßig stetig ist. Was bedeutet das für $f = \mathrm{id}$, wenn $M = N$ und $T(\mathcal{U}) = \mathcal{T}(\mathcal{V})$?

5.16 Zeigen Sie auch anhand eines Gegenbeispiels, dass für den Schluss in Aufgabe 5.15 die Kompaktheit tatsächlich von Nöten ist. Zeigen Sie weiters, dass es zu einem kompakten topologischen Raum höchstens ein Uniformität $\mathcal{U}$ gibt, sodass $\mathcal{T}(\mathcal{U}) = \mathcal{T}$.

5.17 Erfülle $(X, \mathcal{T})$ das Trennungsaxiom $(T_{3,5})$.

Zeigen Sie, dass für jene Menge $\mathfrak{U}$ von Uniformitäten $\mathcal{U}$ auf X, welche $\mathcal{T}$ induzieren, der Supremumsfilter $\bigvee_{\mathcal{U}\in\mathfrak{U}}\mathcal{U}$ auf $X \times X$ eine Uniformität abgibt, die auch $\mathcal{T}$ induziert. Zeigen Sie damit, dass es eine feinste Uniformität auf X gibt, die $\mathcal{T}$ induziert.

5.18 Sei $(X, \mathcal{T})$ vollständig regulär. Sei

$$\mathfrak{U} := \{\mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ Uniformität auf } X, \mathcal{T}(\mathcal{U}) = \mathcal{T}, X \text{ bzgl. } \mathcal{U} \text{ total beschränkt}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{U}$ nicht leer ist, und dass $\mathfrak{U}$ bijektiv allen $(T2)$-Kompaktifizierungen von $(X, \mathcal{T})$ (bis auf Isomorphie) entspricht. Welche Rolle spielt dabei die Stone-Čech-Kompaktifizierung?

5.19 Sei $(M, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum, X eine Menge und $\mathcal{C}$ eine System von Teilmengen von X, welches bzgl. $\subseteq$ eine gerichtete Menge ist.

Zeigen Sie, dass die Menge aller Mengen der Form $(C \in \mathcal{C}, U \in \mathcal{U})$

$$\{(f, g) \in M^X \times M^X : \forall x \in C \ : \ (f(x), g(x)) \in U\}$$

Filterbasis einer Uniformität auf M^X ist. Welche Uniformität ergibt sich, wenn $\mathcal{C}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von X ist, und welche im Fall $\mathcal{C} = \{X\}$?

5.20 Mit der Notation aus Aufgabe 5.19 sei $\mathcal{C} = \{X\}$.

Zeigen Sie, dass $(M^X, \mathcal{U}_\mathcal{C})$ vollständig ist, wenn $(M, \mathcal{U})$ es ist! $\mathcal{U}_\mathcal{C} = \mathcal{U}_{\{X\}}$ heißt dann Uniformität der gleichmäßigen Konvergenz.

5.21 Mit der Notation aus Aufgabe 5.19 sei angenommen, dass X eine Topologie trägt.

Zeigen Sie, dass die Menge aller stetigen Funktionen von X nach M, $C(X, M)$, in M^X bzgl. der Uniformität der gleichmäßigen Konvergenz abgeschlossen ist, und dass der Raum $(C(X, M), \mathcal{U}_{\{X\}}|_{C(X,M)})$ vollständig ist.

5.22 Sei $(M, \mathcal{U})$ ein uniformer Raum. Zeigen Sie, dass dann alle bzgl. $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ kompakten Teilmengen total beschränkt und, versehen mit der Spuruniformität, vollständig sind.

5.23 Zeigen Sie, dass für einen total beschränkten und vollständigen uniformen Raum $(M, \mathcal{U})$ der Raum $(M, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$ kompakt ist, auch wenn $(M, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$ das Axiom (T_2) nicht erfüllt! Sie dürfen Satz 5.40, falls (T_2) gilt, verwenden.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $(M/_{\cong}, \mathcal{U}/_{\cong})$ total beschränkt und vollständig ist und dass $(M/_{\cong}, \mathcal{T}(\mathcal{U}/_{\cong})) = (M/_{\simeq}, \mathcal{T}(\mathcal{U})/_{\simeq})$ das Axiom (T_2) erfüllt. Dann ist $(M/_{\simeq}, \mathcal{T}(\mathcal{U})/_{\simeq})$ nach Satz 5.40 kompakt. Zeigen Sie schließlich, dass daraus die Kompaktheit von $(M, \mathcal{T}(\mathcal{U}))$ folgt.

5.24 Zeigen Sie, dass eine topologische Gruppe $(G, \mathcal{T})$ genau dann metrisierbar ist, wenn der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(e)$ des neutralen Elements eine abzählbare Basis hat und $\bigcap_{V \in \mathcal{U}(e)} V = \{e\}$ erfüllt.

Zeigen Sie weiters, dass es in dem Fall eine mit $\mathcal{T}$ verträgliche Metrik gibt, die links invariant ist, dh. $d(gx, gy) = d(x, y)$ für alle $x, y, g \in G$ erfüllt.

5.25 Zeigen Sie, dass jede topologische abelsche Gruppe $(G, \mathcal{T})$ mit (T_2) eine Vervollständigung hat, es also eine vollständige topologische abelsche Gruppe $(\hat{G}, \hat{\mathcal{T}})$ mit (T_2) gibt, die $(G, \mathcal{T})$ als dichten Teilraum enthält.

Vollständigkeit bezieht sich auf die von $\mathcal{T}$ eindeutig induzierte Uniformität.

Zeigen Sie weiters, dass jeder topologische Vektorraum eine Vervollständigung hat!

6 Metrisierungssatz von Bing-Nagata-Smirnow

Definition 6.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ein Mengensystem $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt

(i) **lokalendlich**, falls

$$\forall x \in X \exists U \in \mathcal{U}(x) : \#\{B \in \mathcal{B} : B \cap U \neq \emptyset\} < \infty.$$

(ii) **diskret**, falls

$$\forall x \in X \exists U \in \mathcal{U}(x) : \#\{B \in \mathcal{B} : B \cap U \neq \emptyset\} \in \{0, 1\}.$$

(iii) **σ-lokalendlich**, falls $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, wobei $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{P}(X)$ lokalendlich für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

(iv) **σ-diskret**, falls $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, wobei $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{P}(X)$ diskret für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Bemerkung 6.2. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Mit der Nummerierung aus Definition 6.1 gelten folgende leicht zu verifizierende Aussagen:

- Aus $\#\mathcal{B} < \infty$ folgt (i).
- (ii) $\Rightarrow$ (i)
- (i) $\Rightarrow$ (iii)
- (ii) $\Rightarrow$ (iv)
- Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ lokalendlich, so ist es auch $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.
- Ist $\mathcal{B}$ lokalendlich (diskret) und gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, so ist auch $\mathcal{A}$ lokalendlich (diskret).
- Für ein lokalendliches respektive diskretes $\mathcal{B}$ kann man zu $x \in X$ und dem $U \in \mathcal{U}(x)$ eine Menge $x \in O \subseteq U$ mit $O \in \mathcal{T}$ wählen. Für diese ist $\#\{B \in \mathcal{B} : B \cap O \neq \emptyset\}$ klarerweise auch endlich respektive höchstens 1. Also kann man die in der Definition erwähnten Umgebungen U als offen voraussetzen.

//

Lemma 6.3. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ lokalendlich, so folgt*

$$\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}.$$

Beweis. „$\supseteq$“: Folgt sofort aus der Monotonie des Abschlusses.
„$\subseteq$“: Sei dazu $x \in \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A}$. Aus lokalendlich folgt die Existenz eines $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $\#\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\} < \infty$. Mit $\mathcal{A}_0 := \{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}$ folgt $x \notin \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0} A}$, da ja $U \cap \bigcup_{A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0} A = \emptyset$. Wegen der Endlichkeit von $\mathcal{A}_0$ erhält man

$$\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0} A} \cup \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}_0} A} \text{ also } x \in \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}_0} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_0} \overline{A} \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}.$$

■

Korollar 6.4. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ lokalendlich und besteht $\mathcal{A}$ aus abgeschlossenen Mengen, so ist auch $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ abgeschlossen.*

Beweis. Lemma 6.3 liefert $\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \overline{A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$. ∎

Lemma 6.5. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ lokalendlich (diskret), so ist es auch $\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\}$. Dabei gilt sogar*

$$\forall x \in X \exists O \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{T} : \#\{A \in \mathcal{A} : \overline{A} \cap O \neq \emptyset\} < \infty \ (\in \{0, 1\}).$$

Beweis. Betrachte $x \in X$ und $O \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{T}$, sodass $\#\{A \in \mathcal{A} : A \cap O \neq \emptyset\}$ endlich respektive höchstens 1 ist. Weil für $A \in \mathcal{A}$ wegen der Abgeschlossenheit von $O^{\complement}$ die Inklusionen $A \subseteq O^{\complement}, \overline{A} \subseteq O^{\complement}$ und somit auch $A \cap O = \emptyset, \overline{A} \cap O = \emptyset$ äquivalent sind, ist auch $\#\{A \in \mathcal{A} : \overline{A} \cap O \neq \emptyset\}$ endlich respektive höchstens 1, womit dasselbe auf $\#\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}, \overline{A} \cap O \neq \emptyset\}$ zutrifft. ∎

Lemma 6.6. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\mathcal{F} \neq \emptyset$ eine Teilmenge von $C(X, \mathbb{R})$. Gilt*

$$\forall x \in X \exists U \in \mathcal{U}(x) : \#\{f \in \mathcal{F} : f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap U \neq \emptyset)\} < \infty,$$

so ist die Abbildung

$$\psi : \begin{cases} (X, \mathcal{T}) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{f\in\mathcal{F}} f(x) \end{cases}$$

wohldefiniert und stetig.

Beweis. Sei zu $x \in X$ eine Menge $O \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{T}$ so gewählt, dass $\#\{f \in \mathcal{F} : f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap O \neq \emptyset)\} < \infty$ gilt. Seien $f_1, \ldots, f_n$ die Elemente dieser Menge. Wegen $x \in O$ gilt $x \in f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ nur für $f \in \{f_1, \ldots, f_n\}$. Das heißt, für alle bis auf endlich viele $f \in \mathcal{F}$ gilt $f(x) = 0$. Demnach ist ψ wohldefiniert. Da man mit denselben $f_1, \ldots, f_n$ dasselbe Argument für alle $y \in O$ anwenden kann, folgt $\psi(y) = f_1(y) + \cdots + f_n(y)$ für alle $y \in O$. Da die rechte Funktion als Summe stetiger Funktionen stetig ist und auf einer Umgebung von x mit ψ übereinstimmt, folgt bekanntermaßen die Stetigkeit von ψ in x. Aus der beliebigen Wahl von x schließt man auf die Stetigkeit von ψ. ∎

Definition 6.7. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und gelte $M \subseteq X$. M heißt ***G_δ*-Menge**, falls es Mengen $O_n \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N}$ mit $M = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ gibt.
M heißt ***F_σ*-Menge**, falls es Mengen $A_n^{\complement} \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N}$ mit $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ gibt.

