

DISSERTATION

Das verallgemeinerte Nevanlinna-Pick Problem im entarteten Fall

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der technischen Wissenschaften
eingereicht an der Technischen Universität Wien,
Technisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
von

Harald Woracek
Rosensteingasse 16/16 , 1170-Wien
8725018
geboren am 10.7.1969 in Wien.

Wien, im Dezember 1993

Kurzfassung

Wir bezeichnen mit N_κ die Klasse aller in der oberen Halbebene meromorphen Funktionen f , für die der Nevanlinna-Kern

$$N_f(z, z') = \frac{f(z) - \overline{f(z')}}{z - \overline{z'}}$$

genau κ negative Quadrate hat. Seien n paarweise verschiedene Punkte z_1, \dots, z_n und n Punkte w_1, \dots, w_n der oberen Halbebene gegeben, so daß die zugehörige Pick-Matrix

$$\mathbf{IP} = \left(\frac{w_i - \overline{w_j}}{z_i - \overline{z_j}} \right)_{j,i=1}^n$$

genau κ_1 negative Eigenwerte hat und singularär ist. Dann zeigen wir, daß es in der Klasse N_κ für $\kappa < \kappa_1$ und $\kappa_1 < \kappa < \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$ keine Lösungen, für $\kappa = \kappa_1$ genau eine Lösung und für $\kappa \geq \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$ i.a. unendlich viele Lösungen gibt. Wir geben eine qualitative Beschreibung der Lösungen durch verallgemeinerte Resolventen selbstadjungierter Operatoren.

Wir erhalten diese Ergebnisse mit Hilfe operatortheoretischer Methoden, indem wir einem gegebenen Interpolationsproblem einen symmetrischen Operator S in einem Skalarproduktraum H zuordnen und eine modulo unitärer Äquivalenz eindeutige Beziehung zwischen den Lösungen des Interpolationsproblems und den selbstadjungierten Erweiterungen \tilde{S} des symmetrischen Operators S herstellen. Diese wird durch die Zuordnung $\tilde{S} \mapsto f_{\tilde{S}}$ mit

$$f_{\tilde{S}}(z) = \overline{w_I} + \frac{\Im w_1}{\Im z_1} (z - \overline{z_I}) + (z - \overline{z_I})(z - z_1)[(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow}]$$

gegeben, wobei \tilde{S} eine selbstadjungierte Erweiterung von S in einem (von der Erweiterung abhängigen) Pontrjaginraum $\tilde{H} \supseteq H$ und $e_{z_1}^{\rightarrow}$ ein gewisses Element von H ist. Weiters gelangen wir zu einer Beschreibung der Lösungen durch einen Parameter, nämlich durch Matrixfunktionen der Klasse $N_{\kappa'}^{k \times k}$, wobei $k = \text{def } \mathbf{IP} + 1$ und $\kappa' = \kappa - \kappa_1 - \text{def } \mathbf{IP}$ ist.

DAS VERALLGEMEINERTE
NEVANLINNA-PICK PROBLEM
IM ENTARTETEN FALL

H.Woracek

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	iii
1 Nevanlinna-Pick Interpolation	1
1.1 Die Funktionenklassen N_κ	1
1.2 Verwandte Fragestellungen	6
1.3 Skalarprodukte und Pontrjaginräume	9
1.4 Einige Sätze aus der linearen Algebra	12
2 Lösungen mit $\kappa < \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$	17
2.1 Zugeordnete Skalarprodukträume	17
2.2 Die eindeutige Lösung	18
2.2.1 Existenz und Eindeutigkeit	19
2.2.2 Beschreibung der eindeutigen Lösung	27
2.2.3 Charakterisierung	34
2.3 Der Fall $\kappa_1 < \kappa < \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$	37
3 Operatortheoretische Lösung	41
3.1 Der symmetrische Operator S	41
3.2 Konstruktion von Lösungen	43
3.2.1 Die zugeordnete Funktion	43
3.2.2 Einfache Operatoren	49
3.2.3 Einbettung des der Funktion $f_{\tilde{S}}$ zugeordneten Raumes	52
3.2.4 Eine Bedingung für maximale Anzahl negativer Quadrate	60
3.2.5 Der allgemeine Fall einer Erweiterung von S	65
3.2.6 Halbeinfache Eigenwerte	70
3.3 Konstruktion eines Operators	73
3.4 Über die Eineindeutigkeit	76

3.4.1	Definition der Abbildungen α und β	76
3.4.2	Eigenschaften von α und β - die Bijektion	78
4	Selbstadjungierte Erweiterungen	85
4.1	Die Funktionenklassen $N_{\kappa}^{k \times k}$	85
4.2	Der Fall $H^{\circ} \not\subseteq D$	86
4.3	Der Fall $H^{\circ} \subseteq D$, D_1 nicht entartet	96
4.4	Der Fall $H^{\circ} \subseteq D$, D_1 entartet	103
5	Eine Anwendung	111
5.1	Eindimensionaler Entartung	111
5.1.1	Die geometrischen Voraussetzungen	111
5.1.2	Eine explizite Lösungsformel	113
5.1.3	Der Parameter $W(z) \equiv 0$	117
5.2	Einige Beispiele	118
	Literaturverzeichnis	127

Einleitung

Das Nevanlinna-Pick Interpolationsproblem in seiner klassischen Version behandelt die folgende Fragestellung: Seien n paarweise verschiedene Punkte z_1, \dots, z_n und n Punkte w_1, \dots, w_n der oberen Halbebene \mathbf{C}^+ gegeben. Gibt es eine in \mathbf{C}^+ analytische Funktion f mit der Eigenschaft $\Im f(z) \geq 0$ für $z \in \mathbf{C}^+$ (wir schreiben dafür auch $f \in \mathbf{N}_0$ und bemerken, daß f genau dann in \mathbf{N}_0 liegt, wenn der Kern $N_f(z, z') = \frac{f(z) - \overline{f(z')}}{z - \overline{z'}}$ positiv semidefinit ist), so daß $f(z_i) = w_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt. Bekanntlich gibt es eine solche Funktion f genau dann, wenn die Pick-Matrix

$$\mathbf{IP} = \left(\frac{w_i - \overline{w_j}}{z_i - \overline{z_j}} \right)_{j,i=1}^n$$

keine negativen Eigenwerte besitzt. Ist \mathbf{IP} singulär, so gibt es genau eine Funktion f mit den genannten Eigenschaften, ist \mathbf{IP} regulär, so gibt es unendlich viele solche Funktionen f .

Um das in der vorliegenden Arbeit betrachtete Interpolationsproblem formulieren zu können, bezeichnen wir mit \mathbf{N}_κ die Klasse aller in der oberen Halbebene meromorphen Funktionen f , für die der Nevanlinna-Kern

$$N_f(z, z') = \frac{f(z) - \overline{f(z')}}{z - \overline{z'}}$$

genau κ negative Quadrate hat (siehe Definition 1.2). Gegeben seien jetzt Interpolationspunkte z_1, \dots, z_n und w_1, \dots, w_n wie oben, so daß die zugehörige Pick-Matrix \mathbf{IP} positiv semidefinit und singulär ist. Dann hat nach den oben zitierten klassischen Ergebnissen das Nevanlinna-Pick Interpolationsproblem genau eine Lösung in der Klasse \mathbf{N}_0 ; wir fragen jedoch nach Lösungen in den Klassen \mathbf{N}_κ für $\kappa > 0$. Dabei stellt sich heraus, daß für $0 < \kappa < \text{def } \mathbf{IP}$ keine Lösungen existieren, es für $\kappa \geq \text{def } \mathbf{IP}$ aber i.a. unendlich viele Lösungen gibt. Diese Fragestellung wird sogar in der erweiterten Form betrachtet,

nämlich daß die Pick-Matrix \mathbf{IP} bereits eine gewisse Anzahl κ_1 negativer Eigenwerte hat. Dann zeigen wir, daß es in der Klasse N_κ für $\kappa < \kappa_1$ und $\kappa_1 < \kappa < \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$ keine Lösungen, für $\kappa = \kappa_1$ genau eine Lösung und für $\kappa \geq \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$ i.a. unendlich viele Lösungen gibt. Wir geben eine qualitative Beschreibung der Lösungen durch selbstadjungierte Operatoren, ob tatsächlich immer „unendlich viele“ Lösungen vorliegen, bleibt offen.

Wir erhalten diese Ergebnisse mit Hilfe operatortheoretischer Methoden, indem wir einem gegebenen Interpolationsproblem einen symmetrischen Operator S in einem Skalarproduktraum H zuordnen und eine in gewissem Sinne eindeutige Beziehung zwischen den Lösungen des Interpolationsproblems und den selbstadjungierten Erweiterungen \tilde{S} des symmetrischen Operators S herstellen. Die Erweiterung \tilde{S} operiert dabei in einem, von der Erweiterung abhängigen Pontrjaginraum $\tilde{H} \supseteq H$. Die Beziehung wird durch die Zuordnung $\tilde{S} \mapsto f_{\tilde{S}}$ mit

$$f_{\tilde{S}}(z) = \overline{w_1} + \frac{\Im w_1}{\Im z_1}(z - \overline{z_1}) + (z - \overline{z_1})(z - z_1)[(\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow}]$$

gegeben, wobei \tilde{S} eine selbstadjungierte Erweiterung und $e_{z_1}^{\rightarrow}$ ein gewisses Element von H ist. Weiters gelangen wir zu einer Beschreibung der Lösungen durch einen Parameter, nämlich einer Matrixfunktion mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften.

Im folgenden geben wir eine kurze Übersicht über den Inhalt der einzelnen Kapitel dieser Arbeit.

Im ersten Kapitel formulieren wir das von uns behandelte Problem exakt und in voller Allgemeinheit (Abschnitt 1.1). Einige, ebenfalls mit dem Nevanlinna-Pick Interpolationsproblem verwandte Fragestellungen und einige Bemerkungen zur Entwicklung des gesamten Problemkreises geben wir in Abschnitt 1.2 an. In den verbleibenden beiden Abschnitten des ersten Kapitels stellen wir (ohne Beweis) die von uns benötigten Bezeichnungen, Begriffe und Sätze aus der Theorie der Pontrjaginräume (Abschnitt 1.3) und der linearen Algebra (Abschnitt 1.4) zusammen.

Das zweite Kapitel befaßt sich mit dem Fall $\kappa < \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$. Dabei ordnen wir einem gegebenen Interpolationsproblem einen Skalarproduktraum H und einer meromorphen Funktion einen Skalarproduktraum H_f zu (Abschnitt 2.1). Wir zeigen in Abschnitt 2.1, daß für $\kappa = \kappa_1$ genau eine Lösung existiert (Satz 2.1 gemeinsam mit Satz 2.3). Für $\kappa_1 < \kappa < \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$ gibt es dagegen keine Lösungen, wie wir in Abschnitt 2.3 (Satz 2.9) sehen. Wir erhalten auch eine Charakterisierung rationaler Funktionen durch Eigenschaften ihres zugeordneten Skalarproduktraumes H_f (Satz 2.7).

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit dem verbleibenden Fall $\kappa \geq \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$. In Abschnitt 3.1 ordnen wir einem Interpolationsproblem einen nicht dicht definierten symmetrischen Operator S im Skalarproduktraum H zu. Dann zeigen wir, daß die Lösungen des gegebenen Problems in einer, in gewissem Sinne bijektiven Beziehung zu den selbstadjungierten Erweiterungen des konstruierten Operators stehen. Die ausführliche Untersuchung der Zuordnung $\tilde{S} \mapsto f_{\tilde{S}}$ ist Anliegen von Abschnitt 3.2 (vgl. Satz 3.3,3.4 oder auch die Sätze 3.8,3.9 und 3.14). In Abschnitt 3.3 behandeln wir die umgekehrte Frage, ob man nämlich eine beliebige Lösung des Interpolationsproblems in der Form $f_{\tilde{S}}$ erhält (siehe Satz 3.15). Schließlich wird in Abschnitt 3.4 die Eineindeutigkeit der vorher hergestellten Beziehung untersucht. Die Zusammenfassung der wesentlichen, in diesem Kapitel gemachten Überlegungen findet man in Satz 3.16.

Bei der Behandlung des Nevanlinna-Pick Interpolationsproblems mit unserer Methode wird man in natürlicher Weise auf selbstadjungierte Erweiterungen bzw. deren verallgemeinerte Resolventen geführt. Im vierten Kapitel beschreiben wir solche Erweiterungen, wobei eine Matrixfunktion mit gewissen Eigenschaften (siehe Abschnitt 4.1) als Parameter auftritt. Um zu dieser Beschreibung zu gelangen unterscheiden wir drei Fälle. Als Unterscheidungskriterium wird dabei die geometrische Lage des Definitionsbereichs des Operators S und des isotropen Teilraumes von H zueinander verwendet. In den Abschnitten 4.2,4.3 und 4.4 werden diese drei Fälle diskutiert. Wir gelangen damit zu expliziten Formeln für die verallgemeinerten Resolventen selbstadjungierter Erweiterungen.

Im fünften und letzten Kapitel dieser Arbeit kombinieren wir zunächst (Abschnitt 5.1) unter gewissen Einschränkungen an die Daten des gegebenen Interpolationsproblems die Ergebnisse von Kapitel 3 und 4. So gelangen wir zu expliziten Lösungsformeln für ein Interpolationsproblem vom behandelten Typ. Dabei stoßen wir auch wieder auf die in Kapitel 2 behandelte Lösung. Zum Abschluß (Abschnitt 5.2) werden wir an einigen konkreten Interpolationsaufgaben die in den Kapiteln 2, 3 und 4 entwickelten Methoden demonstrieren.

Kapitel 1

Das Nevanlinna-Pick Interpolationsproblem und verwandte Fragestellungen

1.1 Die Funktionenklassen N_κ und das Nevanlinna-Pick Interpolationsproblem

Wir betrachten Klassen von komplexwertigen Funktionen, die auf der oberen Halbebene oder im Einheitskreis definiert und dort analytisch sind, und deren Werte in der oberen Halbebene, im Einheitskreis bzw. in der rechten Halbebene liegen. Diese in der Funktionentheorie auftretenden Klassen von Funktionen sind, nun genauer formuliert:

1. Die *Nevanlinna-Klasse* N_0 aller in der offenen oberen Halbebene \mathbf{C}^+ analytischer Funktionen, deren Werte in der abgeschlossenen oberen Halbebene liegen, also nichtnegativen Imaginärteil haben.
2. Die *Schur-Klasse* S_0 aller im offenen Einheitskreis \mathbf{ID} analytischer Funktionen, deren Werte im abgeschlossenen Einheitskreis liegen, also betragsmäßig durch Eins beschränkt sind.
3. Die *Carathéodory-Klasse* C_0 aller im offenen Einheitskreis \mathbf{ID} analytischer Funktionen, deren Werte in der abgeschlossenen rechten Halbebene liegen, also nichtnegativen Realteil haben.

Für uns wesentlich ist eine algebraische Charakterisierung der Klassen N_0 , S_0 bzw. C_0 . Dazu benötigen wir noch eine Bezeichnung, die in der folgenden

Definition gegeben wird.

Definition 1.1 Sei $K(z, z')$ eine komplexwertige Funktion, die auf einem gewissen Gebiet ρ^2 mit $\rho \subseteq \mathbf{C}$ definiert ist. Dann wollen wir die Funktion K einen (symmetrischen) Kern nennen, falls die Bedingung

$$K(z, z') = \overline{K(z', z)} \text{ f\"ur } z, z' \in \rho$$

erf\"ullt ist.

Definition 1.2 Wir nennen einen Kern $K(z, z')$ positiv semidefinit, falls f\"ur je endlich viele Punkte ζ_1, \dots, ζ_m ($m \in \mathbf{IN}$) die hermitesche Matrix $(K(\zeta_i, \zeta_j))_{i,j=1}^m$ positiv semidefinit ist.

F\"ur eine Zahl $\kappa \in \mathbf{IN}_0$ sagen wir der Kern $K(z, z')$ hat genau κ negative Quadrate, falls f\"ur je endlich viele Punkte ζ_1, \dots, ζ_m ($m \in \mathbf{IN}$) die hermitesche Matrix $(K(\zeta_i, \zeta_j))_{i,j=1}^m$ h\"ochstens κ negative Eigenwerte, und f\"ur eine gewisse Wahl von m und ζ_1, \dots, ζ_m genau κ negative Eigenwerte besitzt.

Sei f eine komplexwertige Funktion. Wir betrachten spezielle Kerne, n\"amlich

1. den Nevanlinna-Kern $N_f(z, z') = \frac{f(z) - \overline{f(z')}}{z - z'}$, definiert auf \mathbf{C}^{+2} ,
2. den Schur-Kern $S_f(z, z') = \frac{1 - f(z)\overline{f(z')}}{1 - zz'}$, definiert auf \mathbf{ID}^2 und
3. den Carath\'eodory-Kern $C_f(z, z') = \frac{f(z) + \overline{f(z')}}{1 - zz'}$, definiert auf \mathbf{ID}^2 .

Nun formulieren wir die bereits angek\"undigte algebraische Charakterisierung der Klassen \mathbf{N}_0 , \mathbf{S}_0 bzw. \mathbf{C}_0 .

Satz 1.1 Sei f analytisch in der offenen oberen Halbebene \mathbf{C}^+ . Dann ist f genau dann in der Nevanlinna-Klasse \mathbf{N}_0 , wenn der Nevanlinna-Kern N_f positiv semidefinit ist, d.h., falls jede der quadratischen Formen

$$\sum_{i,j=1}^m \frac{f(\zeta_i) - \overline{f(\zeta_j)}}{\zeta_i - \overline{\zeta_j}} \xi_i \overline{\xi_j},$$

wobei $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in \mathbf{C}^+$ irgendwelche Punkte der oberen Halbebene sind, positiv semidefinit ist.

In analoger Weise gilt f\"ur eine im Einheitskreis \mathbf{ID} analytische Funktion f , da\ss f genau dann in der Klasse \mathbf{S}_0 liegt, wenn der Schur-Kern S_f positiv semidefinit ist. Weiters ist die Funktion f genau dann in der Klasse \mathbf{C}_0 , falls der Carath\'eodory-Kern C_f positiv semidefinit ist.

Einen Beweis für diese Aussagen findet man zum Beispiel in [16] oder [38].

Die Funktionenklassen N_0 , S_0 bzw. C_0 lassen sich auch analytisch charakterisieren.

Satz 1.2 *Sei f analytisch in offenen oberen Halbebene \mathbf{C}^+ . Dann ist f genau dann in der Nevanlinna-Klasse N_0 , wenn es eine beschränkte nichtabnehmende Funktion $\sigma(t)$, und reelle Konstanten $\alpha, \mu \in \mathbf{R}$ mit $\mu \geq 0$ gibt, so daß*

$$f(z) = \alpha + \mu z + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + tz}{t - z} d\sigma(t) \quad (1.1)$$

gilt.

Entsprechendes gilt auch für die anderen Funktionenklassen dieses Typs. Zum Beispiel ist eine in \mathbf{ID} analytische Funktion f genau dann in der Klasse C_0 , wenn es eine beschränkte nichtabnehmende Funktion $\sigma(t)$ und eine reelle Konstante $\beta \in \mathbf{R}$ gibt, so daß f die Darstellung

$$f(z) = i\beta + \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\sigma(t) \quad (1.2)$$

besitzt. Beweise für diese Aussagen findet man zum Beispiel in [1] (S. 188ff).

Allgemein kann man neben den oben definierten Funktionenklassen auch Klassen von in einer offenen Kreisscheibe (oder Halbebene) definierten und dort analytischen Funktionen betrachten, deren Werte in einer abgeschlossenen Kreisscheibe (oder Halbebene) liegen. Zwischen den Klassen N_0 , S_0 , C_0 und ähnlichen anderen, kann man vermöge Verknüpfung mit geeigneten Möbiustransformationen Bijektionen herstellen. Dabei hat man jedoch bei Klassen zu unbeschränktem Wertebereich noch die Funktion $f(z) \equiv \infty$ hinzuzufügen. Bei diesen Transformationen gehen auch die entsprechenden Kerne ineinander über. Wir wollen im folgenden nur Funktionen der Nevanlinna-Klasse betrachten, unsere Überlegungen gelten aber auch entsprechend für andere Funktionenklassen dieses Typs.

Die algebraische Definition der Klasse N_0 erlaubt eine unmittelbare Verallgemeinerung.

Definition 1.3 *Sei N_κ für $\kappa \in \mathbf{IN}_0$ die Klasse aller komplexwertigen, in der offenen oberen Halbebene \mathbf{C}^+ meromorphen Funktionen f , für die der Nevanlinna-Kern*

$$N_f(z, z') = \frac{f(z) - \overline{f(z')}}{z - \overline{z'}}$$

genau κ negative Quadrate besitzt. Dieser Kern ist dabei auf dem Gebiet $\rho(f)^2$ definiert, wobei $\rho(f)$ das Holomorphiegebiet von f in \mathbf{C}^+ bezeichnet.

Ist eine Funktion f in der Klasse \mathbf{N}_κ so sagen wir auch f hat κ negative Quadrate.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen sind wir nun in der Lage jenes Problem, das in dieser Arbeit studiert werden soll, zu formulieren.

Verallgemeinertes Nevanlinna-Pick Interpolationsproblem:

Seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbf{C}^+$ paarweise verschiedene Punkte der offenen oberen Halbebene und $w_1, \dots, w_n \in \mathbf{C}$ beliebige Punkte der komplexen Ebene. Wir fragen für eine Zahl $\kappa \in \mathbf{N}_0$ nach der Existenz einer Funktion f in der Klasse \mathbf{N}_κ mit der Eigenschaft

$$f(z_i) = w_i \text{ für } i = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Weiters ist eine Beschreibung aller solcher Funktionen f gesucht.

Für $\kappa = 0$ und in einigen anderen Fällen ist die Lösung dieses Problems bekannt¹. Um sie anzugeben benötigen wir noch eine Bezeichnung.

Definition 1.4 Zu gegebenen Daten $z_1, \dots, z_n \in \mathbf{C}^+$ und $w_1, \dots, w_n \in \mathbf{C}$ bezeichne \mathbf{IP} die sogenannte Pick-Matrix

$$\mathbf{IP} = \left(\frac{w_i - \overline{w_j}}{z_i - \overline{z_j}} \right)_{j,i=1}^n.$$

Die Lösung des klassischen Nevanlinna-Pick Interpolationsproblems, d.h. des Interpolationsproblems (1.3) für den Fall $\kappa = 0$, ist nun im folgenden Satz formuliert.

Satz 1.3 Es gibt genau dann eine Funktion $f \in \mathbf{N}_0$ mit

$$f(z_i) = w_i \text{ für } i = 1, \dots, n,$$

falls die Pick-Matrix \mathbf{IP} positiv semidefinit ist. Ist \mathbf{IP} dabei singulär, so gibt es genau eine Lösung, ist \mathbf{IP} positiv definit, so gibt es unendlich viele Lösungen in der Klasse \mathbf{N}_0 .

¹vgl. den zweiten Abschnitt dieses Kapitels.

Beweise dieses Satzes findet man zum Beispiel in [38], [36], [33] oder [34].

Wir betrachten die folgende Fragestellung. Die Pick-Matrix sei positiv semidefinit und singulär. Dann gibt es genau eine Lösung des klassischen Nevanlinna-Pick Interpolationsproblems. Gibt es Lösungen (und im Falle ihrer Existenz „wie viele“) in den Klassen N_1, N_2, N_3, \dots ? Es zeigt sich, daß sich die von uns verwendeten Methoden zur Beantwortung dieser Frage in natürlicher Weise auf jenen Fall verallgemeinern, in dem \mathbf{IP} auch negative Eigenwerte besitzt. Wir können daher die Voraussetzung $\mathbf{IP} \geq 0$ fallenlassen. Dafür müssen wir eine gewisse Beschränktheitseigenschaft der Lösung für $z \rightarrow \infty$ fordern. Wir betrachten nur solche Lösungen, für die eine Folge von Punkten $(\zeta_i)_{i \in \mathbf{N}}$ mit $\Re \zeta_i = 0$ und $\zeta_i \rightarrow i\infty$ existiert, so daß der Grenzwert $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f(\zeta_i)}{\Im \zeta_i}$ gleich Null ist.

Bemerkung 1.1 Die obige Beschränktheitsforderung ist mit der von uns verwendeten Methode verbunden (vgl. Satz 3.2). Im Fall $\kappa = 0$ entspricht diese Forderung der Beschränkung auf Funktionen mit $\mu = 0$ in der Darstellung (1.1).

Wir werden die obige Beschränktheitsforderung nur an manchen Stellen, nämlich bei der operatortheoretischen Methode in Abschnitt 3.3 bzw. 3.4 benötigen. Möchte man diese Forderung auch dort beseitigen, so muß man neben linearen Operatoren auch lineare Relationen betrachten.

Die Aufgabenstellung dieser Arbeit läßt sich nun endgültig so formulieren: Sind paarweise verschiedene Punkte $z_1, \dots, z_n \in \mathbf{C}^+$ und $w_1, \dots, w_n \in \mathbf{C}$ derart gegeben, daß die Pick-Matrix \mathbf{IP} singulär ist, also $\det \mathbf{IP} = 0$ gilt, so untersuchen wir (mit operatortheoretischen Mitteln) die Existenz einer Lösung des Interpolationsproblems (1.3) in der Klasse N_κ für $\kappa \in \mathbf{N}_0$. Im Falle der Existenz solcher Lösungen interessiert auch eine Beschreibung der Gesamtheit aller solcher Lösungen des Interpolationsproblems, die zusätzlich obige Beschränktheitsbedingung erfüllen.

Hat die Matrix \mathbf{IP} genau κ_1 negative Eigenwerte, so ist es offensichtlich nicht möglich, daß Interpolationsproblem (1.3) in einer der Klassen N_κ mit $\kappa < \kappa_1$ zu lösen. Im folgenden bezeichnen wir mit $\text{def } \mathbf{IP}$ den Defekt der Matrix \mathbf{IP} , also die Vielfachheit des Eigenwertes Null. Um das Interpolationsproblem (1.3) vollständig zu diskutieren unterscheiden wir die drei folgenden Fälle:

1. $\kappa = \kappa_1$,
2. $\kappa_1 < \kappa < \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$,

3. $\kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP} \leq \kappa$.

1.2 Dem Nevanlinna-Pick Problem verwandte Fragestellungen

In diesem Abschnitt wollen wir einige Verallgemeinerungen und verwandte Fragestellungen zum (klassischen) Nevanlinna-Pick Interpolationsproblem formulieren.

Das von uns verwendete Material stammt hauptsächlich aus [12] und [5], sowie diversen Originalarbeiten. In den oben zitierten Werken findet man auch ausführliche Literaturlisten und Bemerkungen zur geschichtlichen Entwicklung des Problemkreises um das Nevanlinna-Pick Interpolationsproblem. Besonders wollen wir auf die Literaturliste von M.Heins ([15]) verweisen, wo über 350 Titel bis zum Jahre 1982 gesammelt sind.

Wir wollen nun einige verwandte Fragestellungen zu formulieren. Anfang unseres Jahrhunderts hat man in der Funktionentheorie Funktionenklassen vom Typ der Nevanlinna-, Schur- oder Carathéodory-Klasse untersucht. Zum Beispiel war eine Fragestellung (in unserer Notation formuliert) das sogenannte

Carathéodory Problem

Seien endlich viele Zahlen $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ vorgegeben. Gibt es eine Funktion aus \mathbf{C}_0 deren Potenzreihenentwicklung um Null mit $a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ beginnt.

Man beschreibe die Gesamtheit aller solcher Funktionen. Wann ist insbesondere die Funktion durch die gegebenen Daten eindeutig festgelegt.

Hier wird in gewissem Sinne ein „Interpolationsproblem“ formuliert. Diese Fragestellung wurde zum Beispiel in [8], [9], [11], [16], [42], [46] oder [49] behandelt.

Als nächstes nennen wir die Arbeit [38] von G.Pick, in der ein Interpolationsproblem in unserem Sinne für Funktionen der Klasse \mathbf{C}_0 behandelt wird. G.Pick fragt also nach Funktionen f mit $f(z_i) = w_i$ für gegebene Punkte z_1, \dots, z_n und w_1, \dots, w_n . In dieser Arbeit wird auch die Verallgemeinerung von \mathbf{C}_0 auf Klassen von Funktionen mit beliebigen Kreisen als Definitions- bzw. Bildbereich durchgeführt. Weiters erhält G.Pick durch

einen Grenzübergang, indem er die Punkte z_1, \dots, z_n und w_1, \dots, w_n jeweils gegen einen Punkt konvergieren läßt, die Ergebnisse über das Carathéodory Problem.

Ebenfalls auf die Carathéodoryschen Sätze bezug nehmend entwickelt I.Schur in [43] ein Verfahren zur Untersuchung der Taylorschen Koeffizienten einer Funktion der Klasse S_0 . Auch er erhält durch Anwendung seines „kettenbruchartigen Algorithmus“ die Sätze von Carathéodory. In der Nachfolgearbeit [44] untersucht I.Schur jedoch größtenteils rein funktionentheoretische Fragestellungen.

Nach G.Pick untersucht nun R.Nevanlinna wieder ein Interpolationsproblem.

Nevanlinna Problem

Gegeben seien Punkte z_1, z_2, \dots mit $|z_i| < 1$ und w_1, w_2, \dots mit $|w_i| \leq 1$. Wann gibt es eine Funktion f der Klasse S_0 für die $f(z_i) = w_i$ für jedes $i \in \mathbf{IN}$ gilt.

Man beschreibe die Gesamtheit aller solcher Funktionen. Wann ist insbesondere die Funktion durch die gegebenen Daten eindeutig festgelegt.

Nachdem sich R.Nevanlinna schon in seiner Dissertation mit diesem Problem beschäftigt hat, gibt er in [36] eine vollständige Lösung in einer in sich geschlossenen Darstellung. In dieser Arbeit wird zum Teil auch die Schurische Methode weiterentwickelt. Die Ergebnisse von Carathéodory sind bei R.Nevanlinna als Grenzfälle enthalten. Ebenfalls als Grenzfall ergibt sich auch die Lösung des sogenannten Stieltjesschen Momentenproblems.

Momentenprobleme

Sei Δ ein Intervall der reellen Achse und $(s_n)_{n \in \mathbf{IN}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. Gibt es ein Borelmaß μ , das s_n als n -tes Moment hat

$$s_n = \int_{\Delta} z^n d\mu \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots .$$

Man beschreibe die Gesamtheit aller solcher Maße. Wann ist insbesondere das Maß durch die gegebenen Daten eindeutig festgelegt.

Im Fall $\Delta = [0, \infty)$ ist das Momentenproblem nach T.J.Stieltjes, im Fall $\Delta = \mathbf{R}$ nach H.L.Hamburger benannt.

Für unsere Arbeit sind die Methoden von B.Sz.-Nagy und A.Korany von Bedeutung. Sie behandeln in [33] und [34] die (klassischen) Interpolationsprobleme in den Klassen N_0 , S_0 und C_0 mit Hilfe operatortheoretischer Methoden.

Wir haben gesehen, daß G.Pick Interpolation auf einer endlichen Menge von Daten, R.Nevanlinna dagegen die Interpolationseigenschaften auf einer unendlichen Punktmenge untersucht. Eine Verallgemeinerung anderer Art nimmt Löwner in [32] vor. Er betrachtet das nach ihm benannte

Löwner Problem

Sei I ein Intervall der reellen Achse, und f eine auf I definierte reellwertige Funktion. Gibt es eine Funktion der Klasse N_0 , die eine stetige Fortsetzung auf I gestattet, die dort mit f übereinstimmt.

Man beschreibe die Gesamtheit aller solcher Funktionen. Wann ist insbesondere die Funktion durch die gegebenen Daten eindeutig festgelegt.

Löwners Arbeit war aus physikalischen Betrachtungen motiviert. Er wurde durch Fragen aus der Relativitätstheorie auf dieses Problem geführt. Zusammenhänge mit der Quantenmechanik wurden durch E.P.Wigner und J.v.Neumann in [50] entdeckt.

Ein Problem, das die Fragestellungen von Schur, Nevanlinna und Pick als Spezialfälle enthält, ist das sogenannte Nehari Problem.

Nehari Problem

Sei $(d_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Gibt es eine auf der Einheitskreislinie definierte, beschränkte borelmeßbare komplexwertige Funktion ϕ , welche den Bedingungen $\|\phi\|_\infty = 1$, sowie

$$d_n = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} z^n \phi(z) dz \text{ für } n = 1, 2, \dots$$

genügt.

Man beschreibe die Gesamtheit aller solcher Funktionen. Wann ist insbesondere die Funktion durch die gegebenen Daten eindeutig festgelegt.

Zur Behandlung des Nehari Problems siehe zum Beispiel [35].

Alle bisher formulierten Probleme wurden in den letzten Jahrzehnten auf matrix- oder operatorwertige Funktionen verallgemeinert. Zum Beispiel verweisen wir auf [4] oder [7].

Ausführlich werden Interpolationsprobleme der oben genannten Typen für rationale Matrixfunktionen in [5] behandelt. Wir verweisen auch noch einmal auf [12], wo man insbesondere eine ausführliche Literaturliste auch der in russischer Sprache erschienenen Originalarbeiten findet.

1.3 Skalarprodukte und Pontrjaginräume

Wir wollen in diesem Abschnitt einige Begriffe und Aussagen aus der Theorie der Skalarprodukträume zusammenstellen. Sämtliche hier angegebenen Definitionen und Sätze findet man zum Beispiel in [6] oder [21]. Dort kann man auch alle hier nicht geführten Beweise nachlesen.

Definition 1.5 Sei L ein Vektorraum über dem Körper \mathbf{C} der komplexen Zahlen. Unter einem Skalarprodukt auf L verstehen wir eine Abbildung

$$[\cdot, \cdot] : L^2 \rightarrow \mathbf{C},$$

die für beliebige Elemente $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}, \vec{y} \in L$ und jede komplexe Zahl $a \in \mathbf{C}$ den Bedingungen

1. $[\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}] = [\vec{x}_1, \vec{y}] + [\vec{x}_2, \vec{y}]$,
2. $[a\vec{x}, \vec{y}] = a[\vec{x}, \vec{y}]$,
3. $[\vec{x}, \vec{y}] = \overline{[\vec{y}, \vec{x}]}$

genügt. Einen Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist, nennen wir einen Skalarproduktraum.

Wir nennen den Vektor $\vec{x} \in L$ eines Skalarproduktraumes positiv, falls $[\vec{x}, \vec{x}] > 0$ ist, neutral, falls $[\vec{x}, \vec{x}] = 0$ ist und negativ, falls $[\vec{x}, \vec{x}] < 0$ ist. Ein Teilraum $M \subseteq L$ heißt positiv (neutral bzw. negativ), falls jeder von Null verschiedene Vektor aus M positiv (neutral bzw. negativ) ist.

Definition 1.6 Sei L ein Skalarproduktraum, $M, N \subseteq L$. Dann heißt M orthogonal auf N , geschrieben als $M \perp N$, falls für je zwei Vektoren $\vec{x} \in M$ und $\vec{y} \in N$ die Beziehung $[\vec{x}, \vec{y}] = 0$ gilt.

Besteht M aus nur einem Vektor $M = \{\vec{x}\}$, so schreibt man anstatt $\{\vec{x}\} \perp N$ auch $\vec{x} \perp N$. Für eine beliebige Teilmenge $M \subseteq L$ bezeichnen wir die Menge aller Vektoren $\vec{x} \in L$ mit $\vec{x} \perp M$ mit M^\perp .

Wir definieren nun $L^\circ = L \cap L^\perp$ und nennen L° den isotropen Teilraum von L . Wir nennen den Skalarproduktraum L entartet, falls $L^\circ \neq \{0\}$ ist. Im Fall eines indefiniten Skalarproduktraumes läßt sich für einen beliebigen Teilraum $M \subseteq L$ der Raum L nicht darstellen als direkte Summe von M und M^\perp . Es gilt jedoch der

Satz 1.4 *Sei L ein Skalarproduktraum und $M \subseteq L$ ein endlichdimensionaler nicht entarteter Teilraum von L . Dann gilt*

$$L = M \dot{+} M^\perp.$$

Nun wollen wir Skalarprodukträume mit gewissen geometrischen und topologischen Eigenschaften betrachten.

Definition 1.7 *Sei L ein nicht entarteter Skalarproduktraum mit dem Skalarprodukt $[\cdot, \cdot]$. Es existiere eine Zerlegung von L in die orthogonale direkte Summe*

$$L = L^+ [\dot{+}] L^-$$

eines positiven und eines negativen Teilraumes L^+ bzw. L^- . Der Teilraum L^+ sei mit dem Skalarprodukt $[\cdot, \cdot]_{(L^+)^2}$ ein Hilbertraum und L^- sei endlichdimensional: $\dim L^- = \kappa \in \mathbf{IN}_0$. Dann heißt L ein Pontrjaginraum vom Index κ . Wir schreiben dann auch abkürzend, L sei ein Π_κ -Raum.

Seien $\vec{x} = \vec{x}^+ + \vec{x}^-$ und $\vec{y} = \vec{y}^+ + \vec{y}^-$ zwei Vektoren aus L und $\vec{x}^\pm, \vec{y}^\pm \in L^\pm$ die Komponenten von \vec{x} und \vec{y} in L^+ bzw. L^- . Der Vektorraum L wird mit dem Skalarprodukt, definiert durch

$$(\vec{x}, \vec{y}) = [\vec{x}^+, \vec{y}^+] - [\vec{x}^-, \vec{y}^-]$$

zu einem Hilbertraum. Topologische Aussagen bezüglich des Raumes L beziehen sich stets auf die von (\cdot, \cdot) induzierte Normtopologie.

Für Π_κ -Räume gilt die folgende Verschärfung von Satz 1.4 :

Satz 1.5 *Sei L ein Π_κ -Raum, $M \subseteq L$ ein nicht entarteter abgeschlossener Teilraum. Dann besitzt M ein orthogonales Komplement.*

Wir werden oft die folgende geometrische Eigenschaft von Pontrjaginräumen benötigen.

Satz 1.6 *Sei M ein neutraler Teilraum des Π_κ -Raumes L . Dann gibt es einen weiteren neutralen Teilraum \hat{M} von L mit den Eigenschaften*

1. *zu jedem Vektor $\vec{x} \neq 0$ aus M gibt es einen Vektor \vec{y} aus \hat{M} , so daß $[\vec{x}, \vec{y}] \neq 0$ ist, und*
2. *zu jedem Vektor $\vec{y} \neq 0$ aus \hat{M} gibt es einen Vektor \vec{x} aus M , so daß $[\vec{x}, \vec{y}] \neq 0$ ist.*

Zwei Teilräume M und \hat{M} mit den in Satz 1.6 formulierten Eigenschaften heißen schief verbunden. In Formeln ausgedrückt bedeutet die schiefe Verbundenheit von M mit \hat{M} , daß $M \cap \hat{M}^\perp = \{0\}$ und $\hat{M} \cap M^\perp = \{0\}$ gilt.

Aus Satz 1.6 ergibt sich, daß es in einem Pontrjaginraum L vom Index κ keine neutralen Teilräume der Dimension $\dim M > \kappa$ geben kann.

Nun gilt die folgende Verallgemeinerung von Satz 1.5 .

Satz 1.7 *Sei M ein abgeschlossener Teilraum des Π_κ -Raumes L . Zerlegt man M und M^\perp als*

$$M = M_1[\dot{+}]M^\circ \text{ bzw. } M^\perp = M_2[\dot{+}]M^\circ,$$

so gibt es einen mit M° schief verbundenen Teilraum \hat{M}° , so daß der Raum L die Zerlegung

$$L = M_1[\dot{+}](M^\circ \dot{+} \hat{M}^\circ)[\dot{+}]M_2$$

gestattet.

Viele Begriffe für lineare Operatoren in Π_κ -Räumen definiert man analog zum Fall eines linearen Operators im Hilbertraum. Speziell wollen wir auf den Begriff des adjungierten Operators hinweisen. Hier bezeichnet man den zu einem Operator A adjungierten Operator mit A^+ .

Definition 1.8 *Sei $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow L$ ein linearer Operator im Π_κ -Raum L , der auf der dichten Teilmenge $\mathcal{D}(A)$ definiert ist. A heißt symmetrisch, falls für je zwei Vektoren \vec{x} und \vec{y} aus $\mathcal{D}(A)$ die Beziehung*

$$[A\vec{x}, \vec{y}] = [\vec{x}, A\vec{y}] \tag{1.4}$$

gilt, d.h. falls $A \subseteq A^+$ ist. Gilt sogar $A = A^+$, so nennen wir A selbstadjungiert.

Wir benötigen noch den Begriff der Resolvente $(A - z)^{-1}$, der Resolventenmenge $\rho(A)$ und den des Spektrums $\sigma(A)$, die analog zum Hilbertraumfall definiert werden. Hier gilt die folgende Aussage:

Satz 1.8 *Sei A ein selbstadjungierter Operator im Π_κ -Raum L . Dann liegt das Spektrum von A symmetrisch zur reellen Achse. Jeder nichtreelle Wert $z \in \sigma(A)$ ist ein Eigenwert von A .*

Über die Haupträume zu nichtreellen Eigenwerten eines im Π_κ -Raum L selbstadjungierten Operators A gilt der folgende Satz.

Satz 1.9 *Haupträume zu nichtreellen Eigenwerten z und z' des im Π_κ -Raum L selbstadjungierten Operators A sind orthogonal aufeinander, falls $z \neq \overline{z'}$ ist. Ist z nicht reell und $z = \overline{z'}$, so sind die zugehörigen Haupträume schief verbunden. Die Summe der Dimensionen der Haupträume von A zu Eigenwerten mit positivem Imaginärteil kann den Index κ von L nicht übersteigen.*

Wir werden auch eine Grenzwertaussage über das Verhalten der Resolvente verwenden.

Satz 1.10 *Sei A ein im Π_κ -Raum L selbstadjungierter Operator. Dann gilt*

$$\lim_{z \rightarrow i\infty} z(A - z)^{-1} = -I.$$

Damit wollen wir unseren Exkurs über Skalarprodukträume abschließen. Bezüglich Begriffen und Notationen, die wir verwenden aber hier nicht eingeführt haben, verweisen wir noch einmal auf [6] und [21].

1.4 Einige Sätze aus der linearen Algebra

Wir wollen in diesem Abschnitt einige Aussagen über Matrizen, Determinanten und quadratische Formen zusammenstellen, die wir in den folgenden Kapiteln benötigen. Insbesondere formulieren wir die Determinantenidentität von Sylvester und die Vorzeichenregel von Jacobi über die Anzahl der negativen Quadrate einer quadratischen Form.

Bezüglich einer ausführlichen Behandlung und dem Beweis der von uns formulierten Sätze verweisen wir auf [22] oder auch auf [17] und [13].

Für das folgende benötigen wir eine Bezeichnung für die Minoren einer Matrix.

Definition 1.9 *Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine Matrix, $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ und $\{j_1, \dots, j_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$. Wir bezeichnen mit $A_{\substack{i_1, \dots, i_m \\ j_1, \dots, j_m}}$ jene Matrix,*

welche aus den Elementen von A an den Schnittpunkten der i_l -ten Zeilen und j_k -ten Spalten besteht:

$$A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_m \\ j_1, \dots, j_m \end{pmatrix} = (a_{i_l j_k})_{l,k=1}^m.$$

Gilt speziell $(i_1, \dots, i_m) = (1, \dots, m)$ und $(j_1, \dots, j_m) = (1, \dots, m)$, so bezeichnen wir abkürzend mit A_m den sogenannten m -ten Hauptminor

$$A_m = A \begin{pmatrix} 1, \dots, m \\ 1, \dots, m \end{pmatrix}$$

der Matrix A . Man setzt formal $A_0 = (1)$.

Die Determinante einer Matrix A bezeichnen wir mit $\det A$ oder kurz mit $|A|$.

Zu einem Element a_{ij} der Matrix A definiert man das sogenannte algebraische Komplement als

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \left| A \begin{pmatrix} 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n \\ 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n \end{pmatrix} \right|.$$

Die folgende Aussage erhält man leicht aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

Satz 1.11 Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine Matrix und A^\times die zu A reziproke Matrix

$$A^\times = \left((A_{ij})_{i,j=1}^n \right)^T.$$

Dann gilt

$$A \cdot A^\times = |A| \cdot I_n,$$

wobei I_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix bezeichnet.

Man betrachtet neben der reziproken Matrix auch andere aus Unterdeterminanten der Matrix A gebildete Matrizen. Zum Beispiel kann man zu einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ und einer Zahl h mit $1 \leq h < n$ die $(h+1)$ -reihigen Superdeterminanten des Hauptminors A_h betrachten:

$$b_{rs} = \left| A \begin{pmatrix} 1, \dots, h, r \\ 1, \dots, h, s \end{pmatrix} \right| \text{ für } r, s = h+1, \dots, n.$$

Für die aus diesen Elementen gebildete Matrix gilt die sogenannte Determinantenidentität von Sylvester².

Satz 1.12 (J.J.Sylvester) Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine Matrix und h eine Zahl mit $1 \leq h < n$. Für die aus den $(h+1)$ -reihigen Superdeterminanten b_{rs} von A_h gebildete Matrix gilt

$$\left| (b_{rs})_{r,s=h+1}^n \right| = |A_h|^{n-h-1} \cdot |A|. \quad (1.5)$$

Wir werden nur den in der nächsten Folgerung angegebenen Spezialfall der Sylvesterschen Identität benutzen.

Folgerung 1.1 Wir betrachten den Fall $h = n - 2$. Dann gilt

$$(b_{rs})_{r,s=h+1}^n = \begin{pmatrix} |A_{(1, \dots, n-2, n-1)}^{(1, \dots, n-2, n-1)}| & |A_{(1, \dots, n-2, n)}^{(1, \dots, n-2, n-1)}| \\ |A_{(1, \dots, n-2, n-1)}^{(1, \dots, n-2, n)}| & |A_{(1, \dots, n-2, n)}^{(1, \dots, n-2, n)}| \end{pmatrix}$$

und damit, wenn man (1.5) ausführlich aufschreibt

$$\begin{aligned} |A_{n-2}| |A| &= |A_{n-1}| \left| A \begin{pmatrix} 1, \dots, n-2, n \\ 1, \dots, n-2, n \end{pmatrix} \right| - \\ &- \left| A \begin{pmatrix} 1, \dots, n-2, n-1 \\ 1, \dots, n-2, n \end{pmatrix} \right| \left| A \begin{pmatrix} 1, \dots, n-2, n \\ 1, \dots, n-2, n-1 \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$

Nachdem wir nun einige Sätze über Determinanten formuliert haben, wenden wir uns jetzt quadratischen Formen zu. Zunächst gilt das wohlbekannte Trägheitsgesetz der quadratischen Formen.

Satz 1.13 Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine hermitesche Matrix und

$$q(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j$$

die zugehörige quadratische Form. Dann läßt sich A diagonalisieren, d.h. die quadratische Form q läßt sich mit einer regulären linearen Transformation der Variablen ξ_1, \dots, ξ_n auf η_1, \dots, η_m auf die Gestalt

$$q(\xi_1, \dots, \xi_n) = c_1 \eta_1 \bar{\eta}_1 + \dots + c_m \eta_m \bar{\eta}_m$$

²Diese Determinantenidentität hat früher große Bedeutung besessen. Zum Beispiel sind ihr in [22] gleich drei Paragraphen (§41, §44 und §45) gewidmet.

bringen. Dabei ist m der Rang der Matrix A . Die Anzahl der negativen (bzw. positiven) Werte unter den Zahlen c_i hängt nicht von der verwendeten Variablentransformation ab³.

Die Anzahl der negativen Quadrate einer hermiteschen Form läßt sich nun mit Hilfe der Hauptminoren der Matrix A bestimmen. Bevor wir dieses Ergebnis formulieren müssen wir noch eine ausgezeichnete Numerierung der Veränderlichen der Form q einführen. Dazu bemerken wir zunächst

Bemerkung 1.2 Eine Umnummerierung der Veränderlichen in der Form q entspricht einer gleichzeitigen Permutation der Zeilen und Spalten in der Matrix A

Satz 1.14 Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ eine hermitesche Matrix und m der Rang von A . Dann gibt es eine gleichzeitige Permutation σ der Zeilen und Spalten von A , so daß in der Matrix

$$A^\sigma = (a_{\sigma(i),\sigma(j)})_{i,j=1}^n$$

ausgezeichnete Numerierung vorliegt. Das heißt, daß $|A_m^\sigma| \neq 0$ gilt und in der Folge

$$1 = |A_0^\sigma|, |A_1^\sigma|, |A_2^\sigma|, \dots, |A_{m-1}^\sigma|, |A_m^\sigma| \neq 0$$

der Hauptminoren von A^σ nie zwei Nullen nebeneinander stehen, daß also $|A_k^\sigma| = 0$ für ein $k \in \{1, \dots, m-1\}$ bereits $|A_{k-1}^\sigma| |A_{k+1}^\sigma| \neq 0$ impliziert.

Für quadratische Formen $q(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j$ deren Veränderliche ausgezeichnet numeriert sind, für die also die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ die im letzten Satz beschriebenen Eigenschaften hat, gilt die Vorzeichenregel von Jacobi⁴.

Satz 1.15 (Jacobi) Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ die der quadratischen Form

$$q(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j$$

³D.h. die Anzahl der negativen (bzw. positiven) Quadrate der Form q ist wohldefiniert.

⁴Die Vorzeichenregel von Jacobi behandelt ursprünglich nur den Fall, in dem alle Hauptminoren regulär sind. Die Verallgemeinerung auf den von uns betrachteten, in seiner Allgemeinheit ausreichenden Fall, wird auch nach Gundelfinger benannt (siehe [17] S.48f). An der eben zitierten Stelle findet man auch eine Verallgemeinerung auf jenen Fall, in dem zwei benachbarte Hauptminoren singulär, die beiden angrenzenden jedoch regulär sind.

in ausgezeichneter Numerierung zugeordnete Matrix. Dann ist die Anzahl der negativen Quadrate der Form q gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge

$$1 = |A_0^\sigma|, |A_1^\sigma|, |A_2^\sigma|, \dots, |A_{m-1}^\sigma|, |A_m^\sigma| \neq 0$$

der Hauptminoren von A ($\operatorname{rg} A = m$), wobei Nullen gestrichen werden.

Abschließend wollen wir noch an eine wohlbekannte Charakterisierung der Anzahl der negativen Quadrate einer quadratischen Form erinnern, die einen Zusammenhang zu den im letzten Abschnitt behandelten Skalarprodukträumen herstellt.

Satz 1.16 *Die Anzahl der negativen Quadrate der quadratischen Form*

$$q(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \bar{\xi}_j$$

ist gleich der Anzahl der negativen Eigenwerte der Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Definiert man auf dem Vektorraum \mathbf{C}^n ein Skalarprodukt $[\cdot, \cdot]$ durch

$$[\vec{x}, \vec{y}] = (A\vec{x}, \vec{y}),$$

wobei (\cdot, \cdot) das übliche Skalarprodukt auf \mathbf{C}^n bezeichnet, so ist die Anzahl der negativen Quadrate der Form q gleich der maximalen Dimension eines bezüglich $[\cdot, \cdot]$ negativen Teilraumes von \mathbf{C}^n .

Bezüglich der Begriffe und Aussagen über Matrizen, Determinanten oder quadratische Formen, die wir im folgenden verwenden aber hier nicht formuliert haben, verweisen wir nochmals auf [22], [17] und [13].

Kapitel 2

Lösungen in den Klassen N_κ mit $\kappa < \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$

In diesem Kapitel diskutieren wir Lösungen des Interpolationsproblems (1.3) in den Klassen N_κ mit $\kappa < \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$. Wir werden sehen, daß es hier genau eine Lösung gibt, nämlich in der Klasse N_{κ_1} , also mit minimaler Anzahl negativer Quadrate. In den Klassen N_κ mit $\kappa_1 < \kappa < \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$ können dagegen keine Lösungen von (1.3) liegen.

2.1 Dem Interpolationsproblem und komplexen Funktionen zugeordnete Skalarprodukträume

Wir wollen an dieser Stelle einige Bezeichnungen einführen, die wir im folgenden immer benutzen werden. Zunächst erinnern wir an unsere Voraussetzungen bezüglich der gegebenen Daten $z_1, \dots, z_n \in \mathbf{C}^+$ und $w_1, \dots, w_n \in \mathbf{C}$: Die Pick-Matrix

$$\mathbf{IP} = \left(\frac{w_i - \overline{w_j}}{z_i - \overline{z_j}} \right)_{j,i=1}^n$$

habe κ_1 negative Eigenwerte und sei singulär.

Mit Hilfe der Matrix \mathbf{IP} erklären wir einen Skalarproduktraum.

Definition 2.1 *Bezeichne H den linearen Raum aller formalen Summen*

$$H = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i e_{z_i} \mid \alpha_i \in \mathbf{C} \right\},$$

versehen mit dem Skalarprodukt $[\cdot, \cdot]$, das durch

$$[e_{z_i}^{\rightarrow}, e_{z_j}^{\rightarrow}] = \frac{w_i - \overline{w_j}}{z_i - \overline{z_j}} \text{ für } i, j = 1, \dots, n$$

erklärt ist.

Im folgenden verstehen wir unter H stets den Skalarproduktraum, der in Definition 2.1 dem Interpolationsproblem (1.3) zugeordnet wurde. Die Vektoren $e_{z_1}^{\rightarrow}, \dots, e_{z_n}^{\rightarrow}$ bilden eine Basis des linearen Raumes H .

Wir geben noch die folgende allgemeinere Definition, die jeder komplexwertigen Funktion f einen Skalarproduktraum zuordnet.

Definition 2.2 Sei $f : \rho(f) \rightarrow \mathbf{C}$ mit $\rho(f) \subseteq \mathbf{C}^+$ eine komplexwertige Funktion. Der lineare Raum aller endlichen formalen Summen

$$H_f = \left\{ \sum_{z \in \rho(f)} \alpha_z e_z^{\rightarrow} \mid \alpha_z \in \mathbf{C}, \alpha_z = 0 \text{ für fast alle } z \in \rho(f) \right\},$$

versehen mit dem Skalarprodukt $[\cdot, \cdot]$, das durch

$$[e_z^{\rightarrow}, e_w^{\rightarrow}] = \frac{f(z) - \overline{f(w)}}{z - \overline{w}} \text{ für } z, w \in \rho(f)$$

erklärt ist, heißt der der Funktion f zugeordnete Skalarproduktraum.

Der Definitionsbereich von f wird hier (im Gegensatz zu Definition 2.1) im allgemeinen aus unendlich vielen Punkten, oft sogar aus einer in \mathbf{C}^+ dichten Teilmenge bestehen. Die Elemente $e_z^{\rightarrow}, z \in \rho(f)$ bilden eine (algebraische) Basis des linearen Raumes H_f .

Bemerkung 2.1 Sind f und g komplexwertige Funktionen mit $\rho(g) \subseteq \rho(f)$ und $f|_{\rho(g)} = g$, so gilt $H_g \subseteq H_f$. Ist insbesondere f eine Funktion mit $z_1, \dots, z_n \in \rho(f)$ und $f(z_i) = w_i$ für $i = 1, \dots, n$, also eine Lösung des Interpolationsproblems (1.3), so gilt $H \subseteq H_f$.

2.2 Die Lösung mit minimaler Anzahl negativer Quadrate

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß das Interpolationsproblem (1.3) genau eine Lösung in der Klasse N_{κ_1} besitzt, falls die aus den Daten gebildete

Pick-Matrix singularär ist und κ_1 negative Eigenwerte hat. Mit Hilfe einer Darstellung von Funktionen f , für die der zugeordnete Skalarproduktraum \mathbf{H}_f entartet, wird die Lösung in der Klasse \mathbf{N}_{κ_1} beschrieben. Weiters wird eine rationale Funktion f mit reellen Koeffizienten dadurch charakterisiert, daß der zugehörige Skalarproduktraum entartet, oder dadurch, daß sie Lösung eines gewissen Interpolationsproblems vom Typ (1.3) mit minimaler Anzahl negativer Quadrate ist.

2.2.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung in der Klasse \mathbf{N}_{κ_1}

Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß das Interpolationsproblem (1.3) genau eine Lösung in der Klasse \mathbf{N}_{κ_1} besitzt, falls die Pick-Matrix κ_1 negative Eigenwerte hat und singularär ist.

Zunächst zeigen wir, daß es höchstens eine solche Lösung gibt.

Satz 2.1 *Die Pick-Matrix \mathbf{IP} habe κ_1 negative Eigenwerte und sei singularär. Dann gibt es höchstens eine Funktion f in der Klasse \mathbf{N}_{κ_1} , die Lösung des Interpolationsproblems (1.3) ist, für die also*

$$f(z_i) = w_i \text{ für } i = 1, \dots, n$$

gilt.

Beweis : Die Hauptminoren der Pick-Matrix \mathbf{IP} bezeichnen wir wieder mit \mathbf{IP}_k :

$$\mathbf{IP}_k = \left(\frac{w_i - \overline{w_j}}{z_i - \overline{z_j}} \right)_{j,i=1}^k \text{ für } k = 1, \dots, n.$$

Sei $l - 1 < n$ der Rang von \mathbf{IP} . Dann ist $|\mathbf{IP}_r| = 0$ für $r = l, \dots, n$. Wir numerieren die Daten z_1, \dots, z_n und entsprechend auch w_1, \dots, w_n so um, daß in der Folge

$$1 = |\mathbf{IP}_0|, |\mathbf{IP}_1|, |\mathbf{IP}_2|, \dots, |\mathbf{IP}_{l-1}| \neq 0 \tag{2.1}$$

keine zwei benachbarten Zahlen gleich 0 sind¹. Dann gibt es in der Folge (2.1) genau κ_1 Vorzeichenwechsel. Nullen werden dabei stets gestrichen.

Sei nun $f \in \mathbf{N}_{\kappa_1}$ eine Lösung des Interpolationsproblems mit dem Holomorphiegebiet $\rho(f) (\subseteq \mathbf{C}^+)$. Dann ist \mathbf{H} in den Raum \mathbf{H}_f eingebettet. Für

¹vgl. Abschnitt 1.4.

$z \in \rho(f)$ und $w = f(z)$ muß die Determinante

$$|\mathbf{IP}_{l,z}| = \begin{vmatrix} \frac{w_1 - \overline{w}_l}{z_1 - \overline{z}_l} & \cdots & \frac{w_{l-1} - \overline{w}_l}{z_{l-1} - \overline{z}_l} & \frac{w_l - \overline{w}_l}{z_l - \overline{z}_l} & \frac{w - \overline{w}_l}{z - \overline{z}_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_1 - \overline{w}_{l-1}}{z_1 - \overline{z}_{l-1}} & \cdots & \frac{w_{l-1} - \overline{w}_{l-1}}{z_{l-1} - \overline{z}_{l-1}} & \frac{w_l - \overline{w}_{l-1}}{z_l - \overline{z}_{l-1}} & \frac{w - \overline{w}_{l-1}}{z - \overline{z}_{l-1}} \\ \hline \frac{w_1 - \overline{w}_l}{z_1 - \overline{z}_l} & \cdots & \frac{w_{l-1} - \overline{w}_l}{z_{l-1} - \overline{z}_l} & \frac{w_l - \overline{w}_l}{z_l - \overline{z}_l} & \frac{w - \overline{w}_l}{z - \overline{z}_l} \\ \hline \frac{w_1 - \overline{w}}{z_1 - \overline{z}} & \cdots & \frac{w_{l-1} - \overline{w}}{z_{l-1} - \overline{z}} & \frac{w_l - \overline{w}}{z_l - \overline{z}} & \frac{w - \overline{w}}{z - \overline{z}} \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

das gleiche Vorzeichen wie $|\mathbf{IP}_{l-1}|$ haben, da bereits κ_1 Vorzeichenwechsel in der Folge (2.1) der Determinanten der Hauptminoren vorgekommen sind, und $f \in \mathbb{N}_{\kappa_1}$ ist. Wendet man die Determinantenidentität von Sylvester an, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 \leq |\mathbf{IP}_{l,z}| \cdot |\mathbf{IP}_{l-1}| &= - \left| \mathbf{IP}_{l,z} \begin{pmatrix} 1, \dots, l-1, l \\ 1, \dots, l-1, l+1 \end{pmatrix} \right| \left| \mathbf{IP}_{l,z} \begin{pmatrix} 1, \dots, l-1, l+1 \\ 1, \dots, l-1, l \end{pmatrix} \right| = \\ &= - \left| \mathbf{IP}_{l,z} \begin{pmatrix} 1, \dots, l-1, l \\ 1, \dots, l-1, l+1 \end{pmatrix} \right|^2 = - \left| \sum_{i=1}^l \lambda_i \frac{w - \overline{w}_i}{z - \overline{z}_i} \right|^2. \end{aligned}$$

Hier haben wir die Determinante $\left| \mathbf{IP}_{l,z} \begin{pmatrix} 1, \dots, l-1, l \\ 1, \dots, l-1, l+1 \end{pmatrix} \right|$ nach der letzten Spalte entwickelt. Daraus ergibt sich aber

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i \frac{w - \overline{w}_i}{z - \overline{z}_i} = 0, \quad (2.3)$$

woraus sich $w = f(z)$ eindeutig als rationale Funktion in z bestimmt. Die Koeffizienten λ_i sind als Determinanten von Minoren der Matrix \mathbf{IP}_l durch die Werte z_1, \dots, z_l und w_1, \dots, w_l bestimmt. Damit ist die Funktion f durch die vorgegebenen Daten eindeutig festgelegt.

□

Bemerkung 2.2 Diese Beweismethode folgt dem Beweis des analogen Satzes für den Fall $\kappa_1 = 0$ bei G.Pick [38].

Um die Existenz einer Lösung der Interpolationsaufgabe (1.3) in \mathbb{N}_{κ_1} zu untersuchen, gehen wir von der durch (2.3) gegebenen Funktion aus.

Lemma 2.1 Die durch (2.3) gegebene rationale Funktion $w = f(z)$ erfüllt die Bedingungen

$$f(z_i) = w_i \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Beweis : Seien die Daten z_1, \dots, z_n und w_1, \dots, w_n in derselben Reihenfolge wie beim Beweis von Satz 2.1 angeordnet. Dann wird für $i \in \{1, \dots, l\}$ und $z = z_i$ offenbar die letzte Zeile der Determinante (2.2) gleich ihrer i -ten Zeile, wenn man $w = w_i$ setzt. Da w durch z eindeutig bestimmt ist, und zwar derart, daß die Determinante (2.2) verschwindet, muß $f(z_i) = w_i$ gelten. Sei nun $i \in \{l+1, \dots, n\}$. Dann wird für $z = z_i$ und $w = w_i$ die Determinante (2.2) die Determinante eines $(l+1)$ -reihigen Minors der Pick-Matrix \mathbf{IP} . Da \mathbf{IP} den Rang $l-1$ hat, muß (2.2) verschwinden, und es ergibt sich wieder $f(z_i) = w_i$. □

Unser Ziel ist nun zu zeigen, daß die durch (2.3) gegebene Funktion in der Klasse \mathbf{N}_{κ_1} liegt. Dazu zeigen wir zunächst einen allgemeineren Satz. Bevor wir diesen formulieren, wollen wir noch daran erinnern, daß der Grad einer rationalen Funktion $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ als Maximum der Grade von p und q definiert wird, wobei man p und q als teilerfremd annimmt.

Satz 2.2 Sei $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine rationale Funktion vom Grade $n \in \mathbf{IN}$ mit reellen Koeffizienten (p und q teilerfremd). Gibt es n Punkte z'_1, \dots, z'_n der oberen Halbebene mit $q(z'_i) \neq 0$ für $i = 1, \dots, n$, so daß mit $w'_i = f(z'_i)$ die Pick-Matrix

$$\mathbf{IP} = \left(\frac{w'_i - \overline{w'_j}}{z'_i - \overline{z'_j}} \right)_{j,i=1}^n$$

genau κ_1 negative Eigenwerte hat, so liegt f in der Klasse \mathbf{N}_{κ_1} .

Beweis : Wir berechnen zunächst

$$N_f(z, z') = \frac{f(z) - \overline{f(z')}}{z - \overline{z'}} = \frac{p(z)q(\overline{z'}) - p(\overline{z'})q(z)}{(z - \overline{z'})q(z)\overline{q(z')}}.$$

Für beliebige m Punkte $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in \mathbf{C}^+$ mit $q(\zeta_i) \neq 0$ für $i = 1, \dots, m$ hat die Pick-Matrix die Gestalt

$$\left(\frac{f(\zeta_i) - \overline{f(\zeta_j)}}{\zeta_i - \overline{\zeta_j}} \right)_{j,i=1}^m = \frac{1}{\left| \prod_{i=1}^m q(\zeta_i) \right|^2} \left(\frac{p(\zeta_i)q(\overline{\zeta_j}) - p(\overline{\zeta_j})q(\zeta_i)}{\zeta_i - \overline{\zeta_j}} \right)_{j,i=1}^m.$$

Wir setzen

$$K'(z, z') = \frac{p(z)q(\overline{z'}) - p(\overline{z'})q(z)}{z - \overline{z'}} = \sum_{l,k=0}^{n-1} a_{lk} z^l \overline{z'}^k,$$

was möglich ist, da das Polynom $p(z)q(\overline{z'}) - p(\overline{z'})q(z)$ im Polynomring der zwei Veränderlichen z und $\overline{z'}$ durch $(z - \overline{z'})$ teilbar ist. Die Matrizen $(N_f(\zeta_i, \zeta_j))_{i,j=1}^m$ und $(K'(\zeta_i, \zeta_j))_{i,j=1}^m$ haben die gleiche Anzahl von negativen und positiven Quadraten, denn ihren k -ten Hauptminoren unterscheiden sich nur um den positiven Faktor $\left| \prod_{i=1}^k q(\zeta_i) \right|^2$.

Nun betrachten wir die zwei quadratischen Formen des \mathbf{C}^n bzw. \mathbf{C}^m (für $m \geq n$)

$$H_1(\vec{x}) = \sum_{l,k=0}^{n-1} a_{lk} x_l \overline{x}_k,$$

$$H_2^{\zeta_1, \dots, \zeta_m}(\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^m K'(\zeta_i, \zeta_j) y_i \overline{y}_j.$$

Hier sind ζ_1, \dots, ζ_m wieder beliebige, aber fest gewählte paarweise verschiedene Punkte der oberen Halbebene. Weiters sei $U^{\zeta_1, \dots, \zeta_m}$ die lineare Abbildung des \mathbf{C}^m in den \mathbf{C}^n , die durch

$$U^{\zeta_1, \dots, \zeta_m} \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \zeta_1 & \cdots & \zeta_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^{n-1} & \cdots & \zeta_m^{n-1} \end{pmatrix} \vec{y}$$

gegeben ist. Der Rang obiger Matrix ist gleich n , denn es gilt

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \zeta_1 & \cdots & \zeta_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_1^{n-1} & \cdots & \zeta_m^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (\zeta_i - \zeta_j) \neq 0.$$

Nun ist

$$H_1(U^{\zeta_1, \dots, \zeta_m} \vec{y}) = H_2^{\zeta_1, \dots, \zeta_m}(\vec{y}),$$

denn man berechnet für $\vec{x} = U^{\zeta_1, \dots, \zeta_m} \vec{y}$

$$H_1(\vec{x}) = \sum_{l,k=0}^{n-1} a_{lk} x_l \overline{x}_k = \sum_{l,k=0}^{n-1} a_{lk} \left(\sum_{i=1}^m \zeta_i^l y_i \right) \cdot \overline{\left(\sum_{j=1}^m \zeta_j^k y_j \right)} =$$

$$= \sum_{l,k=0}^{n-1} \sum_{i,j=1}^m a_{lk} \zeta_i^l \overline{\zeta_j^k} y_i \overline{y_j}$$

und

$$\begin{aligned} H_2^{\zeta_1, \dots, \zeta_m}(\vec{y}) &= \sum_{i,j=1}^m K'(\zeta_i, \zeta_j) y_i \overline{y_j} = \\ &= \sum_{i,j=1}^m \sum_{l,k=0}^{n-1} a_{lk} \zeta_i^l \overline{\zeta_j^k} y_i \overline{y_j}. \end{aligned}$$

Es haben daher die beiden Formen H_1 und $H_2^{\zeta_1, \dots, \zeta_m}$ im Falle $m = n$ die gleiche Anzahl negativer und positiver Quadrate, denn in diesem Fall ist $U^{\zeta_1, \dots, \zeta_m}$ ein Isomorphismus. Insbesondere hat H_1 genau so viele negative Quadrate wie $H_2^{z'_1, \dots, z'_n}$, nämlich κ_1 viele. Für $m > n$ ist die Form $H_2^{\zeta_1, \dots, \zeta_m}$ stets entartet, denn dann ist $\ker U^{\zeta_1, \dots, \zeta_m} \neq \{0\}$.

Wir haben nun zu beweisen, daß für je endlich viele Punkte ζ_1, \dots, ζ_m die Form $H_2^{\zeta_1, \dots, \zeta_m}$ höchstens κ_1 negative Quadrate hat. Ist zunächst $m \leq n$, so ergänze man falls notwendig irgendwie auf n verschiedene Punkte $\zeta_1, \dots, \zeta_m, \zeta_{m+1}, \dots, \zeta_n$. Dann hat die Form $H_2^{\zeta_1, \dots, \zeta_n}$ genau κ_1 negative Quadrate, also kann die Form $H_2^{\zeta_1, \dots, \zeta_m}$ höchstens κ_1 negative Quadrate besitzen. Sei nun $m > n$ und L ein κ -dimensionaler bezüglich $H_2^{\zeta_1, \dots, \zeta_m}$ negativer Teilraum des \mathbf{C}^m . Dann ist $L \cap \ker U^{\zeta_1, \dots, \zeta_m} = \{0\}$, L wird also injektiv in den \mathbf{C}^n abgebildet. Daher ist $U^{\zeta_1, \dots, \zeta_m}(L)$ ein κ -dimensionaler bezüglich der Form H_1 negativer Teilraum des \mathbf{C}^n , und es muß $\kappa \leq \kappa_1$ gelten.

□

Wir wollen eine Aussage aus dem Beweis des letzten Satzes hervorheben.

Folgerung 2.1 *Sei f eine rationale Funktion vom Grade $n \in \mathbf{IN}$ mit reellen Koeffizienten. Dann ist für $m > n$ und beliebige Punkte ζ_1, \dots, ζ_m der oberen Halbebene mit $|f(\zeta_i)| < \infty$ für $i = 1, \dots, m$, die Pick-Matrix*

$$\left(\frac{f(\zeta_i) - \overline{f(\zeta_j)}}{\zeta_i - \overline{\zeta_j}} \right)_{j,i=1}^m$$

singulär.

Im ersten der beiden nun folgenden Lemmata geben wir eine allgemeine Eigenschaft rationaler Funktionen an. Das zweite gibt über die Existenz negativer Teilräume mit gewissen Eigenschaften Auskunft.

Lemma 2.2 Sei $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine rationale Funktion vom Grade höchstens $n \in \mathbf{IN}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, $q(z)$ sei normiert. Gibt es $n + 1$ Punkte z'_1, \dots, z'_{n+1} der oberen Halbebene, so daß

$$f(\overline{z'_i}) = \overline{f(z'_i)} \text{ für } i = 1, \dots, n + 1 \quad (2.4)$$

gilt, so haben p und q reelle Koeffizienten.

Beweis : Wir betrachten die rationale Funktion

$$g(z) = f(z) - \overline{f(\overline{z})} = \frac{p(z)\overline{q(\overline{z})} - \overline{p(\overline{z})}q(z)}{q(z)q(\overline{z})}.$$

Der Grad von $g(z)$ beträgt höchstens $2n$. Die $2n + 2$ Punkte z'_1, \dots, z'_{n+1} und $\overline{z'_1}, \dots, \overline{z'_{n+1}}$ sind wegen der Beziehung (2.4) Nullstellen von $g(z)$. Damit muß das Polynom im Zähler von $g(z)$ bereits das Nullpolynom sein, und wir erhalten $g(z) \equiv 0$, also $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ für jedes $z \in \mathbf{C}$. Nun zerlegen wir $p(z)$ und $q(z)$ in Linearfaktoren

$$p(z) = a(z - \zeta_1) \cdots (z - \zeta_r), \quad (2.5)$$

$$q(z) = (z - \eta_1) \cdots (z - \eta_s). \quad (2.6)$$

Mit jeder nichtreellen Nullstelle und Polstelle von $f(z)$ muß auch an der konjugiert komplexen Stelle eine Null- bzw. Polstelle derselben Ordnung vorliegen. Fassen wir also geeignete Faktoren zusammen, so werden p und q bis auf den Faktor a zu reellen Polynomen. Nun muß aber $f(z)$ die reelle Achse invariant lassen, was nur für $a \in \mathbf{IR}$ möglich ist.

□

Lemma 2.3 Die dem Interpolationsproblem (1.3) zugeordnete Pick-Matrix

$$\mathbf{IP} = \left(\frac{w_i - \overline{w_j}}{z_i - \overline{z_j}} \right)_{j,i=1}^n,$$

habe den Rang l , $l \leq n$. Ist κ_1 die Anzahl der negativen Eigenwerte von \mathbf{IP} , so gibt es l Zahlen $i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, n\}$, so daß bereits der Minor

$$\mathbf{IP}(i_1, \dots, i_l) = \left(\frac{w_{i_k} - \overline{w_{i_m}}}{z_{i_k} - \overline{z_{i_m}}} \right)_{m,k=1}^l$$

der Matrix \mathbf{IP} genau κ_1 negative Eigenwerte besitzt.

Beweis : Wir zeigen, daß es Elemente $e_{z_{i_1}}^{\vec{}} , \dots , e_{z_{i_l}}^{\vec{}}$ gibt, so daß in der linearen Hülle $\langle e_{z_{i_1}}^{\vec{}} , \dots , e_{z_{i_l}}^{\vec{}} \rangle$ ein κ_1 -dimensionaler negativer Teilraum liegt. Damit hat der entsprechende Minor $\mathbf{IP}(i_1, \dots, i_l)$ κ_1 negative Eigenwerte.

Dazu wollen wir $\ker \mathbf{IP}$ berechnen, d.h. das Gleichungssystem

$$\mathbf{IP} \vec{x} = 0$$

lösen. Wir wählen l linear unabhängige Zeilen und streichen die restlichen. Dann gibt es eine l -reihige Unterdeterminante der Koeffizientenmatrix des so entstandenen Gleichungssystems, die von Null verschieden ist. Diese Unterdeterminante sei aus den Spalten i_1, \dots, i_l gebildet. Dann hat $\ker \mathbf{IP}$ eine Basis der Gestalt

$$\begin{aligned} h_1^{\vec{}} &= \vec{a}_1 + e_{z_{j_1}}^{\vec{}} \\ &\vdots \\ h_{n-l}^{\vec{}} &= \vec{a}_{n-l} + e_{z_{j_{n-l}}}^{\vec{}} \end{aligned}$$

Hier ist $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-l} \in \langle e_{z_{i_1}}^{\vec{}} , \dots , e_{z_{i_l}}^{\vec{}} \rangle$ und $\{j_1, \dots, j_{n-l}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_l\}$.

Sei nun $\langle \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{\kappa_1} \rangle$ ein κ_1 -dimensionaler negativer Teilraum des Skalarproduktraumes H . Durch geeignete Linearkombination erreichen wir, daß die Vektoren

$$\vec{c}_r = \vec{b}_r - \sum_{k=1}^{n-l} b_{rk} h_{j_k}^{\vec{}} \quad \text{für } r = 1, \dots, \kappa_1$$

in der linearen Hülle $\langle e_{z_{i_1}}^{\vec{}} , \dots , e_{z_{i_l}}^{\vec{}} \rangle$ liegen. Sei nun $\sum_{r=1}^{\kappa_1} \mu_r \vec{c}_r = 0$, d.h. gelte

$$\sum_{r=1}^{\kappa_1} \mu_r \vec{c}_r = \sum_{r=1}^{\kappa_1} \mu_r \vec{b}_r - \sum_{r=1}^{\kappa_1} \sum_{k=1}^{n-l} \mu_r b_{rk} h_{j_k}^{\vec{}} = 0.$$

Da L ein negativer Teilraum ist folgt bereits $\sum_{r=1}^{\kappa_1} \mu_r \vec{b}_r = 0$ und damit gilt wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{\kappa_1}$ bereits $\mu_1, \dots, \mu_{\kappa_1} = 0$. Die Dimension des Teilraumes $L' = \langle \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_{\kappa_1} \rangle$ ist also gleich κ_1 . Wegen

$$[\vec{c}_i, \vec{c}_j] = [\vec{b}_i, \vec{b}_j] \quad \text{für } i, j = 1, \dots, \kappa_1$$

ist L' ebenfalls ein negativer Teilraum von H .

□

Nun können wir den bereits vor Satz 2.1 angekündigten Satz über die Existenz einer Lösung des Interpolationsproblems (1.3) mit minimaler Anzahl negativer Quadrate formulieren und beweisen.

Satz 2.3 Sei die Pick-Matrix \mathbf{IP} singulär und habe κ_1 negative Eigenwerte. Dann gibt es eine Lösung des Interpolationsproblems (1.3) in der Klasse \mathbf{N}_{κ_1} .