Bemerkung 6.8. Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist eine Menge $M \subseteq X$ offenbar genau dann eine G_δ-Menge, wenn $M^{\complement}$ eine F_σ-Menge ist. //

Beispiel 6.9. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $O \subseteq X$ offen. Die Abbildung $x \mapsto d\left(x, O^{\complement}\right) = \inf\left\{d(x, y) : y \in O^{\complement}\right\}$ ist stetig und erfüllt $d\left(x, O^{\complement}\right) = 0$ genau dann, wenn $x \in O^{\complement}$; siehe dazu [**KB**]. Somit hat man $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ mit $F_n := \left\{x \in X : d\left(x, O^{\complement}\right) \geq \frac{1}{n}\right\}$. Diese Mengen sind das Urbild der abgeschlossenen Mengen $\left[\frac{1}{n}, \infty\right)$ und damit selbst abgeschlossen. O ist also eine F_σ-Menge. Wegen Bemerkung 6.8 sind infolge alle abgeschlossenen Mengen $A \subseteq X$ G_δ-Mengen. //

Lemma 6.10. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, auf welchem (T_4) gilt. Eine Menge $F \subseteq X$ ist dann genau dann eine abgeschlossene G_δ-Menge, wenn $F = f^{-1}\{0\}$ für eine gewisse stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$. Diese Funktion kann so gewählt werden, dass ihr Bild in $[0, 1]$ liegt.*

Beweis. „$\Leftarrow$“: F ist als Urbild einer in $\mathbb{R}$ abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion selbst abgeschlossen. Weiters gilt

$$f^{-1}\{0\} = f^{-1}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Big(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\Big)\Big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\Big(\Big(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\Big)\Big)$$

mit den offenen Mengen $f^{-1}\left(\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right)$.

„$\Rightarrow$“: Seien also $O_n \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N}$, so, dass $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ abgeschlossen ist. Aus $F \subseteq O_n$ folgt $F \cap O_n^{\complement} = \emptyset$ für $n \in \mathbb{N}$. Da diese beiden Mengen abgeschlossen sind, folgt aus (T_4) wegen des Lemmas von Urysohn 3.55, dass eine stetige Funktion $f_n : X \to [0,1]$ mit $f_n(F) \subseteq \{0\}$ und $f_n\left(O_n^{\complement}\right) \subseteq \{1\}$ existiert. Klarerweise ist dann auch $f_n : X \to \mathbb{R}$ stetig. Die Funktion $f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n$ ist wegen $\|f_n\|_\infty \leq 1$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \|\frac{1}{2^n} f_n\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ wohldefiniert und als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig, siehe [**ana**]. Ist nun x aus F, so gilt $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch $f(x) = 0$. Aus $x \notin F$ folgt $x \in O_k^{\complement}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, sprich $f_k(x) = 1$. Wegen der Nichtnegativität der f_n heißt das $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x) \geq \frac{1}{2^k} f_k(x) = \frac{1}{2^k} > 0$. Man hat also $F = f^{-1}\{0\}$. Schließlich ist offensichtlich f nichtnegativ und wegen $\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\frac{1}{2^n} f_n\|_\infty \leq 1$ gilt $f(x) \leq 1$ für alle $x \in X$. ■

Definition 6.11. Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ heißt **perfekt normal**, wenn er normal ist und jede offene Menge eine F_σ-Menge ist.

Bemerkung 6.12. Wegen Bemerkung 6.8 ist ein topologischer Raum $(X,\mathcal{T})$ genau dann perfekt normal, wenn er normal ist und jede abgeschlossene Menge eine G_δ-Menge ist. //

Beispiel 6.13. Wegen Beispiel 6.9 und Lemma 3.43 ist für jeden metrische Raum (X,d) der Raum $(X,\mathcal{T}(d))$ perfekt normal. //

Korollar 6.14. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein perfekt normaler topologischer Raum. $(X,\mathcal{T})$ ist dann vollständig normal.*

Beweis. Es muss nur (T_5) gezeigt werden. Seien dazu $A, B \subseteq X$ getrennt, also $\overline{A}\cap B = \emptyset = A\cap\overline{B}$. Die Mengen $\overline{A}$ und $\overline{B}$ sind als abgeschlossene Mengen G_δ-Mengen. Lemma 6.10 liefert zwei stetige Funktionen $f, g : X \to [0,1]$ mit $f^{-1}\{0\} = \overline{A}$ und $g^{-1}\{0\} = \overline{B}$. Die Funktion $h := f - g$ ist dann ebenfalls stetig. Außerdem gilt für $a \in A$ sicher $f(a) = 0$ und wegen $a \notin \overline{B}$ auch $g(a) > 0$, also $h(a) < 0$. Analog gilt $h(b) > 0$ für alle $b \in B$. Wegen der Stetigkeit von h sind die beiden Mengen $h^{-1}((-\infty,0))$ und $h^{-1}((0,\infty))$ offen. Sie sind klarerweise auch disjunkt und trennen A und B. ■

Lemma 6.15. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, auf welchem (T_1) gilt. Wenn es für jede abgeschlossene Menge F und offene Menge W mit $F \subseteq W$ eine Mengenfamilie $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $W_n \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N}$, und $\overline{W_n} \subseteq W$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $F \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ gibt, dann ist $(X,\mathcal{T})$ normal.*

Beweis. Es muss nur (T_4) gezeigt werden. Seien dazu $A, B \subseteq X$ disjunkt und abgeschlossen. Es gilt $A \subseteq B^{\complement} \in \mathcal{T}$. Also gibt es $W_n \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N}$, mit $\overline{W_n} \subseteq B^{\complement}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$. Genauso folgt aus $B \subseteq A^{\complement} \in \mathcal{T}$ die Existenz von $V_n \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N}$, mit $\overline{V_n} \subseteq A^{\complement}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Man definiert für alle $n \in \mathbb{N}$

$$G_n := W_n \setminus \bigcup_{k\leq n} \overline{V_k} \text{ und } H_n \qquad := V_n \setminus \bigcup_{k\leq n} \overline{W_k}.$$

Es folgt unmittelbar $G_n, H_n \in \mathcal{T}$. Für $a \in A$ gibt es wegen $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a \in W_m$ und wegen $\overline{V_n} \subseteq A^{\complement}$ gilt $a \notin \overline{V_n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Man hat also $a \in G_n$, sprich $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n \in \mathcal{T}$.

Analog folgt $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n \in \mathcal{T}$. Wäre nun $x \in X$ sowohl in $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ als auch in $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ enthalten, so gäbe es $i, j \in \mathbb{N}$ mit $x \in G_i \cap H_j$. Gälte $i \leq j$, so hätte man $x \in G_i \subseteq W_i \subseteq \overline{W_i}$ und gleichzeitig $x \in H_j = V_j \setminus \bigcup_{k\leq j} \overline{W_k}$. ↯ Der Fall $i \geq j$ führt genauso auf einen Widerspruch. Somit sind A und B getrennt durch offene Mengen. ∎

Satz 6.16. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein regulärer topologischer Raum. Sei weiters $\mathcal{B}$ eine σ-lokalendliche Basis. $(X, \mathcal{T})$ ist dann perfekt normal.*

Beweis. Zunächst erfüllt $(X, \mathcal{T})$ als regulärer Raum wegen Korollar 3.36 das Axiom (T_1). Nach Definition gilt $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, wobei $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{P}(X)$ lokalendlich für $n \in \mathbb{N}$ ist. Wegen Satz 3.34 und (T_3) gibt es zu $x \in X$ und $x \in O \in \mathcal{T}$ ein $P \in \mathcal{T}$ mit $x \in P \subseteq \overline{P} \subseteq O$. Da $\mathcal{B}$ Basis ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $B \in \mathcal{B}_n$ mit $x \in B \subseteq P \subseteq \overline{P} \subseteq O$, also $x \in B \subseteq \overline{B} \subseteq O$. Man wählt nun zu jedem $x \in O$ solch ein $B_x \in \mathcal{B}_{n(x)}$ aus, wobei $n(x)$ minimal sei, sprich für $m \in \mathbb{N}, m < n(x)$ gibt es kein $B \in \mathcal{B}_m$ mit $x \in B \subseteq \overline{B} \subseteq O$. Man setzt

$$O_n := \bigcup_{\substack{x\in O\\ n(x)=n}} B_x.$$

Es gilt dann $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = O$. Da zu festem $n \in \mathbb{N}$ das System $\mathcal{B}_n$ und infolge auch $\{B_x : n(x) = n\}$ lokalendlich ist, folgt aus Lemma 6.3, dass $\overline{O_n} = \bigcup_{\substack{x\in O\\ n(x)=n}} \overline{B_x} \subseteq O$. Man hat also $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{O_n} = O$, womit O eine F_σ-Menge ist. Schließlich gilt für eine abgeschlossene Menge $F \subseteq O$ einerseits $F \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = O$ und andererseits wegen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{O_n} = O$ auch $\overline{O_n} \subseteq O$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Definition der O_n folgt sofort $O_n \in \mathcal{T}$, womit aus Lemma 6.15 folgt, dass $(X, \mathcal{T})$ normal ist. ∎

Definition 6.17. Sei X eine Menge und betrachte die Mengensysteme $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Man definiert

$$\mathcal{A} > \mathcal{B} :\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A} \exists B \in \mathcal{B} : A \subseteq B.$$

Man sagt **$\mathcal{A}$ ist eine Verfeinerung von $\mathcal{B}$**.

Bemerkung 6.18. Für Mengensysteme $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ auf X gilt offenbar

$$(\mathcal{A} > \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} > \mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{A} > \mathcal{C}.$$

//

Satz 6.19. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist $\mathcal{B}$ eine offene Überdeckung von X, sprich $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}(d)$ und $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} = X$, so existiert eine lokalendliche und σ-diskrete Verfeinerung $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}$, welche selbst eine offene Überdeckung von X ist.*

Beweis. Man setzt $\emptyset \notin \mathcal{B}$ voraus. Andernfalls betrachtet man einfach $\mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$. Man kann $\mathcal{B}$ offensichtlich als $\mathcal{B} = \{B_s : s \in S\}$ mit einer geeigneten Indexmenge $S \neq \emptyset$ und einer injektiven Indexierung anschreiben. Sei dazu beispielsweise $S := \mathcal{B}$ mit $B_s := s$ für $s \in S$.[6] Die Menge S lässt sich nach dem zum Auswahlaxiom äquivalenten Wohlordnungssatz mit einer geeigneten Wohlordnung $\leq$ versehen. Man definiert jetzt rekursiv nach $n \in \mathbb{N}$ Mengen $M_{s,n}$ und $A_{s,n}$ mit $s \in S$ und $n \in \mathbb{N}$, indem $M_{s,n}$ die Menge aller $c \in X$ ist, welche die folgenden Bedingungen (i), (ii), (iii) erfüllen, und indem man $A_{s,n} := \bigcup_{c\in M_{s,n}} U_{\frac{1}{2^n}}(c)$ setzt.

(i) $s := \min\{t \in S : c \in B_t\}$

[6]Hier und auch an späterer Stelle ist relevant, dass diese Indexierung injektiv ist. Dadurch gilt für $U \subseteq X$, dass $\#\{B \in \mathcal{B} : B \cap U \neq \emptyset\} = \#\{s \in S : B_s \cap U \neq \emptyset\}$.