Beweis : Die Zahl l habe dieselbe Bedeutung wie im Beweis von Satz 2.1, d.h., $l - 1$ sei der Rang von \mathbf{IP} . Auch die Anordnung der Daten z_1, \dots, z_n und w_1, \dots, w_n sei wie bei Satz 2.1 gewählt.

Wir betrachten die durch (2.3) gegebene rationale Funktion $f(z)$. Diese berechnet sich aus (2.3) als $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ wobei der Grad von Zähler- und Nennerpolynom höchstens $l - 1$ ist.

Sei für ein $i \in \{1, \dots, l\}$ der Koeffizient λ_i verschieden von Null, dann überlegen wir zunächst, daß für dieses i nicht nur

$$f(z_i) = w_i, \quad (2.7)$$

sondern sogar auch

$$f(\bar{z}_i) = \bar{w}_i \quad (2.8)$$

gilt.

Nehmen wir zuerst an, f hätte für ein $i \in \{1, \dots, l\}$ mit $\lambda_i \neq 0$ an der Stelle \bar{z}_i einen Pol der Ordnung $k > 0$. Dann strebt der Term $\lambda_i \frac{w - \bar{w}_i}{z - \bar{z}_i}$ für $z \rightarrow \bar{z}_i$ gegen unendlich, und zwar mit der Ordnung $k + 1$. Alle anderen Ausdrücke in der Gleichung (2.3) streben für $z \rightarrow \bar{z}_i$ jedoch nur mit der Ordnung k gegen unendlich. Gleichung (2.3) kann also in keiner punktierten Umgebung von \bar{z}_i identisch erfüllt sein. Das ist aber ein Widerspruch zur Definition von f . Analog erledigt man den Fall, daß $f(z)$ für $z \rightarrow \bar{z}_i$ gegen einen von \bar{w}_i verschiedenen Grenzwert strebt. Denn dann strebt der Term $\frac{w - \bar{w}_i}{z - \bar{z}_i}$ gegen unendlich, während alle anderen Ausdrücke aus (2.3) beschränkt bleiben.

Sei nun l' die Anzahl jener $i \in \{1, \dots, l\}$ für die $\lambda_i \neq 0$ gilt. Dann ist die Funktion f eine rationale Funktion vom Grade höchstens $l' - 1$, die neben den Gleichungen (2.7) auch den konjugierten Gleichungen (2.8) für $i \in \{1, \dots, l\}$ mit $\lambda_i \neq 0$ genügt. Normiert man den Nenner von f , so hat f dann nur reelle Koeffizienten. Wir sehen nun auch, daß der Grad von f genau $l - 1$ ist. Denn wäre er kleiner als $l - 1$, dann müßte die Determinante des $(l - 1)$ -reihigen Minors \mathbf{IP}_{l-1} der Pick-Matrix \mathbf{IP} verschwinden. Insbesondere folgt $l' = l$, also ist $\lambda_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, l$. Da der Hauptminor \mathbf{IP}_{l-1} eine von Null verschiedene Determinante hat, kann man im Beweis von Lemma 2.3 den κ_1 -dimensionalen negativen Teilraum L' in der linearen Hülle der Vektoren $e_{z_1}^{\rightarrow}, \dots, e_{z_{l-1}}^{\rightarrow}$ wählen.

Um Satz 2.2 anwenden zu können müssen wir für $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ noch $q(z_i) \neq 0$ für $i = 1, \dots, l-1$ zeigen. Da der Grad von f genau $l-1$ ist, ist die Darstellung $\frac{p(z)}{q(z)}$ die man aus (2.3) durch Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner $\prod_{j=1}^n (z - \bar{z}_j)$ erhält gekürzt, also haben $p(z)$ und $q(z)$ keine gemeinsamen Nullstellen. Da der Wert von $f(z)$ an der Stelle z_i endlich ist, muß somit $q(z_i) \neq 0$ sein.

Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 2.2 an die Funktion f und die Punkte z_1, \dots, z_{l-1} erfüllt, und wir erhalten $f \in N_{\kappa_1}$.

□

Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Interpolationsproblems (1.3) in der Klasse N_{κ_1} , d.h. mit minimaler Anzahl negativer Quadrate ist also gesichert. Diese Tatsache stellt eine natürliche Übertragung der klassischen Situation, wo es auch genau eine Lösung des Interpolationsproblems in der Klasse N_0 gegeben hat, auf den von uns betrachteten allgemeineren Fall dar.

Wir wollen noch eine Aussage aus dem Beweis des letzten Satzes hervorheben.

Folgerung 2.2 *Sei f die eindeutig bestimmte Lösung des Interpolationsproblems (1.3) in der Klasse N_{κ_1} . Dann ist f eine rationale Funktion: $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$. Setzt man in der Darstellung $\frac{p(z)}{q(z)}$ die Polynome p und q als teilerfremd und q als normiert voraus, so haben p und q nur reelle Koeffizienten.*

2.2.2 Beschreibung der eindeutigen Lösung der Klasse N_{κ_1}

In diesem Paragraphen betrachten wir rationale Ausdrücke spezieller Gestalt, von denen wir sehen werden, daß sie alle die eindeutige Lösung des Interpolationsproblems (1.3) in der Klasse N_{κ_1} , also mit minimaler Anzahl negativer Quadrate darstellen.

Definition 2.3 *Sei $\vec{h}^\circ = \sum_{i=1}^n h_i^\circ \vec{e}_{z_i}$, $\vec{h}^\circ \neq 0$ ein isotroper Vektor des Skalarproduktraumes H . Dann bezeichnen wir mit $f_{\vec{h}^\circ}$ die dem Vektor \vec{h}° zugeord-*

nete rationale Funktion

$$f_{\vec{h}^\circ}(z) = \frac{\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ} \overline{w_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j})}{\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j})}. \quad (2.9)$$

Zunächst ist $f_{\vec{h}^\circ}$ auf der Menge $\rho'(f_{\vec{h}^\circ})$ aller jener Punkte der oberen Halbebene definiert, in denen der Nenner $\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j})$ von Null verschieden

ist. Wir betrachten $f_{\vec{h}^\circ}$ auch auf ihrem maximalen Holomorphiegebiet $\rho(f_{\vec{h}^\circ})$ in \mathbf{C}^+ , denken uns also die Funktion $f_{\vec{h}^\circ}$ holomorph in ihre hebbaren Singularitäten fortgesetzt.

Die durch (2.3) gegebene (eindeutige) Lösung des Interpolationsproblems (1.3) in der Klasse \mathbf{N}_{κ_1} ist nun von dieser Gestalt, denn es gilt

Lemma 2.4 Die durch (2.3) gegebene rationale Funktion, stimmt für einen Vektor

$$\vec{h}^\circ = \sum_{i=1}^n \mu_i \vec{e}_{z_i}, \vec{h}^\circ \neq 0$$

mit der Funktion $f_{\vec{h}^\circ}$ überein. Numeriert man die Daten so wie beim Beweis von Satz 2.1, so erhält man die Zahlen μ_i für $i = 1, \dots, l$ als algebraisches Komplement des Elements $\frac{w_l - \overline{w_i}}{z_l - \overline{z_i}}$ in dem Minor \mathbf{IP}_l von \mathbf{IP} . Für $i = l + 1, \dots, n$ setzt man $\mu_i = 0$. Der so gegebene Vektor \vec{h}° ist isotrop im Raum \mathbf{H} .

Beweis : Wir betrachten die Darstellung (2.3). Zunächst berechnet man daraus

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i (w - \overline{w_i}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j}) = 0.$$

Löst man diese Gleichung nach w auf, so ergibt sich

$$w = \frac{\sum_{i=1}^l \lambda_i \overline{w_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j})}{\sum_{i=1}^l \lambda_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j})}. \quad (2.10)$$

Die Zahlen λ_i sind die algebraischen Komplemente der Elemente $\frac{w_i - \overline{w_l}}{z_i - \overline{z_l}}$ in der Matrix \mathbf{IP}_l . Vergleicht man (2.10) mit (2.9), so ergibt sich die behauptete Darstellung. Es bleibt noch zu zeigen, daß der Vektor $\vec{h}^\circ = \sum_{i=1}^n \mu_i \vec{e}_{z_i}$ isotrop im Raum \mathbf{H} ist. Offenbar genügt es zu zeigen, daß $\mathbf{IP}_l \cdot (\mu_1, \dots, \mu_l)^T = 0$ gilt. Dies folgt aber aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz, da $(\mu_1, \dots, \mu_l)^T$ eine Spalte der Matrix der algebraischen Komplemente der singulären Matrix \mathbf{IP}_l ist.

□

Jetzt gehen wir von einer Funktion der Gestalt $f_{\vec{h}^\circ}$ aus und zeigen, daß eine solche Funktion der Klasse \mathbf{N}_{κ_1} angehört. Dazu beweisen wir zunächst

Lemma 2.5 Sei $\vec{h}^\circ = \sum_{i=1}^n h_i^\circ \vec{e}_{z_i} \in \mathbf{H}^\circ, \vec{h}^\circ \neq 0$. Dann gilt für den Kern $N_{f_{\vec{h}^\circ}}$ von $f_{\vec{h}^\circ}$ die Formel

$$N_{f_{\vec{h}^\circ}}(z, z') = \frac{f_{\vec{h}^\circ}(z) - \overline{f_{\vec{h}^\circ}(z')}}{z - \overline{z'}} = \frac{1}{u(z')\overline{u(z)}} [\vec{u}(z'), \vec{u}(z)],$$

falls $z, z' \in \rho'(f_{\vec{h}^\circ})$ sind. Hier bezeichnen $u(z)$ und $\vec{u}(z)$ die Ausdrücke

$$u(z) = \sum_{i=1}^n h_i^\circ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\overline{z} - z_j) \text{ bzw. } \vec{u}(z) = \sum_{i=1}^n (h_i^\circ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\overline{z} - z_j)) \vec{e}_{z_i}.$$

Beweis : Wir berechnen $N_{f_{\vec{h}^\circ}}(z, z')$:

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - \overline{f(z')}}{z - \overline{z'}} &= \frac{1}{z - \overline{z'}} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ w_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j})}{\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j})} \right) - \\ &\quad - \left(\frac{\sum_{k=1}^n \overline{h_k^\circ w_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (z' - \overline{z_l})}{\sum_{k=1}^n \overline{h_k^\circ} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (z' - \overline{z_l})} \right) = \\ &= \frac{1}{(z - \overline{z'}) \left(\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j}) \right) \left(\sum_{k=1}^n \overline{h_k^\circ} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (z' - \overline{z_l}) \right)} \left(\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ w_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j}) \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \overline{\sum_{k=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (z' - \overline{z_l})} - \sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j}) \overline{\sum_{k=1}^n \overline{h_i^\circ} \overline{w_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (z' - \overline{z_l})} = \\
& = \frac{1}{(z - \overline{z'}) \left(\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j}) \right) \left(\sum_{k=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (z' - \overline{z_l}) \right)} \left(\sum_{i,k=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j}) \cdot \right. \\
& \quad \left. \cdot h_k^\circ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (\overline{z'} - z_l) \cdot (\overline{w_i} - w_k) \right)
\end{aligned}$$

Nun schreibt man $\overline{w_i} - w_k = \frac{\overline{w_i} - w_k}{\overline{z_i} - z_k} (\overline{z_i} - z_k) = \frac{\overline{w_i} - w_k}{\overline{z_i} - z_k} ((\overline{z_i} - z) + (z - \overline{z'}) + (\overline{z'} - z_k))$ und erhält damit

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,k=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j}) h_k^\circ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (\overline{z'} - z_l) \cdot \frac{\overline{w_i} - w_k}{\overline{z_i} - z_k} (\overline{z_i} - z) = \\
& = - \prod_{j=1}^n (z - \overline{z_j}) \sum_{i,k=1}^n \overline{h_i^\circ} h_k^\circ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (\overline{z'} - z_l) \frac{\overline{w_i} - w_k}{\overline{z_i} - z_k} = \\
& = - \prod_{j=1}^n (z - \overline{z_j}) \left[\sum_{k=1}^n h_k^\circ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (\overline{z'} - z_l) e_{z_k}^{\vec{z}}, h^{\vec{z}} \right] = 0
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,k=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j}) h_k^\circ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (\overline{z'} - z_l) \cdot \frac{\overline{w_i} - w_k}{\overline{z_i} - z_k} (\overline{z'} - z_k) = \\
& = \prod_{l=1}^n (\overline{z'} - z_l) \sum_{i,k=1}^n \overline{h_i^\circ} h_k^\circ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j}) \frac{\overline{w_i} - w_k}{\overline{z_i} - z_k} = \\
& = \prod_{l=1}^n (\overline{z'} - z_l) \left[h^{\vec{z}}, \sum_{i=1}^n h_i^\circ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\overline{z} - z_j) e_{z_k}^{\vec{z}} \right] = 0
\end{aligned}$$

Es bleibt also

$$N_{f_{h^{\vec{z}}}}(z, z') = \frac{1}{(z - \overline{z'}) \left(\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j}) \right) \left(\sum_{k=1}^n \overline{h_k^\circ} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (z' - \overline{z_l}) \right)}.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\sum_{i,k=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j}) h_k^\circ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (\overline{z'} - z_l) \cdot \frac{\overline{w_i} - w_k}{\overline{z_i} - z_k} (z - \overline{z'}) \right) = \\
& = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j}) \right) \left(\sum_{k=1}^n \overline{h_k^\circ} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (z' - \overline{z_l}) \right)} \\
& \cdot \left[\sum_{k=1}^n \left(h_k^\circ \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (\overline{z'} - z_l) \right) e_{z_k}^{\vec{}} , \sum_{i=1}^n \left(h_i^\circ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\overline{z} - z_j) \right) e_{z_i}^{\vec{}} \right] = \\
& = \frac{1}{u(z') \overline{u(z)}} [\vec{u}(z'), \vec{u}(z)].
\end{aligned}$$

□

Wir benötigen noch eine Stetigkeitsaussage über die Anzahl der negativen Quadrate des Nevanlinna-Kerns einer Funktion, die im folgenden Satz angegeben wird.

Satz 2.4 Sei $\rho(f) \subseteq \mathbf{C}^+$, $f : \rho(f) \rightarrow \mathbf{C}$ eine stetige Funktion, D eine dichte Teilmenge von $\rho(f)$ und $\kappa \geq 0$. Dann folgt aus $f|_D \in \mathbf{N}_\kappa$ bereits $f \in \mathbf{N}_\kappa$.

Beweis : Angenommen es gäbe m Punkte $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in \rho(f)$, so daß mit $\omega_i = f(\zeta_i)$ die Matrix

$$\mathbf{IP}' = \left(\frac{\omega_i - \overline{\omega_j}}{\zeta_i - \overline{\zeta_j}} \right)_{j,i=1}^m$$

κ' negative Eigenwerte (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt) mit $\kappa' > \kappa$ hat. Nun hängen die Eigenwerte einer Matrix stetig von ihren Elementen ab. Verändert man also die Elemente von \mathbf{IP}' nur hinreichend wenig, so hat auch die veränderte Matrix κ' negative Eigenwerte. Da die Elemente der Matrix \mathbf{IP}' stetig von den Punkten ζ_1, \dots, ζ_m abhängen, gibt es eine ganze Umgebung von $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ in der die analog zu \mathbf{IP}' gebildete Matrix κ' negative Eigenwerte besitzt. Da D dicht in $\rho(f)$ liegt ist das aber unmöglich.

□

Aus Lemma 2.5 und Satz 2.4 ergibt sich die Folgerung

Folgerung 2.3 Sei $\vec{h}^\circ = \sum_{i=1}^n h_i^\circ e_{z_i}^{\vec{}} \in \mathbf{H}^\circ$, $\vec{h}^\circ \neq 0$, Dann gilt $f_{\vec{h}^\circ} \in \mathbf{N}_{\kappa_1}$.

Beweis : Wir zeigen, daß $f_{\vec{h}^\circ} |_{\rho'(f_{\vec{h}^\circ})}$ in der Klasse N_{κ_1} liegt. Dazu seien für $m \in \mathbf{IN}$ paarweise verschiedene Punkte $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in \mathbf{C}^+$ vorgegeben. Wir haben zu zeigen, daß die quadratische Form

$$\sum_{i,j=1}^m N_{f_{\vec{h}^\circ}}(\zeta_i, \zeta_j) x_i y_j \quad (2.11)$$

höchstens κ_1 negative Quadrate hat, oder dazu äquivalent, daß der Skalarproduktraum

$$\mathbf{L} = \langle \mathbf{C}^m, [., .]_1 \rangle \text{ mit } [e_i, e_j]_1 = N_{f_{\vec{h}^\circ}}(\zeta_j, \zeta_i)$$

keinen negativen Teilraum der Dimension $d > \kappa_1$ besitzt.

Wir betrachten nun den Fall $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in \rho'(f_{\vec{h}^\circ})$. Dann erhalten wir einen linearen Operator $U : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{H}$ vermöge

$$e_k \mapsto \frac{1}{u(\zeta_k)} \vec{u}(\zeta_k)$$

Dieser Operator erfüllt nach Lemma 2.5 die Bedingung

$$[U\vec{x}, U\vec{y}] = [\vec{x}, \vec{y}]_1 \text{ für } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{L}$$

Damit ist die Dimension κ eines negativen Teilraumes M von \mathbf{L} durch κ_1 beschränkt, denn $M \cap \ker U = \{0\}$ also wird M durch U injektiv abgebildet. Nun besteht aber $\rho(f_{\vec{h}^\circ}) \setminus \rho'(f_{\vec{h}^\circ})$ aus endlich vielen isolierten Punkten. Nach Satz 2.4 kann die Form (2.11) also auch für Werte $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in \rho(f_{\vec{h}^\circ})$ höchstens κ_1 negative Quadrate besitzen.

□

Als Hauptergebnis dieses Paragraphens beweisen wir jetzt den

Satz 2.5 Sei $\vec{h}^\circ = \sum_{i=1}^n h_i^\circ e_{z_i} \in \mathbf{H}^\circ, \vec{h}^\circ \neq 0$. Dann stellt die Funktion $f_{\vec{h}^\circ}$ die eindeutige Lösung des Interpolationsproblems (1.3) in der Klasse N_{κ_1} dar. Insbesondere stimmen also die Funktionen $f_{\vec{h}^\circ}$ für jedes $\vec{h}^\circ \in \mathbf{H}^\circ, \vec{h}^\circ \neq 0$ überein.

Beweis : Wir betrachten wieder die durch (2.3) gegebene Funktion. Diese hat nach Lemma 2.4 die Darstellung $f_{\vec{h}^\circ}$ mit dem Vektor $\vec{h}^\circ = \sum_{i=1}^n \mu_i e_{z_i} \in \mathbf{H}^\circ$. Zunächst bemerkt man, daß dieser Vektor eine von Null verschiedene

Komponente $\mu_l e_{z_l}^{\vec{}}$ hat, denn es gilt $\mu_l = |\mathbf{IP}_{l-1}| \neq 0$. Die Komponenten in den Richtungen $e_{z_j}^{\vec{}}$ für $j = l+1, \dots, n$ sind jedoch sämtlich gleich Null. Weiters bemerken wir, daß es bei der Anordnung der Daten z_1, \dots, z_n gemäß dem Beweis von Satz 2.1 nicht darauf ankommt, welcher der von den schon gewählten Punkten z_1, \dots, z_{l-1} verschiedenen Datenpunkten als letzter Punkt z_l genommen wird. Nach Lemma 2.4 erhält man also für verschiedene Wahlen von z_l gerade $n - (l-1) = \text{def } \mathbf{IP}$ isotrope Vektoren $h_j^{\vec{\circ}}$ ($j = l, \dots, n$). Diese sind wegen der vorangegangenen Überlegung linear unabhängig, und stellen alle die durch (2.3) gegebene Funktion dar.

Nun zeigen wir noch, daß die Menge L aller jener isotropen Vektoren $h^{\vec{\circ}}$, für die $f_{h^{\vec{\circ}}}$ die eindeutige Lösung $f(z)$ von (1.3) darstellt, zusammen mit dem Nullvektor einen Teilraum von H° bildet. Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen, denn dann gilt $\dim H^{\circ} = \text{def } \mathbf{IP} = \dim L$, also $L = H^{\circ}$.

Sei zuerst $h^{\circ} \in L$ und $\alpha \in \mathbf{C}, \alpha \neq 0$. Dann kann man in der Definition (2.9) der zugeordneten rationalen Funktion α kürzen und sieht $f_{\alpha h^{\circ}}(z) = f_{h^{\circ}}(z)$, also $\alpha h^{\circ} \in L$.

Seien nun $h_1^{\vec{\circ}}$ und $h_2^{\vec{\circ}}$ zwei linear unabhängige Vektoren aus L und $h^{\vec{\circ}} = h_1^{\vec{\circ}} + h_2^{\vec{\circ}}$. Wir betrachten

$$f_{h_1^{\vec{\circ}}}(z) = \frac{p_1(z)}{q_1(z)}, f_{h_2^{\vec{\circ}}}(z) = \frac{p_2(z)}{q_2(z)} \text{ und}$$

$$f_{h^{\vec{\circ}}} = \frac{p_1(z) + p_2(z)}{q_1(z) + q_2(z)}.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $h_1^{\vec{\circ}}$ und $h_2^{\vec{\circ}}$ ist das Polynom $q_1(z) + q_2(z)$ nicht das Nullpolynom. Wir können also eine reelle Zahl $r > 0$ finden, so daß der Kreis $|z| < r$ die Nullstellen von $q_1(z)$, $q_2(z)$ und $q_1(z) + q_2(z)$ enthält. Im folgenden sei z stets außerhalb dieses Kreises. Dann gilt

$$\frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \frac{p_2(z)}{q_2(z)} = f(z), \text{ also}$$

$$p_1(z) = q_1(z)f(z) \text{ und } p_2(z) = q_2(z)f(z).$$

Daraus erhält man

$$(p_1(z) + p_2(z)) = (q_1(z) + q_2(z))f(z).$$

Für Zahlen z außerhalb des Kreises $|z| < r$ gilt also $f_{h^{\vec{\circ}}}(z) = f(z)$. Da beide Funktionen rationale Funktionen sind, folgt daraus bereits $f_{h^{\vec{\circ}}}(z) = f(z)$ für

jedes $z \in \mathbf{C}$, also $\vec{h}^\circ \in L$. Damit ist L ein linearer Teilraum von \mathbf{H} .

□

2.2.3 Charakterisierung rationaler Funktionen mit reellen Koeffizienten

Wir stellen zunächst fest, daß Funktionen für die der zugehörige Skalarprodukttraum entartet, bereits durch ihre Funktionswerte an endlich vielen Stellen festgelegt sind.

Satz 2.6 *Sei $f : \rho(f) \rightarrow \mathbf{C}, \rho(f) \subseteq \mathbf{C}^+$ eine Funktion, für die der zugehörige Skalarprodukttraum \mathbf{H}_f entartet. Ist dann $h^\circ \neq 0$ ein isotroper Vektor des Raumes \mathbf{H}_f mit $\vec{h}^\circ = \sum_{i=1}^m h_i^\circ \vec{e}_{\zeta_i}$ für ein $m \in \mathbf{IN}$ und gewisse Werte $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in \rho(f)$, so ist die Funktion f durch ihre Funktionswerte $f(\zeta_1), \dots, f(\zeta_m)$ eindeutig festgelegt; sie wird durch die Formel*

$$f(z) = \frac{\sum_{i=1}^m \overline{h_i^\circ f(\zeta_i)} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (z - \overline{\zeta_j}) \right)}{\sum_{i=1}^m \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (z - \overline{\zeta_j})} \quad \text{für } z \in \rho(f) \quad (2.12)$$

gegeben.

Beweis : Sei $z \in \rho(f)$, dann gilt $[\vec{e}_z, \vec{h}^\circ] = 0$ da $\vec{h}^\circ \in \mathbf{H}_f^\circ$ ist. Man berechnet

$$\begin{aligned} 0 = [\vec{e}_z, \vec{h}^\circ] &= \sum_{i=1}^m \overline{h_i^\circ} [\vec{e}_z, \vec{e}_{\zeta_i}] = \sum_{i=1}^m \overline{h_i^\circ} \frac{f(z) - \overline{f(\zeta_i)}}{z - \overline{\zeta_i}} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^m \overline{h_i^\circ} (f(z) - \overline{f(\zeta_i)}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (z - \overline{\zeta_j})}{\prod_{j=1}^m (z - \overline{\zeta_j})}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\sum_{i=1}^m \overline{h_i^\circ} (f(z) - \overline{f(\zeta_i)}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (z - \overline{\zeta_j}) = 0$$

und damit

$$f(z) \left(\sum_{i=1}^m \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (z - \overline{\zeta_j}) \right) = \sum_{i=1}^m \overline{h_i^\circ f(\zeta_i)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (z - \overline{\zeta_j}).$$

Die Funktion f gestattet daher die Darstellung

$$f(z) = \frac{\sum_{i=1}^m \overline{h_i^\circ f(\zeta_i)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (z - \overline{\zeta_j})}{\sum_{i=1}^m \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (z - \overline{\zeta_j})}$$

und ist damit mit Hilfe der Funktionswerte $f(\zeta_i)$ für $i = 1, \dots, n$ als rationale Funktion festgelegt.

□

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß die eindeutige Lösung eines Interpolationsproblems vom Typ (1.3) eine rationale Funktion mit reellen Koeffizienten ist. Das nun folgende Lemma zeigt, daß für diese Funktionen der zugehörige Skalarproduktraum entartet.

Lemma 2.6 *Sei f die eindeutig bestimmte Lösung des Interpolationsproblems (1.3) in der Klasse N_{κ_1} , d.h. mit minimaler Anzahl von negativen Quadraten. Dann ist der Raum H_f entartet. Denkt man sich den Raum H kanonisch in den Raum H_f eingebettet, so gilt sogar $H^\circ \subseteq H_f^\circ$.*

Beweis : Sei $\vec{h}^\circ = \sum_{i=1}^n h_i^\circ \vec{e}_{z_i} \in H^\circ \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$f(z) = f_{\vec{h}^\circ}(z) = \frac{\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ w_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j})}{\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j})}.$$

Sei weiters $\vec{e}_z \in H_f$. Wir berechnen $[\vec{e}_z, \vec{h}^\circ]$:

$$[\vec{e}_z, \vec{h}^\circ] = [\vec{e}_z, \sum_{i=1}^n h_i^\circ \vec{e}_{z_i}] = \sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ} \frac{f(z) - \overline{w_i}}{z - \overline{z_i}} =$$

$$\begin{aligned}
&= f(z) \sum_{i=1}^n \frac{\overline{h_i^\circ}}{z - \overline{z_i}} - \sum_{i=1}^n \frac{\overline{h_i^\circ w_i}}{z - \overline{z_i}} = \underbrace{f(z)}_{=f_{h^\circ}(z)} \frac{\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j})}{\prod_{j=1}^n (z - \overline{z_j})} - \\
&\quad - \frac{\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ w_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j})}{\prod_{j=1}^n (z - \overline{z_j})} = \frac{1}{\prod_{j=1}^n (z - \overline{z_j})} \left[\frac{\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ w_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j})}{\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j})} \right. \\
&\quad \left. \cdot \sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ w_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_i}) - \sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ w_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j}) \right] = 0
\end{aligned}$$

Es gilt also $\vec{h}^\circ \in \mathbf{H}_f^\circ$.

□

Unsere bisherigen Ergebnisse können wir folgendermaßen zusammenfassen

Satz 2.7 Sei f eine in der komplexen Ebene meromorphe Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. f ist eine rationale Funktion mit reellen Koeffizienten.
2. Es gibt eine Zahl $n_0 \in \mathbf{IN}$, so daß für $m \geq n_0$ und je m verschiedene Punkte $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in \mathbf{C}^+$ die Pick-Matrix

$$\mathbf{IP}_m = \left(\frac{f(\zeta_j) - \overline{f(\zeta_i)}}{\zeta_j - \overline{\zeta_i}} \right)_{j,i=1}^m$$

singulär ist, und es gilt $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ für $z \in \rho(f)$.

3. f ist die Lösung eines gewissen Interpolationsproblems vom Typ (1.3) mit minimaler Anzahl negativer Quadrate.
4. Der zugehörige Skalarproduktraum \mathbf{H}_f ist entartet und es gilt $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ für $z \in \rho(f)$.

Beweis : Die Implikation „1 \implies 2“ ist die Aussage von Folgerung 2.1, „3 \implies 4“ haben wir in Lemma 2.6 bewiesen, während „4 \implies 1“ die Aussage von Satz 2.6 ist. Wir müssen also noch „2 \implies 3“ zeigen.

Seien ζ_1, \dots, ζ_m beliebige Punkte des Definitionsbereiches von f und $\omega_i = f(\zeta_i)$ für $i = 1, \dots, m$. Dann verschwindet in der Pick-Matrix \mathbf{IP} jeder Hauptminor $\mathbf{IP}_r = \left(\frac{\omega_i - \overline{\omega_j}}{\zeta_i - \zeta_j} \right)_{j,i=1}^m$ mit $r \geq n_0$ Zeilen. Die Matrix hat daher höchstens den Rang n_0^2 . Es können also sicher nicht mehr als n_0 negative Eigenwerte in einer Matrix \mathbf{IP}_m auftreten. Die Funktion f ist also in einer Klasse \mathbf{N}_κ mit $\kappa \leq n_0$. Wir wählen Punkte ζ_1, \dots, ζ_m , so daß die Pick-Matrix \mathbf{IP}_m wirklich κ negative Eigenwerte besitzt. Falls notwendig nehmen wir noch weitere Punkte $\zeta_{m+1}, \dots, \zeta_{n_0+1}$ dazu, so daß die Pick-Matrix \mathbf{IP}_{n_0+1} singular ist. Dann ist die Funktion f eine Lösung des Interpolationsproblems vom Typ (1.3) mit den Daten ζ_1, \dots, ζ_n und $w_1 = f(\zeta_1), \dots, w_n = f(\zeta_n)$ ($n \leq n_0 + 1$) und zwar die Lösung mit minimaler Anzahl negativer Quadrate. \square

2.3 Der Fall $\kappa_1 < \kappa < \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$

Wir betrachten das Interpolationsproblem (1.3). Dabei setzen wir wieder voraus, daß die Pick-Matrix $\mathbf{IP} = \left(\frac{w_i - \overline{w_j}}{z_i - z_j} \right)_{j,i=1}^n$ genau κ_1 negative Eigenwerte hat und singular ist. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß es keine Lösungen des Interpolationsproblems (1.3) in einer der Klassen \mathbf{N}_κ mit $\kappa_1 < \kappa < \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$ gibt.

Dazu formulieren wir zunächst einen allgemeineren Satz, der für eine Lösung f von (1.3) erlaubt, auf $f \in \mathbf{N}_{\kappa_1}$ zu schließen. Um diesen Satz zu formulieren, benötigen wir noch eine Bezeichnung, die den Begriff des zugeordneten Skalarproduktraumes verallgemeinert.

Definition 2.4 Sei $f : \rho(f) \rightarrow \mathbf{C}$ mit $\rho(f) \subseteq \mathbf{C}^+$ eine komplexwertige Funktion, D eine Teilmenge von $\rho(f)$. Dann bezeichne $\mathbf{H}_{f,D}$ den Teilraum

$$\mathbf{H}_{f,D} = \langle \{e_z^\rightarrow | z \in D\} \rangle$$

von \mathbf{H}_f .

Wir bemerken, daß aus $D_1 \subseteq D_2$ auch $\mathbf{H}_{f,D_1} \subseteq \mathbf{H}_{f,D_2}$ folgt.

Satz 2.8 Sei f eine in der oberen Halbebene meromorphe Funktion mit

$$f(z_i) = w_i \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

²vgl. Abschnitt 1.4.

Sei weiters D eine dichte Teilmenge von $\rho(f)$ mit $z_1, \dots, z_n \in D$, L ein Skalarproduktraum und

$$U : H_{f,D} \rightarrow L$$

eine Isometrie. Gilt in dieser Situation

$$U(H) \cap L^\circ \neq \{0\},$$

so ist f die eindeutig bestimmte Lösung des Interpolationsproblems (1.3) in der Klasse N_{κ_1} (also mit minimaler Anzahl negativer Quadrate).

Beweis : Sei $\vec{h}^\circ = \sum_{i=1}^n h_i^\circ \vec{e}_{z_i} \neq 0, \vec{h}^\circ \in H$ mit $U\vec{h}^\circ \in L^\circ$. Insbesondere ist dann $U\vec{h}^\circ \perp U(H)$, also auch $\vec{h}^\circ \perp H$, was $\vec{h}^\circ \in H^\circ$ bedeutet. Für jedes $z \in D$ gilt nun

$$[\vec{e}_z, \vec{h}^\circ] = [U\vec{e}_z, U\vec{h}^\circ] = 0.$$

Mit einer analogen Rechnung wie beim Beweis von Satz 2.6 bestätigt man für $z \in D$

$$f(z) = \frac{\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ} w_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j})}{\sum_{i=1}^n \overline{h_i^\circ} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - \overline{z_j})} = f_{\vec{h}^\circ}(z).$$

Aus Stetigkeitsgründen und mit Hilfe von Satz 2.5 ergibt sich f als eindeutige Lösung des Interpolationsproblems (1.3) in der Klasse N_{κ_1} .

□

Nun kommen wir wieder auf unsere ursprüngliche Frage nach Lösungen des Interpolationsproblems (1.3) in den Klassen N_κ mit $\kappa_1 < \kappa < \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$ zurück, und zeigen:

Lemma 2.7 Sei $f \in N_\kappa$ eine Lösung des Interpolationsproblem (1.3) mit $\kappa < \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$. Betrachtet man den zugehörigen Skalarproduktraum H_f , so ist $H_f^\circ \cap H \neq \{0\}$.

Beweis : Angenommen es wäre $H_f^\circ \cap H = \{0\}$. Dann ist H kanonisch in den (vervollständigten) Faktorraum $H_f' = H_f/H_f^\circ$ eingebettet. Sei L ein negativer Teilraum von H mit Dimension κ_1 . Als endlichdimensionaler definitiver Teilraum von H_f' hat L ein orthogonales Komplement, nämlich L^\perp . Offenbar ist $H^\circ \subseteq L^\perp$ ein neutraler Teilraum von L^\perp der Dimension $\text{def } \mathbf{IP}$. Da L^\perp ein Teilraum von H_f' mit genau $\kappa - \kappa_1$ negativen Quadraten

ist und \mathbb{H}_f' nicht entartet, ist die Dimension eines neutralen Teilraumes von L^\perp durch $\kappa - \kappa_1 < \text{def } \mathbf{IP}$ beschränkt, was einen Widerspruch bedeutet.

□

Mit Hilfe des obigen Lemmas und Satz 2.8 erhält man nun leicht den folgenden Satz.

Satz 2.9 *Sei $f \in N_\kappa$ eine Lösung des Interpolationsproblems (1.3) mit $\kappa < \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$. Dann gilt bereits $\kappa = \kappa_1$.*

Beweis : Nach Lemma 2.7 gilt $\mathbb{H}_f^\circ \cap \mathbb{H} \neq \{0\}$. Betrachte die identische Abbildung als Isometrie $U : \mathbb{H}_f \rightarrow \mathbb{H}_f$. Dann sind offensichtlich alle Voraussetzungen von Satz 2.8 erfüllt, also gilt $\kappa = \kappa_1$.

□

Kapitel 3

Lösung des Interpolationsproblems mit Hilfe operatortheoretischer Methoden - der Fall

$$\kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP} \leq \kappa$$

Nachdem wir im vorangegangenen Kapitel den Fall $\kappa < \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$ erledigt haben, wenden wir uns nun dem Fall $\kappa \geq \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$ zu. Wir werden im Raum H einen nicht dicht definierten symmetrischen Operator betrachten und Lösungen des Interpolationsproblems (1.3) in den Klassen N_κ durch selbstadjungierte Erweiterungen \tilde{S} des Operators S beschreiben. Die betrachteten Erweiterungen operieren in gewissen Pontrjaginräumen $\tilde{H} \supseteq H$.

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Durchführung dieses Programms und einer detaillierten Untersuchung der oben angesprochenen Beziehung zwischen Lösungen des Interpolationsproblems (1.3) und selbstadjungierten Erweiterungen von S beschäftigen.

3.1 Der symmetrische Operator S

Bevor wir den im Raum H symmetrischen Operator S definieren, wollen wir noch ein mal an unsere Vereinbarungen bezüglich der beim Interpolationsproblem (1.3) gegebenen Daten erinnern. Wir bezeichnen stets mit n die

Anzahl der gegebenen Punkte z_1, \dots, z_n bzw. w_1, \dots, w_n und mit κ_1 die Anzahl der negativen Eigenwerte der Pick-Matrix \mathbf{IP} . Weiters setzen wir stets voraus, daß \mathbf{IP} singulär ist, also $\text{def } \mathbf{IP} \geq 1$ gilt.

Definition 3.1 Bezeichne mit D die folgende Hyperebene von \mathbf{H} :

$$D = \left\{ \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_{z_i} \in \mathbf{H} \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}.$$

Auf D definieren wir den Operator S durch

$$S\vec{x} = \sum_{i=1}^n z_i x_i \vec{e}_{z_i} \text{ für } \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_{z_i} \in D.$$

Satz 3.1 Der Operator S ist symmetrisch und injektiv.

Beweis : Seien \vec{x} und \vec{y} in D . Dann gilt

$$\begin{aligned} [S\vec{x}, \vec{y}] &= \left[\sum_{i=1}^n z_i x_i \vec{e}_{z_i}, \sum_{j=1}^n y_j \vec{e}_{z_j} \right] = \\ &= \sum_{i,j=1}^n z_i x_i \overline{y_j} [e_{z_i}, e_{z_j}] = \\ &= \sum_{i,j=1}^n z_i x_i \overline{y_j} \frac{w_i - \overline{w_j}}{z_i - \overline{z_j}}. \end{aligned}$$

Analog berechnet man

$$[\vec{x}, S\vec{y}] = \sum_{i,j=1}^n \overline{z_j} x_i \overline{y_j} \frac{w_i - \overline{w_j}}{z_i - \overline{z_j}}.$$

Man erhält also für $\vec{x}, \vec{y} \in D = \mathcal{D}(S)$

$$\begin{aligned} [S\vec{x}, \vec{y}] - [\vec{x}, S\vec{y}] &= \sum_{i,j=1}^n (z_i x_i \overline{y_j} - \overline{z_j} x_i \overline{y_j}) \frac{w_i - \overline{w_j}}{z_i - \overline{z_j}} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i \overline{y_j} (w_i - \overline{w_j}) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \overline{y_j} \right)}_{=0} x_i w_i - \end{aligned}$$

$$-\sum_{j=1}^n \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{=0} \right) \overline{y_j w_j} = 0,$$

d.h. S ist symmetrisch.