(ii) $U_{\frac{3}{2^n}}(c) \subseteq B_s$

(iii) $\forall j \in \{1, \ldots, n-1\} \forall t \in S : c \notin A_{t,j}$

Man beachte, dass $\{t \in S : c \in B_t\}$ immer nichtleer ist, da $\mathcal{B}$ eine Überdeckung ist. Beachte weiters, dass für $n = 1$ die Bedingung (iii) gegenstandslos ist. Man definiert auch:

- $\mathcal{A}_n := \{A_{s,n} : s \in S\}$
- $\mathcal{A} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$

Offenbar gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}(d)$.
Um zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ eine Überdeckung ist, sei für $x \in X$ der Index $s \in S$ minimal mit $x \in B_s$ und $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, sodass $U_{\frac{3}{2^n}}(c) \subseteq B_s$. Gibt es ein $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ und ein $t \in S$ mit $x \in A_{t,j}$, so folgt $x \in A_{t,j} \in \mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{A}$. Andernfalls gilt $x \in M_{s,n}$ und damit hat man $x \in A_{s,n} \in \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$.
Für $s \in S$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen (ii), dass

$$A_{s,n} = \bigcup_{c \in M_{s,n}} U_{\frac{1}{2^n}}(c) \subseteq B_s \in \mathcal{B}.$$

Also hat man $\mathcal{A} > \mathcal{B}$.
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \in A_{s_1,n}$ und $x_2 \in A_{s_2,n}$, wobei $s_1 \neq s_2$. Man findet dann $c_1 \in M_{s_1,n}$ und $c_2 \in M_{s_2,n}$ mit $x_k \in U_{\frac{1}{2^n}}(c_k)$, also $d(c_k, x_k) < \frac{1}{2^n}, k = 1, 2$. Nach (ii) gilt $U_{\frac{3}{2^n}}(c_k) \subseteq B_{s_k}, k = 1, 2$. Wegen $s_1 \neq s_2$ kann man o.B.d.A. $s_1 < s_2$ annehmen.Wegen (ii) gilt daher $c_2 \notin B_{s_1}$. Somit folgt $c_2 \notin U_{\frac{3}{2^n}}(c_1)$, also $d(c_1, c_2) \geq \frac{3}{2^n}$ gilt. Die Dreiecksungleichung führt zu

$$d(x_1, x_2) \geq d(c_1, c_2) - d(c_1, x_1) - d(c_2, x_2) \geq \frac{3}{2^n} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}. \tag{6.1}$$

Für $x \in X$ und zwei Punkte $x_1, x_2 \in U_{\frac{1}{2^{n+1}}}$ gilt $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x) + d(x_2, x) < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$. Wegen (6.1) können x_1 und x_2 nicht gleichzeitig in $A_{s_1,n}$ und $A_{s_2,n}$ liegen. Also hat $U_{\frac{1}{2^{n+1}}}$ nichtleeren Schnitt mit höchstens einer Menge aus $\mathcal{A}_n = \{A_{s,n} : s \in S\}$, womit die Mengensysteme $\mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N}$ diskret sind und infolge $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ σ-diskret ist.
Man will nun für $x \in X$ folgende Implikation zeigen:

$$\forall s, t \in S \forall k, j \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq j + k : U_{\frac{1}{2^k}}(x) \subseteq A_{t,j} \Rightarrow U_{\frac{1}{2^{k+j}}}(x) \cap A_{s,n} = \emptyset. \tag{6.2}$$

Man wähle also $x \in X, s, t \in S, k, j, n \in \mathbb{N}, n \geq j + k$ beliebig und es gelte $U_{\frac{1}{2^k}}(x) \subseteq A_{t,j}$. Wegen (iii) und $j < n$ folgt aus $c \in M_{s,n}$ sicherlich $c \notin A_{t,j}$. Aus $U_{\frac{1}{2^k}}(x) \subseteq A_{t,j}$ folgt daher $d(c, x) \geq \frac{1}{2^k}$ für alle $c \in M_{s,n}$. Gäbe es ein $y \in U_{\frac{1}{2^n}}(c) \cap U_{\frac{1}{2^{k+j}}}(x)$ mit $c \in M_{s,n}$, so folgte mit der Dreiecksungleichung wegen $n \geq k + j$

$$d(c, x) \leq d(c, y) + d(x, y) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{k+j}} \leq \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}. \lightning$$

Für alle $c \in M_{s,n}$ gilt also $U_{\frac{1}{2^n}}(c) \cap U_{\frac{1}{2^{k+j}}}(x) = \emptyset$, woraus $A_{s,n} \cap U_{\frac{1}{2^{k+j}}}(x) = \emptyset$, also die Implikation (6.2), folgt.
Zu $x \in X$ gibt es wegen der Überdeckungseigenschaft von $\mathcal{A}$ ein $t \in S$ und ein $j \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_{t,j}$. Wegen $A_{t,j} \in \mathcal{T}(d)$ gibt es ein hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$ mit $U_{\frac{1}{2^k}}(x) \subseteq A_{t,j}$. Aus (6.2) folgt für

$n \in \mathbb{N}, n \geq j+k$ und $s \in S$, dass $U_{\frac{1}{2^{k+j}}}(x)$ und $A_{s,n}$ leeren Schnitt haben. $U_{\frac{1}{2^{k+j}}}(x) \cap A_{s,n} \neq \emptyset$ kann also nur für $n \in \mathbb{N}$ mit $n < j+k$ zutreffen. Für solch ein festes n existiert, wie oben gezeigt wurde, höchstens ein $s \in S$ mit $U_{\frac{1}{2^{n+1}}}(x) \cap A_{s,n} \neq \emptyset$. Wegen $j+k \geq n+1$ trifft dasselbe für $U_{\frac{1}{2^{k+j}}}(x)$ zu. Es folgt also

$$\#\left\{A \in \mathcal{A} : A \cap U_{\frac{1}{2^{k+j}}}(x) \neq \emptyset\right\} < j+k,$$

weshalb $\mathcal{A}$ lokalendlich ist. ■

Korollar 6.20. *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so besitzt $(X, \mathcal{T}(d))$ eine σ-diskrete Basis.*

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{B}_k := \left\{U_{\frac{1}{k}}(x) : x \in X\right\}$ offensichtlich eine offene Überdeckung von X. Satz 6.19 liefert eine σ-diskrete offene Überdeckung $\mathcal{A}_k > \mathcal{B}_k$. Das Mengensystem $\mathcal{A} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_k$ ist dann auch eine offene Überdeckung und weiterhin σ-diskret[7]. Für $O \in \mathcal{T}(d)$ und $x \in O$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $U_{\frac{2}{k}}(x) \subseteq O$. Weil $\mathcal{A}_k$ eine Überdeckung ist, gibt es ein $A \in \mathcal{A}_k$ mit $x \in A$ und wegen $\mathcal{A}_k > \mathcal{B}_k$ gibt es ein $y \in X$ mit $x \in A \subseteq U_{\frac{1}{k}}(y)$. Für $z \in U_{\frac{1}{k}}(y)$ gilt $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$, wodurch $x \in A \subseteq U_{\frac{1}{k}}(y) \subseteq U_{\frac{2}{k}}(x) \subseteq O$. Also ist $\mathcal{A}$ eine σ-diskrete Basis ist. ■

Lemma 6.21. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, welcher (T_0) erfüllt. Weiters sei $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Pseudometriken auf X mit Werten in $[0,1]$. Ist dann $d_n : (X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig und gibt es zu jedem $A \in \mathcal{P}(X)$ abgeschlossen und allen $x \notin A$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d_n(x, A) > 0$, so ist $(X, \mathcal{T})$ durch die Metrik*

$$d : \begin{cases} X \times X & \to \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x,y) \end{cases}$$

metrisierbar, also $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$.

Beweis. Zunächst ist d wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \|\frac{1}{2^n} d_n\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ wohldefiniert und wegen der Stetigkeit der d_n als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen selbst bezüglich $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ stetig. Außerdem sieht man leicht ein, dass d eine Pseudometrik ist. Für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ folgt aus (T_0), dass $y \notin \overline{\{x\}}$ oder $x \notin \overline{\{y\}}$. Man nehme o.B.d.A. $y \notin \overline{\{x\}}$ an. Nach Voraussetzung existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < d_n(y, \overline{\{x\}}) = \inf\{d_n(y,z) : z \in \overline{\{x\}}\}$. Also gilt $d_n(x,y) > 0$ und somit $d(x,y) > 0$. Somit ist d eine Metrik.
Um $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ zu zeigen, beweist man jetzt, dass beide Topologien dieselben abgeschlossenen Mengen haben. Sei also $A \subseteq X$ bezüglich $\mathcal{T}$ abgeschlossen. Für $x \notin A$ gibt es nach Voraussetzung ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < d_n(x, A) = \inf\{d_n(x,a) : a \in A\} =: \delta$, wodurch $d_n(x,a) \geq \delta$ für alle $a \in A$. Somit gilt $d(x,a) \geq \frac{\delta}{2^n}$ für $a \in A$, woraus man $d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\} \geq \frac{\delta}{2^n} > 0$ und infolge $x \notin \overline{A}^{\mathcal{T}(d)}$ erhält.[8] Man hat also $\overline{A}^{\mathcal{T}(d)} = A$. Sei umgekehrt $A \subseteq X$ bezüglich $\mathcal{T}(d)$ abgeschlossen. Die Funktion

$$f : \begin{cases} X & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad d(x, A) \end{cases}$$

[7] Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{A}_k$ die abzählbare Vereinigung diskreter Mengensysteme, also $\mathcal{A}_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{k,n}$. Daraus folgt $\mathcal{A} = \bigcup_{(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mathcal{A}_{k,n}$, was weiterhin eine abzählbare Vereinigung diskreter Mengensysteme ist.

[8] Bekanntermaßen gilt $x \in \overline{A}^{\mathcal{T}(d)} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$ für $A \subseteq X$.

erfüllt somit $f^{-1}\{0\} = A$. Aus $\lim_{i\in I} x_i = x$ für ein Netz $(x_i)_{i\in i}$ in A und ein $x \in X$ bezüglich $\mathcal{T}$ folgt $|f(x_i) - f(x)| \leq d(x_i, x)$[9] und wegen der Stetigkeit von[10] $d(.,x) : (X,\mathcal{T}) \to \mathbb{R}$, dass $\lim_{i\in I} |f(x_i) - f(x)| \leq \lim_{i\in I} d(x_i, x) = d(x,x) = 0$. Wegen $f(x_i)_{i\in I} \equiv 0$ folgt $f(x) = 0$, also $x \in A$, weshalb A bezüglich $\mathcal{T}$ abgeschlossen ist. ■

Metrisierungssatz von Bing-Nagata-Smirnow 6.22. *Für einen topologischen Raum $(X,\mathcal{T})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $(X,\mathcal{T})$ ist metrisierbar, also gibt es eine Metrik d auf X mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$.

(ii) $(X,\mathcal{T})$ ist regulär und hat eine σ-lokalendliche Basis.

(iii) $(X,\mathcal{T})$ ist regulär und hat eine σ-diskrete Basis.