Sei nun $S\vec{x} = 0$, d.h. $\sum_{i=1}^n z_i x_i e_{z_i}^{\vec{}} = 0$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $e_{z_i}^{\vec{}}$ ($i = 1, \dots, n$) folgt $z_i x_i = 0$ und aufgrund von $z_i \in \mathbf{C}^+$ auch $x_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$. Somit ist S injektiv. □

3.2 Konstruktion von Lösungen des Interpolationsproblems mit Hilfe selbstadjungierter Operatoren

Sei nun \tilde{H} ein Π_κ -Raum, in dem H isometrisch eingebettet ist. Das Skalarprodukt in \tilde{H} werde wieder mit $[\cdot, \cdot]$ bezeichnet. Wir ordnen zunächst einem selbstadjungierten Operator eine Funktion zu.

3.2.1 Die einem Operator zugeordnete Funktion

Wir beginnen mit einer grundlegenden Definition.

Definition 3.2 Sei \tilde{H} ein Π_κ -Raum mit $\tilde{H} \supseteq H$. Sei weiters \tilde{S} ein selbstadjungierter Operator in \tilde{H} mit $\tilde{S} \supseteq S$. Dann bezeichne mit $f_{\tilde{S}}$ die (zunächst) auf $\rho(\tilde{S})$ definierte Funktion¹

$$f_{\tilde{S}}(z) = \overline{w_1} + \frac{\Im w_1}{\Im z_1} (z - \overline{z_1}) + (z - z_1)(z - \overline{z_1}) \left[(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\vec{}}, e_{z_1}^{\vec{}} \right]. \quad (3.1)$$

Offenbar ist die Funktion $f_{\tilde{S}}$ auf der Resolventenmenge $\rho(\tilde{S})$ analytisch.

Satz 3.2 Für die Funktion $f_{\tilde{S}}(z)$ existiert der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f_{\tilde{S}}(z)}{\Im z}$ und ist gleich Null.

¹Bei dieser Definition ist der Punkt z_1 ausgezeichnet. Man beachte jedoch, daß die Numerierung der vorgegebenen Daten willkürlich ist.

Beweis : Wir bemerken, daß $f_{\tilde{\mathfrak{S}}}(z)$ die Darstellung

$$f_{\tilde{\mathfrak{S}}}(z) = \overline{w_I} + (z - \overline{z_I})[(\tilde{\mathfrak{S}} - z_1)(\tilde{\mathfrak{S}} - z)^{-1}e_{z_1}^{\vec{}} , e_{z_1}^{\vec{}}]$$

hat. Aus dieser Darstellung folgt mit Hilfe der Beziehung

$$\lim_{z \rightarrow i\infty} (\tilde{\mathfrak{S}} - z)^{-1} = -I$$

die Behauptung²

□

Der folgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen den Funktionen $f_{\tilde{\mathfrak{S}}}$ und dem Interpolationsproblem (1.3).

Satz 3.3 Sei $\tilde{\mathfrak{S}} \supseteq \mathfrak{S}$ eine Erweiterung des Operators \mathfrak{S} in einem Π_κ -Raum $\tilde{\mathfrak{H}} \supseteq \mathfrak{H}$. Ist $i \in \{1, \dots, n\}$ und $z_i \in \rho(\tilde{\mathfrak{S}})$, so gilt $f_{\tilde{\mathfrak{S}}}(z_i) = w_i$.

Beweis : Wir betrachten zuerst den Fall $i = 1$:

$$f_{\tilde{\mathfrak{S}}}(z_1) = \overline{w_I} + \frac{\Im w_1}{\Im z_1}(z_1 - \overline{z_I}) = \overline{w_I} + 2i\Im w_1 = w_1.$$

Sei nun $i \neq 1$, dann ist $e_{z_i}^{\vec{}} - e_{z_1}^{\vec{}} \in D$ und es gilt

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathfrak{S}} - z_i)(e_{z_i}^{\vec{}} - e_{z_1}^{\vec{}}) &= \tilde{\mathfrak{S}}(e_{z_i}^{\vec{}} - e_{z_1}^{\vec{}}) - z_i(e_{z_i}^{\vec{}} - e_{z_1}^{\vec{}}) = \\ &= \mathfrak{S}(e_{z_i}^{\vec{}} - e_{z_1}^{\vec{}}) - z_i(e_{z_i}^{\vec{}} - e_{z_1}^{\vec{}}) = (z_i - z_1)e_{z_1}^{\vec{}} \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung z_i in $\rho(\tilde{\mathfrak{S}})$ liegt, ist

$$e_{z_i}^{\vec{}} - e_{z_1}^{\vec{}} = (z_i - z_1)(\tilde{\mathfrak{S}} - z_i)^{-1}e_{z_1}^{\vec{}}, \text{ also}$$

$$[e_{z_i}^{\vec{}} - e_{z_1}^{\vec{}}, e_{z_1}^{\vec{}}] = (z_i - z_1) [(\tilde{\mathfrak{S}} - z_i)^{-1}e_{z_1}^{\vec{}}, e_{z_1}^{\vec{}}] \text{ und}$$

$$\begin{aligned} f_{\tilde{\mathfrak{S}}}(z_i) &= \overline{w_I} + \frac{\Im w_1}{\Im z_1}(z_i - \overline{z_I}) + (z_i - \overline{z_I})[e_{z_i}^{\vec{}} - e_{z_1}^{\vec{}}, e_{z_1}^{\vec{}}] = \\ &= \overline{w_I} + \frac{\Im w_1}{\Im z_1}(z_i - \overline{z_I}) + (z_i - \overline{z_I}) \left(\frac{w_i - \overline{w_I}}{z_i - \overline{z_I}} - \frac{\Im w_1}{\Im z_1} \right) = w_i. \end{aligned}$$

□

²Bezüglich einer exakten Durchführung des Beweises siehe [26] §3.

Bemerkung 3.1 Wir sehen, daß die Funktion $f_{\tilde{S}}$ im Punkt z_i genau dann den Wert w_i annimmt, wenn im Falle $i = 1$ der Ausdruck $[(\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}, e_{z_1}]$ lokal um z_1 beschränkt bleibt oder im Falle $i \neq 1$ den Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_i} [(\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}, e_{z_1}] = \left[\frac{e_{z_i} - e_{z_1}}{z_i - z_1}, e_{z_1} \right]$$

besitzt.

Bemerkung 3.2 Die Behauptung von Satz 3.3 bleibt richtig, wenn \tilde{S} kein Operator, sondern nur eine lineare Relation mit $\rho(\tilde{S}) \neq \emptyset$ ist. Denn für $z \in \rho(\tilde{S})$ ist $(\tilde{S} - z)^{-1}$ ein Operator, und wir erhalten aus der Beziehung

$$(e_{z_i} - e_{z_1}, (z_i - z_1)e_{z_1}) \in (S - z_i) \subseteq (\tilde{S} - z_i)$$

ebenfalls die Gleichung

$$e_{z_i} - e_{z_1} = (z_i - z_1)(\tilde{S} - z_i)^{-1}e_{z_1}.$$

Im folgenden benötigen wir auch eine andere Darstellung der Funktion $f_{\tilde{S}}$.

Lemma 3.1 Für $z \in \rho(\tilde{S})$ gilt

$$f_{\tilde{S}}(z) = \Re w_1 + (z - \Re z_1) \frac{\Im w_1}{\Im z_1} + (z - z_1)(z - \bar{z}_1) [(\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}, e_{z_1}] \quad (3.2)$$

Beweis : Es gilt

$$\begin{aligned} \Re w_1 + (z - \Re z_1) \frac{\Im w_1}{\Im z_1} &= \bar{w}_1 + i \Im w_1 + (z - \Re z_1) \frac{\Im w_1}{\Im z_1} = \\ &= \bar{w}_1 + \frac{\Im w_1}{\Im z_1} (z - \Re z_1 + i \Im z_1) = \bar{w}_1 + \frac{\Im w_1}{\Im z_1} (z - \bar{w}_1). \end{aligned}$$

□

Lemma 3.2 Für $z \in \rho(\tilde{S})$ und damit auch $\bar{z} \in \rho(\tilde{S})$ gilt stets

$$\overline{f_{\tilde{S}}(z)} = f_{\tilde{S}}(\bar{z}).$$

Beweis : Wir benützen die Darstellung (3.2) von $f_{\tilde{S}}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \overline{f_{\tilde{S}}(z)} &= \Re w_1 + (\bar{z} - \Re z_1) \frac{\Im w_1}{\Im z_1} + \overline{(z - z_1)(z - \bar{z}_1)} \left[(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow} \right] = \\ &= \Re w_1 + (\bar{z} - \Re z_1) \frac{\Im w_1}{\Im z_1} + (\bar{z} - \bar{z}_1)(\bar{z} - z_1) \left[e_{z_1}^{\rightarrow}, (\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow} \right] = \\ &= \Re w_1 + (\bar{z} - \Re z_1) \frac{\Im w_1}{\Im z_1} + (\bar{z} - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1) \left[(\tilde{S} - \bar{z})^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow} \right] = f_{\tilde{S}}(\bar{z}) \end{aligned}$$

da $((\tilde{S} - z)^{-1})^+ = (\tilde{S} - \bar{z})^{-1}$ gilt.

□

Definition 3.3 Sei $\zeta \in \mathbf{C}^+$ und $z \in \rho(\tilde{S})$. Dann bezeichnen wir im folgenden mit $\tilde{U}_{\zeta z}$ den Operator

$$\tilde{U}_{\zeta z} = I + (z - \zeta)(\tilde{S} - z)^{-1}.$$

Wir bemerken, daß $\tilde{U}_{\zeta z} = (\tilde{S} - \zeta)(\tilde{S} - z)^{-1}$ gilt. Insbesondere ist $\mathcal{R}(\tilde{U}_{\zeta z}) = \mathcal{R}(\tilde{S} - \zeta)$ und $\tilde{U}_{\zeta z}$ genau dann stetig invertierbar, wenn ζ in der Resolventenmenge von \tilde{S} liegt.

Lemma 3.3 Für den Kern $N_{f_{\tilde{S}}}$ von $f_{\tilde{S}}$ gilt die Formel

$$N_{f_{\tilde{S}}}(z, z') \equiv \frac{f_{\tilde{S}}(z) - \overline{f_{\tilde{S}}(z')}}{z - \bar{z}'} = \left[\tilde{U}_{z_1 z} e_{z_1}^{\rightarrow}, \tilde{U}_{z_1 z'} e_{z_1}^{\rightarrow} \right]$$

wobei $z, z' \in \rho(\tilde{S}) \cap \mathbf{C}^+$ sind.

Beweis : Wir berechnen den Kern $N_{f_{\tilde{S}}}$:

$$\begin{aligned} N_{f_{\tilde{S}}}(z, z') &= \frac{f_{\tilde{S}}(z) - \overline{f_{\tilde{S}}(z')}}{z - \bar{z}'} = \frac{f_{\tilde{S}}(z) - f_{\tilde{S}}(\bar{z}')}{z - \bar{z}'} = \\ &= \frac{1}{z - \bar{z}'} \left\{ \left(\bar{w}_1 + (z - \bar{z}_1) \frac{\Im w_1}{\Im z_1} + (z - z_1)(z - \bar{z}_1) \left[(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow} \right] \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\bar{w}_1 + (\bar{z}' - \bar{z}_1) \frac{\Im w_1}{\Im z_1} + (\bar{z}' - z_1)(\bar{z}' - \bar{z}_1) \left[(\tilde{S} - \bar{z}')^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow} \right] \right) \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Im w_1}{\Im z_1} + \frac{1}{z - z'} \left((z - z_1)(z - \bar{z}_1) \left[(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow} \right] - (\bar{z}' - z_1)(\bar{z}' - \bar{z}_1) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \left[(\tilde{S} - \bar{z}')^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow} \right] \right) = \frac{\Im w_1}{\Im z_1} + \frac{(z - z_1)(z - \bar{z}_1) - (\bar{z}' - z_1)(\bar{z}' - \bar{z}_1)}{z - z'}. \\
&\cdot \left[(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow} \right] + (\bar{z}' - z_1)(\bar{z}' - \bar{z}_1) \frac{\left[\left((\tilde{S} - z)^{-1} - (\tilde{S} - \bar{z}')^{-1} \right) e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow} \right]}{z - \bar{z}'} = \\
&= \frac{\Im w_1}{\Im z_1} + (z + \bar{z}' - 2\Re z_1) \left[(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow} \right] + (\bar{z}' - z_1)(\bar{z}' - \bar{z}_1) \cdot \\
&\cdot \left[(\tilde{S} - z)^{-1} (\tilde{S} - \bar{z}')^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow} \right] = \left[e_{z_1}^{\rightarrow} + (z + \bar{z}' - 2\Re z_1)(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow} + \right. \\
&\quad \left. + (\bar{z}' - z_1)(\bar{z}' - \bar{z}_1)(\tilde{S} - z)^{-1} (\tilde{S} - \bar{z}')^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow} \right].
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\left[\tilde{U}_{z_1 z} e_{z_1}^{\rightarrow}, \tilde{U}_{z_1 z'} e_{z_1}^{\rightarrow} \right] = \left[U_{\frac{\bar{z}_1}{z_1 z'}} \tilde{U}_{z_1 z} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow} \right]$$

und man erhält

$$\begin{aligned}
&\tilde{U}_{\frac{\bar{z}_1}{z_1 z'}} \tilde{U}_{z_1 z} = \left(I + (z - z_1)(\tilde{S} - z)^{-1} \right) \left(I + (\bar{z}' - \bar{z}_1)(\tilde{S} - \bar{z}')^{-1} \right) = \\
&= I + (z - z_1)(\tilde{S} - z)^{-1} + (\bar{z}' - \bar{z}_1)(\tilde{S} - \bar{z}')^{-1} + (z - z_1)(\bar{z}' - \bar{z}_1)(\tilde{S} - z)^{-1} (\tilde{S} - \bar{z}')^{-1} = \\
&= I + (z + \bar{z}' - 2\Re z_1)(\tilde{S} - z)^{-1} + (2\Re z_1 - \bar{z}' - z_1)(\tilde{S} - z)^{-1} + \\
&\quad + (\bar{z}' - \bar{z}_1)(\tilde{S} - \bar{z}')^{-1} + (z - z_1)(\bar{z}' - \bar{z}_1)(\tilde{S} - z)^{-1} (\tilde{S} - \bar{z}')^{-1} = \\
&= I + (z + \bar{z}' - 2\Re z_1)(\tilde{S} - z)^{-1} - (\bar{z}' - \bar{z}_1) \left((\tilde{S} - z)^{-1} - (\tilde{S} - \bar{z}')^{-1} \right) + \\
&\quad + (z - z_1)(\bar{z}' - \bar{z}_1)(\tilde{S} - z)^{-1} (\tilde{S} - \bar{z}')^{-1} = I + (z + \bar{z}' - 2\Re z_1) \cdot \\
&\cdot (\tilde{S} - z)^{-1} - \left((\bar{z}' - \bar{z}_1)(z - \bar{z}') - (z - z_1)(\bar{z}' - \bar{z}_1) \right) (\tilde{S} - z)^{-1} (\tilde{S} - \bar{z}')^{-1} = \\
&= I + (z + \bar{z}' - 2\Re z_1)(\tilde{S} - z)^{-1} + (\bar{z}' - \bar{z}_1)(\bar{z}' - z_1)(\tilde{S} - z)^{-1} (\tilde{S} - \bar{z}')^{-1}
\end{aligned}$$

Damit ist die Beziehung

$$N_{f_{\tilde{S}}}(z, z') = \left[U_{\frac{\bar{z}_1}{z_1 z'}} \tilde{U}_{z_1 z} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow} \right]$$

bewiesen. □

Mit Hilfe von Lemma 3.3 ergibt sich

Satz 3.4 Sei \tilde{H} ein Π_κ -Raum mit $\tilde{H} \supseteq H$. Sei weiters \tilde{S} ein selbstadjungierter Operator in \tilde{H} . Dann hat der Nevanlinna-Kern $N_{f_{\tilde{S}}}$ der Funktion $f_{\tilde{S}} : \rho(\tilde{S}) \cap \mathbf{C}^+ \rightarrow \mathbf{C}$ höchstens κ negative Quadrate, d.h.

$$f_{\tilde{S}} \in \bigcup_{\kappa'=0}^{\kappa} N_{\kappa'}.$$

Beweis : Wir haben zu zeigen, daß für je endlich viele Punkte $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in \rho(\tilde{S}) \cap \mathbf{C}^+$ die hermitesche Matrix $(N_{f_{\tilde{S}}}(\zeta_i, \zeta_j))_{i,j=1}^m$ höchstens κ negative Eigenwerte hat, daß also der Skalarproduktraum

$$L = \langle \mathbf{C}^m, [\cdot, \cdot]_1 \rangle \text{ mit } [\vec{e}_i, \vec{e}_j]_1 = N_{f_{\tilde{S}}}(\zeta_i, \zeta_j)$$

keinen negativen Teilraum einer Dimension $\kappa' > \kappa$ haben kann. Dazu betrachten wir den linearen Operator $U : L \rightarrow \tilde{H}$, der durch

$$\vec{e}_i \mapsto \tilde{U}_{z_1 \zeta_i} \vec{e}_{z_1}$$

gegeben ist. Dieser Operator erfüllt nach Lemma 3.3 die Bedingung

$$[U\vec{x}, U\vec{y}] = [\vec{x}, \vec{y}]_1 \text{ für } \vec{x}, \vec{y} \in L$$

Damit ist die Dimension κ' eines negativen Teilraumes M von L durch κ beschränkt, denn $M \cap \ker U = \{0\}$, also wird M injektiv abgebildet. □

Bemerkung 3.3 Analog zur Bemerkung 3.2 im Anschluß an Satz 3.3 bleibt auch die Aussage dieses Satzes richtig, wenn \tilde{S} eine selbstadjungierte Relation ist. Denn bei der Definition von $f_{\tilde{S}}$ geht nur die Resolvente $(\tilde{S} - z)^{-1}$ ein, welche für $z \in \rho(\tilde{S})$ ein Operator ist.

Gemeinsam mit Satz 2.4 ergibt sich aus Satz 3.4 die Folgerung

Folgerung 3.1 Sei $\rho(f_{\tilde{S}})$ das Holomorphiegebiet der Funktion $f_{\tilde{S}}$ in \mathbf{C}^+ . Dann gehört die Funktion

$$f_{\tilde{S}} : \rho(f_{\tilde{S}}) \rightarrow \mathbf{C}$$

zu der Vereinigung $\bigcup_{\kappa'=0}^{\kappa} N_{\kappa'}$.

3.2.2 Einfache Operatoren

Wir haben gesehen, daß man im allgemeinen von einer Funktion $f_{\tilde{S}}$ nicht erwarten kann, daß sie wirklich für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Bedingung $f(z_i) = w_i$ erfüllt, denn wir können uns Operatoren denken, die an den Stellen z_i Spektrum besitzen. In diesem Fall können wir bis jetzt nichts über den Funktionswert von $f_{\tilde{S}}$ an einer solchen Stelle aussagen.

Im folgenden betrachten wir sogenannte einfache Operatoren. Für solche Operatoren kann man zeigen, daß die Funktion $f_{\tilde{S}}$ tatsächlich die gegebenen Daten interpoliert.

Um dies einzusehen, wollen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren einer selbstadjungierten Erweiterung \tilde{S} von S in einem Π_κ -Raum $\tilde{H} \supseteq H$ näher untersuchen. Wir werden sehen, daß bei einfachen Operatoren das Spektrum nicht beliebig liegen kann.

Dazu stellen wir zunächst einige Eigenschaften von Eigenvektoren einer selbstadjungierten Erweiterung \tilde{S} von S zusammen.

Lemma 3.4 *Sei $\vec{x} \in H$ ein Eigenvektor von \tilde{S} in H . Dann ist $\vec{x} \notin \mathcal{D}(S)$, $H \subseteq \mathcal{D}(\tilde{S})$ und es gilt $\tilde{S}(H) \subseteq H$.*

Beweis : Sei $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_{z_i} \neq 0$ mit $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, also $\vec{x} \in \mathcal{D}(S)$. Weiters sei $(\tilde{S} - \lambda)\vec{x} = 0$, also \vec{x} ein Eigenvektor von \tilde{S} zum Eigenwert λ . Dann müßten, da $\vec{x} \neq 0$ ist, mindestens zwei der Koeffizienten x_i verschieden von Null sein. Nun gilt jedoch

$$(\tilde{S} - \lambda)\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i (z_i - \lambda) \vec{e}_{z_i} = 0,$$

also $x_i(z_i - \lambda) = 0$ für $i = 1, \dots, n$. Das ist ein Widerspruch, da die Punkte z_1, \dots, z_n paarweise verschieden sind.

Es ist also $\vec{x} \notin \mathcal{D}(S)$ und damit $H = \mathcal{D}(S) + \langle \vec{x} \rangle \subseteq \mathcal{D}(\tilde{S})$. Für jedes Element \vec{y} in H gilt daher $\vec{y} = \vec{y}_1 + \mu_{\vec{y}} \vec{x}$ mit $\vec{y}_1 \in \mathcal{D}(S)$. Also ist

$$\tilde{S}\vec{y} = \tilde{S}\vec{y}_1 + \mu_{\vec{y}} \tilde{S}\vec{x} = S\vec{y}_1 + \mu_{\vec{y}} \lambda \vec{x},$$

d.h. $\tilde{S}\vec{y} \in H$.

□

Nun wollen wir den Begriff des einfachen Operators definieren.

Definition 3.4 Sei T ein Operator eines Π_κ -Raumes und \vec{x} ein Element dieses Raumes. Dann heißt \vec{x} für den Operator T erzeugend, falls die abgeschlossene lineare Hülle der Vektoren

$$(T - w)^{-1}\vec{x} \text{ für } w \in \rho(T) \cap \mathbf{C}^+$$

bereits den ganzen Raum ergibt. Ein Operator, der ein erzeugendes Element besitzt, heißt einfach.

Wir untersuchen im folgenden Eigenvektoren eines einfachen Operators.

Satz 3.5 Sei $\tilde{H} \supseteq H, \tilde{S} \supseteq S$ und sei $\vec{x}_0 \in H$ ein erzeugendes Element für \tilde{S} . Dann hat \tilde{S} keinen Eigenvektor in H .

Beweis : Angenommen \tilde{S} hätte einen Eigenvektor in H . Dann wäre nach dem vorangegangenen Lemma $H \subseteq \mathcal{D}(\tilde{S})$ und $\tilde{S}(H) \subseteq H$. Für beliebiges $w \in \rho(\tilde{S})$ gilt daher auch $(\tilde{S} - w)(H) \subseteq H$. Da H endlichdimensional und $(\tilde{S} - w)$ injektiv ist, muß $(\tilde{S} - w)$ sogar bijektiv auf H operieren. Damit gilt für beliebiges $w \in \rho(\tilde{S})$ auch die Beziehung $(\tilde{S} - w)^{-1}(H) = H$. Da H (wieder wegen der Endlichdimensionalität) abgeschlossen ist, gilt

$$\tilde{H} = \bigvee_{w \in \rho(\tilde{S})} (\tilde{S} - w)^{-1}\vec{x}_0 \subseteq H \subseteq \tilde{H},$$

also $\tilde{H} = H$. Das ist aber ein Widerspruch, da H entartet ist. □

Im folgenden Lemma untersuchen wir das Skalarprodukt eines Eigenvektors eines Operators $\tilde{S} \supseteq S$ mit einem Element des Raumes H . Von besonderem Interesse sind dabei die Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda = z_i$ oder \bar{z}_i , wobei z_i einer der vorgegebenen Datenpunkte ist.

Lemma 3.5 Sei \tilde{S} eine selbstadjungierte Erweiterung des Operators S , und \vec{x} ein Eigenvektor von \tilde{S} zum Eigenwert $\lambda \neq 0$. Dann gilt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $\bar{z}_i \neq \lambda$ und $j = 1, \dots, n$ die Beziehung

$$[e_{z_i}^{\vec{}} , \vec{x}] = \frac{\bar{\lambda} - z_j}{\lambda - z_i} [e_{z_i}^{\vec{}} , x]. \quad (3.3)$$

Ist insbesondere $\lambda = \bar{z}_j$ mit $j \neq i$, so gilt

$$[e_{z_i}^{\vec{}} , \vec{x}] = 0. \quad (3.4)$$

Beweis : Betrachte ein Element $\vec{y} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_j (e_{z_j} - e_{z_i}) \in \mathcal{D}(S)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} [\vec{y}, \vec{x}] &= \frac{1}{\lambda} [\vec{y}, \tilde{S}\vec{x}] = \frac{1}{\lambda} [\tilde{S}\vec{y}, \vec{x}] = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\tilde{S} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_j (e_{z_j} - e_{z_i}) \right), \vec{x} \right] = \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_j [z_j e_{z_j} - z_i e_{z_i}, \vec{x}] = \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_j \left(\frac{z_j}{\lambda} [e_{z_j}, \vec{x}] - \frac{z_i}{\lambda} [e_{z_i}, \vec{x}] \right). \end{aligned}$$

Andererseits ist aber

$$[\vec{y}, \vec{x}] = \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_j (e_{z_j} - e_{z_i}), \vec{x} \right] = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_j ([e_{z_j}, \vec{x}] - [e_{z_i}, \vec{x}]),$$

und man erhält insgesamt

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_j \left(\left(1 - \frac{z_j}{\lambda}\right) [e_{z_j}, \vec{x}] - \left(1 - \frac{z_i}{\lambda}\right) [e_{z_i}, \vec{x}] \right) = 0. \quad (3.5)$$

Da diese Beziehung für jede Wahl der Zahlen y_j besteht, muß

$$\left(1 - \frac{z_j}{\lambda}\right) [e_{z_j}, \vec{x}] - \left(1 - \frac{z_i}{\lambda}\right) [e_{z_i}, \vec{x}] = 0 \text{ für } j \neq i$$

gelten. Man erhält also die Beziehung

$$[e_{z_i}, \vec{x}] = \frac{\bar{\lambda} - z_j}{\bar{\lambda} - z_i} [e_{z_j}, \vec{x}] \text{ für } j \neq i.$$

Für $j = i$ ist die Gleichung (3.3) trivialerweise erfüllt. Insbesondere sieht man aus (3.5) für $\lambda = \bar{z}_j$, daß $[e_{z_i}, \vec{x}] = 0$ für $i \neq j$ erfüllt ist.

□

Satz 3.6 Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ und sei e_{z_i} ein erzeugendes Element für den Operator $\tilde{S} \supseteq S$. Dann sind die Werte z_j mit $j \neq i$ keine Eigenwerte von \tilde{S} . Da die Punkte z_j nicht reell sind, gilt damit sogar $z_j \in \rho(\tilde{S})$ für $j \neq i$.

Beweis : Wir zeigen, daß es unter unseren Voraussetzungen keinen Eigenvektor zum Wert $\lambda = \bar{z}_j$ für $j \neq i$ geben kann. Da das Spektrum eines selbstadjungierten Operators symmetrisch zur reellen Achse liegt, ist damit die Behauptung des Satzes bewiesen.

Sei \vec{x} ein Eigenvektor zum Eigenwert $\bar{z}_j \neq \bar{z}_i$. Dann ist auch der Vektor $(\tilde{S} - \bar{w})^{-1}\vec{x}$ für $w \in \rho(\tilde{S})$ ein Eigenvektor zum Eigenwert \bar{z}_j . Damit gilt aber für $w \in \rho(\tilde{S})$

$$[\vec{x}, (\tilde{S} - w)^{-1}e_{z_i}^{\vec{}}] = [(\tilde{S} - \bar{w})^{-1}\vec{x}, e_{z_i}^{\vec{}}] = 0,$$

also $\vec{x} \perp L = \langle \{(\tilde{S} - w)^{-1}e_{z_i}^{\vec{}} | w \in \rho(\tilde{S})\} \rangle$. Da L dicht in \tilde{H} liegt, muß $\vec{x} = 0$ sein. □

Eine Folgerung aus diesem Satz und Satz 3.3 ist

Folgerung 3.2 *Sei \tilde{S} eine Erweiterung von S mit dem erzeugenden Element $e_{z_i}^{\vec{}}$. Dann gilt für $j \neq i$ stets $f_{\tilde{S}}(z_j) = w_j$.*

Die Frage wann für einen Operator \tilde{S} mit erzeugendem Element $e_{z_i}^{\vec{}}$ die Funktion $f_{\tilde{S}}$ auch $f_{\tilde{S}}(z_i) = w_i$ erfüllt, wollen wir an dieser Stelle nicht diskutieren. Für stetige Operatoren werden wir in den folgenden beiden Abschnitten Bedingungen dafür erhalten. Diese treten auch in einem allgemeineren Kontext auf.

3.2.3 Einbettung des der Funktion $f_{\tilde{S}}$ zugeordneten Raumes

Wir betrachten eine selbstadjungierte Erweiterung \tilde{S} von S in einem Π_κ -Raum $\tilde{H} \supseteq H$. Für die Funktion $f_{\tilde{S}}$ konstruieren wir den zugeordneten Skalarproduktraum $H_{f_{\tilde{S}}}$, und fragen, ob man diesen im Raum \tilde{H} wiederfindet. Diese Frage ist für Operatoren \tilde{S} mit erzeugendem Element $e_{z_1}^{\vec{}}$ ³ positiv zu beantworten.

Im folgenden bezeichnen wir für $z \in \rho(\tilde{S})$ mit $\vec{x}(z)$ die Vektoren

$$\vec{x}(z) := \tilde{U}_{z_1 z} e_{z_1}^{\vec{}} = e_{z_1}^{\vec{}} + (z - z_1)(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\vec{}}.$$

Eine Erweiterung von Lemma 3.3 ist

³Hier geht die Auszeichnung des Punktes z_1 in der Definition der Funktion $f_{\tilde{S}}$ ein.

Lemma 3.6 Für Vektoren $\vec{x}(z), \vec{x}(z')$ mit $z, z' \in \rho(\tilde{S}), z \neq \bar{z}'$ gilt

$$[\vec{x}(z), \vec{x}(z')] = \frac{f_{\tilde{S}}(z) - \overline{f_{\tilde{S}}(z')}}{z - \bar{z}'}, \quad (3.6)$$

$$[\vec{x}(z), \vec{x}(\bar{z})] = f_{\tilde{S}}'(z), \quad (3.7)$$

$$[\vec{x}(z), e_{z_1}^{\vec{}}] = \frac{f_{\tilde{S}}(z) - \bar{w}_1}{z - \bar{z}_1}. \quad (3.8)$$

Beweis : Die erste Gleichung beweist man ebenso, wie Lemma 3.3 . Zur Gleichung (3.7) braucht man nur

$$[\vec{x}(z), \vec{x}(\bar{z})] = \lim_{z' \rightarrow \bar{z}} [\vec{x}(z), \vec{x}(z')]$$

zu bemerken. Diese Beziehung gilt, da in der Resolventenmenge $\rho(\tilde{S})$ die Vektoren $\vec{x}(z)$ stetig von z abhängt. Gleichung (3.8) ergibt sich aus der Definition (3.1) von $f_{\tilde{S}}$, da

$$[\vec{x}(z), e_{z_1}^{\vec{}}] = [e_{z_1}^{\vec{}}, e_{z_1}^{\vec{}}] + (z - z_1)[(\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}^{\vec{}}, e_{z_1}^{\vec{}}]$$

gilt.

□

Für den Rest dieses Abschnittes bezeichnen wir mit $\hat{\rho}(f_{\tilde{S}})$ das Holomorphiegebiet der Funktion $f_{\tilde{S}}$ in \mathbf{C} , während $\rho(f_{\tilde{S}})$ wie üblich das Holomorphiegebiet von $f_{\tilde{S}}$ in \mathbf{C}^+ bezeichnet.

Lemma 3.7 Sei $z_0 \in \hat{\rho}(f_{\tilde{S}}), z_0 \neq \bar{z}_1$ und $(\zeta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\zeta_n \in \rho(\tilde{S})$ und $\zeta_n \rightarrow z_0$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt für die Folge $(\vec{x}(\zeta_n))_{n \in \mathbf{N}}$:

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} [\vec{x}(\zeta_n) - \vec{x}(\zeta_m), (\tilde{S} - w)^{-1}e_{z_1}^{\vec{}}] = 0 \text{ für } w \in \rho(\tilde{S}).$$

Damit strebt der Ausdruck $[\vec{x}(\zeta_n) - \vec{x}(\zeta_m), y]$ für $y \in L_{z_1} = \langle \{(\tilde{S} - w)^{-1}e_{z_1}^{\vec{}} | w \in \rho(\tilde{S})\} \rangle$ mit m und n gegen Null.

Beweis : Wir betrachten zuerst den Fall $w \neq z_1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & [\vec{x}(\zeta_n) - \vec{x}(\zeta_m), (\tilde{S} - w)^{-1}e_{z_1}^{\vec{}}] = \\ & = \frac{1}{\bar{w} - \bar{z}_1} ([\vec{x}(\zeta_n) - \vec{x}(\zeta_m), \vec{x}(w)] - [\vec{x}(\zeta_n) - \vec{x}(\zeta_m), e_{z_1}^{\vec{}}]) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\bar{w} - \bar{z}_1} \left(([\vec{x}(\zeta_n), \vec{x}(w)] - [\vec{x}(\zeta_m), \vec{x}(w)]) - ([\vec{x}(\zeta_n), e_{z_1}^-] - [\vec{x}(\zeta_m), e_{z_1}^-]) \right) = \\
&= \left[\left(\frac{f_{\tilde{S}}(\zeta_n) - \overline{f_{\tilde{S}}(w)}}{\zeta_n - \bar{w}} - \frac{f_{\tilde{S}}(\zeta_m) - \overline{f_{\tilde{S}}(w)}}{\zeta_m - \bar{w}} \right) - \left(\frac{f_{\tilde{S}}(\zeta_n) - \bar{w}_1}{\zeta_n - \bar{z}_1} - \frac{f_{\tilde{S}}(\zeta_m) - \bar{w}_1}{\zeta_m - \bar{z}_1} \right) \right] \cdot \\
&\quad \cdot \frac{1}{\bar{w} - \bar{z}_1}.
\end{aligned}$$

Wegen der Analytizität von $f_{\tilde{S}}$ im Punkt z_0 konvergieren die beiden Ausdrücke in den Klammern für $n, m \rightarrow \infty$ gegen Null.

Es bleibt noch der Fall $w = z_1$ zu betrachten. In diesem Fall ist also $z_1 \in \rho(\tilde{S})$ und damit die Funktion $(\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}^-$ im Punkte z_1 stetig. Weiters gilt $f_{\tilde{S}}(z_1) = w_1$. Es ist also

$$\begin{aligned}
&[\vec{x}(z_n), (\tilde{S} - z_1)^{-1}e_{z_1}^-] = \lim_{z \rightarrow z_1} [\vec{x}(z_n), (\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}^-] = \\
&= \lim_{z \rightarrow z_1} \left[\vec{x}(z_n), \frac{\vec{x}(z) - e_{z_1}^-}{z - z_1} \right] = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_1} \left(\frac{f_{\tilde{S}}(\zeta_n) - \overline{f_{\tilde{S}}(z)}}{\zeta_n - \bar{z}} - \frac{f_{\tilde{S}}(\zeta_n) - \bar{w}_1}{\zeta_n - \bar{z}_1} \right) = \\
&= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_1} \frac{(\bar{z} - \bar{z}_1)(f_{\tilde{S}}(\zeta_n) - \bar{w}_1) - (\zeta_n - \bar{z}_1)(\overline{f_{\tilde{S}}(z)} - \bar{w}_1)}{(\zeta_n - \bar{z})(\zeta_n - \bar{z}_1)} = \\
&= \frac{f_{\tilde{S}}(\zeta_n) - \bar{w}_1}{(\zeta_n - \bar{z}_1)^2} - \frac{\overline{f'(z_1)}}{\zeta_n - \bar{z}_1}
\end{aligned}$$

und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\vec{x}(z_n), (\tilde{S} - z_1)^{-1}e_{z_1}^-] = \frac{f_{\tilde{S}}(z_0) - \bar{w}_1}{(z_0 - \bar{z}_1)^2} - \frac{\overline{f'(z_1)}}{z_0 - \bar{z}_1}$$

Insbesondere ist die Folge $([\vec{x}(z_n), (\tilde{S} - z_1)^{-1}e_{z_1}^-])_{n \in \mathbf{N}}$ eine Cauchy-Folge, besitzt also die behauptete Eigenschaft. \square

Lemma 3.8 Sei $z_0 \in \hat{\rho}(f_{\tilde{S}})$, $z_0 \neq \bar{z}_1$ und $(\zeta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\zeta_n \in \rho(\tilde{S})$ und $\zeta_n \rightarrow z_0$ für $n \rightarrow \infty$. Ist das Element $e_{z_1}^-$ für den Operator \tilde{S} erzeugend, so sind die Werte $\|\vec{x}(\zeta_n)\|$ beschränkt.

Beweis : Da der lineare Teilraum $L_{z_1} = \langle \{(\tilde{S} - w)^{-1}e_{z_1}^{\vec{}} | w \in \rho(\tilde{S})\} \rangle$ dicht in \tilde{H} ist, gibt es einen κ -dimensionalen negativen Teilraum $\tilde{H}^- \subseteq L_{z_1}$. Die Zerlegung $\tilde{H} = \tilde{H}^+ [+] \tilde{H}^-$ mit $\tilde{H}^+ = (\tilde{H}^-)^\perp$ ist eine Fundamentalzerlegung des Π_κ -Raumes \tilde{H} . Sei dieser Zerlegung entsprechend $\vec{x}(\zeta_n) = \vec{x}^+(\zeta_n) + \vec{x}^-(\zeta_n)$. Dann ist $\vec{x}^-(\zeta_n)$ eine schwache Cauchy-Folge in \tilde{H}^- . Da \tilde{H}^- endlichdimensional ist, ist sie somit auch eine Cauchy-Folge in der Norm in \tilde{H}^- . Insbesondere sind die Werte

$$\|\vec{x}^-(\zeta_n)\|^2 = -[\vec{x}^-(\zeta_n), \vec{x}^-(\zeta_n)]$$

für $n \in \mathbf{IN}$ beschränkt. Weiters gilt, falls z_0 nicht reell ist

$$[\vec{x}(\zeta_n), \vec{x}(\zeta_n)] = \frac{f_{\tilde{S}}(\zeta_n) - \overline{f_{\tilde{S}}(\zeta_n)}}{\zeta_n - \overline{\zeta_n}} = \frac{\Im f_{\tilde{S}}(\zeta_n)}{\Im \zeta_n} \rightarrow \frac{\Im f_{\tilde{S}}(z_0)}{\Im z_0}$$

für $n \rightarrow \infty$, und

$$[\vec{x}(\zeta_n), \vec{x}(\zeta_n)] \rightarrow f_{\tilde{S}}'(z_0) \text{ für } n \rightarrow \infty$$

falls z_0 reell ist. Also ist $[\vec{x}(\zeta_n), \vec{x}(\zeta_n)]$ und damit auch

$$[\vec{x}^+(\zeta_n), \vec{x}^+(\zeta_n)] = [\vec{x}(\zeta_n), \vec{x}(\zeta_n)] - [\vec{x}^-(\zeta_n), \vec{x}^-(\zeta_n)]$$

und

$$\|\vec{x}(\zeta_n)\|^2 = [\vec{x}^+(\zeta_n), \vec{x}^+(\zeta_n)] - [\vec{x}^-(\zeta_n), \vec{x}^-(\zeta_n)]$$

beschränkt. □

Satz 3.7 Sei $z_0 \in \hat{\rho}(f_{\tilde{S}})$, $z_0 \neq \overline{z_1}$. Ist das Element $e_{z_1}^{\vec{}}$ für den Operator \tilde{S} erzeugend, so existiert der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0}^w \vec{x}(z)$ und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0}^w \vec{x}(z) = \vec{x}(z_0) \text{ falls } z_0 \in \rho(\tilde{S}). \quad (3.9)$$

Definiert man für $z_0 \in \hat{\rho}(f_{\tilde{S}}) \setminus \rho(\tilde{S})$ den Vektor $\vec{x}(z_0)$ als

$$\vec{x}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0}^w \vec{x}(z),$$

so gilt für $z' \neq \bar{z}_0$:

$$[\vec{x}(z_0), \vec{x}(z)] = \frac{f_{\tilde{S}}(z_0) - \overline{f_{\tilde{S}}(z')}}{z_0 - \overline{z'}}, \quad (3.10)$$

$$[\vec{x}(z_0), \vec{x}(\bar{z}_0)] = f_{\tilde{S}}'(z_0), \quad (3.11)$$

$$[\vec{x}(z_0), e_{z_1}^{\vec{}}] = \frac{f_{\tilde{S}}(z_0) - \overline{w_1}}{z_0 - \overline{z_1}}. \quad (3.12)$$

Beweis : Sei $(\zeta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\zeta_n \in \rho(\tilde{S})$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = z_0$. Wir wollen zeigen, daß $\vec{x}(\zeta_n)$ eine schwache Cauchy-Folge in \tilde{H} ist. Sei also $\vec{y} \in \tilde{H}$, dann gibt es eine Folge $(y_k)_{k \in \mathbf{N}}$ mit $y_k \in L_{z_1}$ und $y_k \rightarrow y$ für $k \rightarrow \infty$. Dann gilt

$$(\vec{x}(\zeta_m) - \vec{x}(\zeta_n), y) = (\vec{x}(\zeta_m) - \vec{x}(\zeta_n), y_k) + (\vec{x}(\zeta_m) - \vec{x}(\zeta_n), y - y_k).$$

Nun ist nach Lemma 3.8

$$|(\vec{x}(\zeta_m) - \vec{x}(\zeta_n), y - y_k)| \leq \underbrace{\|\vec{x}(\zeta_m) - \vec{x}(\zeta_n)\|}_{\leq C} \cdot \underbrace{\|y - y_k\|}_{\rightarrow 0}.$$

Man wähle zu vorgegebenen ϵ also k so groß, daß für $\|y - y_k\| \leq \frac{\epsilon}{2C}$ ist. Zu diesem k wähle man n und m so groß, daß $|(\vec{x}(\zeta_m) - \vec{x}(\zeta_n), y_k)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ gilt. Insgesamt erhält man damit für hinreichend große Zahlen n und m

$$|(\vec{x}(\zeta_m) - \vec{x}(\zeta_n), y)| \leq \epsilon$$

Da \tilde{H} schwach vollständig ist, existiert $\lim_{z \rightarrow z_0}^w \vec{x}(z)$.

Ist $z_0 \in \rho(\tilde{S})$, so hängt

$$\vec{x}(z) = e_{z_1}^{\vec{}} + (z - z_1)(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\vec{}}$$

in einer Umgebung von z_0 offenbar stetig von z ab. Also gilt die Beziehung (3.9). Um die Gleichungen (3.10), (3.11) und (3.12) zu beweisen geht man wie folgt vor.

Sei $z' \neq \bar{z}_0$, dann gilt

$$\begin{aligned} [\vec{x}(z_0), \vec{x}(z')] &= \lim_{z \rightarrow z_0} [\vec{x}(z), \vec{x}(z')] = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_{\tilde{S}}(z) - \overline{f_{\tilde{S}}(z')}}{z - \overline{z'}} = \frac{f_{\tilde{S}}(z_0) - \overline{f_{\tilde{S}}(z')}}{z_0 - \overline{z'}}. \end{aligned}$$

Weiters ist

$$\begin{aligned} [\vec{x}(z_0), \vec{x}(z_0)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} [\vec{x}(z), \vec{x}(\overline{z_0})] = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_{\tilde{S}}(z) - \overline{f_{\tilde{S}}(\overline{z_0})}}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_{\tilde{S}}(z) - f_{\tilde{S}}(z_0)}{z - z_0} = f_{\tilde{S}}'(z_0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [\vec{x}(z_0), e_{z_1}^{\vec{}}] &= \lim_{z \rightarrow z_0} [\vec{x}(z), e_{z_1}^{\vec{}}] = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_{\tilde{S}}(z) - \overline{w_1}}{z_0 - \overline{z_1}} = \frac{f_{\tilde{S}}(z_0) - \overline{w_1}}{z_0 - \overline{z_1}}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.4 Sei $e_{z_1}^{\vec{}}$ ein erzeugendes Element für \tilde{S} . Da dann für $i \neq 1$ stets $(\tilde{S} - z_i)^{-1} e_{z_1}^{\vec{}} = \frac{e_{z_i}^{\vec{}} - e_{z_1}^{\vec{}}}{z_i - z_1}$ gilt⁴, ist

$$\vec{x}(z_i) = \lim_{z \rightarrow z_i} \vec{x}(z) = e_{z_i}^{\vec{}} \quad (\in \mathbb{H}).$$

Folgerung 3.3 Ist $e_{z_1}^{\vec{}}$ erzeugendes Element für \tilde{S} , so hat man einen linearen Operator $U_{f_{\tilde{S}}} : \mathbb{H}_{f_{\tilde{S}}} \rightarrow \tilde{\mathbb{H}}$, der durch

$$U_{f_{\tilde{S}}} e_z^{\vec{}} = \vec{x}(z) \quad \text{für } z \in \rho(f_{\tilde{S}})$$

definiert ist. Aus der Aussage von Satz 3.7 folgt

$$[U_{f_{\tilde{S}}} \vec{x}, U_{f_{\tilde{S}}} \vec{y}] = [x, y] \quad \text{für } x, y \in \mathbb{H}_{f_{\tilde{S}}}.$$

Insbesondere gilt $\ker U_{f_{\tilde{S}}} \subseteq \mathbb{H}_{f_{\tilde{S}}}^{\circ}$.

Bemerkung 3.5 Hier sieht man noch einmal explizit, daß falls das Element $e_{z_1}^{\vec{}}$ für \tilde{S} erzeugend ist, sogar die Funktion $f_{\tilde{S}} : \rho(f_{\tilde{S}}) \rightarrow \mathbb{C}$ in der Vereinigung $\bigcup_{\kappa'=0}^{\kappa} N_{\kappa'}$ liegt⁵.

Wir wollen nun den Operator $U_{f_{\tilde{S}}}$, der in Folgerung 3.3 definiert wurde und der den Raum $\mathbb{H}_{f_{\tilde{S}}}$ in den Π_{κ} -Raum $\tilde{\mathbb{H}}$ abbildet etwas genauer untersuchen. Dabei ergibt sich ein interessanter Zusammenhang mit der Eigenschaft von $f_{\tilde{S}}$, auch im Punkt z_1 die vorgegebenen Daten zu interpolieren.

⁴Man beachte Satz 3.6.

⁵vgl. Folgerung 3.1.

Satz 3.8 Sei $\tilde{H} \supseteq H$, \tilde{S} eine selbstadjungierte Erweiterung von S und das Element $e_{z_1}^{\vec{}}$ sei erzeugend für \tilde{S} . Weiters sei $H_{f_{\tilde{S}}}^{\circ} \neq \{0\}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $\lim_{z \rightarrow z_1}^w \vec{x}(z) = e_{z_1}^{\vec{}}$.
2. $\ker U_{f_{\tilde{S}}} = H_{f_{\tilde{S}}}^{\circ}$.
3. $U_{f_{\tilde{S}}}$ ist nicht injektiv.
4. Es gibt einen Vektor $\vec{h} \in H_{f_{\tilde{S}}}^{\circ}$, $\vec{h} \neq 0$ mit $[U_{f_{\tilde{S}}}\vec{h}, e_{z_1}^{\vec{}}] = 0$.
5. $f_{\tilde{S}}(z_1) = w_1$.
6. Für jeden Vektor $\vec{h} \in H_{f_{\tilde{S}}}^{\circ}$ gilt $[U_{f_{\tilde{S}}}\vec{h}, e_{z_1}^{\vec{}}] = 0$.

Beweis : Zum Beweis werden wir die folgenden Implikationen zeigen:

$$(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4) \implies (5) \implies (6),$$

$$(6) \implies (4), (5) \implies (1).$$

(1) \implies (2): Sei $\vec{h} \in H_{f_{\tilde{S}}}^{\circ}$. Dann gilt für jedes $w \in \rho(\tilde{S})$, $w \neq z_1$

$$\begin{aligned} 0 &= [\vec{h}, e_w^{\vec{}}] = [U_{f_{\tilde{S}}}\vec{h}, U_{f_{\tilde{S}}}e_w^{\vec{}}] = [U_{f_{\tilde{S}}}\vec{h}, \vec{x}(w)] = \\ &= [U_{f_{\tilde{S}}}\vec{h}, e_{z_1}^{\vec{}}] + \overline{(w - z_1)} [U_{f_{\tilde{S}}}\vec{h}, (\tilde{S} - w)^{-1}e_{z_1}^{\vec{}}]. \end{aligned}$$

Wegen $e_{z_1}^{\vec{}} = \vec{x}(z_1)$ gilt aber auch

$$\begin{aligned} [U_{f_{\tilde{S}}}\vec{h}, e_{z_1}^{\vec{}}] &= [U_{f_{\tilde{S}}}\vec{h}, \vec{x}(z)] = [U_{f_{\tilde{S}}}\vec{h}, U_{f_{\tilde{S}}}e_{z_1}^{\vec{}}] = \\ &= [\vec{h}, e_{z_1}^{\vec{}}] = 0. \end{aligned}$$

Damit muß aber auch $[U_{f_{\tilde{S}}}\vec{h}, (\tilde{S} - w)^{-1}e_{z_1}^{\vec{}}] = 0$ gelten. Sei nun $w = z_1$, also insbesondere $z_1 \in \rho(\tilde{S})$. Dann hängt $(\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}^{\vec{}}$ in einer Umgebung von z_1 stetig von z ab. Es gilt also

$$[U_{f_{\tilde{S}}}\vec{h}, (\tilde{S} - z_1)^{-1}e_{z_1}^{\vec{}}] = \lim_{z \rightarrow z_1} [U_{f_{\tilde{S}}}\vec{h}, (\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}^{\vec{}}] = 0.$$

Es ist somit $U_{f_{\tilde{S}}}\vec{h} \perp L_{z_1}$. Da L_{z_1} dicht in \tilde{H} liegt, muß $U_{f_{\tilde{S}}}\vec{h} = 0$ sein, also $\vec{h} \in \ker U_{f_{\tilde{S}}}$.

(2) \implies (3): trivial.

(3) \implies (4): Da in jedem Fall $\ker U_{f_{\tilde{S}}} \subseteq H_{f_{\tilde{S}}}^\circ$ gilt, ist diese Implikation klar.

(4) \implies (5): Sei \vec{h} ein isotroper Vektor für den $[U_{f_{\tilde{S}}}\vec{h}, e_{z_1}^-] = 0$ gilt, und sei $\vec{h} = \sum_{j=1}^m h_j e_{\zeta_j}^-$ mit $\zeta_j \in \rho(f_{\tilde{S}})$. Dann gilt

$$0 = [U_{f_{\tilde{S}}}\vec{h}, e_{z_1}^-] = \sum_{j=1}^m h_j [\vec{x}(\zeta_j), e_{z_1}^-] = \sum_{j=1}^m h_j \frac{f_{\tilde{S}}(\zeta_j) - \overline{w_1}}{\zeta_j - \overline{z_1}}.$$

Aus dieser Gleichung bestimmt sich w_1 in eindeutiger Weise als rationale Funktion von z_1 . Nun gilt aber die Gleichung

$$0 = [\vec{h}, e_{z_1}^-] = \sum_{j=1}^m h_j \frac{f_{\tilde{S}}(\zeta_j) - \overline{f_{\tilde{S}}(z_1)}}{\zeta_j - \overline{z_1}},$$

also muß $w_1 = f_{\tilde{S}}(z_1)$ sein.

(5) \implies (6): Sei $\vec{h} = \sum_{j=1}^m h_j e_{\zeta_j}^- \in H_{f_{\tilde{S}}}^\circ$. Dann gilt

$$\begin{aligned} [U_{f_{\tilde{S}}}\vec{h}, e_{z_1}^-] &= \sum_{j=1}^m h_j [\vec{x}(\zeta_j), e_{z_1}^-] = \sum_{j=1}^m h_j \frac{f_{\tilde{S}}(\zeta_j) - \overline{w_1}}{\zeta_j - \overline{z_1}} = \\ &= \sum_{j=1}^m h_j \frac{f_{\tilde{S}}(\zeta_j) - \overline{f_{\tilde{S}}(z_1)}}{\zeta_j - \overline{z_1}} = [\vec{h}, e_{z_1}^-] = 0. \end{aligned}$$

(6) \implies (4): Da nach Voraussetzung $H_{f_{\tilde{S}}}^\circ \neq \{0\}$ gilt, ist diese Implikation klar.

(5) \implies (1): Ist $z_1 \in \rho(\tilde{S})$, so ist die Beziehung $\lim_{z \rightarrow z_1} {}^w \vec{x}(z) = e_{z_1}^-$ klar. Sei also z_1 und damit auch $\overline{z_1}$ nicht in $\rho(\tilde{S})$. Dann gilt für $w \in \rho(\tilde{S}), z \neq w$

$$\begin{aligned} [\vec{x}(z) - e_{z_1}^-, (\tilde{S} - \overline{w})^{-1} e_{z_1}^-] &= [(z - z_1)(\tilde{S} - z)^{-1}(\tilde{S} - w)^{-1} e_{z_1}^-, e_{z_1}^-] = \\ &= \frac{z - z_1}{z - w} [((\tilde{S} - z)^{-1} - (\tilde{S} - w)^{-1}) e_{z_1}^-, e_{z_1}^-] = \\ &= \frac{z - z_1}{z - w} [(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^-, e_{z_1}^-] - \underbrace{\frac{z - z_1}{z - w} [(\tilde{S} - w)^{-1} e_{z_1}^-, e_{z_1}^-]}_{\rightarrow 0 \text{ für } z \rightarrow z_1}. \end{aligned}$$

Aus der Definition (3.1) von $f_{\tilde{S}}$ sieht man, daß auch der zweite Ausdruck für $z \rightarrow z_1$ gegen Null streben muß, da

$$f_{\tilde{S}}(z_1) = w_1 = \overline{w_1} + \frac{\Im w_1}{\Im z_1}(z_1 - \overline{z_1})$$

gilt. Es ist also

$$[\vec{x}(z_1) - e_{z_1}^{\rightarrow}, (\tilde{S} - \overline{w})^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow}] = 0 \text{ für } \overline{w} \in \rho(\tilde{S}),$$

das heißt $(\vec{x}(z_1) - e_{z_1}^{\rightarrow}) \perp L_{z_1}$. Da L_{z_1} dicht in \tilde{H} liegt, gilt $x(z_1) = e_{z_1}$. □

Bemerkung 3.6 Wir bemerken, daß die Äquivalenz der Aussagen (1) und (5) auch ohne die Voraussetzung $H_{f_{\tilde{S}}}^{\circ} \neq \{0\}$ richtig bleibt.

Beweis : Bei dem Beweis der Implikation (5) \implies (1) wurde die Voraussetzung $H_{f_{\tilde{S}}}^{\circ} \neq \{0\}$ nicht benützt. Umgekehrt folgt aber aus $\lim_{z \rightarrow z_1}^w \vec{x}(z) = e_{z_1}^{\rightarrow}$, daß

$$\lim_{z \rightarrow z_1}^w (z - z_1)(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow} = 0, \text{ also } \lim_{z \rightarrow z_1} f_{\tilde{S}}(z) = w_1$$

gilt. □

Folgerung 3.4 Sei $z_1 \in \rho(f_{\tilde{S}})$. Dann ist H (als linearer Raum) in $H_{f_{\tilde{S}}}$ eingebettet. Man kann sich also $H_{f_{\tilde{S}}}$ und \tilde{H} als zwei Erweiterungen von H denken. Bemerkung 3.6 besagt nun, daß die Funktion $f_{\tilde{S}}$ genau dann $f_{\tilde{S}}(z_1) = w_1$ erfüllt, wenn $U_{f_{\tilde{S}}}$ den Raum H elementweise festläßt.

3.2.4 Eine Bedingung für maximale Anzahl negativer Quadrate

In diesem Paragraphen wenden wir uns wieder einer anderen Fragestellung zu. Es ergibt sich jedoch auch hier ein interessanter Zusammenhang mit der Interpolationseigenschaft der Funktion $f_{\tilde{S}}$ im Punkt z_i .

Wie aus Folgerung 3.1 bekannt, liegt $f_{\tilde{S}}$ stets in $\bigcup_{\kappa'=0}^{\kappa} N_{\kappa'}$ falls \tilde{S} in einem

Π_{κ} -Raum \tilde{H} operiert. Hier wollen wir eine Bedingung dafür angeben, daß $f_{\tilde{S}}$ sogar in N_{κ} liegt. Sei dazu im folgenden $i \in \{1, \dots, n\}$ festgehalten.

Lemma 3.9 *Sei das Element $e_{z_i}^{\vec{}}$ erzeugend für $\tilde{\mathcal{S}}$, und gelte $e_{z_i}^{\vec{}} \in \overline{\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{S}} - z_i)}^w$. Dann liegt $\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{S}} - z_i)$ dicht in $\tilde{\mathcal{H}}$.*

Beweis : Ist $z_i \in \rho(\tilde{\mathcal{S}})$, so ist $\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{S}} - z_i) = \tilde{\mathcal{H}}$. Wir können uns also im folgenden auf den Fall $z_i \notin \rho(\tilde{\mathcal{S}})$ beschränken. Sei $\vec{x} \in \tilde{\mathcal{H}}$, $\vec{v} \in \tilde{\mathcal{H}}$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es Punkte $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \rho(\tilde{\mathcal{S}})$ und Zahlen $y_1, \dots, y_n \in \mathbf{C}$, so daß der Vektor

$$\vec{y} = \sum_{k=1}^n y_k (\zeta_k - z_i) (\tilde{\mathcal{S}} - \zeta_k)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}} \in L_{z_i} = \langle \{(\tilde{\mathcal{S}} - w)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}} | w \in \rho(\tilde{\mathcal{S}})\} \rangle$$

der Beziehung $|\vec{x} - \vec{y}, \vec{v}| \leq \frac{\epsilon}{2}$ genügt. Weiters gibt es einen Vektor $\vec{y}' \in \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{S}} - z_i)$ mit $|\vec{e}_{z_i}^{\vec{}} - \vec{y}', \vec{v}| \leq \frac{\epsilon}{2 \sum_{k=1}^n y_k}$, falls $\sum_{k=1}^n y_k \neq 0$ ist. In diesem Fall gilt

mit

$$\vec{x}_i(z) = \tilde{U}_{z_i z} e_{z_i}^{\vec{}} = e_{z_i}^{\vec{}} + (z - z_i) (\tilde{\mathcal{S}} - z)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}}$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} \left| \vec{x} - \left(\sum_{k=1}^n y_k \vec{x}_i(\zeta_k) - \sum_{k=1}^n y_k \vec{y}' \right), \vec{v} \right| &\leq \left| \vec{x} - \sum_{k=1}^n y_k (\zeta_k - z_i) (\tilde{\mathcal{S}} - \zeta_k)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}}, \vec{v} \right| + \\ &+ \left| \sum_{k=1}^n y_k (e_{z_i}^{\vec{}} - \vec{y}'), \vec{v} \right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \left(\sum_{k=1}^n y_k \right) \cdot \frac{\epsilon}{2 \sum_{k=1}^n y_k} = \epsilon. \end{aligned}$$

Im Falle $\sum_{k=1}^n y_k = 0$ gilt schon

$$|\vec{x} - \vec{y}, \vec{v}| = \left| \vec{x} - \sum_{k=1}^n y_k \vec{x}_i(\zeta_k), \vec{v} \right| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Nun ist

$$\vec{x}_i(z) = \tilde{U}_{z_i z} e_{z_i}^{\vec{}} = (\tilde{\mathcal{S}} - z_i) (\tilde{\mathcal{S}} - z)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}} \in \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{S}} - z_i), \quad (3.13)$$

also liegt $\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{S}} - z_i)$ in der schwachen Topologie dicht. □

Folgerung 3.5 Sei das Element $e_{z_i}^{\vec{}}$ erzeugend für \tilde{S} und \tilde{S} stetig. Ist dann $e_{z_i}^{\vec{}} \in \overline{\mathcal{R}(\tilde{S} - z_i)^w}$, so liegt sogar die lineare Hülle

$$M_i = \langle \{\vec{x}_i(z) = \tilde{U}_{z_i z} e_{z_i}^{\vec{}} \mid z \in \rho(\tilde{S})\} \rangle$$

bezüglich der schwachen Topologie dicht in \tilde{H} .

Beweis : Zunächst liegt der Raum L_{z_i} dicht in \tilde{H} . Da der Operator $(\tilde{S} - z_i)$ unter unseren Voraussetzungen \tilde{H} auf eine dichte Teilmenge abbildet und stetig ist, muß auch $(\tilde{S} - z_i)(L_{z_i})$ als Bild einer dichten Teilmenge dicht sein. $(\tilde{S} - z_i)(L_{z_i})$ ist aber nach (3.13) gerade der Raum $\langle \{\vec{x}_i(z) \mid z \in \rho(\tilde{S})\} \rangle$. □

Für nicht stetige Operatoren müssen wir unsere Voraussetzungen verstärken.

Lemma 3.10 Sei das Element $e_{z_i}^{\vec{}}$ erzeugend für \tilde{S} . Gilt $z_i \in \rho(\tilde{S})$, so liegt die lineare Hülle

$$M_i = \langle \{\vec{x}_i(z) = \tilde{U}_{z_i z} e_{z_i}^{\vec{}} \mid z \in \rho(\tilde{S})\} \rangle$$

bezüglich der schwachen Topologie dicht in \tilde{H} .

Beweis : Man hat

$$e_{z_i}^{\vec{}} = \tilde{U}_{z_i z_i} e_{z_i}^{\vec{}} = \vec{x}_i(z_i),$$

also für $z \in \rho(\tilde{S}), z \neq z_i$

$$\begin{aligned} (\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}} &= \frac{1}{z - z_i} (\tilde{U}_{z_i z} e_{z_i}^{\vec{}} - \tilde{U}_{z_i z_i} e_{z_i}^{\vec{}}) = \\ &= \frac{1}{z - z_i} (\vec{x}_i(z) - \vec{x}_i(z_i)) \in M_i. \end{aligned}$$

Da $(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}}$ für $z \rightarrow z_i$ stetig variiert ($z_i \in \rho(\tilde{S})$) gilt $(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}} \in \overline{M_i}$. Zusammen erhält man

$$\tilde{H} = \bigvee_{z \in \rho(\tilde{S})} (\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}} \subseteq \overline{M_i} \subseteq \tilde{H}.$$

Der Teilraum M_i liegt also dicht in \tilde{H} . □

Mit Hilfe des letzten Lemmas bzw. der letzten Folgerung ergibt sich nun leicht der folgende Satz.

Satz 3.9 Sei $\tilde{H} \supseteq H$ ein Π_κ -Raum und \tilde{S} eine selbstadjungierte Erweiterung von S . Ist das Element $e_{z_1}^{\vec{}}$ erzeugend für \tilde{S}^6 und gilt $e_{z_1}^{\vec{}} \in \overline{\mathcal{R}(\tilde{S} - z_1)}^w$ falls \tilde{S} stetig ist bzw. $z_1 \in \rho(\tilde{S})$ falls \tilde{S} nicht stetig ist, so liegt $f_{\tilde{S}}$ in der Klasse N_κ .

Beweis : Sei $U_{f_{\tilde{S}}} : H_{f_{\tilde{S}}} \rightarrow \tilde{H}$ jene Isometrie (aus Folgerung 3.3) mit $U_{f_{\tilde{S}}} e_z^{\vec{}} = \vec{x}(z) = \vec{x}_1(z)$. Nach dem letzten Lemma bzw. der letzten Folgerung liegt der Raum $U_{f_{\tilde{S}}}(H_{f_{\tilde{S}}})$ dicht in \tilde{H} , enthält also einen κ -dimensionalen negativen Teilraum. Da $U_{f_{\tilde{S}}}$ eine Isometrie ist, gibt es auch in $H_{f_{\tilde{S}}}$ einen κ -dimensionalen Teilraum. Da $f_{\tilde{S}}$ in jedem Falle in $\bigcup_{\kappa'=0}^{\kappa} N_{\kappa'}$ liegt, muß unter unseren Voraussetzungen sogar $f_{\tilde{S}} \in N_\kappa$ gelten. □

Folgerung 3.6 Sei zu den Voraussetzungen von Satz 3.9 noch zusätzlich der Raum $H_{f_{\tilde{S}}}$ entartet. Dann gelten die sechs äquivalenten Aussagen von Satz 3.8, insbesondere also $f_{\tilde{S}}(z_1) = w_1$.

Beweis : Nach Satz 3.9 ist $f_{\tilde{S}} \in N_\kappa$, also gibt es einen κ -dimensionalen negativen Teilraum in $H_{f_{\tilde{S}}}$. Das Bild dieses Teilraumes unter $U_{f_{\tilde{S}}}$ besitzt ein positiv definites orthogonales Komplement in \tilde{H} , da \tilde{H} ein Π_κ -Raum ist. Wäre $U_{f_{\tilde{S}}}$ injektiv, so wäre aber $U_{f_{\tilde{S}}}(H_{f_{\tilde{S}}}^\circ)$ ein neutraler Teilraum dieses orthogonalen Komplementes was einen Widerspruch bedeutet. Es ist also eine, und damit alle der sechs äquivalenten Bedingungen von Satz 3.8 erfüllt. □

Interessant ist in dieser Folgerung nur der Fall in dem \tilde{S} stetig ist, da sonst durch die Bedingung $z_1 \in \rho(\tilde{S})$ ohnehin $f_{\tilde{S}}(z_1) = w_1$ gesichert ist. Man kann sich in dieser Folgerung ähnlich wie bei Bemerkung 3.6 von der Voraussetzung $H_{f_{\tilde{S}}}^\circ \neq \{0\}$ befreien. Es gilt nämlich

Satz 3.10 Sei $\tilde{H} \supseteq H$ ein Π_κ -Raum und \tilde{S} eine stetige selbstadjungierte Erweiterung von S . Ist das Element $e_{z_1}^{\vec{}}$ erzeugend für \tilde{S} und gilt $e_{z_1}^{\vec{}} \in \overline{\mathcal{R}(\tilde{S} - z_1)}^w$, so gilt

$$f_{\tilde{S}}(z_1) = w_1$$

⁶Hier ist die Auszeichnung des Punktes z_1 wieder wesentlich.

und damit auch

$$\lim_{z \rightarrow z_1} {}^w \vec{x}(z) = e_{z_1}^{\vec{}}.$$

Beweis : Wieder können wir uns auf den Fall $z_1 \notin \rho(\tilde{S})$ beschränken, da andernfalls die Behauptungen dieses Satzes schon in Satz 3.3, zusammen mit Satz 3.6 und Bemerkung 3.6 bewiesen wurde. Im Fall $z_1 \notin \rho(\tilde{S})$ gehen wir von Lemma 3.9 aus, welches besagt, daß unter unseren Voraussetzungen der Teilraum $\mathcal{R}(\tilde{S} - z_1)$ dicht liegt. Weiters betrachten wir die Laurententwicklung der Resolvente⁷ um den Punkt z_1

$$(\tilde{S} - z)^{-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(z - z_1)^k \text{ für } 0 < |z - z_1| < \delta.$$

Da \tilde{S} beschränkt ist und die Dimension von

$$\mathcal{R}(A_{-1}) = \mathcal{R}\left(\frac{-1}{2\pi i} \oint (\tilde{S} - z_1)^{-1} dz\right)$$

als neutraler Teilraum von \tilde{H} endlich sein muß, kann die Resolvente im Punkt z_1 höchstens einen Pol haben. Es gilt also

$$(\tilde{S} - z)^{-1} = \sum_{k=-m}^{\infty} A_k(z - z_1)^k \text{ für } 0 < |z - z_1| < \delta,$$

wobei $m \in \mathbf{IN}$ ist und A_k für $k \geq -m$ beschränkte lineare Operatoren sind. Dabei ist

$$\ker A_{-m} \supseteq \ker A_{-m+1} \supseteq \cdots \supseteq \ker A_{-1} = \mathcal{R}((\tilde{S} - z_1)^m)$$

Da der Operator $(\tilde{S} - z_1)$ stetig ist und \tilde{H} auf einen dichten Teilraum abbildet, ist auch jeder der Räume $\mathcal{R}((\tilde{S} - z_1)^m)$ für $(m \geq 1)$ dicht in \tilde{H} . Insbesondere liegt $\ker A_{-1}$ dicht in \tilde{H} . Wegen der Stetigkeit der A_k muß also $A_k = 0$ für $k \leq -1$ gelten. Es ist also

$$(\tilde{S} - z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z - z_1)^k \text{ für } 0 < |z - z_1| < \delta$$

und damit bleibt der Ausdruck

$$[(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\vec{}}, e_{z_1}^{\vec{}}] = \sum_{k=-m}^{\infty} [A_k e_{z_1}^{\vec{}}, e_{z_1}^{\vec{}}] (z - z_1)^k.$$

⁷vgl. [51] VIII.8, S.228ff.

für $z \rightarrow z_1$ beschränkt. Es gilt also

$$\lim_{z \rightarrow z_1} {}^w \vec{x}(z) = e_{z_1} + \lim_{z \rightarrow z_1} {}^w \left((z - z_1)[(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}, e_{z_1}] \right) = e_{z_1}$$

Nach Bemerkung 3.6 ist damit auch $f_{\tilde{S}}(z_1) = w_1$ gezeigt.

□

Bemerkung 3.7 Diesen Satz werden wir in einem allgemeineren Kontext und mit anderen Methoden im folgenden Paragraphen noch einmal erhalten.

3.2.5 Der allgemeine Fall einer Erweiterung von S

Nachdem wir in den vorangegangenen Paragraphen einfache Erweiterungen ausführlich studiert haben, wenden wir uns nun dem Fall einer beliebigen selbstadjungierten Erweiterung \tilde{S} des Operators S zu. Wir werden sehen, daß die Bedingung

$$e_{z_i} \in \overline{\mathcal{R}(\tilde{S} - z_i)}^w,$$

die schon (für $i = 1$) in Satz 3.9 und Satz 3.10 eine entscheidende Rolle gespielt hat, auch hier auftritt.

Unser Vorgehen in diesem Abschnitt wird darin bestehen, die Erweiterung \tilde{S} auf einen geeigneten Teilraum einzuschränken, und dann nach dem isotropen Teil dieses Teilraumes zu faktorisieren.

Dazu wollen wir zunächst untersuchen, wie sich die Funktion $f_{\tilde{S}}$ bei diesem Vorgehen verhält.

Wir wollen an den Begriff eines invarianten Teilraumes erinnern.

Definition 3.5 Sei H ein Vektorraum und $U : D \rightarrow H$ ein linearer Operator, definiert auf $\mathcal{D}(U) = D \subseteq H$. Ein Teilraum L von H heißt invariant unter U , falls $U(D \cap L) \subseteq L$ ist.

Wir betrachten im folgenden Teilräume von \tilde{H} die unter allen Resolventen $(\tilde{S} - z)^{-1}$ für $z \in \rho(\tilde{S})$ invariant sind. In gewissem Sinne kann man \tilde{S} auf solche Teilräume einschränken.

Definition 3.6 Sei L ein Teilraum von \tilde{H} . Wir betrachten das vollständige Urbild $\tilde{S}^{-1}(L)$ von L unter \tilde{S} . Im folgenden bezeichnen wir mit L^\times den Teilraum $\tilde{S}^{-1}(L) \cap L$. Dann können wir \tilde{S} auf L^\times einschränken und erhalten einen linearen Operator in L .

Lemma 3.11 Sei L ein abgeschlossener Teilraum von \tilde{H} der unter \tilde{S} und für $z \in \rho(\tilde{S})$ unter $(\tilde{S} - z)^{-1}$ invariant ist. Dann ist $\rho(\tilde{S}) \subseteq \rho(\tilde{S}|_{L^\times})$ und es gilt

$$(\tilde{S} - z)^{-1}|_{L^\times} = (\tilde{S}|_{L^\times} - z)^{-1}.$$

Beweis : Sei $z \in \rho(\tilde{S})$. Dann ist $(\tilde{S} - z)$ und damit auch $(\tilde{S}|_{L^\times} - z)$ injektiv. Sei nun $\vec{x} \in L$, dann ist $(\tilde{S} - z)^{-1}\vec{x} \in L^\times$. Wegen $\vec{x} = (\tilde{S}|_{L^\times} - z)(\tilde{S} - z)^{-1}\vec{x}$ ist $(\tilde{S}|_{L^\times} - z)$ auch surjektiv. Aus der Gleichung $(\tilde{S} - z)\vec{x} = (\tilde{S}|_{L^\times} - z)\vec{x}$ für $\vec{x} \in L$ folgt offenbar

$$(\tilde{S} - z)^{-1}\vec{x} = (\tilde{S}|_{L^\times} - z)^{-1}\vec{x}$$

für jedes $\vec{x} \in L$. Damit ist $(\tilde{S}|_{L^\times} - z)^{-1}\vec{x}$ auch beschränkt. □

Satz 3.11 Sei L ein abgeschlossener Teilraum von \tilde{H} und $e_{z_1}^\vec{} \in L$. Weiters sei L für jedes $z \in \rho(\tilde{S})$ unter $(\tilde{S} - z)^{-1}$ invariant. Betrachten wir den Operator $\tilde{S}' = \tilde{S}|_{L^\times}$, dann stimmen die \tilde{S} bzw. \tilde{S}' zugeordneten Funktionen⁸ $f_{\tilde{S}}$ und $f_{\tilde{S}'}$ überein:

$$f_{\tilde{S}}(z) = f_{\tilde{S}'}(z) \text{ für } z \in \rho(\tilde{S}).$$

Beweis : Da $(\tilde{S} - z)^{-1}$ und $(\tilde{S}' - z)^{-1}$ auf L übereinstimmen, und nach Voraussetzung $e_{z_1}^\vec{} \in L$ gilt, ist auch

$$[(\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}^\vec{}, e_{z_1}^\vec{}] = [(\tilde{S}' - z)^{-1}e_{z_1}^\vec{}, e_{z_1}^\vec{}]$$

und damit $f_{\tilde{S}}(z) = f_{\tilde{S}'}(z)$. □

Nun wollen wir an den Begriff des Faktoroperators erinnern.

Definition 3.7 Sei L ein linearer Raum und U ein linearer Operator in L der einen Teilraum M von L invariant läßt. Dann ist auf dem Faktorraum L/M durch

$$(U/M)(\vec{x} + M) = U\vec{x} + M$$

ein linearer Operator definiert.

⁸Da L entartet sein kann, können wir nicht im Sinne von Definition 3.2 von der zugeordneten Funktion $f_{\tilde{S}}$ sprechen. Da aber $(\tilde{S}|_{L^\times} - z)$ für $z \in \rho(\tilde{S})$ auf L injektiv operiert, ist durch (3.1) eine Funktion definiert.

Satz 3.12 Sei L ein Skalarproduktraum, $e_{z_1}^{\vec{}} \in L$ und sei \tilde{S} ein symmetrischer Operator in L mit L° als invarianten Teilraum. Dann können wir den Faktorraum $L' = L/L^\circ$ und den Faktoroperator $\tilde{S}' = \tilde{S}/L^\circ$ betrachten. Dann gilt $\rho(\tilde{S}) \subseteq \rho(\tilde{S}')$ und

$$\left((\tilde{S} - z)^{-1}\right)' = (\tilde{S}' - z)^{-1} \text{ für } z \in \rho(\tilde{S}). \quad (3.14)$$

Die zugeordneten Funktionen⁹ $f_{\tilde{S}}$ und $f_{\tilde{S}'}$, stimmen überein:

$$f_{\tilde{S}}(z) = f_{\tilde{S}'}(z) \text{ für } z \in \rho(\tilde{S}).$$

Beweis : Sei $z \in \rho(\tilde{S})$, dann läßt sowohl \tilde{S} als auch $(\tilde{S} - z)^{-1}$ den Teilraum L° invariant. Die Abbildung $(\tilde{S}' - z)$ ist offenbar surjektiv. Sei $\vec{x}' \in L'$ mit $(\tilde{S}' - z)\vec{x}' = 0$. Das bedeutet aber $(\tilde{S} - z)\vec{x} \in L^\circ$ und damit ist auch $\vec{x} \in (\tilde{S} - z)^{-1}(L^\circ) \subseteq L^\circ$, also $\vec{x}' = 0$. Die Abbildung $(\tilde{S}' - z)^{-1}$ ist daher sogar bijektiv und erfüllt offensichtlich (3.14). Weiters folgt aus $\left((\tilde{S} - z)^{-1}\vec{x}\right)' = (\tilde{S}' - z)^{-1}\vec{x}'$ die Beziehung

$$[(\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}^{\vec{}}, e_{z_1}^{\vec{}}] = [(\tilde{S}' - z)^{-1}e_{z_1}^{\vec{}}, e_{z_1}^{\vec{}}],$$

und damit $f_{\tilde{S}}(z) = f_{\tilde{S}'}(z)$.

□

Wir wenden uns nun wieder unserer speziellen Situation zu, d.h. sei $\tilde{H} \supseteq H$ ein Π_κ -Raum und $\tilde{S} \supseteq S$ eine in \tilde{H} selbstadjungierte Erweiterung von S . Eine wesentliche Rolle spielt der im folgenden definierte Teilraum L von \tilde{H} .