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (iii)“: Korollar 6.20 und Lemma 3.43
„(iii) $\Rightarrow$ (ii)“: trivial
„(ii) $\Rightarrow$ (i)“: Sei $(X,\mathcal{T})$ regulär und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ eine σ-lokalendliche Basis. Wegen Satz 6.16 ist $(X,\mathcal{T})$ perfekt normal. Also gibt es lokalendliche $\mathcal{B}_n, n \in \mathbb{N}$, mit $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. Man schreibt $\mathcal{B}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ als $\mathcal{B}_n = \{B_s : s \in S_n\}$ mit paarweise disjunkten Indexmengen $S_n, n \in \mathbb{N}$. Zudem sei $s \mapsto B_s$ für $s \in S_n$ injektiv.[11] Für $n \in \mathbb{N}, s \in S_n$ und $B_s \in \mathcal{B}_n$ ist B_s offene F_σ-Menge, weil $(X,\mathcal{T})$ perfekt normal ist. Somit ist $B_s^\complement$ eine abgeschlossene G_δ-Menge.
Aus (T_4) folgt mit Lemma 6.10 die Existenz einer Funktion $f_s \in C(X,\mathbb{R})$ mit $B_s = f_s^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Weiters ist $W_s := (B_s \times X) \cup (X \times B_s)$ eine offene Teilmenge von $X \times X$.
Das Mengensystem $\{W_s : s \in S_n\} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ ist für festes $n \in \mathbb{N}$ lokalendlich. Es folgt nämlich für $(x,y) \in X \times X$ aus der Lokalendlichkeit von $\mathcal{B}_n$ die Existenz von $O_x \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{T}$ und $O_y \in \mathcal{U}(y) \cap \mathcal{T}$ mit $\#\{s \in S_n : B_s \cap O_x \neq \emptyset\} < \infty$ und $\#\{s \in S_n : B_s \cap O_y \neq \emptyset\} < \infty$. Daraus folgt $O_x \times O_y \in \mathcal{U}((x,y))$ und wegen $W_s \cap (O_x \times O_y) = [(B_s \cap O_x) \times O_y] \cup [O_x \times (B_s \cap O_y)]$ auch

$$\#\{s \in S_n : W_s \cap (O_x \times O_y) \neq \emptyset\} = \#\{s \in S_n : (B_s \cap O_x \neq \emptyset) \vee (B_s \cap O_y \neq \emptyset)\} < \infty.$$

Die Funktion

$$h_s : \begin{cases} X \times X & \to \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \quad |f_s(x) - f_s(y)| \end{cases}$$

ist offensichtlich bezüglich $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ stetig. Für $(x,y) \notin W_s$ folgt $x, y \in B_s^\complement$ und weiter $|f_s(x) - f_s(y)| = 0$ mit $h_s^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq W_s$. Wegen der Lokalendlichkeit von $\{W_s : s \in S_n\}$ heißt das

$$\forall (x,y) \in X \times X \exists U \in \mathcal{U}((x,y)) : \#\{s \in S_n : h_s^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap U \neq \emptyset)\} < \infty.$$

Nach Lemma 6.6 ist

$$g_n : \begin{cases} X \times X & \to \quad \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \quad \sum_{s\in S_n} h_s(x,y) \end{cases}$$

[9]Zu $x, y \in X$ hat man $\forall a \in A : d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$ also $\forall a \in A : d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,a)$. Wegen $d(y,A) = \inf\{d(y,a) : a \in A\}$ heißt das $d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,A)$. Wegen $d(x,y) = d(y,x)$ gilt genauso $d(y,A) - d(x,y) \leq d(x,A)$, also in Summe $|f(x) - f(y)| = |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.

[10]d ist bezüglich $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ stetig. Außerdem ist $y \mapsto (y,x)$, weil $X \times X$ mit der Produkttopologie versehen ist, genau dann stetig, wenn sie komponentenweise stetig ist. Das ist klar, denn die Abbildung ist in einer Komponente konstant und in der anderen die Identität. Damit ist die Komposition $d(.,x)$ ebenfalls stetig.

[11]$S_n := \mathcal{B}_n \times \{n\}$ und $\forall s = (B,n) \in S_n : B_s := B$. Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ erhält man so $S_n \cap S_m = \emptyset$.

wohldefiniert und stetig bezüglich $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$. Die Abbildung $d_n := \min(1, g_n)$ ist dann als Minimum zweier stetiger Funktionen ebenso stetig. Außerdem erkennt man leicht durch Fallunterscheidung, dass $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Pseudometriken auf X mit Werten in $[0, 1]$ ist.
Seien zuletzt $x \in X$ und $A \subseteq X$ mit $A^\complement \in \mathcal{T}$ und $x \notin A$. Weil $\mathcal{B}$ eine Basis ist, gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $s \in S_n$ mit $x \in B_s \subseteq A^\complement$. Wegen $B_s = f_s^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ und $a \notin B_s$ gelten $f_s(a) = 0$ und $f_s(x) \neq 0$, also auch $h_s(x, a) = |f_s(x)| > 0$ für $a \in A$. Daraus schließt man $g_n(x, a) \geq |f_s(x)| > 0$ und $d_n(x, a) \geq \min(1, |f_s(x)|) > 0$ für alle $a \in A$. Weil dann auch

$$d_n(x, A) = \inf\{d_n(x, a) : a \in A\} \geq \min(1, |f_s(x)|) > 0$$

zutrifft, erhält man vermöge Lemma 6.21 eine Metrik d auf X mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$. ∎

7 Parakompaktheit

Definition 7.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Gibt es zu jeder offenen Überdeckung von X eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung, so heißt $(X, \mathcal{T})$ **Lindelöf**.
Gibt es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ eine lokalendliche offene Überdeckung $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ mit $\mathcal{V} > \mathcal{U}$, so nennt man $(X, \mathcal{T})$ **parakompakt**.

Bemerkung 7.2. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung. Diese ist klarerweise, offen, höchstens abzählbar, lokalendlich und eine Verfeinerung der ursprünglichen Überdeckung. Somit ist $(X, \mathcal{T})$ parakompakt und Lindelöf. //

Bemerkung 7.3. Unmittelbar aus Satz 6.19 folgt, dass für jeden metrischen Raum (X, d) der Raum $(X, \mathcal{T}(d))$ parakompakt ist. //

Lemma 7.4. *Sei der topologische Raum $(X, \mathcal{T})$ Lindelöf und gelte (T_3). Dann ist $(X, \mathcal{T})$ parakompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung von X. Man wählt zu $x \in X$ ein $O_x \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{T}$ so, dass es ein $V \in \mathcal{V}$ mit $x \in O_x \subseteq V$ gibt. Aus Satz 3.34 erhält man ein $P_x \in \mathcal{T}$ mit

$$x \in P_x \subseteq \overline{P_x} \subseteq O_x \subseteq V. \tag{7.1}$$

Damit sind $\{P_x : x \in X\}$ und $\{O_x : x \in X\}$ offene Überdeckungen, womit es, weil $(X, \mathcal{T})$ Lindelöf ist, eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, sodass $\{P_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$ und infolge $\{O_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$ ebenfalls eine offene Überdeckung ist. Definiere

$$\mathcal{W} := \{W_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ mit } \forall n \in \mathbb{N} : W_n := O_{x_n} \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \overline{P_{x_n}}.$$

Nach Definition gilt $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{T}$. Zu $x \in X$ sei $n \in \mathbb{N}$ minimal mit $x \in O_{x_n}$. Wegen (7.1) folgt $x \notin \overline{P_{x_k}}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $k < n$, weshalb $x \in W_n$. $\mathcal{W}$ ist also eine Überdeckung und wegen (7.1) auch eine Verfeinerung von $\mathcal{V}$.
Für $x \in X$ findet man auch ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in P_{x_n} \in \mathcal{U}(x)$. Für $m \in \mathbb{N}, m > n$ erhält man unmittelbar aus der Definition von W_m, dass $P_{x_n} \cap W_m = \emptyset$, weshalb $\#\{m \in \mathbb{N} : P_{x_n} \cap W_m \neq \emptyset\} \leq n < \infty$. Alles in allem ist $\mathcal{W}$ eine offene lokalendliche Überdeckung mit $\mathcal{W} > \mathcal{V}$. ■

Lemma 7.5. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein parakompakter topologischer Raum. Weiters gelte für abgeschlossene $A, B \subseteq X$:*

$$\forall x \in B \exists U_x, V_x \in \mathcal{T} : A \subseteq U_x \ \wedge \ x \in V_x \ \wedge \ U_x \cap V_x = \emptyset. \tag{7.2}$$

Dann sind A und B getrennt durch offene Mengen.

Beweis. Das Mengensystem $\{V_x : x \in B\} \uplus \left\{B^{\complement}\right\}$ ist wegen $B^{\complement} \in \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung von X. Wegen der Parakompaktheit gibt es eine lokalendliche offene Überdeckung $\mathcal{W} > \{V_x : x \in B\} \uplus \left\{B^{\complement}\right\}$. Sei $\mathcal{W} = \{W_s : s \in S\}$ mit injektivem $s \mapsto W_s$ und betrachte $S_0 := \{s \in S : W_s \cap B \neq \emptyset\}$. Da es sich um eine Verfeinerung handelt gilt für $s \in S$

$$\text{entweder } W_s \subseteq B^{\complement} \text{ oder } \exists x \in X : W_s \subseteq V_x.$$

Für $W_s \subseteq V_x$ folgt aus (7.2) $W_s \subseteq U_x^{\complement}$ und weil $U_x^{\complement}$ abgeschlossen ist $\overline{W_s} \subseteq U_x^{\complement}$. Wegen $U_x \supseteq A$ heißt das $\overline{W_s} \cap A = \emptyset$. Für $s \in S_0$ steht $W_s \subseteq B^{\complement}$ klar im Widerspruch zur Definition von S_0.

Somit erhält man $A \cap \bigcup_{s \in S_0} \overline{W_s} = \emptyset$. Dies führt wegen der Lokalendlichkeit von $\{W_s : s \in S_0\}$ und Lemma 6.3 zu

$$A \subseteq \left(\bigcup_{s \in S_0} \overline{W_s} \right)^{\complement} = \left(\overline{\bigcup_{s \in S_0} W_s} \right)^{\complement} =: U \in \mathcal{T}.$$

Da $\{W_s : s \in S_0\}$ offen ist es auch $V := \bigcup_{s \in S_0} W_s$. Nach Konstruktion von U und V gilt $U \cap V = \emptyset$. Schließlich ist $\mathcal{W}$ eine Überdeckung, also $B \subseteq \bigcup_{s \in S} W_s$, und die Definition von S_0 liefert $B \subseteq \bigcup_{s \in S_0} W_s = V$. ∎

Korollar 7.6. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist $(X, \mathcal{T})$ parakompakt und gilt (T_2), so ist $(X, \mathcal{T})$ normal.*

Beweis. Es muss nur (T_4) gezeigt werden. Sei $B \subseteq X$ abgeschlossen. Man setzt $A := \{z\}$ für ein beliebiges $z \in B^{\complement}$. Wegen (T_2) sind die Voraussetzungen von Lemma 7.5 erfüllt, womit A und B getrennt durch offene Mengen sind. Es gilt also (T_3). Sind nun $A, B \in \mathcal{P}(X)$ abgeschlossen und disjunkt, so sind wegen (T_3) die Voraussetzungen von Lemma 7.5 erfüllt, womit A und B getrennt durch offene Mengen sind. Es gilt also (T_4). ∎

Lemma 7.7. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, auf welchem (T_3) gilt. Weiters gebe es zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\} \subseteq \mathcal{T}$ von X eine lokalendliche Überdeckung $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von X mit $\mathcal{V} > \mathcal{U}$. Dann existiert eine abgeschlossene lokalendliche Überdeckung $\mathcal{F} = \{F_s : s \in S\}$ von X, welche $F_s \subseteq U_s$ für alle $s \in S$ erfüllt. Insbesondere gilt also $\mathcal{F} > \mathcal{U}$.*

Beweis. Für die offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\} \subseteq \mathcal{T}$ und $x \in X$ gibt es wegen (T_3) und Satz 3.34 ein $W_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in W_x \subseteq \overline{W_x} \subseteq U_s$. Somit ist $\mathcal{W} := \{W_x : x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X mit $\mathcal{W} > \mathcal{U}$. Nach Voraussetzung existiert eine lokalendliche Überdeckung $\mathcal{V} > \mathcal{W}$. Wegen Lemma 6.5 ist dann auch $\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\}$ lokalendlich. Wähle zu $V \in \mathcal{V}$ ein $s(V) \in S$ mit $\overline{V} \subseteq U_{s(V)}$ aus. Dies ist möglich, denn zu $V \in \mathcal{V}$ existiert wegen $\mathcal{V} > \mathcal{W}$ ein $x \in X$ mit $V \subseteq W_x$ und wegen $\mathcal{W} > \mathcal{U}$ ein $s \in S$ mit $V \subseteq W_x \subseteq \overline{W_x} \subseteq U_s$, also $\overline{V} \subseteq U_s$. Mit Lemma 6.3 und da Teilsysteme lokalendlicher Systeme selbst lokalendlich sind, folgt

$$\overline{\bigcup_{\substack{V \in \mathcal{V} \\ s(V) = s}} V} = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{V} \\ s(V) = s}} \overline{V} =: F_s, s \in S.$$

Das Mengensystem $\mathcal{F} := \{F_s : s \in S\}$ ist also abgeschlossen und erfüllt offenbar $F_s \subseteq U_s$. Zu $x \in X$ gibt es ein V aus der Überdeckung $\mathcal{V}$ mit $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq F_{s(V)}$. Also ist $\mathcal{F}$ auch eine Überdeckung. Schließlich nehme man zu $x \in X$ eine Menge $O \in \mathcal{T} \cap \mathcal{U}(x)$ mit $\#\{V \in \mathcal{V} : \overline{V} \cap O \neq \emptyset\} < \infty$, was wegen Lemma 6.5 möglich ist. Seien nun $s_1, s_2 \in S$ nicht gleich und gelte $F_{s_1} \cap O \neq \emptyset \neq F_{s_2} \cap O$. Es muss dann $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ mit $s(V_1) = s_1, s(V_2) = s_2$ und $\overline{V_1} \cap O \neq \emptyset \neq \overline{V_2} \cap O$ geben. Aus $s(V_1) \neq s(V_2)$ folgt $V_1 \neq V_2$. Insbesondere gibt es nur endlich viele $s \in S$, die $F_s \cap O \neq \emptyset$ erfüllen. Folglich ist $\mathcal{F}$ lokalendlich. ∎

Lemma 7.8. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Besitzt jede offene Überdeckung von X eine lokalendliche abgeschlossene Verfeinerung, welche X überdeckt, so besitzt jede offene Überdeckung von X auch eine offene lokalendliche Verfeinerung, welche X überdeckt, sprich $(X, \mathcal{T})$ ist parakompakt.*

Beweis. Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung von X und sei $\mathcal{A}$ die entsprechende abgeschlossene lokalendliche Überdeckung von X mit $\mathcal{A} > \mathcal{U}$. Gelte $\mathcal{A} = \{A_s : s \in S\}$ mit injektivem $s \mapsto A_s$. Für $x \in X$ wähle man eine Menge $O_x \in \mathcal{T} \cap \mathcal{U}(x)$ mit $\#\{s \in S : A_s \cap O_x \neq \emptyset\} < \infty$. Somit erhält man eine offene Überdeckung $\mathcal{O} := \{O_x : x \in X\}$ von X. Zu dieser gibt es wiederum eine abgeschlossene lokalendliche Überdeckung $\mathcal{F}$ von X mit $\mathcal{F} > \mathcal{O}$. Aufgrund von $\mathcal{F} > \mathcal{O}$ gibt es zu $F \in \mathcal{F}$ ein $x \in X$ mit $F \subseteq O_x$. Wegen der Wahl von O_x ist $s(F) := \{s \in S : A_s \cap F \neq \emptyset\}$ endlich. Für jedes $s \in S$ ist das Mengensystem $\{F \in \mathcal{F} : F \cap A_s = \emptyset\}$ als Teilsystem eines lokalendlichen abgeschlossenen Systems selbst lokalendlich und abgeschlossen. Wegen Korollar 6.4 ist die Vereinigung dieses Systemes abgeschlossen und infolge die Menge

$$W_s := \Big(\bigcup_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ F \cap A_s = \emptyset}} F \Big)^{\complement}$$

offen. Beachte, dass aus $F \cap A_s = \emptyset$ immer $F \cap W_s = \emptyset$ folgt und somit

$$F \cap W_s = \emptyset \Rightarrow s \in s(F). \tag{7.3}$$

Sei $x \in A_s$ für $s \in S$ beliebig. Das Mengensystem $\{F \in \mathcal{F} : F \cap A_s = \emptyset\}$ ist offensichtlich so definiert, dass es keine Menge enthält, welche x enthält. Damit liegt x auch nicht in der Vereinigung dieses Systems, also in ihrem Komplement W_s, womit $A_s \subseteq W_s$.
Wegen $\mathcal{A} > \mathcal{U}$ kann man zu jedem $s \in S$ ein $U_s \in \mathcal{U}$ mit $A_s \subseteq U_s$ auswählen um damit $V_s := W_s \cap U_s$ zu definieren. Das Mengensystem $\mathcal{V} := \{V_s : s \in S\}$ ist dann offen. Außerdem gilt $A_s \subseteq V_s$ für $s \in S$, womit $\mathcal{V}$ eine Überdeckung ist, denn $\mathcal{A}$ ist bereits eine Überdeckung. Darüber hinaus gilt $\mathcal{V} > \mathcal{U}$, da : $V_s = W_s \cap U_s \subseteq U_s \in \mathcal{U}$.
Für $x \in X$ erhält man vermittels der Lokalendlichkeit von $\mathcal{F}$ ein $O \in \mathcal{T} \cap \mathcal{U}(x)$ mit $\#\{F \in \mathcal{F} : F \cap O \neq \emptyset\} < \infty$. Daraus und aus $X = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ schließt man auf die Existenz von $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ zu $n \in \mathbb{N}$ mit

$$O = O \cap X = O \cap \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \cap O = (F_1 \cap O) \cup \dots \cup (F_n \cap O). \tag{7.4}$$

Für ein $s \in S$ mit $V_s \cap O \neq \emptyset$ muss wegen $V_s = W_s \cap U_s \subseteq W_s$ insbesondere $W_s \cap O \neq \emptyset$ zutreffen. Zusammen mit (7.4) bedeutet das, dass es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $W_s \cap F_j \neq \emptyset$ gibt. Wegen (7.3) gilt $s \in s(F_j)$. In jedem Falle heißt das, dass $V_s \cap O \neq \emptyset$ immer $s \in s(F_1) \cup \dots \cup s(F_n)$ bedingt. Als Vereinigung endlicher Mengen ist dies immer noch eine endliche Auswahl von s, womit $\mathcal{V}$ lokalendlich ist. ∎

Lemma 7.9. *Jede offene σ-lokalendliche Überdeckung eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ besitzt eine lokalendliche Verfeinerung, welche X überdeckt.*

Beweis. Sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ eine offene σ-lokalendliche Überdeckung von X. Es gibt also lokalendliche $\mathcal{V}_k \subseteq \mathcal{T}, k \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{V} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_k$. Man schreibt nun $\mathcal{V}_k$ für $k \in \mathbb{N}$ als $\mathcal{V}_k = \{V_s : s \in S_k\}$ mit paarweise disjunkten Indexmengen $S_k, k \in \mathbb{N}$, und mit injektiven $s \mapsto V_s, s \in S_k$. Weiters sei $S := \biguplus_{k \in \mathbb{N}} S_k$, womit $\mathcal{V} = \{V_s : s \in S\}$. Für $s \in S$ definiert man

$$A_s := V_s \setminus \bigcup_{\ell < k(s)} \bigcup_{s' \in S_\ell} V_{s'}, \tag{7.5}$$

wobei $k(s) \in \mathbb{N}$ jene eindeutige Zahl mit $s \in S_k$ ist. Das Mengensystem $\mathcal{A} := \{A_s : s \in S\}$ ist offenbar eine Verfeinerung von $\mathcal{V}$. Weil $\mathcal{V}$ eine Überdeckung ist, gibt es zu $x \in X$ ein in $\mathbb{N}$ minimales k derart, dass ist,

$$x \in \bigcup_{s \in S_k} V_s.$$

Sei $s \in S_k$ so gewählt, dass $x \in V_s$ zutrifft. Aus der Minimalität von k erhält man für $\ell < k$, dass $x \notin \bigcup_{s' \in S_\ell} V_{s'}$, also auch

$$x \notin \bigcup_{\ell < k} \bigcup_{s' \in S_\ell} V_{s'}.$$

Aus (7.5) folgt $x \in A_s$, womit $\mathcal{A}$ eine Überdeckung von X ist. Für das obige V_s mit $x \in V_s$ gilt auch $V_s \in \mathcal{T} \cap \mathcal{U}(x)$. Für $A_t \in \mathcal{A}$ mit $t \in S$ und $k(t) > k = k(s)$ erhält man

$$V_s \cap A_t = V_s \cap V_t \setminus \bigcup_{\ell < k(t)} \bigcup_{s' \in S_\ell} V_{s'} \subseteq V_s \setminus \bigcup_{s' \in S_k} V_{s'} = \emptyset. \tag{7.6}$$

Für $\ell \in \{1, \dots, k\}$ liefert die Lokalendlichkeit von $\mathcal{V}_k$ Mengen $W_\ell \in \mathcal{U}(x)$, sodass $W_\ell \cap V_{s'} \neq \emptyset$ für höchstens endlich viele $s' \in S_j$ erfüllt ist. Man betrachte $U_x := V_s \cap W_1 \cap \dots \cap W_k \in \mathcal{U}(x)$. Für $A_t \in \mathcal{A}$ mit $t \in S$ und $k(t) \leq k$ gilt wegen (7.5), dass aus $A_t \cap U_x \neq \emptyset$ auch $V_t \cap W_{k(t)} \neq \emptyset$ folgt. Das ist aber für höchstens endlich viele $t \in S_{k(t)}$ möglich. Wegen (7.6) gilt $A_t \cap U_x = \emptyset$ für alle $t \in S$ mit $k(t) > k$. Alles in allem ist $U_x \in \mathcal{U}(x)$ so gewählt, dass $\#\{t \in S : A_t \cap U_x \neq \emptyset\} < \infty$ zutrifft. Also ist $\mathcal{A}$ lokalendlich. ■

Satz 7.10. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, auf welchem (T_3) gilt. Folgende Aussagen sind dann äquivalent:*

(i) $(X, \mathcal{T})$ ist parakompakt.

(ii) Jede offene Überdeckung von X besitzt eine lokalendliche Verfeinerung, welche X überdeckt.

(iii) Jede offene Überdeckung von X besitzt eine abgeschlossene lokalendliche Verfeinerung, welche X überdeckt.

(iv) Jede offene Überdeckung von X besitzt eine offene σ-lokalendliche Verfeinerung, welche X überdeckt.

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (ii)“: trivial
„(ii) $\Rightarrow$ (iii)“: Da sich jede Überdeckung $\mathcal{U}$ als $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\}$ schreiben lässt, folgt die Aussage aus Lemma 7.7.
„(iii) $\Rightarrow$ (i)“: Lemma 7.8
„(i) $\Rightarrow$ (iv)“: trivial
„(iv) $\Rightarrow$ (ii)“: Die Aussage folgt aus Lemma 7.9 und der Transitivität von Verfeinerungen, vgl. Bemerkung 6.18. ■

Definition 7.11. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Für $M \in \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ definiert man den **Stern von M bezüglich $\mathcal{A}$** als

$$\mathrm{St}(M, \mathcal{A}) := \bigcup_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ A \cap M \neq \emptyset}} A.$$

Für $x \in X$ ist die Menge $\mathrm{St}(x, \mathcal{A}) := \mathrm{St}(\{x\}, \mathcal{A})$ der **Stern von x bezüglich $\mathcal{A}$**.