Definition 3.8 Bezeichne im folgenden mit L die abgeschlossene lineare Hülle

$$L = \bigvee_{\substack{w \in \rho(\tilde{S}) \cap \mathbf{C}^+ \\ i=1, \dots, n}} (\tilde{S} - w)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}}$$

Lemma 3.12 L ist für jedes $z \in \rho(\tilde{S})$ unter $(\tilde{S} - z)^{-1}$ invariant. Der Teilraum L^\times liegt dicht in L .

Beweis : Wir zeigen zunächst $e_{z_i}^{\vec{}} \in L$. Wegen

$$\lim_{w \rightarrow i\infty} \left(-w(\tilde{S} - w)^{-1}\right) = I$$

⁹vgl. Fußnote 8.

gilt insbesondere

$$e_{z_i}^{\vec{}} = - \lim_{w \rightarrow i\infty} \underbrace{w(\tilde{S} - w)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}}}_{\in L} \in L.$$

Weiters gilt

$$\tilde{S}(\tilde{S} - w)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}} = e_{z_i}^{\vec{}} + w(\tilde{S} - w)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}} \in L,$$

also $(\tilde{S} - w)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}} \in L^\times$.

Für $z \neq w$ erhält man

$$(\tilde{S} - z)^{-1}(\tilde{S} - w)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}} = \frac{1}{z - w} \left((\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}} - (\tilde{S} - w)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}} \right) \in L.$$

Für $z = w \in \rho(\tilde{S})$ erhält man wegen der Stetigkeit der Resolvente

$$(\tilde{S} - z)^{-1}(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}} = \lim_{z' \rightarrow z} (\tilde{S} - z')^{-1}(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}} \in L.$$

Damit ist, wieder wegen der Stetigkeit von $(\tilde{S} - z)^{-1}$ auf $\rho(\tilde{S})$, der Teilraum L auch unter allen Resolventen invariant.

□

Bemerkung 3.8 Wir haben im Beweis von Lemma 3.12 eigentlich gezeigt, daß

$$e_{z_i}^{\vec{}} \in \bigvee_{w \in \rho(\tilde{S}) \cap \mathbf{C}^+} (\tilde{S} - w)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}} \text{ für } i = 1, \dots, n$$

gilt, und daß der Raum

$$L_i = \bigvee_{w \in \rho(\tilde{S})} (\tilde{S} - w)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}} \text{ bzw. } \bigvee_{w \in \rho(\tilde{S}) \cap \mathbf{C}^+} (\tilde{S} - w)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}}$$

für $i = 1, \dots, n$ unter jeder Resolvente $(\tilde{S} - z)^{-1}$ invariant ist. Insbesondere ist $H \subseteq L$.

Sei im folgenden $j \in \{1, \dots, n\}$ fest gewählt.

Lemma 3.13 Sei $e_{z_j}^{\vec{}} \in \overline{\mathcal{R}(\tilde{S} - z_j)|_{L^\times}}^w$. Dann liegt $\mathcal{R}(\tilde{S} - z_j)|_{L^\times}$ schwach dicht in L .

Beweis : Es genügt für $i = 1, \dots, n$ die Beziehung $e_{z_i} \in \overline{\mathcal{R}(\tilde{S} - z_j)|_{L^\times}}^w$ zu zeigen, denn mit L^\times ist auch $\overline{\mathcal{R}(\tilde{S} - z_j)|_{L^\times}}^w$ invariant unter $(\tilde{S} - z)^{-1}$. Für $i = j$ ist nach Voraussetzung $e_{z_i} \in \overline{\mathcal{R}(\tilde{S} - z_j)|_{L^\times}}^w$, sei also $i \neq j$. Dann gilt

$$e_{z_i} = (\tilde{S} - z_j) \left(\frac{e_{z_i} - e_{z_j}}{z_i - z_j} \right) \in \mathcal{R}(\tilde{S} - z_j)|_{L^\times},$$

also ist $\overline{\mathcal{R}(\tilde{S} - z_j)|_{L^\times}}^w = L$.

□

Wir betrachten nun den Skalarproduktraum $L' = L/L^\circ$. Dieser ist ein Pontrjagin-Raum vom Index κ' ($\leq \kappa$). In L' betrachten wir den Operator $\tilde{S}' = (\tilde{S}|_L)/L^\circ$.

Lemma 3.14 *Der Operator \tilde{S}' ist in L' selbstadjungiert, und es gilt $\rho(\tilde{S}') \cap \mathbf{C}^+ \supseteq \rho(\tilde{S}) \cap \mathbf{C}^+$.*

Beweis : Die Aussage „ \tilde{S}' ist selbstadjungiert“ ist unmittelbar klar. Sei also $z \in \rho(\tilde{S}) \cap \mathbf{C}^+$, dann vermittelt nach Lemma 3.11 $(\tilde{S} - z)$ eine Bijektion von L auf sich. Wie beim Beweis von Satz 3.12 sieht man, daß auch $(\tilde{S}' - z)$ bijektiv operiert. Also ist $z \in \rho(\tilde{S}')$.

□

Lemma 3.15 *Sei $e_{z_j} \in \overline{\mathcal{R}(\tilde{S} - z_j)|_{L^\times}}^w$. Dann gilt $z_j \in \rho(\tilde{S}')$.*

Beweis : Wir können uns auf den Fall $z_j \notin \rho(\tilde{S})$ beschränken. Nehmen wir indirekt an $z_j \notin \rho(\tilde{S}')$, so muß ein Eigenvektor $\vec{x}' \neq 0$ zum Eigenwert \bar{z}_j existieren. Für diesen gilt dann $(\tilde{S}' - \bar{z}_j)\vec{x}' = 0$, also $(\tilde{S} - \bar{z}_j)\vec{x} \in L^\circ$. Damit ist aber

$$0 = [(\tilde{S} - \bar{z}_j)\vec{x}, L^\times] = [\vec{x}, (\tilde{S} - z_j)(L^\times)].$$

Da nach Lemma 3.13 ist $\mathcal{R}(\tilde{S} - z_j)|_{L^\times}$ schwach dicht in L ist, müßte $\vec{x} \in L^\circ$ also $\vec{x}' = 0$ gelten.

□

Satz 3.13 *Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gelte für eine Zahl $j \in \{1, \dots, n\}$ die Beziehung*

$$e_{z_j} \in \overline{\mathcal{R}(\tilde{S} - z_j)|_{L^\times}}^w.$$

Dann gilt $f_{\tilde{S}'}(z_j) = w_j$ und damit auch $f_{\tilde{S}}(z_j) = w_j$ oder zumindest $\lim_{z \rightarrow z_j} f_{\tilde{S}}(z) = w_j$.

Beweis : Wir betrachten zunächst den Fall $j \neq 1$. Hier gilt $(\tilde{S} - z_j) \left(\frac{e_{z_1}^{\vec{}} - e_{z_j}^{\vec{}}}{z_1 - z_j} \right) = e_{z_1}^{\vec{}}$, also auch

$$(\tilde{S}' - z_j) \left(\frac{e_{z_1}' - e_{z_j}'}{z_1 - z_j} \right) = e_{z_1}'$$

und damit auch $(\tilde{S}' - z_j)^{-1} e_{z_1}' = \left(\frac{e_{z_1}' - e_{z_j}'}{z_1 - z_j} \right)$. Man erhält damit

$$[(\tilde{S}' - z_j)^{-1} e_{z_1}', e_{z_1}'] = \left[\frac{e_{z_1}^{\vec{}} - e_{z_j}^{\vec{}}}{z_1 - z_j}, e_{z_1}^{\vec{}} \right].$$

Mit einer analogen Rechnung wie beim Beweis von Satz 3.3 bestätigt man $f_{\tilde{S}'}(z_j) = w_j$.

Sei nun $j = 1$, dann ist $(\tilde{S}' - z)^{-1}$ lokal um z_1 beschränkt. Wieder erhält man wie beim Beweis von Satz 3.3 die Beziehung $f_{\tilde{S}'}(z_1) = w_1$.

Nach Satz 3.11 und Satz 3.12 folgt, daß zumindestens in einer punktierten Umgebung von z_j die Funktionen $f_{\tilde{S}'}$ und $f_{\tilde{S}}$ übereinstimmen. Damit muß mindestens

$$\lim_{z \rightarrow z_j} f_{\tilde{S}}(z) = \lim_{z \rightarrow z_j} f_{\tilde{S}'}(z) = w_j$$

gelten.

□

3.2.6 Halbeinfache Eigenwerte

Wir wollen nun eine selbstadjungierte Erweiterung \tilde{S} von S in einem Π_κ -Raum $\tilde{H} \supseteq H$ betrachten, für die für ein $j \in \{1, \dots, n\}$ der Punkt z_j im Spektrum liegt, d.h. Eigenwert ist. Es soll jedoch keine Jordanschen Ketten der Länge ≥ 2 geben. Wir setzen also in diesem Paragraphen stets

$$\ker(\tilde{S} - z_j)^2 = \ker(\tilde{S} - z_j) \neq \{0\}$$

voraus. In dieser Situation geben wir eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß $f_{\tilde{S}}$ das Interpolationsproblem im Punkt z_j löst, d.h. daß $f_{\tilde{S}}(z_j) = w_j$ gilt.

Wir halten im folgenden $j \in \{1, \dots, n\}$ fest, und bezeichnen stets mit L^+, L^- bzw. L die Teilräume

$$L^+ = \ker(\tilde{S} - z_j), L^- = \ker(\tilde{S} - \bar{z}_j) \text{ und } L = L^+ \dot{+} L^-.$$

Unter obigen Voraussetzungen sind die Räume L^+ und L^- schief verbunden und endlichdimensional ($\dim(L^+) = \dim(L^-) \leq \kappa$). Als nicht entarteter, endlichdimensionaler Teilraum von \tilde{H} hat L ein orthogonales Komplement L^\perp . Entsprechend der Zerlegung

$$\tilde{H} = L^\perp[\dot{+}](L^+ \dot{+} L^-)$$

schreiben wir Vektoren $\vec{x} \in \tilde{H}$ als

$$\vec{x} = \vec{x}^\perp + \vec{x}^+ + \vec{x}^-.$$

Unsere Strategie besteht nun darin den Operator \tilde{S} auf L^\perp einzuschränken und die $\tilde{S}|_{L^\perp}$ zugeordnete Funktion zu betrachten. Dieses Vorgehen liefert die gewünschten Bedingungen, denn L^\perp ist ein unter \tilde{S} und jeder Resolvente $(\tilde{S} - z)^{-1}$ invarianter, abgeschlossener Teilraum von \tilde{H} , und $\tilde{S}' = \tilde{S}|_{L^\perp}$ hat keine Eigenvektoren zum Eigenwert z_j .

Lemma 3.16 *Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt für $i = 1, \dots, n$ die Beziehung*

$$e_{z_i}^- = \frac{z_j - \bar{z}_j}{z_i - \bar{z}_j} e_{z_j}^-, \quad (3.15)$$

und für $i \neq j$

$$e_{z_i}^+ = 0. \quad (3.16)$$

Beweis : Für $i = j$ ist die Beziehung (3.15) klar. Sei also $i \neq j$. Dann gilt

$$(\tilde{S} - \bar{z}_j)(e_{z_i}^- - e_{z_j}^-) = (z_i - \bar{z}_j)e_{z_i}^- - (z_j - \bar{z}_j)e_{z_j}^-.$$

Durch Vergleich der entsprechenden Summanden ergibt sich

$$(z_j - \bar{z}_j)e_{z_i}^+ - (z_j - \bar{z}_j)e_{z_j}^+ = (z_i - \bar{z}_j)e_{z_i}^+ - (z_j - \bar{z}_j)e_{z_j}^+, \quad (3.17)$$

$$0 = (z_i - \bar{z}_j)e_{z_i}^- - (z_j - \bar{z}_j)e_{z_j}^-, \quad (3.18)$$

$$(\tilde{S} - \bar{z}_j)(e_{z_i}^\perp - e_{z_j}^\perp) = (z_i - \bar{z}_j)e_{z_i}^\perp - (z_j - \bar{z}_j)e_{z_j}^\perp. \quad (3.19)$$

Aus Gleichung (3.18) folgt die Gültigkeit von (3.15), und aus (3.17) erhält man die Beziehung (3.16). □

Lemma 3.17 *Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt für $z \in \rho(\tilde{S})$*

$$\begin{aligned} [(\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow}] &= [(\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}^{\rightarrow\perp}, e_{z_1}^{\rightarrow\perp}] + \\ &+ \frac{1}{z_j - z}[e_{z_1}^{\rightarrow+}, e_{z_1}^{\rightarrow-}] + \frac{1}{\bar{z}_j - z}[e_{z_1}^{\rightarrow-}, e_{z_1}^{\rightarrow+}]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ist nun $j \neq 1$, so gilt für $z \in \rho(\tilde{S})$

$$[(\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow}] = [(\tilde{S}' - z)^{-1}e_{z_1}^{\rightarrow\perp}, e_{z_1}^{\rightarrow\perp}].$$

Beweis : Offenbar ist

$$\begin{aligned} (\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}^{\rightarrow+} &= \frac{1}{z_j - z}e_{z_1}^{\rightarrow+} \text{ und} \\ (\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}^{\rightarrow-} &= \frac{1}{\bar{z}_j - z}e_{z_1}^{\rightarrow-}. \end{aligned}$$

Da L^+ und L^- neutrale Teilräume sind, erhält man Gleichung (3.20). Die zweite Behauptung ergibt sich, da für $j \neq 1$ stets $e_{z_1}^{\rightarrow+} = 0$ gilt, \tilde{S}' die Einschränkung von \tilde{S} ist und L^\perp unter \tilde{S} und jeder Resolvente $(\tilde{S} - z)^{-1}$ invariant ist.

□

Lemma 3.18 *Sei $j \neq 1$, dann gilt*

$$[e_{z_1}^{\rightarrow\perp} - e_{z_j}^{\rightarrow\perp}, e_{z_1}^{\rightarrow\perp}] = [e_{z_1}^{\rightarrow} - e_{z_j}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow}] + [e_{z_j}^{\rightarrow+}, e_{z_1}^{\rightarrow-}].$$

Beweis : Es gilt

$$\begin{aligned} [e_{z_1}^{\rightarrow} - e_{z_j}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow}] &= [(e_{z_1}^{\rightarrow\perp} + e_{z_1}^{\rightarrow-}) - (e_{z_j}^{\rightarrow\perp} + e_{z_j}^{\rightarrow+} + e_{z_j}^{\rightarrow-}), (e_{z_1}^{\rightarrow\perp} + e_{z_1}^{\rightarrow-})] = \\ &= [e_{z_1}^{\rightarrow\perp} - e_{z_j}^{\rightarrow\perp}, e_{z_1}^{\rightarrow\perp}] - [e_{z_j}^{\rightarrow+}, e_{z_1}^{\rightarrow-}]. \end{aligned}$$

□

Nun haben wir alle Hilfsmittel bereitgestellt um die, am Beginn des Abschnitts angesprochene notwendige und hinreichende Bedingung zu geben.

Satz 3.14 *Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ und \tilde{S} eine selbstadjungierte Erweiterung von S mit*

$$\ker(\tilde{S} - z_j)^2 = \ker(\tilde{S} - z_j) \neq \{0\}.$$

Dann gilt $f_{\tilde{S}}(z_j) = w_j$ genau dann, wenn (mit obigen Bezeichnungen) $[e_{z_j}^{\rightarrow+}, e_{z_j}^{\rightarrow-}] = 0$ ist.

Beweis : Wir betrachten zuerst den Fall $j \neq 1$. Dann erhält man aus der Beziehung

$$(\tilde{S} - z_j)(e_{z_1}^- - e_{z_j}^-) = (z_1 - z_j)e_{z_1}^-$$

durch Vergleich der entsprechenden Komponenten

$$e_{z_1}^{\perp} = (\tilde{S}' - z_j) \left(\frac{e_{z_1}^{\perp} - e_{z_j}^{\perp}}{z_1 - z_j} \right), \text{ also}$$

$$(\tilde{S}' - z_j)^{-1} e_{z_1}^{\perp} = \frac{e_{z_1}^{\perp} - e_{z_j}^{\perp}}{z_1 - z_j}.$$

Damit gilt für den Ausdruck $(z_1 - z_j)[(\tilde{S}' - z)^{-1} e_{z_1}^{\perp}, e_{z_1}^{\perp}]$ die Beziehung

$$\begin{aligned} (z_1 - z_j)[(\tilde{S}' - z)^{-1} e_{z_1}^{\perp}, e_{z_1}^{\perp}] &= [e_{z_1}^{\perp} - e_{z_j}^{\perp}, e_{z_1}^{\perp}] = \\ &= [e_{z_1}^- - e_{z_j}^-, e_{z_1}^-] + [e_{z_j}^+, e_{z_1}^-]. \end{aligned}$$

Aus dem Beweis von Satz 3.3 wissen wir, daß $f_{\tilde{S}}(z_j) = w_j$ genau dann gilt, wenn obiger Ausdruck gleich $[e_{z_1}^- - e_{z_j}^-, e_{z_1}^-]$ ist. Das ist offenbar genau dann der Fall, wenn $[e_{z_j}^+, e_{z_1}^-]$ verschwindet. Wegen der linearen Abhängigkeit von $e_{z_1}^-$ und $e_{z_j}^-$ (Lemma 3.16) ist dies jedoch gleichbedeutend mit $[e_{z_j}^+, e_{z_1}^-] = 0$.

Nun wenden wir uns dem Fall $j = 1$ zu, und betrachten die Formel (3.20), die im Fall $j = 1$ die Gestalt

$$\begin{aligned} [(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^-, e_{z_1}^-] &= [(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\perp}, e_{z_1}^{\perp}] + \\ &+ \frac{1}{z_1 - z} [e_{z_1}^+, e_{z_1}^-] + \frac{1}{z_1 - z} [e_{z_1}^-, e_{z_1}^+] \end{aligned} \quad (3.21)$$

annimmt. Die Funktion $f_{\tilde{S}}$ interpoliert nun an der Stelle z_1 genau dann, wenn (wieder nach dem Beweis von Satz 3.3) der Ausdruck $[(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^-, e_{z_1}^-]$ lokal um z_1 beschränkt bleibt. Betrachtet man (3.21), so ist dies offenbar genau dann der Fall, wenn $[e_{z_1}^+, e_{z_1}^-] = 0$ ist.

□

3.3 Konstruktion eines Operators zu vorgegebener Funktion $f_{\tilde{S}}$

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir uns ausführlich mit der Frage beschäftigt, ob und wie man aus einem Operator $\tilde{S} \supseteq S$ eine Lösung des

Interpolationsproblems (1.3) konstruieren kann. Nun wollen wir uns der umgekehrten Fragestellung zuwenden.

Sei also f eine Funktion der Klasse N_κ (mit $\kappa \geq \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$), die die Interpolationsaufgabe (1.3) löst. Wir konstruieren im folgenden eine selbst-adjungierte Erweiterung \tilde{S} des Operators S in einem Π_κ -Raum $\tilde{H} \supseteq H$ mit der Eigenschaft

$$f_{\tilde{S}}(z) = f(z) \text{ für } z \in \rho(f).$$

Hier bezeichnet $\rho(f)$ wieder das Holomorphiegebiet von f in der oberen Halbebene ($\rho(f) \subseteq \mathbf{C}^+$).

Um die oben gestellte Aufgabe durchzuführen gehen wir von dem f zugeordneten Skalarproduktraum H_f und dem, analog zum Operator S im folgenden definierten Operator S_f aus.

Definition 3.9 *Bezeichne mit D_f die Hyperebene*

$$D_f = \left\{ \sum_{z \in \rho(f)} \alpha_z \vec{e}_z \mid \sum_{z \in \rho(f)} \alpha_z = 0 \right\}$$

in H_f , und definiere für $\vec{x} = \sum_{z \in \rho(f)} \alpha_z \vec{e}_z \in D_f$:

$$S_f \vec{x} = S_f \left(\sum_{z \in \rho(f)} \alpha_z \vec{e}_z \right) = \sum_{z \in \rho(f)} \alpha_z z \vec{e}_z.$$

Auch S_f ist, wie man mit einer analogen Rechnung wie beim Beweis von Satz 3.1 bestätigt, symmetrisch. Nun kommt die in Abschnitt 1.1 und in Satz 3.2 erwähnte Beschränktheitsforderung zur Geltung. Wir formulieren diese noch einmal:

Es existiere eine Folge $(\zeta_i)_{i \in \mathbf{N}}$ komplexer Zahlen mit $\zeta_i \rightarrow \infty$ und $\Re \zeta_i = 0$, so daß der Grenzwert $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f(\zeta_i)}{\Im \zeta_i}$ existiert und gleich Null ist. (3.22)

Diese Bedingung sei für den Rest dieses Abschnittes für die Funktion f vorausgesetzt. Dann gilt, im Unterschied zum Operator S

Lemma 3.19 $\mathcal{D}(S_f) = D_f$ liegt dicht in H_f .

Beweis : Sei $w \in \rho(f)$, dann gilt

$$[e_{\zeta_i}^{\vec{}}, e_w^{\vec{}}] = \frac{f(\zeta_i) - \overline{f(w)}}{\zeta_i - \overline{w}} \rightarrow 0$$

für $i \rightarrow \infty$, da $f(\zeta_i)$ für $i \rightarrow \infty$ der Beschränktheitsforderung (3.22) genügt. Also gilt $\lim_{i \rightarrow \infty} {}^w e_{\zeta_i}^{\vec{z}} = 0$ und damit für jedes $z \in \rho(f)$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} {}^w \underbrace{(e_z^{\vec{z}} - e_{\zeta_i}^{\vec{z}})}_{\in D_f} = e_z^{\vec{z}}.$$

Es ist also $e_z^{\vec{z}} \in \overline{\mathcal{D}(S_f)}^w$ und damit gilt $\overline{\mathcal{D}(S_f)}^w = H_f$.

□

Eine Folgerung aus dem obigen Lemma ist

Folgerung 3.7 *Für den isotropen Teil H_f° von H_f gilt*

$$S_f(H_f \cap D_f^\circ) \subseteq H_f^\circ.$$

Der Teilraum H_f° ist also invariant unter S_f .

Beweis : Für ein Element \vec{x} aus der schwach dichten Teilmenge $\mathcal{D}(S_f)$ und $\vec{h} \in H_f^\circ \cap D_f$ gilt

$$[S_f \vec{h}, \vec{x}] = [\vec{h}, S_f \vec{x}] = 0.$$

Damit muß auch $S_f \vec{h}$ in H_f° liegen.

□

Wir können also den Π_κ -Raum $H' = H_f/H_f^\circ$ und den Operator $S' = S_f/H_f^\circ$ betrachten. Offenbar ist S' in H' dicht definiert und symmetrisch. Also besitzt S' eine selbstadjungierte Erweiterung $\tilde{S} \supseteq S'$ in einem Π_κ -Raum $\tilde{H} \supseteq H'$. Aus unserer Voraussetzung $\kappa > \kappa_1$ folgt, daß H_f° mit H nur trivialen Durchschnitt hat¹⁰. Daher können wir \tilde{H} als Teilraum von H' und S' damit auch als Erweiterung von S betrachten. Es ist also insbesondere $\tilde{H} \supseteq H$ und $\tilde{S} \supseteq S$. Im folgenden bezeichnen wir mit $e_z^{\vec{z}'}$ das dem Vektor $e_z^{\vec{z}} \in H_f$ entsprechende Element von \tilde{H} (bzw. H').

Lemma 3.20 *Sei $z \in \rho(f) \cap \rho(\tilde{S})$, $z \neq z_1$. Dann gilt*

$$(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\vec{z}'} = \frac{e_{z_1}^{\vec{z}'} - e_z^{\vec{z}'}}{z_1 - z}. \quad (3.23)$$

Beweis : Es gilt für jedes $z \in \rho(f)$, $z \neq z_1$:

$$(\tilde{S} - z)(e_{z_1}^{\vec{z}'} - e_z^{\vec{z}'}) = (S' - z)(e_{z_1}^{\vec{z}'} - e_z^{\vec{z}'}) =$$

¹⁰vgl. die Abschnitte 2.1 und 2.2, insbesondere Satz 2.6 und Satz 2.5.

$$= ((S_f - z)(e_{z_1}^{\vec{}} - e_z^{\vec{}}))' = (z_1 - z)e_{z_1}^{\vec{}}'.$$

Da nun $z \in \rho(\tilde{S})$ ist, folgt die Beziehung (3.23).

□

Nun können wir den angekündigten Satz formulieren.

Satz 3.15 *Sei $\kappa \geq \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$, und $f \in \mathbf{N}_\kappa$ eine Lösung des Interpolationsproblems (1.3) die der Beschränktheitsforderung (3.22) genügt. Dann gibt es einen Π_κ -Raum $\tilde{H} \supseteq H$ und einen in \tilde{H} selbstadjungierten Operator $\tilde{S} \supseteq S$ mit $f_{\tilde{S}} = f$.*

Beweis : Wir betrachten die oben konstruierte Erweiterung \tilde{S} im Raum \tilde{H} . Dann bleibt noch zu zeigen, daß $f = f_{\tilde{S}}$ gilt. Für $z \in \rho(f) \cap \rho(\tilde{S}), z \neq z_1$ bestätigt man mit einer analogen Rechnung wie beim Beweis von Satz 3.3 die Gültigkeit von $f_{\tilde{S}}(z) = f(z)$. Da sowohl f als auch $f_{\tilde{S}}$ meromorphe Funktionen sind, und $\rho(\tilde{S})$ in \mathbf{C}^+ dicht liegt, muß für jedes $z \in \rho(f)$ die Beziehung $f(z) = f_{\tilde{S}}(z)$ bestehen. Also gilt $f = f_{\tilde{S}}$.

□

3.4 Über die Eineindeutigkeit der Beziehung

Wir haben in den vorigen Abschnitten eine Beziehung zwischen den Lösungen des Interpolationsproblems (1.3) und den selbstadjungierten Erweiterungen (mit Austritt aus dem Raum) eines gewissen symmetrischen Operators hergestellt. Das heißt wir haben jeder Erweiterung eine Funktion zugeordnet, und umgekehrt aus jeder interpolierenden Funktion (mit gewissen Eigenschaften) eine Erweiterung konstruiert. Dabei ist im allgemeinen nicht richtig, daß jede zugeordnete Funktion $f_{\tilde{S}}$ auch eine Lösung von (1.3) darstellt, und ebenfalls nicht richtig, daß verschiedene Erweiterungen verschiedene Funktionen ergeben (vgl. z.B. Satz 3.11, Satz 3.12 oder Satz 3.14). Diese Eigenschaften der von uns hergestellten Beziehung wollen wir nun näher untersuchen.

3.4.1 Definition der Abbildungen α und β

Wir bezeichnen im folgenden mit \mathcal{E}_κ die Menge aller in einem gewissen Π_κ -Raum operierenden und selbstadjungierten Erweiterungen von S und

mit \mathcal{F}_κ die Menge

$$\mathcal{F}_\kappa = \{f \in \mathbf{N}_\kappa \mid f(z_i) = w_i \text{ für } i = 1, \dots, n, f \text{ erfüllt (3.22)}\}$$

aller Lösungen von (1.3) in der Klasse \mathbf{N}_κ , die der Beschränktheitsforderung (3.22) genügen.

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir - abstrakt formuliert - zwei Abbildungen konstruiert, nämlich einerseits die Abbildung

$$\beta : \begin{cases} \mathcal{E}_\kappa & \rightarrow \bigcup_{0 \leq \kappa' \leq \kappa} \mathbf{N}_{\kappa'} \\ \tilde{\mathbf{S}} & \mapsto \beta(\tilde{\mathbf{S}}) = f_{\tilde{\mathbf{S}}} \end{cases},$$

die jeder selbstadjungierten Erweiterung $\tilde{\mathbf{S}}$ von \mathbf{S} die Funktion $f_{\tilde{\mathbf{S}}}$ zuordnet, und andererseits eine Abbildung

$$\alpha : \begin{cases} \mathcal{F}_\kappa & \rightarrow \mathcal{E}_\kappa \\ f & \mapsto \alpha(f) \end{cases}$$

die jeder Funktion aus \mathcal{F}_κ eine gewisse Einschränkung des im letzten Abschnitt (vgl. Satz 3.15) konstruierten Operators zuordnet.

Wir betrachten den Operator $\tilde{\mathbf{S}} \supseteq \mathbf{S}_f$ im Raum $\tilde{\mathbf{H}} \supseteq \mathbf{H}_f/\mathbf{H}_f^\circ$ aus Satz 3.15, und den Teilraum

$$L = \bigcap_{i=1, \dots, n} \bigvee_{z \in \rho(\tilde{\mathbf{S}}) \cap \mathbf{C}^+} (\tilde{\mathbf{S}} - z)^{-1} e_{z_i}^\vec{.}$$

Als Durchschnitt invarianter abgeschlossener Teilräume¹¹ ist L ebenfalls abgeschlossen und unter jeder Resolvente $(\tilde{\mathbf{S}} - z)^{-1}$ invariant.

Lemma 3.21 *Der Raum $\mathbf{H}' = \mathbf{H}_f/\mathbf{H}_f^\circ$ liegt dicht in L .*

Beweis : Wir berechnen für $z \in \rho(\tilde{\mathbf{S}}) \cap \mathbf{C}^+, z \neq z_i$

$$(\tilde{\mathbf{S}} - z)(e_{z_i}^\vec{.} - e_z^\vec{.}) = (\mathbf{S}_f - z)(e_{z_i}^\vec{.} - e_z^\vec{.}) = (z_i - z)e_{z_i}^\vec{.},$$

also

$$(\tilde{\mathbf{S}} - z)^{-1} e_{z_i}^\vec{.} = \frac{e_{z_i}^\vec{.} - e_z^\vec{.}}{z_i - z} \in \mathbf{H}'.$$

¹¹vgl. Bemerkung 3.8 .

Falls $z_i \in \rho(\tilde{S})$ ist, erhält man durch einen Grenzübergang $z \rightarrow z_i$ zumindest $(\tilde{S} - z_i)^{-1}e_{z_i} \in \overline{H'}$. Daher gilt $L \subseteq \overline{H'}$. Umgekehrt erhält man zunächst (vgl. wieder Bemerkung 3.8)

$$e_{z_i} \in \bigvee_{z \in \rho(\tilde{S}) \cap \mathbf{C}^+} (\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_i}$$

und für $z \in \rho(\tilde{S}) \cap \mathbf{C}^+, z \neq z_i$

$$\vec{e}_z = e_{z_i} + (z - z_i)(\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_i} \in \bigvee_{z \in \rho(\tilde{S}) \cap \mathbf{C}^+} (\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_i}.$$

Führt man für ein beliebiges $z_0 \in \rho(f)$ gegebenenfalls wieder einen Grenzübergang $z \rightarrow z_0$ also $\vec{e}_z \rightarrow e_{z_0}$ durch, so sieht man

$$e_{z_0} \in \bigvee_{z \in \rho(\tilde{S}) \cap \mathbf{C}^+} (\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_i} \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } z_0 \in \rho(f),$$

d.h. $H' \subseteq \bigvee_{z \in \rho(\tilde{S}) \cap \mathbf{C}^+} (\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_i}$ für jedes $i = 1, \dots, n$. Es ist also $H' \subseteq L$

und damit $\overline{H'} = L$.

□

Da H' nicht entartet ist, ist $L^\circ \cap H' = \{0\}$, insbesondere also $L^\circ \cap H = \{0\}$. Wir können daher den im Raum L/L° definierten Operator $\tilde{S}' = (\tilde{S}|_L)/L^\circ$ als Erweiterung von S in einem Erweiterungsraum von H auffassen. Wenden wir Satz 3.11 bzw. Satz 3.12 an, so erhalten wir $f_{\tilde{S}}(z) = f_{\tilde{S}'}(z)$ auf $\rho(\tilde{S})$ und damit $f = f_{\tilde{S}} = f_{\tilde{S}'}$. Da D_f in H' und H' in L dicht liegt, ist \tilde{S}' auf einer dichten Teilmenge von L definiert¹². Wir definieren nun

Definition 3.10 Zu jeder Funktion $f \in \mathcal{F}_\kappa$ bezeichne mit $\alpha(f)$ die oben konstruierte Erweiterung $\tilde{S}' \in \mathcal{E}_\kappa$.

3.4.2 Eigenschaften von α und β - die Bijektion

Wir untersuchen nun die Abbildungen α bzw. β und werden sehen, daß sie auf geeigneten Definitionsbereichen zueinander inverse Bijektionen induzieren. Dabei wollen wir nur den Fall $n \geq 2$ betrachten.

Wir beginnen mit der Einführung einer weiteren Bezeichnung.

¹²vgl. Abschnitt 3.2.5.

Definition 3.11 In der Menge \mathcal{E}_κ aller Erweiterungen von S bezeichne die Teilmenge jener Operatoren \tilde{S} (\tilde{S} operiere in einem Π_κ -Raum \tilde{H}) mit den zusätzlichen Eigenschaften

$$L_i = \bigvee_{z \in \rho(\tilde{S})} (\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}} = \tilde{H} \text{ für } i = 1, \dots, n \quad (3.24)$$

mit \mathcal{E}'_κ .

Bemerkung 3.9 Da $n \geq 2$ ist folgt aus (3.24) wegen Satz 3.6 $z_i \in \rho(\tilde{S})$ für $i = 1, \dots, n$.

Lemma 3.22 Es gilt $\mathcal{R}(\alpha) \subseteq \mathcal{E}'_\kappa$.

Beweis : Sei $\tilde{S} = \alpha(f)$ definiert in \tilde{H} . Dann ist \tilde{H} ein Faktorraum von

$$L = \bigcap_{i=1, \dots, n} \bigvee_{z \in \rho(\tilde{S}) \cap \mathbf{C}^+} (\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}}.$$

und \tilde{S} Faktoroperator von einem Operator \tilde{S}' in L . Offenbar gilt mit $L = \bigvee_{z \in \rho(\tilde{S}') \cap \mathbf{C}^+} (\tilde{S}' - z)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}}$ auch $\tilde{H} = \bigvee_{z \in \rho(\tilde{S}) \cap \mathbf{C}^+} (\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_i}^{\vec{}}$ für jedes $i = 1, \dots, n$. Damit ist die Gültigkeit von (3.24) bestätigt. □

Bemerkung 3.10 Im Fall $n = 1$ gilt $e_{z_1}^{\vec{}} \in \overline{\mathcal{R}(\tilde{S} - z_1)}^w$.

Beweis : Sei $z \in \rho(\tilde{S}), z \neq z_1$, dann gilt

$$(\tilde{S} - z_1) \left(\frac{e_z^{\vec{}} - e_{z_1}^{\vec{}}}{z - z_1} \right) = e_z^{\vec{}} \in \mathcal{R}(\tilde{S} - z_1).$$

Damit ist

$$e_{z_1}^{\vec{}} = \lim_{\substack{z \rightarrow z_1 \\ z \in \rho(\tilde{S})}}^w e_z^{\vec{}} \in \overline{\mathcal{R}(\tilde{S} - z_1)}^w.$$

□

Nun müssen wir noch einige Eigenschaften von β studieren. Zunächst gilt

Lemma 3.23 Sei $\tilde{S} \in \mathcal{E}'_\kappa$, dann gilt

$$f_{\tilde{S}}(z_i) = w_i \text{ für } i = 1, \dots, n$$

und $f_{\tilde{S}} \in N_\kappa$. Weiters ist die Beschränktheitsforderung (3.22) erfüllt.

Beweis : Wegen der Voraussetzung (3.24) und $n \geq 2$ können wir Satz 3.3 anwenden, und erhalten, daß $f_{\tilde{S}}$ in jedem Punkt z_i interpoliert. Um zu zeigen, daß $f_{\tilde{S}}$ in N_κ liegt wenden wir Satz 3.9 an. Nach Satz 3.2 gilt die Beschränktheitsforderung (3.22). □

Man kann Lemma 3.23 auch unter schwächeren Voraussetzungen beweisen.

Bemerkung 3.11 Lemma 3.23 bleibt auch noch richtig, wenn wir für \tilde{S} nur

$$L_1 = \bigvee_{z \in \rho(\tilde{S})} (\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow} = \tilde{H}, \text{ und} \quad (3.25)$$

$$z_1 \in \rho(\tilde{S}) \quad (3.26)$$

voraussetzen.

Beweis : In Satz 3.9 wurde nur (3.25) und (3.26) benötigt um $f_{\tilde{S}} \in N_\kappa$ zu beweisen. Um $f_{\tilde{S}}(z_j) = w_j$ für $j \neq 1$ zu zeigen, verweisen wir auf Folgerung 3.2, bezüglich $j = 1$ auf Satz 3.3. Bei den genannten Referenzen wurden immer nur (3.25) und (3.26) vorausgesetzt. □

Ein im folgenden auftretender Begriff ist die unitäre Äquivalenz zweier Operatoren, die wir an dieser Stelle einführen wollen.

Definition 3.12 Seien $\tilde{S}, \tilde{S}' \supseteq S$ selbstadjungierte Erweiterungen von S , die in Π_κ -Räumen $\tilde{H}, \tilde{H}' \supseteq H$ operieren. Gibt es eine unitäre Abbildung U von \tilde{H} auf \tilde{H}' , die H punktweise festläßt und die Eigenschaft

$$\tilde{S} = U^{-1} \circ \tilde{S}' \circ U$$

hat, dann heißen \tilde{S} und \tilde{S}' unitär äquivalente Erweiterungen von S .

Lemma 3.24 Seien $\tilde{S}, \tilde{S}' \in \mathcal{E}'_\kappa$ unitär äquivalente Erweiterungen, dann gilt $\beta(\tilde{S}) = \beta(\tilde{S}')$.

Beweis : Es gilt $\tilde{S} = U^{-1} \circ \tilde{S}' \circ U$, also für $z \in \rho(\tilde{S}) \cap \rho(\tilde{S}')$:

$$\tilde{S} - z = U^{-1} \circ \tilde{S}' \circ U = U^{-1} \circ (\tilde{S}' - z) \circ U$$

und damit auch

$$(\tilde{S} - z)^{-1} = U^{-1} \circ (\tilde{S}' - z)^{-1} \circ U.$$

Damit berechnet man

$$\begin{aligned} [(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow}] &= [U^{-1} \circ (\tilde{S}' - z)^{-1} \circ U e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow}] = \\ &= [(\tilde{S}' - z)^{-1} \circ U e_{z_1}^{\rightarrow}, U e_{z_1}^{\rightarrow}] = [(\tilde{S}' - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow}]. \end{aligned}$$

Also gilt auch $f_{\tilde{S}}(z) = f_{\tilde{S}'}(z)$. Da beide Funktionen meromorph in \mathbf{C}^+ sind, und $\rho(\tilde{S}) \cap \rho(\tilde{S}')$ dicht liegt, gilt sogar $f_{\tilde{S}} = f_{\tilde{S}'}$. □

Lemma 3.25 *Sei $\tilde{S} \in \mathcal{E}'_{\kappa}$. Dann sind die Operatoren \tilde{S} und $\tilde{S}' = \alpha \circ \beta(\tilde{S})$ unitär äquivalente Erweiterungen.*

Beweis : \tilde{S} operiere in einem Raum \tilde{H} , \tilde{S}' in einem Raum \tilde{H}' . Wir bemerken zunächst, daß unter unseren Voraussetzungen der Raum $\mathbf{H}_{f_{\tilde{S}}}/\mathbf{H}_{f_{\tilde{S}}}^{\circ}$ in den Raum \tilde{H} isometrisch eingebettet ist (vgl. Folgerung 3.3). Im Raum \tilde{H}' liegt ebenfalls $\mathbf{H}_{f_{\tilde{S}'}}/\mathbf{H}_{f_{\tilde{S}'}}^{\circ}$ dicht eingebettet, man kann also den Operator U aus Folgerung 3.3 unitär auf \tilde{H}' fortsetzen. Das Bild von \tilde{H}' unter U ist ein abgeschlossener Teilraum von \tilde{H} , der die (nach Folgerung 3.5) dichte Teilmenge

$$\{U e_z^{\rightarrow} = e_{z_1}^{\rightarrow} + (z - z_1)(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow} \mid z \in \rho(\tilde{S})\}$$

enthält. U ist daher auch surjektiv.