Bemerkung 7.12. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und gelte $M, N \in \mathcal{P}(X)$ und $x \in X$ sowie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

- Ist $\mathcal{A}$ eine Überdeckung von X, also $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, so erhält man offensichtlich $\mathrm{St}(M, \mathcal{A}) \supseteq M$.

- $N \subseteq M \;\Rightarrow\; \mathrm{St}(N, \mathcal{A}) \subseteq \mathrm{St}(M, \mathcal{A})$
- Weiters gilt $\mathrm{St}(x, \mathcal{A}) = \bigcup_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ x \in A}} A$.

//

Definition 7.13. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und betrachte die Mengensysteme $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Man definiert

$$\mathcal{A} \overset{**}{>} \mathcal{B} :\Leftrightarrow \{\mathrm{St}(A, \mathcal{A}) : A \in \mathcal{A}\} > \mathcal{B}$$

und sagt **$\mathcal{A}$ ist eine Sternverfeinerung von $\mathcal{B}$**.
Weiters definiert man

$$\mathcal{A} \overset{*}{>} \mathcal{B} :\Leftrightarrow \{\mathrm{St}(x, \mathcal{A}) : x \in X\} > \mathcal{B}$$

und sagt **$\mathcal{A}$ ist eine baryzentrische Verfeinerung von $\mathcal{B}$**.

Lemma 7.14. *Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Überdeckungen von X. Dann gelten:*

- $\mathcal{A} \overset{*}{>} \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} > \mathcal{B}$,
- $\mathcal{A} \overset{**}{>} \mathcal{B} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \overset{*}{>} \mathcal{B}$,
- $\mathcal{A} \overset{*}{>} \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \overset{*}{>} \mathcal{C} \;\Rightarrow\; \mathcal{A} \overset{**}{>} \mathcal{C}$.

Beweis. Der erste Punkt folgt sofort aus $A \subseteq \mathrm{St}(x, \mathcal{A})$ für $A \in \mathcal{A}$ und $x \in A$.
Für den zweiten Punkt gelte $x \in X$. Da $\mathcal{A}$ eine Überdeckung von X ist, gibt es ein $A \in \mathcal{A}$ mit $x \in A$. Wegen $\mathcal{A} \overset{**}{>} \mathcal{B}$ existiert zu diesem A ein $B \in \mathcal{B}$ mit $\mathrm{St}(A, \mathcal{A}) \subseteq B$, womit $\mathrm{St}(x, \mathcal{A}) \subseteq B$. Es folgt $\mathrm{St}(x, \mathcal{A}) \subseteq \mathrm{St}(A, \mathcal{A})$. Wegen der Beliebigkeit von $x \in X$ heißt das $\{\mathrm{St}(x, \mathcal{A}) : x \in X\} > B$, also $\mathcal{A} \overset{*}{>} \mathcal{B}$.
Für den dritten Punkt muss man zu jedem $A \in \mathcal{A}$ ein $C \in \mathcal{C}$ mit $\mathrm{St}(A, \mathcal{A}) \subseteq C$ finden. Ist A leer, so folgt $\mathrm{St}(A, \mathcal{A}) = \emptyset$, womit die Aussage trivial ist. Sei also $A \neq \emptyset$. Wegen $\mathcal{A} \overset{*}{>} \mathcal{B}$ gibt es zu jedem $x \in A$ ein $B(x) \in \mathcal{B}$ mit $\mathrm{St}(x, \mathcal{A}) \subseteq B(x)$. Es folgt

$$\mathrm{St}(A, \mathcal{A}) = \bigcup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ A \cap A' \neq \emptyset}} A' = \bigcup_{x \in A} \bigcup_{\substack{A' \in \mathcal{A} \\ x \in A'}} A' = \bigcup_{x \in A} \mathrm{St}(x, \mathcal{A}) \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x).$$

Für ein festes $x' \in A$ liefert $A \in \mathcal{A}$, dass $x' \in \mathrm{St}(x, \mathcal{A}) \subseteq B(x)$ für $x \in A$, was wiederum $B(x) \subseteq \mathrm{St}(x', \mathcal{B})$ impliziert und daher $\mathrm{St}(A, \mathcal{A}) \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x) \subseteq \mathrm{St}(x', \mathcal{B})$. Aus $\mathcal{B} \overset{*}{>} \mathcal{C}$ erhält man abschließend ein $C \in \mathcal{C}$ mit $\mathrm{St}(A, \mathcal{A}) \subseteq \mathrm{St}(x', \mathcal{B}) \subseteq C$. ■

Lemma 7.15. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung von X. Besitzt $\mathcal{U}$ eine abgeschlossene lokalendliche Verfeinerung, welche X überdeckt, so besitzt $\mathcal{U}$ auch eine offene baryzentrische Verfeinerung, welche X überdeckt.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ die abgeschlossene lokalendliche Überdeckung von X mit $\mathcal{F} > \mathcal{U}$. Wie bereits öfters zuvor schreibt man $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\}$ und $\mathcal{F} = \{F_t : t \in T\}$ mit injektiven $s \mapsto U_s$ und $t \mapsto F_t$. Da $\mathcal{F}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist, kann man zu jedem $t \in T$ ein $s(t) \in S$ mit $F_t \subseteq U_{s(t)}$ auswählen. Weiters definiert man zu jedem $x \in X$ die Menge $T(x) := \{t \in T : x \in F_t\}$. Diese kann für kein $x \in X$ leer sein, denn $\mathcal{F}$ ist ja eine Überdeckung von X. Außerdem bedingt die Lokalendlichkeit von $\mathcal{F}$ die Endlichkeit von $T(x)$. Man setzt für $x \in X$

$$V_x := \Big(\bigcap_{t \in T(x)} U_{s(t)} \Big) \cap \Big(\bigcup_{t \in T \setminus T(x)} F_t \Big)^{\complement}.$$

Wegen $x \in F_t \subseteq U_{s(t)}$ für alle $t \in T(x)$ und $x \notin F_t$ für alle $t \in T \setminus T(x)$ gilt immer $x \in V_x$. Somit ist $\mathcal{V} := \{V_x : x \in X\}$ eine Überdeckung von X. Wegen $\#T(x) < \infty$, wegen $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ und weil $\{F_t : t \notin T(x)\}$ als Teilsystem eines abgeschlossenen lokalendlichen Mengensystems selbst lokalendlich und abgeschlossen ist, folgt mit Korollar 6.4, dass $V_x \in \mathcal{T}$. Somit ist $\mathcal{V}$ offen.
Gelte nun $x \in X$ und $t \in T(x)$. Für ein $x' \in X$ mit $x \in V_{x'}$ folgt aus der Definition von $V_{x'}$, dass $x \notin F_{t'}$ für alle $t' \in T \setminus T(x')$. Wegen $x \in F_t$ folgt daraus $t \in T(x')$, was wiederum $V_{x'} \subseteq U_{s(t)}$ impliziert, wie man aus der Definition von $V_{x'}$ erkennt. Also gilt

$$\mathrm{St}(x, \mathcal{V}) = \bigcup_{\substack{x' \in X \\ x \in V_{x'}}} V_{x'} \subseteq U_{s(t)},$$

woraus $\{\mathrm{St}(x, \mathcal{V}) : x \in X\} > \mathcal{U}$ bzw. $\mathcal{V} \overset{*}{>} \mathcal{U}$ folgt. ■

Lemma 7.16. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Besitzt jede offene Überdeckung von X eine offene Sternverfeinerung, welche X überdeckt, so besitzt jede offene Überdeckung von X auch eine offene σ-diskrete Verfeinerung, welche X überdeckt.*

Beweis. Sei $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\} \subseteq \mathcal{T}$ mit injektivem $s \mapsto U_s$ eine offene Überdeckung von X. Sei $\mathcal{U}_0 := \mathcal{U}$ und wähle für $i \in \mathbb{N}, i > 0$ induktiv offene Überdeckungen $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{T}$ von X mit $\mathcal{U}_i \overset{**}{>} \mathcal{U}_{i-1}$. Für $i \in \mathbb{N}$ und $s \in S$ definiere

$$U_{s,i} := \{x \in X : \exists V \in \mathcal{U}(x) : \mathrm{St}(V, \mathcal{U}_i) \subseteq U_s\}.$$

Für $x \in U_{s,i}$ gilt $x \in V \subseteq \mathrm{St}(V, \mathcal{U}_i) \subseteq U_s$ mit einem geeigneten $V \in \mathcal{U}(x)$, also $U_{s,i} \subseteq U_s$. Weiters sind diese Mengen offen, denn zu $x \in U_{s,i}$ gibt es ein $O \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{T}$ mit $O \subseteq V$, womit auch $\mathrm{St}(O, \mathcal{U}_i) \subseteq \mathrm{St}(V, \mathcal{U}_i) \subseteq U_s$ gilt. Da O offen ist, hat man $O \in \mathcal{U}(x')$ für alle $x' \in O$, also $O \subseteq U_{s,i}$.
Sei x aus X. Wegen der Überdeckungseigenschaft gibt es ein $U_i \in \mathcal{U}_i$ mit $x \in U_i$ und wegen $\mathcal{U}_i \overset{**}{>} \mathcal{U}_{i-1}$ gibt es ein $U_{i-1} \in \mathcal{U}_{i-1}$ mit $\mathrm{St}(U_i, \mathcal{U}_i) \subseteq U_{i-1}$. Wegen $\mathcal{U}_{i-1} > \mathcal{U}_{i-2} > \cdots > \mathcal{U}_0$ erhält man induktiv $U_{i-1} \in \mathcal{U}_{i-1}, \ldots, U_0 \in \mathcal{U}_0$ mit $U_{i-1} \subseteq \cdots \subseteq U_0$, also $\mathrm{St}(U_i, \mathcal{U}_i) \subseteq U_0 = U_s$ mit einem $s \in S$. Aufgrund von $U_i \in \mathcal{U}(x)$ folgt $x \in U_{s,i}$. Damit ist $\{U_{s,i} : s \in S\}$ eine Überdeckung.
Man zeigt nun für $s \in S$, $i \in \mathbb{N}$ und $x, y \in X$

$$x \in U_{s,i} \wedge y \notin U_{s,i+1} \Rightarrow \nexists U \in \mathcal{U}_{i+1} : x, y \in U. \tag{7.7}$$

Seien dazu $x, y \in U \in \mathcal{U}_{i+1}$. Man muss dann zeigen, dass $x \in U_{s,i}$ auch $y \in U_{s,i}$ impliziert. Aus $\mathcal{U}_{i+1} \overset{**}{>} \mathcal{U}_i$ folgt die Existenz eines $W_U \in \mathcal{U}_i$ mit $x, y \in U \subseteq \mathrm{St}(U, \mathcal{U}_{i+1}) \subseteq< W_U$. Aus $x \in U_{s,i}$ folgt die Existenz einer Menge $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $\mathrm{St}(V, \mathcal{U}_i) \subseteq U_s$. $x \in W_U \in \mathcal{U}_i$ bedingt $W_U \subseteq \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_i) \subseteq \mathrm{St}(V, \mathcal{U}_i) \subseteq U_s$. Wegen $U \in \mathcal{U}(y)$ und $y \in \mathrm{St}(U, \mathcal{U}_{i+1}) \subseteq W_U \subseteq U_s$ folgt $y \in U_{s,i+1}$.
Die Menge S lässt sich nach dem zum Auswahlaxiom äquivalenten Wohlordnungssatz mit einer geeigneten Wohlordnung $\leq$ versehen. Für $s \in S$ und $i \in \mathbb{N}$ definiere

$$V_{s,i} := U_{s,i} \setminus \overline{\bigcup_{\substack{s' \in S \\ s' \leq s \\ s' \neq s}} U_{s',i+1}} \quad (\in \mathcal{T}).$$

Für $s_1, s_2 \in S$ mit $s_1 \neq s_2$ gilt entweder $s_1 \leq s_2$ oder $s_2 \leq s_1$, wodurch $V_{s_2,i} \subseteq U_{s_2,i} \setminus U_{s_1,i+1}$ oder $V_{s_1,i} \subseteq U_{s_1,i} \setminus U_{s_2,i+1}$. Für $x \in V_{s_1,i}$ und $y \in V_{s_2,i}$ erhält man damit $y \notin U_{s_1,i+1}, x \in U_{s_1,i}$ oder $x \notin U_{s_2,i+1}, y \in U_{s_2,i}$. In jedem Falle folgt aus (7.7), dass $x, y \in U$ für kein $U \in \mathcal{U}_{i+1}$.
Sei nun zu $x \in X$ eine Menge $U \in \mathcal{U}_{i+1}$ mit $x \in U$ gewählt. Gäbe es nun zwei verschiedene Mengen mit nichtleerem Schnitt mit U aus $\{V_{s,i} : s \in S\}$ bei festem $i \in \mathbb{N}$, so bedeutete das die Existenz von $s_1, s_2 \in S, s_1 \neq s_2$ und von $x \in U \cap V_{s_1,i}, y \in U \cap V_{s_2,i}$.↯ Folglich ist $\{V_{s,i} : s \in S\}$ diskret und $\mathcal{V} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{V_{s,i} : s \in S\}$ damit σ-diskret und offen. Weil für beliebige $i \in \mathbb{N}$ und $s \in S$ die Teilmengenkette $V_{s,i} \subseteq U_{s,i} \subseteq U_s$ gilt, erhält man $\mathcal{V} > \mathcal{U}$.
Abschließend existieren zu jedem $x \in X$ ein $s \in S$ mit $x \in U_{s,i}$, denn die Mengensysteme $\{U_{s,i} : s \in S\}$ sind für jedes $i \in \mathbb{N}$ Überdeckungen, womit $\{s \in S | \exists i \in \mathbb{N} : x \in U_{s,i}\}$ nichtleer ist. Da S wohlgeordnet ist, existiert das Minimum $s(x) \in S$ dieser Menge. Sei $i \in \mathbb{N}$ so, dass $x \in U_{s(x),i}$. Offenbar gilt für alle $s \in S, s \neq s(x), s \leq s(x)$, dass $x \notin U_{s,i+2}$. Für ein $y \in U_{s,i+1}$ mit demselbem s liefert (7.7), dass $x, y \in U$ für kein $U \in \mathcal{U}_{i+2}$. Daraus schließt man $y \notin \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_{i+2})$, also

$$\mathrm{St}(x, \mathcal{U}_{i+2}) \cap \bigcup_{\substack{s \in S \\ s \leq s(x) \\ s \neq s(x)}} U_{s,i+1} = \emptyset.$$

Wegen der Offenheit und der Überdeckungseigenschaft von $\mathcal{U}_{i+2}$ gilt $x \in \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_{i+2}) \in \mathcal{U}(x)$, also

$$x \notin \overline{\bigcup_{\substack{s \in S \\ s \leq s(x) \\ s \neq s(x)}} U_{s,i+1}}.$$

Das heißt $x \in V_{s(x),i}$, weswegen $\mathcal{V}$ eine Überdeckung von X ist. ■

Stone's Coincidence Theorem 7.17. *Sei $(X, \mathcal{T})$ eine topologischer Raum, auf welchem (T_1) gilt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $(X, \mathcal{T})$ ist parakompakt und erfüllt (T_2).

(ii) Jede offene Überdeckung von X besitzt eine offene baryzentrische Verfeinerung, welche X überdeckt.

(iii) Jede offene Überdeckung von X besitzt eine offene Sternverfeinerung, welche X überdeckt.

(iv) $(X, \mathcal{T})$ erfüllt (T_3) und jede offene Überdeckung von X besitzt eine offene σ-diskrete Verfeinerung, welche X überdeckt.

Beweis. „(i) ⇒ (ii)“: Aus Korollar 7.6 folgt, dass $(X, \mathcal{T})$ normal und damit auch regulär ist, also insbesondere (T_3). Wegen Satz 7.10 besitzt jede offene Überdeckung von X eine abgeschlossene lokalendliche Verfeinerung, welche X überdeckt. Deshalb folgt mit Lemma 7.15 die Aussage (ii).
„(ii) ⇒ (iii)“: Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung von X. Sei weiters $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung von X mit $\mathcal{V} \overset{*}{>} \mathcal{U}$. Klarerweise gibt es auch eine offene Überdeckung $\mathcal{W}$ von X mit $\mathcal{W} \overset{*}{>} \mathcal{V}$. Aus Lemma 7.14 folgt $\mathcal{W} \overset{**}{>} \mathcal{U}$, also (iii).
„(iii) ⇒ (iv)“: Lemma 7.16 liefert (iv) bis auf die Gültigkeit von (T_3). Um diese einzusehen, sei $F \subseteq X$ abgeschlossen und gelte $x \notin F$ für ein $x \in X$. Dann ist $\{X \setminus \{x\}, X \setminus F\}$ eine offene Überdeckung von X. Sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung von X mit $\mathcal{V} \overset{**}{>} \{X \setminus \{x\}, X \setminus F\}$ und sei $V \in \mathcal{V}$ so, dass $x \in V$. Es folgt $\mathrm{St}(V, \mathcal{V}) \subseteq X \setminus \{x\}$ oder $\mathrm{St}(V, \mathcal{V}) \subseteq X \setminus F$. Erstere Möglichkeit

ist aber wegen $x \in V \subseteq \mathrm{St}(V, \mathcal{V})$ auszuschließen. Damit muss $\mathrm{St}(V, \mathcal{V}) \subseteq X \setminus F$ gelten. Sei $y \in \overline{V}$ und sei $W \in \mathcal{V}$ so, dass $y \in W$. Da $\mathcal{V}$ offen ist, gilt $W \in \mathcal{U}(y)$. Das heißt $W \cap V \neq \emptyset$, woraus $y \in W \subseteq \mathrm{St}(V, \mathcal{V})$ folgt. Weil $y \in \overline{V}$ beliebig war, gilt $\overline{V} \subseteq \mathrm{St}(V, \mathcal{V}) \subseteq X \setminus F = F^{\complement}$. Alles in allem hat man also $x \in V \in \mathcal{T}$ und $F \subseteq \overline{V}^{\complement}$, sowie $V \cap \overline{V}^{\complement} = \emptyset$. Also sind x und F getrennt durch offene Mengen, sprich es gilt (T_3).

„(iv) $\Rightarrow$ (i)“: Da (T_3) und (T_1) gelten ist $(X, \mathcal{T})$ regulär, womit auch (T_2) gilt. Der Rest folgt unmittelbar aus Satz 7.10, da ein σ-diskretes Mengensystem auch σ-lokalendlich ist. ■

8 Metrisierungssatz von Bing

Definition 8.1. Man nennt einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ **collectionwise normal**, wenn er (T_1) erfüllt und es für jedes abgeschlossene diskrete Mengensystem $\mathcal{F} = \{F_s : s \in S\}$ mit Indexmenge S ein offenes diskretes Mengensystem $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\} \subseteq \mathcal{T}$ derart gibt, dass $F_s \subseteq U_s$ für alle $s \in S$.[12]

Korollar 8.2. *Ist ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ collectionwise normal, so ist er auch normal.*

Beweis. Es muss (T_4) gezeigt werden. Seien $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(X)$ zwei disjunkte abgeschlossene Mengen. Die Mengen $F_1^\complement$ und $F_2^\complement$ sind dann offen und überdecken X. Es gibt also für jedes $x \in X$ ein $i \in \{1, 2\}$ mit $F_i^\complement \in \mathcal{U}(x)$. Diese Menge hat nur entweder mit F_1 oder mit F_2 nichtleeren Schnitt. Also ist $\{F_1, F_2\}$ diskret und abgeschlossen. Somit gibt es ein diskretes System $\{O_1, O_2\} \subseteq \mathcal{T}$ mit $F_1 \subseteq O_1$ und $F_2 \subseteq O_2$. Gäbe es ein $x \in O_1 \cap O_2$, so gälte $U \cap O_1 \neq \emptyset \neq O_2 \cap U$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$, was im Widerspruch dazu stünde, dass $\{O_1, O_2\}$ diskret ist. $\lightning$ Also sind O_1 und O_2 disjunkt und infolge gilt (T_4). ∎

Bemerkung 8.3. Im Beweis von Korollar 8.2 wurde gezeigt, dass für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und zwei disjunkte abgeschlossene Mengen $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(X)$ das Mengensystem $\{F_1, F_2\}$ diskret und abgeschlossen ist. //

Lemma 8.4. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, welcher (T_1) erfüllt. $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann collectionwise normal, wenn es für jedes abgeschlossene diskrete Mengensystem $\mathcal{F} = \{F_s : s \in S\}$ ein offenes Mengensystem $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\}$ bestehend aus paarweise disjunkten Mengen derart gibt, dass $F_s \subseteq U_s$ für alle $s \in S$.*

Beweis. „$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\} \subseteq \mathcal{T}$ das diskrete offene Mengensystem aus Definition 8.1. Gäbe es ein $x \in U_{s_1} \cap U_{s_2}$ für $s_1 \neq s_2$, so gälte $U \cap U_{s_1} \neq \emptyset \neq U_{s_2} \cap U$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$, was im Widerspruch dazu stünde, dass $\mathcal{U}$ diskret ist.
„$\Leftarrow$": Wegen Bemerkung 8.3 und wegen der gegebenen Voraussetzungen gibt es zu abgeschlossenen disjunkten $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(X)$ offene disjunkte $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ mit $F_i \subseteq O_i$ für $i = 1, 2$, also gilt (T_4). Seien jetzt $\mathcal{F} = \{F_s : s \in S\}$ und $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\}$ wie in der Aussage des Lemmas. Da $\mathcal{F}$ insbesondere lokalendlich ist, ist wegen Korollar 6.4 die Menge $A := \bigcup_{s \in S} F_s$ abgeschlossen. Demnach sind wegen $F_s \subseteq U_s$ die Mengen A und $B := (\bigcup_{s \in S} U_s)^\complement$ abgeschlossen und disjunkt. Es gibt also offene und disjunkte $U, V \in \mathcal{T}$ mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$. Man definiert $\mathcal{V} := \{V_s : s \in S\}$ mit $V_s := U_s \cap U$ für alle $s \in S$. Offenbar gelten $F_s \subseteq V_s$ und $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$.
Gelte $x \in X$. Liegt x in $\bigcup_{s \in S} U_s$, so folgt $x \in U_{s(x)} \in \mathcal{U}(x)$ für ein $s(x) \in S$. Weil $\mathcal{U}$ aus paarweise disjunkten Mengen besteht, gilt $U_{s(x)} \cap V_s \subseteq U_{s(x)} \cap U_s = \emptyset$ für alle $s \in S \setminus \{s(x)\}$, womit $U_{s(x)}$ mit höchstens einer Menge aus $\mathcal{V}$ nichtleeren Schnitt hat. Liegt andererseits x in $(\bigcup_{s \in S} U_s)^\complement = B$, so folgen $x \in B \subseteq V \in \mathcal{U}(x)$ und $V_s \cap V \subseteq U \cap V = \emptyset$ für $s \in S$. Folglich ist $\mathcal{V}$ diskret und damit $(X, \mathcal{T})$ collectionwise normal. ∎

Lemma 8.5. *Ist ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ parakompakt und gilt (T_2), so ist $(X, \mathcal{T})$ collectionwise normal.*

Beweis. Sei $\mathcal{F} = \{F_s : s \in S\}$ abgeschlossen und diskret. Wähle für alle $x \in X$ ein $V_x \in \mathcal{U}(x)$ mit $\#\{s \in S : F_s \cap V_x \neq \emptyset\} \leq 1$. Gemäß Korollar 7.6 ist $(X, \mathcal{T})$ normal, also insbesondere regulär. Damit folgt wegen Satz 3.34 für $x \in X$ die Existenz eines $H_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in H_x \subseteq \overline{H_x} \subseteq V_x$.