Wir haben nur noch zu zeigen, daß

$$U \circ \tilde{S}' = \tilde{S} \circ U$$

gilt. Dazu berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned} \tilde{S} \circ U(e_z^{\rightarrow} - e_{z_1}^{\rightarrow}) &= \tilde{S} \left(e_{z_1}^{\rightarrow} + (z - z_1)(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow} - e_{z_1}^{\rightarrow} \right) = \\ &= (z - z_1) \tilde{S} (\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow} = (z - z_1) e_{z_1}^{\rightarrow} + (z - z_1) z (\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow} \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} U \circ \tilde{S}'(e_{\vec{z}} - e_{\vec{z}_1}) &= U(z e_{\vec{z}} - z_1 e_{\vec{z}_1}) = z U e_{\vec{z}} - z_1 U e_{\vec{z}_1} = \\ &= z(e_{\vec{z}_1} + (z - z_1)(\tilde{S} - z)^{-1} e_{\vec{z}_1}) - z_1 e_{\vec{z}_1} = (z - z_1) e_{\vec{z}_1} + (z - z_1) z (\tilde{S} - z)^{-1} e_{\vec{z}_1}. \end{aligned}$$

Die Operatoren $U \circ \tilde{S}'$ und $\tilde{S} \circ U$ stimmen also auf der Teilmenge $\mathcal{D}(S_{f_{\tilde{S}}})$ überein. Diese liegt aber nach Lemma 3.19 dicht in $\mathbb{H}_{f_{\tilde{S}}}$ und damit ebenfalls dicht in $\tilde{\mathbb{H}}'$, also ist $\tilde{S}' = U^{-1} \circ \tilde{S} \circ U$ auf ganz $\tilde{\mathbb{H}}'$. Wegen Bemerkung 3.4 und Satz 3.8 läßt U den Raum \mathbb{H} punktweise fest. Damit sind \tilde{S} und \tilde{S}' unitär äquivalente Erweiterungen. □

Folgerung 3.8 *Der Operator $\tilde{S} \in \mathcal{E}_{\kappa}$ erfülle die Bedingungen (3.25) und (3.26). Dann gibt es einen Operator $\tilde{S}' \in \mathcal{E}'_{\kappa}$ d.h. mit der Eigenschaft (3.24), so daß \tilde{S}' und \tilde{S} unitär äquivalente Erweiterungen sind.*

Beweis : Auch beim Beweis von Lemma 3.25 sind nur die Voraussetzungen (3.25) und (3.26) eingegangen. □

Formulieren wir unsere bisherigen Ergebnisse gemeinsam mit dem aus vorhergehenden Abschnitten Bekanntem, so erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 3.16 *Sei $\kappa \geq \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$ und $n \geq 2$. Dann vermitteln die Abbildungen α und β zueinander inverse Bijektionen zwischen der Menge aller Lösungen des Interpolationsproblems (1.3) in der Klasse \mathbb{N}_{κ} , die der Beschränktheitsforderung (3.22) genügen, und der Menge aller selbstadjungierten Erweiterungen des in \mathbb{H} symmetrischen Operators S in einem (von der Erweiterung abhängigen) Π_{κ} -Raum mit der Eigenschaft (3.24) modulo unitärer Äquivalenz.*

Beweis : Bezeichne mit \mathcal{E}''_{κ} die Menge \mathcal{E}'_{κ} modulo unitärer Äquivalenz. Dann kann man α auffassen als Abbildung

$$\alpha : \mathcal{F}_{\kappa} \longrightarrow \mathcal{E}''_{\kappa}.$$

Weiters ist $\beta : \mathcal{E}'_{\kappa} \rightarrow \mathcal{F}_{\kappa}$ ist nach der Aussage von Lemma 3.24 als Abbildung

$$\beta : \mathcal{E}''_{\kappa} \longrightarrow \mathcal{F}_{\kappa}$$

wohldefiniert. Die Beziehung

$$\beta \circ \alpha = \text{id}_{\mathcal{F}_\kappa}$$

ist die Aussage von Satz 3.15. Die noch notwendige Gleichung

$$\alpha \circ \beta = \text{id}_{\mathcal{E}''_\kappa}$$

folgt aus Lemma 3.25.

□

Kapitel 4

Beschreibung selbstadjungierter Erweiterungen

Nachdem wir gesehen haben, daß sich die Lösungen des Nevanlinna-Pick Interpolationsproblems durch selbstadjungierte Erweiterungen \tilde{S} eines gewissen symmetrischen Operators, nämlich durch einen Ausdruck der Gestalt

$$[(\tilde{S} - z)^{-1}\vec{e}, \vec{e}] \quad (4.1)$$

beschreiben lassen, wollen wir in diesem Kapitel solche Erweiterungen \tilde{S} und Ausdrücke der Gestalt (4.1) beschreiben. Dabei wird als Parameter eine Matrixfunktion auftreten, die im Sinne des folgenden Abschnittes endlich viele negative Quadrate besitzt.

4.1 Die Funktionenklassen $N_{\kappa}^{k \times k}$

Wir beginnen mit der Definition der Funktionenklassen $N_{\kappa}^{k \times k}$, die den Begriff der Nevanlinna-Klassen auf Matrixfunktionen verallgemeinern.

Definition 4.1 Sei $k \in \mathbf{IN}$, $\kappa \in \mathbf{IN}_0$ und $F : \rho(F) \rightarrow \mathbf{C}^{k \times k}$ eine $k \times k$ Matrixfunktion mit $\rho(F) \subseteq \mathbf{C}^+$. Wir sagen, F sei in der Klasse $N_{\kappa}^{k \times k}$, falls für je endlich viele Werte $\zeta_1, \dots, \zeta_m \in \rho(F)$ und Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \in \mathbf{C}^k$ die quadratische Form

$$\sum_{i,j=1}^m \left(\frac{F(\zeta_i) - F(\zeta_j)^*}{\zeta_i - \bar{\zeta}_j} \vec{a}_i, \vec{a}_j \right) \xi_i \bar{\xi}_j$$

höchstens κ negative Quadrate und für mindestens eine Wahl von $m, \zeta_1, \dots, \zeta_m$ und $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ genau κ negative Quadrate hat.

Im folgenden bezeichnen wir mit H einen endlichdimensionalen Vektorraum ($\dim H = n \in \mathbf{IN}$), versehen mit dem Skalarprodukt $[\cdot, \cdot]$. Weiters sei S ein auf der Hyperebene $D = \mathcal{D}(S)$ definierter, bezüglich $[\cdot, \cdot]$ symmetrischer Operator. Wir setzen voraus, daß der Skalarproduktraum $\langle H, [\cdot, \cdot] \rangle$ entartet, d.h. das $H^\circ \neq \{0\}$ gilt. Die Dimension von H° bezeichnen wir mit k , die Anzahl der negativen Quadrate von $[\cdot, \cdot]$ mit κ_1 und die Anzahl der positiven Quadrate mit $\kappa_2 = n - k - \kappa_1$. Sei \tilde{H} ein Π_κ -Raum ($\kappa \geq \kappa_1 + k$) mit $H \subseteq \tilde{H}$ und \tilde{S} eine in \tilde{H} selbstadjungierte Erweiterung von S . Das Skalarprodukt in \tilde{H} und in Teilräumen von \tilde{H} wird ebenfalls mit $[\cdot, \cdot]$ bezeichnet.

Um Ausdrücke der Gestalt (4.1) zu berechnen, werden wir den Raum \tilde{H} zerlegen und geeignete Basen einführen. Dazu unterscheiden wir drei Fälle, je nach der geometrischen Lage von D und H° zueinander. Diese sind

1. $D + H^\circ = H$; wegen $\dim D = n - 1$ ist dies gleichbedeutend mit
- 1'. $H^\circ \not\subseteq D$.
2. $H^\circ \subseteq D$, und ein (algebraisches) Komplement D_1 von H° in D ist nicht entartet.
3. $H^\circ \subseteq D$, und jedes (algebraische) Komplement von H° in D ist entartet.

Bei der Anwendung der in den folgenden Abschnitten entwickelten Formeln auf ein konkretes Interpolationsproblem vom Typ (1.3), ist alleine durch die vorgegebenen Daten z_1, \dots, z_n und w_1, \dots, w_n bestimmt, welcher der obigen Fälle eintritt.

4.2 Erster geometrischer Fall: $H^\circ \not\subseteq D$

Wir beginnen mit der folgenden einfachen Bemerkung:

Lemma 4.1 *Im Fall $D + H^\circ = H$ gilt $D^\perp = H^\circ$. Wir können D also in der Form*

$$D = D_1[+]D_2 \text{ mit } D_2 = D \cap H^\circ$$

zerlegen, wobei das Skalarprodukt $[\cdot, \cdot]$ auf D_1 nicht entartet.

Beweis : Sei $\vec{x} \in \mathbf{H}$, $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ mit $\vec{x}_1 \in D$ und $\vec{x}_2 \in \mathbf{H}^\circ$. Ist dann $\vec{y} \in D^\perp$, so gilt

$$[\vec{x}, \vec{y}] = \underbrace{[\vec{x}_1, \vec{y}]}_{=0} + \underbrace{[\vec{x}_2, \vec{y}]}_{=0} = 0,$$

also $\vec{y} \in \mathbf{H}^\circ$. Die umgekehrte Inklusion ist trivial.

Ist nun D_1 irgendein (algebraisches) Komplement von $D \cap \mathbf{H}^\circ$ in D , so ist D_1 nicht entartet, denn ein Vektor $\vec{x} \in D_1^\circ$ liegt auch in \mathbf{H}° .

□

Offenbar haben wir eine Zerlegung des Raumes \mathbf{H} der Gestalt

$$\mathbf{H} = D_1[\dot{+}]\mathbf{H}^\circ = D_1[\dot{+}](D \cap \mathbf{H}^\circ)[\dot{+}]D_3 = D_1[\dot{+}]D_2[\dot{+}]D_3 \quad (4.2)$$

erhalten, wobei $D_3 \subseteq \mathbf{H}^\circ$ ein eindimensionaler Teilraum von \mathbf{H}° ist. Betrachten wir nun \mathbf{H}° in dem Π_κ -Raum $\tilde{\mathbf{H}}$, so existiert ein mit \mathbf{H}° schief verbundener (k -dimensionaler) Teilraum $\hat{\mathbf{H}}^\circ$ von $\tilde{\mathbf{H}}$. Dieser kann, da D_1 als endlichdimensionaler nicht entarteter Teilraum von $\tilde{\mathbf{H}}$ ein orthogonales Komplement besitzt, mit \mathbf{H}° in diesem Komplement gewählt werden.

Wählen wir eine Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ von \mathbf{H}° mit

$$\langle \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{k-1} \rangle = D_2 \text{ und } \langle \vec{b}_k \rangle = D_3,$$

so gibt es eine Basis $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}$ von $\hat{\mathbf{H}}^\circ$ mit

$$[\vec{b}_i, \vec{c}_j] = \delta_{ij} \text{ für } i, j = 1, \dots, k.$$

Weiters bezeichnen wir mit \hat{D}_2 bzw. \hat{D}_3 die Teilräume

$$\hat{D}_2 = \langle \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_{k-1} \rangle \text{ und } \hat{D}_3 = \langle \vec{c}_k \rangle.$$

Der Raum $\mathbf{H} + \hat{\mathbf{H}}^\circ$ hat als endlichdimensionaler, nicht entarteter Teilraum von $\tilde{\mathbf{H}}$ ein orthogonales Komplement \mathbf{H}_1 . \mathbf{H}_1 ist offenbar ein Pontrjaginraum mit $\kappa_3 = \kappa - \kappa_1 - k$ negativen Quadraten. Nun haben wir eine Zerlegung des Raumes $\tilde{\mathbf{H}}$ in der Form

$$\tilde{\mathbf{H}} = \underbrace{D_1[\dot{+}]\left(\underbrace{(D_2[\dot{+}]D_3)}_{=\mathbf{H}} \dot{+} (\hat{D}_2[\dot{+}]\hat{D}_3)\right)}_{=\mathbf{D}(\mathbf{S})=D}[\dot{+}]\mathbf{H}_1, \quad (4.3)$$

wobei noch

$$\mathbf{H}^\circ = D_2[\dot{+}]D_3 \text{ und } \hat{\mathbf{H}}^\circ = \hat{D}_2[\dot{+}]\hat{D}_3$$

gilt¹. Entsprechend obiger Zerlegung (4.3) schreiben wir ein Element \vec{x} von \tilde{H} als

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \left(\left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i \vec{b}_i + x_k \vec{b}_k \right) + \left(\sum_{i=1}^{k-1} x'_i \vec{c}_i + x'_k \vec{c}_k \right) \right) + \vec{x}_2, \quad (4.4)$$

formal also als 6-Tupel

$$\vec{x} \simeq (\vec{x}_1, (x_1, \dots, x_{k-1}), x_k, (x'_1, \dots, x'_{k-1}), x'_k, \vec{x}_2).$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{x} und \vec{y} ist in dieser Darstellung durch

$$[\vec{x}, \vec{y}] = [\vec{x}_1, \vec{y}_1] + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_k \end{pmatrix} \cdot J_k \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ y'_1 \\ \vdots \\ y'_k \end{pmatrix} + [\vec{x}_2, \vec{y}_2]$$

gegeben; dabei bezeichnet J_k die Matrix

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & I_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_k & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Gram-Matrix J des Skalarproduktes $[\cdot, \cdot]$ in \tilde{H} schreibt sich bezüglich der Zerlegung (4.3) als Blockmatrix, nämlich als

$$J \simeq \left(\begin{array}{c|cc} I_{n-k} & & 0 \\ \hline & \begin{array}{cc} 0 & \vdots & I_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_k & \vdots & 0 \end{array} & \\ \hline 0 & & I \end{array} \right).$$

In der ersten und letzten Komponente wird das Skalarprodukt $[\cdot, \cdot]$ angewandt, in der mittleren Komponente das Skalarprodukt des \mathbf{C}^{2k} . Jetzt studieren wir die Wirkung eines Operators \tilde{S} auf einen Vektor \vec{x} . Bezüglich

¹Zerlegungen dieser Art erhält man im allgemeinen auch durch Anwendung von Satz 1.7.

der Zerlegung (4.3) können wir \tilde{S} als 6×6 -Blockmatrix schreiben, wobei die Eintragungen dieser Matrix Operatoren zwischen den entsprechenden Räumen sind (z.B. ist B_{25} ein Operator von \hat{D}_3 nach D_2):

$$\tilde{S} \simeq \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{61} & B_{62} & \cdots & B_{66} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Da $S \subseteq \tilde{S}$ gilt, können wir einige der B_{ij} bestimmen. Wegen $\mathcal{D}(S) = D_1 + D_2$ sind gerade die ersten beiden Spalten von \tilde{S} durch S festgelegt. Sei dazu $\vec{x} \in \mathcal{D}(S)$ gemäß (4.4) geschrieben, und gelte

$$\begin{aligned} S \left(\vec{x}_1 + \sum_{i=1}^{k-1} x_i \vec{b}_i \right) &= A_{11} \vec{x}_1 + A_{12} \left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i \vec{b}_i \right) + \\ &+ A_{21} \vec{x}_1 + A_{22} \left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i \vec{b}_i \right) + A_{31} \vec{x}_1 + A_{32} \left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i \vec{b}_i \right). \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von S gilt $S(D \cap \mathbb{H}^\circ) \subseteq D^\perp$, in diesem Fall (vgl. Lemma 4.1) also $S(D_2) \subseteq D_2 + D_3$. Es gilt damit $A_{12} = 0$. Mit diesen Bezeichnungen erhält man für \tilde{S}

$$\tilde{S} \simeq \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & B_{13} & \vdots & B_{14} & B_{15} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & B_{23} & \vdots & B_{24} & B_{25} & B_{26} \\ A_{31} & A_{32} & B_{33} & \vdots & B_{34} & B_{35} & B_{36} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & B_{43} & \vdots & B_{44} & B_{45} & B_{46} \\ 0 & 0 & B_{53} & \vdots & B_{54} & B_{55} & B_{56} \\ 0 & 0 & B_{63} & \vdots & B_{64} & B_{65} & B_{66} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Damit \tilde{S} in $\tilde{\mathbb{H}}$ selbstadjungiert ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Matrix $J\tilde{S}$ hermitesch (bzw. der durch $J\tilde{S}$ gegebene Operator im entspre-

chenden Skalarprodukt selbstadjungiert) ist. Wir berechnen also $J\tilde{S}$:

$$J\tilde{S} \simeq \left(\begin{array}{c|ccc|cc} A_{11} & 0 & B_{13} & \vdots & B_{14} & B_{15} & B_{16} \\ \hline 0 & 0 & B_{43} & \vdots & B_{44} & B_{45} & B_{46} \\ 0 & 0 & B_{53} & \vdots & B_{54} & B_{55} & B_{56} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & B_{23} & \vdots & B_{24} & B_{25} & B_{26} \\ A_{31} & A_{32} & B_{33} & \vdots & B_{34} & B_{35} & B_{36} \\ \hline 0 & 0 & G_2 B_{63} & \vdots & B_{64} & B_{65} & B_{66} \end{array} \right)$$

und erhalten die Relationen

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{11}^+, B_{13} = 0, B_{14} = A_{21}^+, B_{15} = A_{31}^+, B_{16} = 0, \\ B_{43} &= 0, B_{44} = A_{22}^+, B_{45} = A_{32}^+, B_{46} = 0, \\ B_{53} &= B_{53}^+, B_{54} = B_{23}^+, B_{55} = B_{33}^+, B_{56} = B_{63}^+, \\ B_{24} &= B_{24}^+, B_{25} = B_{34}^+, B_{26} = B_{64}^+, \\ B_{35} &= B_{35}^+, B_{36} = B_{65}^+, B_{66} = B_{66}^+. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dabei wurde zur Abkürzung das Zeichen $^+$ für den adjungierten Operator zwischen den entsprechenden Skalarprodukträumen verwendet. Setzt man nun die Relationen (4.7) in die Darstellung von \tilde{S} ein, so erhält man

$$J\tilde{S} \simeq \left(\begin{array}{c|ccc|cc} A_{11} & 0 & 0 & \vdots & A_{21}^+ & A_{31}^+ & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \vdots & A_{22}^+ & A_{32}^+ & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & B_{53}^+ & B_{23}^+ & B_{33}^+ & B_{63}^+ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \vdots & B_{23} & B_{24} & B_{34}^+ & B_{64}^+ \\ A_{31} & A_{32} & \vdots & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{65}^+ \\ \hline 0 & 0 & B_{63} & \vdots & B_{64} & B_{65} & B_{66} \end{array} \right),$$

oder

$$\tilde{S} \simeq \left(\begin{array}{c|ccc|cc} A_{11} & 0 & 0 & \vdots & A_{21}^+ & A_{31}^+ & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} & B_{23} & \vdots & B_{24} & B_{34}^+ & B_{64}^+ \\ A_{31} & A_{32} & B_{33} & \vdots & B_{34} & B_{35} & B_{65}^+ \\ \hline 0 & 0 & 0 & \vdots & A_{22}^+ & A_{32}^+ & 0 \\ 0 & 0 & B_{53} & \vdots & B_{23}^+ & B_{33}^+ & B_{63}^+ \\ \hline 0 & 0 & B_{63} & \vdots & B_{64} & B_{65} & B_{66} \end{array} \right).$$

Wir wollen nun $(\tilde{S} - z)^{-1}$ berechnen. Dabei berücksichtigen wir, daß wir eigentlich Ausdrücke der Gestalt $[(\tilde{S} - z)^{-1}\vec{e}, \vec{e}]$ mit $\vec{e} \in \mathbf{H}$ bestimmen wollen, und daher nur die „verallgemeinerte“ Resolvente

$$P_H(\tilde{S} - z)^{-1}|_H \text{ mit } H = \mathbf{H} + \hat{\mathbf{H}}^\circ$$

benötigen. Wir berechnen zunächst $(J\tilde{S} - Jz)^{-1}$:

$$(J\tilde{S} - Jz)^{-1} = \begin{pmatrix} X & * \\ * & * \end{pmatrix} \text{ wobei } X =$$

$$= \left[\left(\begin{array}{c|ccc|cc} A_{11} - z & 0 & 0 & \vdots & A_{21}^+ & A_{31}^+ \\ \hline 0 & 0 & 0 & \vdots & A_{22}^+ - z & A_{32}^+ \\ 0 & 0 & B_{53} & \vdots & B_{23}^+ & B_{33}^+ - z \\ \hline A_{21} & A_{22} - z & B_{23} & \vdots & B_{24} & B_{34}^+ \\ A_{31} & A_{32} & B_{33} - z & \vdots & B_{34} & B_{35} \end{array} \right) - \Gamma^+(B_{66} - z)^{-1}\Gamma \right]^{-1}$$

ist. Hier bezeichnet Γ den Operator

$$\Gamma = (0, 0, B_{63}, B_{64}, B_{65}).$$

Nun hat $\Gamma^+(B_{66} - z)^{-1}\Gamma$ offenbar die Gestalt

$$\Gamma^+(B_{66} - z)^{-1}\Gamma = \left(\begin{array}{c|ccc|cc} 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & w'_{53}(z) & \vdots & w'_{23}(z)^+ & w'_{33}(z)^+ \\ 0 & 0 & w'_{23}(z) & \vdots & w'_{24}(z) & w'_{34}(z)^+ \\ \hline 0 & 0 & w'_{33}(z) & \vdots & w'_{34}(z)^+ & w'_{35}(z) \end{array} \right),$$

ist also im wesentlichen eine $(k+1) \times (k+1)$ -Matrixfunktion. Da B_{66} ein im Π_{κ_3} -Raum \mathbb{H}_1 selbstadjungierter Operator ist, hat die Funktion $\Gamma^+(B_{66} - z)^{-1}\Gamma$ höchstens κ_3 negative Quadrate. Damit liegt also die $(k+1) \times (k+1)$ -Matrixfunktion

$$\begin{aligned} W(z) &= \begin{pmatrix} w'_{53}(z) \vdots w'_{23}(z)^+ & w'_{33}(z)^+ \\ w'_{23}(z) \vdots w'_{24}(z) & w'_{34}(z)^+ \\ w'_{33}(z) \vdots w'_{34}(z) & w'_{35}(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{53} \vdots B_{23}^+ & B_{33}^+ \\ B_{23} \vdots B_{24} & B_{34}^+ \\ B_{33} \vdots B_{34} & B_{35} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} w_{53}(z) \vdots w_{23}(z)^+ & w_{33}(z)^+ \\ w_{23}(z) \vdots w_{24}(z) & w_{34}(z)^+ \\ w_{33}(z) \vdots w_{34}(z) & w_{35}(z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in der Vereinigung

$$\bigcup_{\kappa'=0}^{\kappa_3} \mathbb{N}_{\kappa'}^{(k+1) \times (k+1)},$$

und es gilt $(J\tilde{S} - Jz)^{-1} =$

$$= \left(\left[\left(\begin{array}{c|cc} A_{11} - z & 0 & 0 & \vdots & A_{21}^+ & A_{31}^+ \\ \hline 0 & 0 & 0 & \vdots & A_{22}^+ - z & A_{32}^+ \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -z \\ \hline A_{21} & A_{22} - z & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & -z & \vdots & 0 & 0 \end{array} \right) - L_1^T W(z) L_1 \right]^{-1} \begin{array}{c} * \\ * \end{array} \right),$$

mit

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die linke obere Ecke von $(\tilde{S} - z)^{-1}$ ist von der Form $P_H(\tilde{S} - z)^{-1}|_H =$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc|cc} A_{11} - z & 0 & 0 & \vdots & A_{21}^+ & A_{31}^+ \\ \hline A_{21} & A_{22} - z & w_{23}(z) & \vdots & w_{24}(z) & w_{34}(z)^+ \\ A_{31} & A_{32} & w_{33}(z) - z & \vdots & w_{34}(z) & w_{35}(z) \\ \hline 0 & 0 & 0 & \vdots & A_{22}^+ - z & A_{32}^+ \\ 0 & 0 & w_{53}(z) & \vdots & w_{23}(z)^+ & w_{33}(z)^+ - z \end{array} \right)^{-1}.$$

Diese Matrix hat die Blockgestalt²

$$\begin{pmatrix} A & 0 & C \\ D & E & F \\ 0 & H & K \end{pmatrix}^{-1}. \quad (4.8)$$

Wir wollen einige Eintragungen dieser Matrix explizit bestimmen. Dazu führen wir noch eine Abkürzung ein. Bezeichne im folgenden mit

$$S \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} = Y_{i_1 j_1} - Y_{i_1 j_2} Y_{i_2 j_2}^{-1} Y_{i_2 j_1}$$

das „Schur-Komplement“ des Minors $\begin{pmatrix} Y_{i_1 j_1} & Y_{i_1 j_2} \\ Y_{i_2 j_1} & Y_{i_2 j_2} \end{pmatrix}$ einer Matrix $Y = (Y_{i,j})$.

Um Ausdrücke der Gestalt (4.1) zu berechnen benötigen wir von der inversen Matrix $(X_{ij})_{i,j=1,\dots,3}$ nur die Blöcke X_{11}, X_{12}, X_{31} und X_{32} . Diese berechnen wir im folgenden Lemma.

Lemma 4.2 Sei $X = (X_{ij})_{i,j=1}^3$ die Inverse der Blockmatrix

$$Y = \begin{pmatrix} A & 0 & C \\ D & E & F \\ 0 & H & K \end{pmatrix},$$

und seien A, E und K invertierbar. Dann gilt für die erste Spalte von X

$$X_{11} = \left(A + CK^{-1}HS \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} D \right)^{-1},$$

²Die Unterteilung in diese Blöcke ist die größte Unterteilung, die ein „geschicktes“ Ausrechnen von $[(\tilde{S} - z)^{-1}\vec{e}, \vec{e}]$ mit $\vec{e} \in \mathbb{H}$ ermöglicht.

$$X_{21} = -S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} D X_{11},$$

$$X_{31} = K^{-1} H S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} D X_{11}$$

und für die zweite Spalte

$$X_{22} = \left(D A^{-1} C K^{-1} H + S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right)^{-1},$$

$$X_{12} = A^{-1} C K^{-1} H X_{22},$$

$$X_{32} = -K^{-1} H X_{22}.$$

Beweis : Es gilt $Y \cdot X = I$. Schreiben wir die Gleichungen für die erste Spalte ausführlich an, so erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} A X_{11} & + C X_{31} & = I \\ D X_{11} & + E X_{21} & + F X_{31} = 0 \\ & H X_{21} & + K X_{31} = 0 \end{array} .$$

Daraus folgt

$$X_{31} = -K^{-1} H X_{21}$$

und

$$D X_{11} + E X_{21} - F K^{-1} H X_{21} = 0,$$

also

$$X_{21} = -(E - F K^{-1} H)^{-1} D X_{11} = -S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} D X_{11}.$$

Damit ist

$$X_{31} = K^{-1} H S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} D X_{11}$$

und wir erhalten

$$X_{11} = \left(A + C K^{-1} H S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} D \right)^{-1} .$$

Die Gleichungen für die zweite Spalte lauten

$$\begin{array}{rcl} A X_{12} & + C X_{32} & = 0 \\ D X_{12} & + E X_{22} & + F X_{32} = I \\ & H X_{22} & + K X_{32} = 0 \end{array} .$$

Daraus folgt wieder

$$X_{32} = -K^{-1}HX_{22}$$

und

$$X_{12} = -A^{-1}CX_{32} = A^{-1}CK^{-1}HX_{22}.$$

Weiters ist

$$DA^{-1}CK^{-1}HX_{22} + EX_{22} - FK^{-1}HX_{22} = I,$$

also

$$X_{22} = \left(DA^{-1}CK^{-1}H + S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right)^{-1}.$$

□

Wir bemerken, daß der Parameter $W(z)$ hier im wesentlichen nur in der Verbindung

$$K^{-1}H(E - FK^{-1}H)^{-1}$$

auftritt. Schreibt man einen Vektor $\vec{e} \in \mathbb{H}$ in der Form (4.4), also

$$\vec{e} = \vec{e}_1 + \left(\sum_{i=1}^{k-1} e_i \vec{b}_i + e_k \vec{b}_k \right),$$

so erhält man für den Ausdruck (4.1) :

$$\begin{aligned} [(\tilde{S} - z)^{-1}\vec{e}, \vec{e}] &= \left[P_H(\tilde{S} - z)^{-1}|_H \left(\vec{e}_1 + \sum_{i=1}^k e_i \vec{b}_i \right), \vec{e}_1 + \sum_{i=1}^k e_i \vec{b}_i \right] = \\ &= \left[\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & * \\ * & * & * \\ X_{31} & X_{32} & * \end{pmatrix} \left(\vec{e}_1 + \sum_{i=1}^k e_i \vec{b}_i \right), \vec{e}_1 + \sum_{i=1}^k e_i \vec{b}_i \right] = \\ &= \left[\begin{pmatrix} X_{11}\vec{e}_1 + X_{12} \left(\sum_{i=1}^k e_i \vec{b}_i \right) \\ X_{31}\vec{e}_1 + X_{32} \left(\sum_{i=1}^k e_i \vec{b}_i \right) \end{pmatrix}, \vec{e}_1 + \sum_{i=1}^k e_i \vec{b}_i \right] = \\ &= \left[X_{11}\vec{e}_1 + X_{12} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{k-1} \\ e_k \end{pmatrix}, \vec{e}_1 \right] + \left(X_{31}\vec{e}_1 + X_{32} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{k-1} \\ e_k \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{k-1} \\ e_k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Bemerkung 4.1 Ein weitergehendes Einsetzen in obige Formeln wollen wir an dieser Stelle nicht durchführen. Im letzten Kapitel dieser Arbeit werden die angegebenen Formeln in einigen Beispielen weiter ausgerechnet und die Lösungsfunktion des Interpolationsproblems explizit bestimmt.

4.3 Zweiter geometrischer Fall: $H^\circ \subseteq D$, D_1 nicht entartet

In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall, daß der isotrope Teilraum H° in D enthalten ist, und ein (algebraisches) Komplement D_1 von H° in D nicht entartet. Auch hier führt uns die folgende Bemerkung zu einer Zerlegung des Raumes \tilde{H} .

Lemma 4.3 Sei D_0 ein (algebraisches) Komplement von H° in D_1^\perp . Dann ist D_0 nicht entartet.

Beweis : Zunächst existiert D_1^\perp wegen der Endlichdimensionalität und unseren geometrischen Voraussetzungen. Es gilt daher

$$H = D_1[+] (H^\circ \dot{+} D_0).$$

Ist $\vec{x} \in D_0^\circ$, so ist $\vec{x} \perp D_0$, $\vec{x} \perp D_1$ und auch $\vec{x} \perp H^\circ$, also $\vec{x} \in H^\circ$. Damit gilt aber $\vec{x} = 0$.

□

Wir wählen wieder einen (k -dimensionalen) mit H° schief verbundenen Teilraum \hat{H}° in \tilde{H} , und ein orthogonales Komplement H_1 von $H \dot{+} \hat{H}^\circ$ in \tilde{H} . Ein solches existiert, da $H \dot{+} \hat{H}^\circ$ endlichdimensional und nicht entartet ist. Wieder hat H_1 genau $\kappa_3 = \kappa - \kappa_1 - k$ negative Quadrate. Damit erhalten wir eine Zerlegung des Raumes \tilde{H} :

$$\tilde{H} = \underbrace{D_0[+] D_1[+]}_{=H} \overbrace{D_1[+] (H^\circ \dot{+} \hat{H}^\circ)}^{=\mathcal{D}(S)=D} [+] H_1. \quad (4.10)$$

Seien $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ und $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}$ Basen von H° bzw. \hat{H}° mit

$$[\vec{b}_i, \vec{c}_j] = \delta_{ij} \text{ für } i, j = 1, \dots, k,$$

und $\vec{b}_0 \in D_0$ mit $[\vec{b}_0, \vec{b}_0] = \sigma = \pm 1$. Dann schreibt sich ein Vektor $\vec{x} \in \tilde{\mathbf{H}}$ entsprechend der Zerlegung (4.10) als

$$\vec{x} = x_0 \vec{b}_0 + \vec{x}_1 + \left(\sum_{i=1}^k x_i \vec{b}_i + \sum_{i=1}^k x'_i \vec{c}_i \right) + \vec{x}_2, \quad (4.11)$$

formal also als 5-Tupel

$$\vec{x} \simeq (x_0, \vec{x}_1, (x_1, \dots, x_k), (x'_1, \dots, x'_k), \vec{x}_2).$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{x} und \vec{y} ist in dieser Darstellung gegeben durch

$$[\vec{x}, \vec{y}] = \sigma x_0 \overline{y_0} + [\vec{x}_1, \vec{y}_1] + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_k \end{pmatrix} \cdot J_k \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ y'_1 \\ \vdots \\ y'_k \end{pmatrix} + [\vec{x}_2, \vec{y}_2].$$

Wieder bezeichnet J_k die Matrix

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & I_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_k & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Gram-Matrix J des Skalarproduktes $[\cdot, \cdot]$ in $\tilde{\mathbf{H}}$ schreibt sich bezüglich der Zerlegung (4.10) als Blockmatrix, nämlich als

$$J \simeq \left(\begin{array}{c|cc} 1 & & 0 \\ \hline & I_{n-k-1} & \\ \hline & & \begin{array}{c|c} 0 & \vdots & I_k \\ \hline \dots & \dots & \dots \\ I_k & \vdots & 0 \end{array} \\ \hline 0 & & I \end{array} \right),$$

wobei in der ersten, zweiten und letzten Komponente das Skalarprodukt $[\cdot, \cdot]$ verwendet wird, ansonsten das Skalarprodukt des \mathbf{C}^{2k} . Ist \tilde{S} eine in

\tilde{H} selbstadjungierte Erweiterung von S , so schreibt sich entsprechend der Zerlegung (4.10) \tilde{S} als 5×5 -Blockmatrix

$$\tilde{S} \simeq \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{15} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{25} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{51} & B_{52} & \cdots & B_{55} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Wegen $D = \mathcal{D}(S) = D_1[+]H^\circ$ können wir die zweite und dritte Spalte aus der Relation $S \subseteq \tilde{S}$ bestimmen. Sei dazu

$$\begin{aligned} S \left(\vec{x}_1 + \sum_{i=1}^k x_i \vec{b}_i \right) &= A_{21} \vec{x}_1 + A_{13} \left(\sum_{i=1}^k x_i \vec{b}_i \right) + \\ &+ A_{22} \vec{x}_1 + A_{23} \left(\sum_{i=1}^k x_i \vec{b}_i \right) + A_{32} \vec{x}_1 + A_{33} \left(\sum_{i=1}^k x_i \vec{b}_i \right). \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von S gilt $S(H^\circ) \subseteq D^\perp = H^\circ + D_0$, also ist $A_{23} = 0$. Somit erhalten wir

$$\tilde{S} \simeq \left(\begin{array}{cc|c|c|c} B_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{14} & B_{15} \\ B_{21} & A_{22} & 0 & B_{24} & B_{25} \\ \hline B_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{34} & B_{35} \\ \hline B_{41} & 0 & 0 & B_{44} & B_{45} \\ \hline B_{51} & 0 & 0 & B_{54} & B_{55} \end{array} \right)$$

und

$$J\tilde{S} \simeq \left(\begin{array}{cc|c|c|c} B_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{14} & B_{15} \\ B_{21} & A_{22} & 0 & B_{24} & B_{25} \\ \hline B_{41} & 0 & 0 & B_{44} & B_{45} \\ \hline B_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{34} & B_{35} \\ \hline B_{51} & 0 & 0 & B_{54} & B_{55} \end{array} \right).$$

Soll \tilde{S} selbstadjungiert sein, so muß

$$\begin{aligned} B_{11} &= B_{11}^+, A_{12}^+ = B_{21}, A_{13}^+ = B_{41}, B_{14} = B_{31}^+, \\ B_{15} &= B_{15}^+, A_{22} = A_{22}^+, B_{24} = A_{32}^+, B_{25} = 0, B_{44} = A_{33}^+, \\ B_{45} &= 0, B_{34} = B_{34}^+, B_{35} = B_{54}^+, B_{55} = B_{55}^+ \end{aligned} \quad (4.13)$$

gelten. Setzen wir diese Relationen oben ein, so erhalten wir

$$J\tilde{S} \simeq \left(\begin{array}{cc|ccc} B_{11} & A_{12} & A_{13} & \vdots & B_{31}^+ & B_{51}^+ \\ A_{12}^+ & A_{22} & 0 & \vdots & A_{32}^+ & 0 \\ \hline A_{13}^+ & 0 & 0 & \vdots & A_{33}^+ & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{31} & A_{32} & A_{33} & \vdots & B_{34} & B_{54}^+ \\ \hline B_{51} & 0 & 0 & \vdots & B_{54} & B_{55} \end{array} \right),$$

oder

$$\tilde{S} \simeq \left(\begin{array}{cc|ccc} B_{11} & A_{12} & A_{13} & \vdots & B_{31}^+ & B_{51}^+ \\ A_{12}^+ & A_{22} & 0 & \vdots & A_{32}^+ & 0 \\ \hline B_{31} & A_{32} & A_{33} & \vdots & B_{34} & B_{54}^+ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{13}^+ & 0 & 0 & \vdots & A_{33}^+ & 0 \\ \hline B_{51} & 0 & 0 & \vdots & B_{54} & B_{55} \end{array} \right).$$

Da wir nur an der verallgemeinerten Resolvente $P_H(\tilde{S} - z)^{-1}|_H$ interessiert sind, verfahren wir auch weiterhin wie im letzten Abschnitt. Wir berechnen also zunächst $(J\tilde{S} - Jz)^{-1}$:

$$(J\tilde{S} - Jz)^{-1} = \begin{pmatrix} X & * \\ * & * \end{pmatrix} \text{ wobei } X =$$

$$= \left[\left(\begin{array}{cc|ccc} B_{11} - z & A_{12} & A_{13} & \vdots & B_{31}^+ \\ A_{12}^+ & A_{22} - z & 0 & \vdots & A_{32}^+ \\ \hline A_{13}^+ & 0 & 0 & \vdots & A_{33}^+ - z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{31} & A_{32} - z & A_{33} - z & \vdots & B_{34} \end{array} \right) - \Gamma^+(B_{55} - z)^{-1}\Gamma \right]^{-1}$$

ist. Hier bezeichnet Γ den Operator

$$\Gamma = (B_{51}, 0, 0, B_{54}).$$

Wieder ist $\Gamma^+(B_{66}-z)^{-1}\Gamma$ im wesentlichen eine $(k+1)\times(k+1)$ -Matrixfunktion und hat die Gestalt

$$\Gamma^+(B_{55}-z)^{-1}\Gamma = \left(\begin{array}{cc|ccc} w'_{11}(z) & 0 & 0 & \vdots & w'_{31}(z)^+ \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w'_{31}(z) & 0 & 0 & \vdots & w'_{34}(z) \end{array} \right).$$

Da B_{55} ein im Π_{κ_3} -Raum H_1 selbstadjungierter Operator ist, hat die Funktion $\Gamma^+(B_{55}-z)^{-1}\Gamma$ höchstens κ_3 negative Quadrate. Damit liegt also die $(k+1)\times(k+1)$ -Matrixfunktion

$$\begin{aligned} W(z) &= \begin{pmatrix} w'_{11}(z) & w'_{31}(z)^+ \\ w'_{31}(z) & w'_{34}(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{11}(z) & B_{31}(z)^+ \\ B_{31}(z) & B_{34}(z) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} w_{11}(z) & w_{31}(z)^+ \\ w_{31}(z) & w_{34}(z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in der Vereinigung

$$\bigcup_{\kappa'=0}^{\kappa_3} N_{k'}^{(k+1)\times(k+1)},$$

und es gilt $(J\tilde{S} - Jz)^{-1} =$

$$= \left(\begin{array}{c} \left[\left(\begin{array}{cc|ccc} -z & A_{12} & A_{13} & \vdots & 0 \\ A_{12}^+ & A_{22}-z & 0 & \vdots & A_{32}^+ \\ \hline A_{13}^+ & 0 & 0 & \vdots & A_{33}^+-z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & A_{32} & A_{33}-z & \vdots & 0 \end{array} \right) - L_2^T W(z) L_2 \right]^{-1} & * \\ * & * \end{array} \right),$$

mit

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die linke obere Ecke $P_H(\tilde{S} - z)^{-1}|_H$ von $(\tilde{S} - z)^{-1}$ berechnet sich damit zu $P_H(\tilde{S} - z)^{-1}|_H =$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} w_{11}(z) - z & A_{12} & A_{13} & \vdots w_{31}(z)^+ \\ A_{12}^+ & A_{22} - z & 0 & \vdots A_{32}^+ \\ \hline w_{31} & A_{32} & A_{33} - z & \vdots w_{34}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{13}^+ & 0 & 0 & \vdots A_{33}^+ - z \end{array} \right)^{-1}.$$

Wir fassen die ersten beiden Zeilen bzw. Spalten zusammen³ und berechnen die Inverse im folgenden Lemma.