[12]Diskret bezieht sich hier auf die Anzahl der $s \in S$. Daraus folgt insbesondere, dass die Mengensysteme diskret im Sinne der Definition 6.1 sind.

$\{H_x : x \in X\}$ ist dann eine offene Überdeckung von X. Sei also $\mathcal{W}$ eine lokalendliche offene Verfeinerung davon, welche X überdeckt und setze für $s \in S$

$$V_s := X \setminus \bigcup_{\substack{W \in \mathcal{W} \\ \overline{W} \cap F_s = \emptyset}} \overline{W}.$$

$\{W \in \mathcal{W} : \overline{W} \cap F_s = \emptyset\}$ ist als Teilsystem eines abgeschlossenen lokalendlichen Systems selbst abgeschlossen und lokalendlich, weswegen nach Korollar 6.4 die Vereinigung darüber abgeschlossen ist. $\mathcal{V} := \{V_s : s \in S\}$ ist also offen. Offenbar gilt $F_s \cap V_s^{\complement} = \emptyset$ und daher $F_s \subseteq V_s$ für alle $s \in S$. Es gilt auch

$$\forall s \in S : \overline{W} \cap V_s = \emptyset \Leftrightarrow \overline{W} \cap F_s = \emptyset. \tag{8.1}$$

Sei $x \in X$. Da $\mathcal{W}$ eine offene Überdeckung ist gibt es ein $W \in \mathcal{W}$ mit $x \in W$. Es gibt, weil ja $\mathcal{W}$ eine Verfeinerung ist, ein $y \in X$ mit $W \subseteq H_y \subseteq \overline{H_y} \subseteq V_y$ und damit auch $\overline{W} \subseteq V_y$. Wegen $\#\{s \in S : F_s \cap V_x \neq \emptyset\} \leq 1$ folgt $\#\{s \in S : F_s \cap \overline{W} \neq \emptyset\} \leq 1$ und wegen (8.1) auch $\#\{s \in S : V_s \cap \overline{W} \neq \emptyset\} \leq 1$. Wegen $\overline{W} \in \mathcal{U}(x)$ ist $\mathcal{V}$ diskret. ■

Definition 8.6. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist $\mathcal{W}_n \subseteq \mathcal{T}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine offene Überdeckung von X und gilt

$$\forall x \in X \forall U \in \mathcal{U}(x) \exists n \in \mathbb{N} : \mathrm{St}(x, \mathcal{W}_n) \subseteq U,$$

so nennt man die Folge $(\mathcal{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **Entwicklung von $(X, \mathcal{T})$**.

Lemma 8.7. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist $(X, \mathcal{T})$ collectionwise normal und besitzt der Raum eine Entwicklung $(\mathcal{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so besitzt jede offene Überdeckung von X eine offene σ-diskrete Verfeinerung, welche X überdeckt.*

Beweis. Sei $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\} \subseteq \mathcal{T}$ mit injektivem $s \mapsto U_s$ eine offene Überdeckung von X. Die Menge S lässt sich nach dem zum Auswahlaxiom äquivalenten Wohlordnungssatz mit einer geeigneten Wohlordnung $\leq$ versehen. Mit dieser Wohlordnung definiert man für $s \in S$ und $n \in \mathbb{N}$

$$F_{s,n} := X \setminus \left(\mathrm{St}(X \setminus U_s, \mathcal{W}_n) \cup \bigcup_{\substack{s' \in S \\ s' \leq s \\ s' \neq s}} U_{s'} \right).$$

Da $\mathcal{W}_n$ offen ist, ist auch $\mathrm{St}(X \setminus U_s, \mathcal{W}_n)$ offen. Weil auch $\mathcal{U}$ offen ist, ist $F_{s,n}$ abgeschlossen.
Seien $s \in S$ und $n \in \mathbb{N}$ fest. Weil $\mathcal{W}_n$ eine Überdeckung ist, gilt $X \setminus U_s \subseteq \mathrm{St}(X \setminus U_s, \mathcal{W}_n)$, womit auch $X \setminus U_s \subseteq X \setminus F_{s,n}$ bzw. $F_{s,n} \subseteq U_s$.
Da $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung ist, gibt es zu $x \in X$ ein minimales $s(x) \in S$ mit $x \in U_{s(x)} \in \mathcal{U}(x)$. Weil $(\mathcal{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Entwicklung ist, kann man auch ein $n(x) \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{St}(x, \mathcal{W}_{n(x)}) \subseteq U_{s(x)}$ auswählen. Wegen der minimalen Wahl von $s(x)$ gilt

$$x \notin \bigcup_{\substack{s \in S \\ s \leq s(x) \\ s \neq s(x)}} U_s.$$

Läge nun x in $\mathrm{St}(X \setminus U_{s(x)}, \mathcal{W}_{n(x)})$, so gäbe es ein $W \in \mathcal{W}_{n(x)}$ mit $x \in W$ und $W \cap U_{s(x)}^{\complement} \neq \emptyset$ und $x \in W \subseteq \mathrm{St}(x, \mathcal{W}_{n(x)})$. Daraus folgte $\mathrm{St}(x, \mathcal{W}_{n(x)}) \cap U_{s(x)}^{\complement} \neq \emptyset$ bzw. $\mathrm{St}(x, \mathcal{W}_{n(x)}) \not\subseteq U_{s(x)}$. ↯

Somit liegt x in $F_{s(x),n(x)}$ und $\{F_{s,n} : s \in S, n \in \mathbb{N}\}$ überdeckt X.
Man zeigt, dass für festes $n \in \mathbb{N}$ das Mengensystem $\{F_{s,n} : s \in S\}$ diskret ist. Dazu sei $x \in X$ und definiere $P := U_{s(x)} \cap \mathrm{St}(x, \mathcal{W}_n) \in \mathcal{T} \cap \mathcal{U}(x)$. Für $F_{s,n}$ mit $s \neq s(x)$ gilt nun entweder $s \leq s(x)$ oder $s(x) \leq s$. Im ersten Falle erhält man wegen $x \in U_s^\complement$

$$P \cap F_{s,n} \subseteq \mathrm{St}(x, \mathcal{W}_n) \cap X \setminus \underbrace{\mathrm{St}\left(U_s^\complement, \mathcal{W}_n\right)}_{\supseteq \mathrm{St}(x,\mathcal{W}_n)} = \emptyset.$$

Im zweiten Falle gilt wegen $s(x) \in S, s(x) \leq s, s(x) \neq s$

$$P \cap F_{s,n} \subseteq U_{s(x)} \cap X \setminus \bigcup_{\substack{s' \in S \\ s' \leq s \\ s' \neq s}} U_{s'} = \emptyset.$$

Für $s \neq s(x)$ erhält man also $F_{s,n} \cap P = \emptyset$.
Collectionwise normal liefert unter diesen Voraussetzungen für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $s \in S$ ein $U_{s,n} \in \mathcal{T}$ mit $F_{s,n} \subseteq U_{s,n}$, sodass $\{U_{s,n} : s \in S\}$ für festes $n \in \mathbb{N}$ diskret ist. Die Mengensysteme $\mathcal{V}_n := \{U_{s,n} \cap U_s : s \in S\}$ sind offenbar noch immer diskret und offen. Weiters gilt $F_{s,n} \subseteq U_{s,n} \cap U_s$. Damit ist $\mathcal{V} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ offen σ-diskret und eine Überdeckung von X, denn $\{F_{s,n} : s \in S, n \in \mathbb{N}\}$ überdeckt X. Schließlich gilt $U_{s,n} \cap U_s \subseteq U_s \in \mathcal{U}$ für alle $s \in S, n \in \mathbb{N}$, was $\mathcal{V} > \mathcal{U}$ bedeutet. ∎

Metrisierungssatz von Bing 8.8. *Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann metrisierbar, also es gibt genau dann eine Metrik d auf X mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$, wenn er eine Entwicklung $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt und collectionwise normal ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Wegen Bemerkung 7.3 ist $(X, \mathcal{T}(d))$ parakompakt. Bekanntermaßen gilt auch (T_2). Aus Lemma 8.5 folgt damit, dass $(X, \mathcal{T})$ collectionwise normal ist. Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man $\mathcal{W}_n := \left\{U_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X\right\}$. $\mathcal{W}_n$ ist dann eine offene Überdeckung von X. Für $x \in X$ und $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt es sicher ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_{\frac{2}{n}}(x) \subseteq U$. Für $z \in \mathrm{St}(x, \mathcal{W}_n)$ heißt das die Existenz eines $y \in X$ mit $x, z \in U_{\frac{1}{n}}(y)$, also mit der Dreiecksungleichung $z \in U_{\frac{2}{n}}(x)$ und somit $\mathrm{St}(x, \mathcal{W}_n) \subseteq U$. Damit ist $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Entwicklung.
„$\Leftarrow$“: Aus collectionwise normal folgt wegen Korollar 8.2 normal, also ist $(X, \mathcal{T})$ insbesondere regulär. Da $\mathcal{W}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ eine offene Überdeckung von X ist, gibt es wegen Lemma 8.7 für eine offene σ-diskrete Überdeckung $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{T}$ von X mit $\mathcal{B}_n > \mathcal{W}_n$. Das Mengensystem $\mathcal{B} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ ist dann ebenfalls σ-diskret.[13] Seien $x \in X$ und $O \in \mathcal{T}$ so, dass $x \in O$. Weil $(\mathcal{W}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Entwicklung ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{St}(x, \mathcal{W}_n) \subseteq O$. Da $\mathcal{B}_n$ eine Überdeckung ist, gibt es ein $B \in \mathcal{B}_n$ mit $x \in B$ und wegen $\mathcal{B}_n > \mathcal{W}_n$ auch ein $W \in \mathcal{W}_n$ mit $x \in B \subseteq W \subseteq \mathrm{St}(x, \mathcal{W}_n) \subseteq O$. Man hat also $x \in B \subseteq O$, wobei $x \in X$ und $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O$ beliebig waren und $B \in \mathcal{B}$ gilt. Folglich ist $\mathcal{B}$ eine σ-diskrete Basis. Der Metrisierungssatz von Bing-Nagata-Smirnow 6.22 liefert eine Metrik d auf X mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$. ∎

[13] Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{B}_k$ die abzählbare Vereinigung diskreter Mengensysteme, also $\mathcal{B}_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_{k,n}$. Daraus folgt $\mathcal{B} = \bigcup_{(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \mathcal{B}_{k,n}$, was weiterhin eine abzählbare Vereinigung diskreter Mengensysteme ist.