Lemma 4.4 Sei $X = (X_{ij})_{i,j=1}^3$ die Inverse der Blockmatrix

$$Y = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & 0 & K \end{pmatrix},$$

und seien A, E und K invertierbar. Dann gilt für die erste Spalte von X

$$X_{11} = \left(S \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - BE^{-1}S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right)^{-1},$$

$$X_{21} = -E^{-1}S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X_{11},$$

$$X_{31} = -K^{-1}G X_{11},$$

und für die zweite Spalte

$$X_{22} = \left(E - S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} B \right)^{-1},$$

$$X_{12} = -S \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} B X_{22},$$

$$X_{32} = K^{-1}GS \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} B X_{22}.$$

³vgl. Fußnote ² vor Lemma 4.2 .

Beweis : Es gilt $Y \cdot X = I$. Schreiben wir die Gleichungen für die erste Spalte ausführlich auf, so erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} AX_{11} & +BX_{21} & +CX_{31} = I \\ DX_{11} & +EX_{21} & +FX_{31} = 0 \\ GX_{11} & & +KX_{31} = 0 \end{array}$$

Daraus folgt

$$X_{31} = -K^{-1}GX_{11}$$

und

$$DX_{11} + EX_{21} - FK^{-1}GX_{11} = 0,$$

also

$$X_{21} = -E^{-1}(D - FK^{-1}G)X_{11} = -E^{-1}S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X_{11}.$$

Setzt man dieses in die erste Gleichung ein, so ergibt sich

$$AX_{11} - BE^{-1}S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X_{11} - CK^{-1}GX_{11} = I,$$

also

$$X_{11} = \left(S \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - BE^{-1}S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right)^{-1}.$$

Die Gleichungen für die zweite Spalte lauten

$$\begin{array}{rcl} AX_{12} & +BX_{22} & +CX_{32} = 0 \\ DX_{12} & +EX_{22} & +FX_{32} = I \\ GX_{12} & & +KX_{32} = 0 \end{array}$$

Dann ist wieder

$$X_{32} = -K^{-1}GX_{22}$$

und

$$AX_{12} + BX_{22} - CK^{-1}GX_{22} = 0,$$

also

$$X_{12} = -S \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} BX_{22}$$

und damit

$$X_{32} = K^{-1}GS \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} BX_{22}.$$

Setzen wir die bisher erhaltenen Formeln in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich

$$-DS \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} BX_{22} + EX_{22} + FK^{-1}GS \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} BX_{22} = I,$$

also

$$X_{22} = \left(E - S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} B \right)^{-1}.$$

□

Schreibt man wieder einen Vektor $\vec{e} \in \mathbb{H}$ in der Form (4.11), also

$$\vec{e} = (e_0 \vec{b}_0 + \vec{e}_1) + \sum_{i=1}^k e_i \vec{b}_i,$$

so erhält man für den Ausdruck $[(\tilde{S} - z)^{-1} \vec{e}, \vec{e}]$ analog wie im letzten Abschnitt: $[(\tilde{S} - z)^{-1} \vec{e}, \vec{e}] =$

$$\begin{aligned} &= \left[P_H (\tilde{S} - z)^{-1} |_H \left(e_0 \vec{b}_0 + \vec{e}_1 + \sum_{i=1}^k e_i \vec{b}_i \right), e_0 \vec{b}_0 + \vec{e}_1 + \sum_{i=1}^k e_i \vec{b}_i \right] = \\ &= \left[X_{11} (e_0 \vec{b}_0 + \vec{e}_1) + X_{12} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_k \end{pmatrix}, e_0 \vec{b}_0 + \vec{e}_1 \right] + \\ &\quad + \left(X_{31} (e_0 \vec{b}_0 + \vec{e}_1) + X_{32} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_k \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.4 Dritter geometrischer Fall: $\mathbb{H}^\circ \subseteq D$, D_1 entartet

Wir betrachten nun den noch verbleibenden geometrischen Fall, indem nämlich $\mathbb{H}^\circ \subseteq D$ gilt und jedes (algebraische) Komplement D_1 von \mathbb{H}° in D entartet. Mit Hilfe des nächsten Lemmas erhalten wir wieder eine Zerlegung eines Erweiterungsraumes $\tilde{\mathbb{H}}$ von \mathbb{H} .

Lemma 4.5 Sei $D_1[\dot{+}]\mathbb{H}^\circ = D$, also D_1 ein (algebraisches) Komplement von \mathbb{H}° in D . Dann gibt es zwei Vektoren \vec{b}_0 und \vec{c}_0 mit

$$[\vec{b}_0, \vec{c}_0] = 1 \text{ und } [\vec{b}_0, \vec{b}_0] = [\vec{c}_0, \vec{c}_0] = 0,$$

die

$$\langle \vec{c}_0 \rangle = D_1 \cap D_1^\perp, b_0 \perp D_1' \text{ und } \vec{b}_0 \notin D$$

erfüllen.

Beweis : Bezeichne mit D_1' ein Komplement von $D_1 \cap D_1^\perp$ in D_1 , und mit D_0' ein (algebraisches) Komplement von D in \mathbb{H} . Als nicht entarteter Teilraum des endlichdimensionalen Skalarproduktraumes $D_1 \dot{+} D_0'$, besitzt D_1' ein orthogonales Komplement $D_1'^\perp$. Offenbar ist $D_1 \dot{+} D_0'$ und D_1' , damit also auch $D_1'^\perp$ nicht entartet, und es gibt in $D_1'^\perp$ einen, mit dem neutralen Teilraum $D_1 \cap D_1^\perp$ schief verbundenen Teilraum D_0 . Da kein Element von D_0 orthogonal auf $D_1 \cap D_1^\perp$ ist, muß $D_0 \cap D_1 = \{0\}$ gelten. Also ist die Dimension von D_0 und damit auch die Dimension von $D_1 \cap D_1^\perp$ gleich 1, und wir haben eine Basis $\{\vec{b}_0\}$ von D_0 bzw. $\{\vec{c}_0\}$ von $D_1 \cap D_1^\perp$ mit allen oben verlangten Eigenschaften. Dabei ergibt sich $\vec{b}_0 \notin D$ aus $\vec{b}_0 \in D_1 \dot{+} D_0'$ und $\vec{b}_0 \notin D_1$. \square

Bezeichnen wir $D_1 \cap D_1^\perp$ mit \hat{D}_0 , so haben wir also eine Zerlegung des Raumes $\tilde{\mathbb{H}}$ in der Form

$$\tilde{\mathbb{H}} = \underbrace{\left(D_0 \dot{+} \hat{D}_0 \right) [\dot{+}] D_1' [\dot{+}] \left(\mathbb{H}^\circ \dot{+} \hat{\mathbb{H}}^\circ \right) [\dot{+}] \mathbb{H}_1}_{=\mathbb{H}} \quad (4.14)$$

erhalten. Dabei ist wieder \mathbb{H}° schief verbunden mit $\hat{\mathbb{H}}^\circ$, und \mathbb{H}_1 das orthogonale Komplement von $\mathbb{H} \dot{+} \hat{\mathbb{H}}^\circ$ in $\tilde{\mathbb{H}}$. Seien $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ und $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}$ Basen von \mathbb{H}° bzw. $\hat{\mathbb{H}}^\circ$ mit

$$[\vec{b}_i, \vec{c}_j] = \delta_{ij} \text{ für } i, j = 1, \dots, k,$$

dann schreibt sich ein Vektor $\vec{x} \in \tilde{\mathbb{H}}$ gemäß obiger Zerlegung (4.14) als

$$\vec{x} = \left(x_0 \vec{b}_0 + x'_0 \vec{c}_0 \right) + \vec{x}_1 + \left(\sum_{i=1}^k x_i \vec{b}_i + \sum_{i=1}^k x'_i \vec{c}_i \right) + \vec{x}_2, \quad (4.15)$$

formal also als 6-Tupel

$$\vec{x} \simeq (x_0, x'_0, \vec{x}_1, (x_1, \dots, x_k), (x'_1, \dots, x'_k), \vec{x}_2).$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{x} und \vec{y} ist in dieser Darstellung durch

$$[\vec{x}, \vec{y}] = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \cdot J_2 \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} + [\vec{x}_1, \vec{y}_1] + \begin{pmatrix} x_k \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_k \end{pmatrix} \cdot J_k \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ y'_1 \\ \vdots \\ y'_k \end{pmatrix} + [\vec{x}_2, \vec{y}_2]$$

gegeben. Wieder bezeichnet J_k , und entsprechend J_2 , die Matrix

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & I_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_k & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir können die Gram-Matrix des Skalarproduktes daher schreiben als

$$J \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & \vdots & 1 & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 1 & \vdots & 0 & & & & \\ \hline & & & I_{n-k-2} & & & \\ & & & & \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \vdots & I_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_k & \vdots & 0 \end{array} & & \\ \hline 0 & & & & & & I \end{array} \right),$$

wobei in der zweiten und letzten Komponente das Skalarprodukt $[\cdot, \cdot]$ verwendet wird. Ansonsten benützen wir das Skalarprodukt des \mathbf{C}^2 bzw. \mathbf{C}^{2k} . Ist \tilde{S} eine in \tilde{H} selbstadjungierte Erweiterung von S , so schreibt sich entsprechend der Zerlegung (4.14) \tilde{S} als 6×6 -Blockmatrix

$$\tilde{S} \simeq \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{61} & B_{62} & \cdots & B_{66} \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Wegen $D = \mathcal{D}(S) = \hat{D}_0[+]D'_1[+]H^\circ$ können wir die zweite, dritte und vierte Spalte aus der Relation $S \subseteq \tilde{S}$ bestimmen. Dazu sei

$$\begin{aligned} S \left(x'_0 \vec{c}_0 + \vec{x}_1 + \sum_{i=1}^k x_i \vec{b}_i \right) &= A_{12}(x'_0 \vec{c}_0) + A_{13} \vec{x}_1 + \\ &+ A_{14} \left(\sum_{i=1}^k x_i \vec{b}_i \right) + A_{22}(x'_0 \vec{c}_0) + A_{23} \vec{x}_1 + A_{24} \left(\sum_{i=1}^k x_i \vec{b}_i \right) + \\ &+ A_{32}(x'_0 \vec{c}_0) + A_{33} \vec{x}_1 + A_{34} \left(\sum_{i=1}^k x_i \vec{b}_i \right) + \\ &+ A_{42}(x'_0 \vec{c}_0) + A_{43} \vec{x}_1 + A_{44} \left(\sum_{i=1}^k x_i \vec{b}_i \right). \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von S gilt $S(H^\circ) \subseteq D^\perp = H^\circ + \hat{D}_0$, also ist $A_{14} = 0$ und $A_{34} = 0$. Somit erhält man

$$\tilde{S} \simeq \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} B_{11} \vdots A_{12} & A_{13} & 0 & \vdots B_{15} & B_{15} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{21} \vdots A_{22} & A_{23} & A_{24} & \vdots B_{25} & B_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{31} \vdots A_{32} & A_{33} & 0 & \vdots B_{35} & B_{36} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{41} \vdots A_{42} & A_{43} & A_{44} & \vdots B_{45} & B_{46} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{51} \vdots 0 & 0 & 0 & \vdots B_{55} & B_{56} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{61} \vdots 0 & 0 & 0 & \vdots B_{65} & B_{66} \end{array} \right)$$

und

$$\tilde{J}\tilde{S} \simeq \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} B_{21} \vdots A_{22} & A_{23} & A_{24} & \vdots B_{25} & B_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{11} \vdots A_{12} & A_{13} & 0 & \vdots B_{15} & B_{15} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{31} \vdots A_{32} & A_{33} & 0 & \vdots B_{35} & B_{36} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{51} \vdots 0 & 0 & 0 & \vdots B_{55} & B_{56} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{41} \vdots A_{42} & A_{43} & A_{44} & \vdots B_{45} & B_{46} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{61} \vdots 0 & 0 & 0 & \vdots B_{65} & B_{66} \end{array} \right).$$

Soll \tilde{S} selbstadjungiert sein, so muß

$$B_{21} = B_{21}^+, A_{22}^+ = B_{11}, A_{23}^+ = B_{31}, A_{24}^+ = B_{51}, B_{25} = B_{41}^+,$$

$$\begin{aligned}
B_{26} &= B_{61}^+, A_{12} = A_{12}^+, A_{13}^+ = A_{32}, B_{15} = A_{42}^+, B_{16} = 0, \\
A_{33} &= A_{33}^+, B_{35} = A_{43}^+, B_{36} = 0, B_{55} = A_{44}^+, B_{56} = 0, \\
B_{45} &= B_{45}^+, B_{46} = B_{65}^+, B_{66} = B_{66}^+
\end{aligned}$$

gelten. Setzen wir diese Relationen oben ein, so erhalten wir

$$J\tilde{S} \simeq \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
B_{21} \vdots A_{22} & A_{23} & A_{24} \vdots B_{41}^+ & B_{61}^+ & & \\
\hdashline
A_{22}^+ \vdots A_{12} & A_{32}^+ & 0 \vdots A_{42}^+ & 0 & & \\
\hdashline
A_{23}^+ \vdots A_{32} & A_{33} & 0 \vdots A_{43}^+ & 0 & & \\
\hdashline
A_{24}^+ \vdots 0 & 0 & 0 \vdots A_{44}^+ & 0 & & \\
\hdashline
B_{41} \vdots A_{42} & A_{43} & A_{44} \vdots B_{45} & B_{65}^+ & & \\
\hdashline
B_{61} \vdots 0 & 0 & 0 \vdots B_{65} & B_{66} & &
\end{array} \right)$$

oder

$$\tilde{S} \simeq \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
A_{22}^+ \vdots A_{12} & A_{32}^+ & 0 \vdots A_{42}^+ & 0 & & \\
\hdashline
B_{21} \vdots A_{22} & A_{23} & A_{24} \vdots B_{41}^+ & B_{61}^+ & & \\
\hdashline
A_{23}^+ \vdots A_{32} & A_{33} & 0 \vdots A_{43}^+ & 0 & & \\
\hdashline
B_{41} \vdots A_{42} & A_{43} & A_{44} \vdots B_{45} & B_{65}^+ & & \\
\hdashline
A_{24}^+ \vdots 0 & 0 & 0 \vdots A_{44}^+ & 0 & & \\
\hdashline
B_{61} \vdots 0 & 0 & 0 \vdots B_{65} & B_{66} & &
\end{array} \right).$$

Auch hier verfahren wir wie in den beiden vorangegangenen Abschnitten, und berechnen zunächst $(J\tilde{S} - Jz)^{-1}$:

$$(J\tilde{S} - Jz)^{-1} = \begin{pmatrix} X & * \\ * & * \end{pmatrix} \text{ wobei } X =$$

$$= \left[\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
B_{21} \vdots A_{22} - z & A_{23} & A_{24} \vdots B_{41}^+ & & & \\
\hdashline
A_{22}^+ - z \vdots A_{12} & A_{32}^+ & 0 \vdots A_{42}^+ & & & \\
\hdashline
A_{23}^+ \vdots A_{32} & A_{33} - z & 0 \vdots A_{43}^+ & & & \\
\hdashline
A_{24}^+ \vdots 0 & 0 & 0 \vdots A_{44}^+ - z & & & \\
\hdashline
B_{41} \vdots A_{42} & A_{43} & A_{44} - z \vdots B_{45} & & &
\end{array} \right) - \Gamma^+(B_{66} - z)^{-1}\Gamma \right]^{-1}$$

ist. Hier bezeichnet Γ den Operator

$$\Gamma = (B_{61}, 0, 0, 0, B_{65}).$$

Wieder ist $\Gamma^+(B_{66}-z)^{-1}\Gamma$ im wesentlichen eine $(k+1) \times (k+1)$ -Matrixfunktion und hat die Gestalt

$$\Gamma^+(B_{55}-z)^{-1}\Gamma = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} w'_{21}(z) & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & w'_{41}(z)^+ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w'_{41}(z) & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & w'_{45}(z) \end{array} \right).$$

Da B_{66} ein im Π_{κ_3} -Raum H_1 selbstadjungierter Operator ist, hat die Funktion $\Gamma^+(B_{66}-z)^{-1}\Gamma$ höchstens κ_3 negative Quadrate. Damit ist also die $(k+1) \times (k+1)$ -Matrixfunktion

$$\begin{aligned} W(z) &= \begin{pmatrix} w'_{21}(z) & w'_{41}(z)^+ \\ w'_{41}(z) & w'_{45}(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{21}(z) & B_{41}(z)^+ \\ B_{41}(z) & B_{45}(z) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} w_{21}(z) & w_{41}(z)^+ \\ w_{41}(z) & w_{45}(z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in der Vereinigung

$$\bigcup_{\kappa'=0}^{\kappa_3} N_{k'}^{(k+1) \times (k+1)}$$

enthalten, und es gilt $X =$

$$= \left[\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & \vdots & A_{22}-z & A_{23} & A_{24} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{22}^+ - z & \vdots & A_{12} & A_{32}^+ & 0 & \vdots & A_{42}^+ \\ \hline A_{23}^+ & \vdots & A_{32} & A_{33}-z & 0 & \vdots & A_{43}^+ \\ \hline A_{24}^+ & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & A_{44}^+ - z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & A_{42} & A_{43} & A_{44}-z & \vdots & 0 \end{array} \right) - L_3^T W(z) L_3 \right]^{-1}$$

mit

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die linke obere Ecke $P_H(\tilde{S}-z)^{-1}|_H$ von $(\tilde{S}-z)^{-1}$ mit $H = \mathbf{H} + \hat{\mathbf{H}}^\circ$ berechnet sich damit zu $P_H(\tilde{S}-z)^{-1}|_H =$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc|cc} A_{22}^+ - z & \vdots & A_{12} & & A_{32}^+ & & 0 & \vdots & A_{42}^+ \\ \hdashline & & w_{21}(z) & \vdots & A_{22} - z & & A_{23} & & A_{24} & \vdots & w_{41}(z)^+ \\ \hdashline & & A_{23}^+ & & A_{32} & & A_{33} - z & & 0 & & A_{43}^+ \\ \hdashline & & w_{41}(z) & \vdots & A_{42} & & A_{43} & & A_{44} - z & & w_{45}(z) \\ \hdashline & & A_{24}^+ & & 0 & & 0 & & 0 & & A_{44}^+ - z \end{array} \right)^{-1}.$$

In dieser Matrix fassen wir die ersten beiden Zeilen bzw. Spalten zusammen⁴ und erhalten wieder eine Blockmatrix der Gestalt

$$Y = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & 0 & K \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 4.4 ergeben sich für die ersten beiden Spalten der inversen Matrix $(X_{ij})_{i,j=1}^3$ die Ausdrücke

$$X_{11} = \left(S \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - BE^{-1}S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right)^{-1},$$

$$X_{21} = -E^{-1}S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X_{11},$$

$$X_{31} = -K^{-1}G X_{11},$$

und

$$X_{22} = \left(E - S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} B \right)^{-1},$$

$$X_{12} = -S \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} B X_{22},$$

$$X_{32} = K^{-1}GS \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} B X_{22}.$$

⁴vgl. Fußnote ² vor Lemma 4.2.

Ebenfalls genauso wie im zweiten geometrischen Fall ergibt sich für einen Vektor $\vec{e} = (e_0\vec{b}_0 + e'_0\vec{c}_0 + \vec{e}_1) + \sum_{i=1}^k e_i\vec{v}b_i \in \mathbb{H}$ die Formel

$$\begin{aligned} [(\tilde{S} - z)^{-1}\vec{e}, \vec{e}] &= \left[P_H(\tilde{S} - z)^{-1}|_H \left(e_0\vec{b}_0 + e'_0\vec{c}_0 + \vec{e}_1 + \sum_{i=1}^k e_i\vec{b}_i \right), \right. \\ &\quad \left. e_0\vec{b}_0 + e'_0\vec{c}_0 + \vec{e}_1 + \sum_{i=1}^k e_i\vec{b}_i \right] = \\ &= \left[X_{11}(e_0\vec{b}_0 + e'_0\vec{c}_0 + \vec{e}_1) + X_{12} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_k \end{pmatrix}, e_0\vec{b}_0 + e'_0\vec{c}_0 + \vec{e}_1 \right] + \\ &\quad + \left(X_{31}(e_0\vec{b}_0 + e'_0\vec{c}_0 + \vec{e}_1) + X_{32} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_k \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Kapitel 5

Eine Anwendung

In diesem Kapitel wollen wir, für einen speziellen Fall der vorgegebenen Daten z_1, \dots, z_n und w_1, \dots, w_n , die Ergebnisse der beiden vorangegangenen Kapitel kombinieren, und damit zu expliziten Lösungsformeln für das Interpolationsproblem (1.3), also für Funktionen $f \in \mathbf{N}_\kappa$ mit

$$f(z_i) = w_i \text{ für } i = 1, \dots, n \quad (5.1)$$

gelangen.

Weiters werden wir an einigen Beispielen demonstrieren wie man die von uns entwickelte Theorie konkret anzuwenden hat. Dabei werden wir für jeden der drei geometrischen Fälle ein Beispiel angeben, es können also alle drei Fälle wirklich bei Interpolationsproblemen auftreten.

In beiden Abschnitten dieses Kapitels kommen wir auch noch einmal auf die eindeutige Lösung mit minimaler Anzahl negativer Quadrate zurück. Im ersten Abschnitt um zu zeigen, daß man auch sie als Funktion der Gestalt f_ξ erhält und im zweiten Abschnitt um an den verschiedenen Beispielen unsere Beschreibung (vgl. Abschnitt 2.2.2) der eindeutigen Lösung zu demonstrieren.

5.1 Eindimensionale Entartung im Fall $H^\circ \not\subseteq D$.

5.1.1 Die geometrischen Voraussetzungen

Wir betrachten ein Interpolationproblem vom Typ (1.3) mit den Daten $z_1, \dots, z_n \in \mathbf{C}^+$ und $w_1, \dots, w_n \in \mathbf{C}$. Für den Rest dieses Abschnitts setzen wir voraus, daß für dieses Interpolationsproblem der erste geometrische Fall

vorliegt, d.h., daß $H^\circ \not\subseteq D = \mathcal{D}(S)$ gilt. Weiters wollen wir hier verlangen, daß der Defekt der Pick-Matrix \mathbf{IP} gleich Eins ist, das also $\dim H^\circ = 1$ gilt.

Wir finden wegen unserer Voraussetzungen einen Vektor $\vec{b} = \sum_{i=1}^n b_i \vec{e}_{z_i}$ des isotropen Teilraumes H° von H mit $\sum_{i=1}^k b_i = 1$. Wir setzen weiters voraus, daß $b_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, n$ gilt. Im folgenden werden wir $\{\vec{b}\}$ als Basis von H° wählen. Weiters sei $\{\vec{b}_1\}$ eine Basis des mit H° schief verbundenen Teilraumes \hat{H}° mit $[\vec{b}, \vec{b}_1] = 1$.

Die Zerlegung (4.2) des Raumes H reduziert sich unter unseren Voraussetzungen auf $H = D[+]H^\circ$. Die Zerlegung (4.3) eines Erweiterungsraumes $\tilde{H} \supseteq H$ hat dementsprechend die Gestalt

$$\tilde{H} = D[+](H^\circ + \hat{H}^\circ)[+]H_1.$$

Schließlich lautet die Matrixdarstellung (4.6) in unserem Fall

$$\tilde{S} \simeq \left(\begin{array}{c|ccc} A_{11} & 0 & \vdots & A_{31}^+ & 0 \\ \hline A_{31} & B_{33} & \vdots & B_{35} & B_{65}^+ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & B_{53} & \vdots & B_{33}^+ & B_{63}^+ \\ \hline 0 & B_{63} & \vdots & B_{65} & B_{66} \end{array} \right).$$

Die Operatoren A_{11} und A_{31} erhält man dabei durch

$$A_{11} = P \circ S \text{ und } A_{31} = (I - P) \circ S,$$

wobei P die Projektion von H auf D längs H° ist. In Koordinaten geschrieben erhält man für einen Vektor $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_{z_i} \in D$:

$$A_{11}\vec{x} = \sum_{i=1}^n \left(x_i z_i - \left(\sum_{j=1}^n x_j z_j \right) b_i \right) \vec{e}_{z_i} \text{ bzw.}$$

$$A_{31}\vec{x} = \left(\sum_{j=1}^n x_j z_j \right) \vec{b}.$$

Für das Folgende wesentlich ist nun die Feststellung, daß jeder Wert z_i in der Resolventenmenge von A_{11} liegt.

Lemma 5.1 *Kein Wert z_i für $i \in \{1, \dots, n\}$ ist Eigenwert von A_{11} .*

Beweis : Sei λ ein Eigenwert von A_{11} und \vec{x} ein zugehöriger Eigenvektor, $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_{z_i}$. Dann ist

$$0 = (A_{11} - \lambda)\vec{x} = \sum_{i=1}^n \left(x_i z_i - \left(\sum_{j=1}^n x_j z_j \right) b_i - \lambda x_i \right) \vec{e}_{z_i},$$

es muß also für jedes $i = 1, \dots, n$ die Beziehung

$$(z_i - \lambda)x_i = \left(\sum_{j=1}^n x_j z_j \right) b_i \quad (5.2)$$

gelten. Wäre nun $\lambda = z_{i_0}$ für ein $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, so wäre $0 = \left(\sum_{j=1}^n x_j z_j \right) b_{i_0}$, also $\sum_{j=1}^n x_j z_j = 0$. Mit den Gleichungen (5.2) folgt dann $x_i = 0$ für $i \neq i_0$. Da $\vec{x} \in D$ liegt, muß damit auch $x_{i_0} = 0$ sein, d. h. $\vec{x} = 0$.

□

Jetzt wollen wir die Formeln (4.9) zur Berechnung von $[(\tilde{S} - z)^{-1} \vec{e}_{z_1}, \vec{e}_{z_1}]$ für unseren Fall weiter ausrechnen, und damit eine explizite Parameterdarstellung für interpolierende Funktionen in $\bigcup_{\kappa'=\kappa_1}^{\kappa} N_{\kappa'}$ erhalten.

5.1.2 Eine explizite Lösungsformel

In unserem Fall erhält man nach Abschnitt 4.2 für die Matrixdarstellung der verallgemeinerten Resolvente $P_H(\tilde{S} - z)^{-1}|_H$ die Formel

$$\begin{pmatrix} A_{11} - z & 0 & A_{31}^+ \\ A_{31} & w_{33} - z & w_{35} \\ 0 & w_{53} & \overline{w_{33}} - z \end{pmatrix}^{-1}.$$

Unser Problem besteht also darin obige Inverse zu berechnen. Dazu gehen wir wie bei Lemma 4.2 von der etwas allgemeineren Matrix

$$\begin{pmatrix} A & 0 & C \\ D & E & F \\ 0 & H & K \end{pmatrix}$$

aus, und berechnen die in Lemma 4.2 angegebenen Ausdrücke für die Blöcke der inversen Matrix. Wegen unserer Voraussetzungen gelten nun jedoch einige Regeln, die das Ausrechnen wesentlich vereinfachen.

Zunächst wollen wir uns vergegenwärtigen zwischen welchen Räumen die einzelnen Eintragungen obiger Matrix operieren. Die von uns gewählte Zerlegung des Raumes war

$$\mathcal{D}(S)[\dot{+}](\mathbf{H}^\circ \dot{+} \hat{\mathbf{H}}^\circ),$$

es gilt also

$$\begin{aligned} A : \mathcal{D}(S) &\longrightarrow \mathcal{D}(S), \quad D : \mathcal{D}(S) \longrightarrow \mathbf{H}^\circ, \\ E : \mathbf{H}^\circ &\longrightarrow \mathbf{H}^\circ, \quad H : \mathbf{H}^\circ \longrightarrow \hat{\mathbf{H}}^\circ, \\ C : \hat{\mathbf{H}}^\circ &\longrightarrow \mathcal{D}(S), \quad F : \hat{\mathbf{H}}^\circ \longrightarrow \mathbf{H}^\circ, \quad K : \hat{\mathbf{H}}^\circ \longrightarrow \hat{\mathbf{H}}^\circ. \end{aligned}$$

Man sieht, daß E, F, H und K durch Zahlen e, f, h bzw. k mit

$$E\vec{b} = e\vec{b}, \quad H\vec{b} = h\vec{b}_1, \quad F\vec{b}_1 = f\vec{b}, \quad K\vec{b}_1 = k\vec{b}_1$$

gegeben sind. Der Operator C ist durch einen Vektor $\vec{c} \in \mathcal{D}(S)$ mit

$$C\vec{b}_1 = \vec{c}$$

festgelegt, während D durch einen Vektor $\vec{d} \in \mathcal{D}(S)$ mit

$$D\vec{x} = [\vec{x}, \vec{d}]\vec{b} \text{ für } \vec{x} \in \mathcal{D}(S)$$

bestimmt ist. Die letzte Aussage folgt daraus, daß $D\vec{x} = d(\vec{x})\vec{b}$ ist, wobei $d(\vec{x})$ ein lineares Funktional des nicht entarteten Skalarproduktraumes $\mathcal{D}(S)$ ist.

Nun sind C und D adjungierte Operatoren, d.h. für jedes $\vec{x} \in \mathcal{D}(S)$ gilt¹

$$[D\vec{x}, \vec{b}_1] = [\vec{x}, C\vec{b}_1],$$

und man berechnet

$$[D\vec{x}, \vec{b}_1] = [[\vec{x}, \vec{d}]\vec{b}, \vec{b}_1] = [\vec{x}, \vec{d}][\vec{b}, \vec{b}_1] = [\vec{x}, \vec{d}]$$

und

$$[\vec{x}, C\vec{b}_1] = [\vec{x}, \vec{c}].$$

¹Wir betrachten hier die Bilinearform $[\cdot, \cdot]$ zwischen den dualen Raumpaaren $(\mathcal{D}(S), \mathcal{D}(S))$ und $(\mathbf{H}^\circ, \hat{\mathbf{H}}^\circ)$.

Da $\mathcal{D}(S)$ nicht entartet folgt $\vec{c} = \vec{d}$, also

$$C\vec{b}_1 = \vec{d}.$$

Jetzt wenden wir uns der Berechnung der Inversen nach Lemma 4.2 zu.

$$S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = E - FK^{-1}H : \mathbb{H}^\circ \rightarrow \mathbb{H}^\circ, \text{ also}$$

$$S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{b} = \left(e - \frac{fh}{k}\right) \vec{b}.$$

Damit ist

$$K^{-1}HS \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \vec{b} = \frac{h}{ek - fh} \vec{b}_1.$$

Zur Abkürzung wollen wir $\frac{h}{ek - fh} = p$ setzen. Wir berechnen weiters für $\vec{x} \in \mathcal{D}(S)$

$$(A + CK^{-1}HS \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} D)\vec{x} = A\vec{x} + p[\vec{x}, \vec{d}]\vec{d}, \text{ also}$$

$$X_{11}\vec{x} = (A + p[\cdot, \vec{d}]\vec{d})^{-1}\vec{x}.$$

Damit ergibt sich, ebenfalls für $\vec{x} \in \mathcal{D}(S)$

$$\begin{aligned} X_{31}\vec{x} &= K^{-1}HS \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} DX_{11}\vec{x} = \\ &= p[(A + p[\cdot, \vec{d}]\vec{d})^{-1}\vec{x}, \vec{d}]\vec{b}_1. \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$(DA^{-1}CK^{-1}H + S \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix})\vec{b} = \left(\frac{h}{k}[A^{-1}\vec{d}, \vec{d}] + \left(e - \frac{fh}{k}\right)\right)\vec{b},$$

also

$$X_{22}\vec{b} = \left(\frac{h}{k}[A^{-1}\vec{d}, \vec{d}] + \left(e - \frac{fh}{k}\right)\right)^{-1}\vec{b}.$$

Damit ergibt sich

$$K^{-1}HX_{22}\vec{b} = \frac{1}{[A^{-1}\vec{d}, \vec{d}] + (ek - fh)} \vec{b}_1$$

und daraus

$$X_{12} = \frac{1}{[A^{-1}\vec{d}, \vec{d}] + (ek - fh)} A^{-1}\vec{d}, \text{ und}$$

$$X_{32} = -\frac{1}{[A^{-1}\vec{d}, \vec{d}] + (ek - fh)} \vec{b}_1.$$

Wir haben nun alle Bestandteile der Inversen Matrix die wir benötigen berechnet, und können weiter in die Formeln aus Abschnitt 4.2 einsetzen. Die Zerlegung des Vektors $e_{z_1}^{\vec{}}$ gemäß unserer Zerlegung des Raumes \mathbb{H} hat dabei die Gestalt $e_{z_1}^{\vec{}} = (e_{z_1}^{\vec{}} - \vec{b}) + \vec{b}$. Wir berechnen damit

$$\begin{aligned} [(\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}^{\vec{}}, e_{z_1}^{\vec{}}] &= \left[\begin{pmatrix} X_{11}(e_{z_1}^{\vec{}} - \vec{b}) + X_{12}\vec{b} \\ * \\ X_{31}(e_{z_1}^{\vec{}} - \vec{b}) + X_{32}\vec{b} \end{pmatrix}, (e_{z_1}^{\vec{}} - \vec{b}) + \vec{b} \right] = \\ &= [X_{11}(e_{z_1}^{\vec{}} - \vec{b}), e_{z_1}^{\vec{}}] + [X_{12}\vec{b}, e_{z_1}^{\vec{}}] + [X_{31}(e_{z_1}^{\vec{}} - \vec{b}), \vec{b}] + \\ &\quad + [X_{32}\vec{b}, \vec{b}] = \\ &= [(A. + p[., \vec{d}]\vec{d})^{-1}(e_{z_1}^{\vec{}} - \vec{b}), e_{z_1}^{\vec{}}] + \frac{[A^{-1}\vec{d}, e_{z_1}^{\vec{}}]}{[A^{-1}\vec{d}, \vec{d}] + (ek - fh)} + \\ &\quad + p[(A. + p[., \vec{d}]\vec{d})^{-1}(e_{z_1}^{\vec{}} - \vec{b}), \vec{d}] - \frac{1}{[A^{-1}\vec{d}, \vec{d}] + (ek - fh)} = \\ &= [(A. + p[., \vec{d}]\vec{d})^{-1}(e_{z_1}^{\vec{}} - \vec{b}), e_{z_1}^{\vec{}} + \overline{p}\vec{d}] + p\frac{[A^{-1}\vec{d}, e_{z_1}^{\vec{}}] - 1}{p[A^{-1}\vec{d}, \vec{d}] + h}. \end{aligned}$$

Setzt man in dieser Formel die Werte von A, C, D, E, F, H und K ein, so erhält man

$$\begin{aligned} [(\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}^{\vec{}}, e_{z_1}^{\vec{}}] &= [(A_{11} - z + p[., \vec{d}]\vec{d})^{-1}(e_{z_1}^{\vec{}} - \vec{b}), e_{z_1}^{\vec{}} + \overline{p}(z)A_{31}^+ \vec{b}_1] + \\ &\quad + p(z)\frac{[(A_{11} - z)^{-1}A_{31}^+ \vec{b}_1, e_{z_1}^{\vec{}}] - 1}{p(z)[(A_{11} - z)^{-1}A_{31}^+ \vec{b}_1, A_{31}^+ \vec{b}_1] + w_{53}(z)}, \end{aligned}$$

wobei

$$p(z) = z^2 - 2\Re w_{33}z + |w_{33}|^2 - w_{35}w_{53} = |J_2W(z) - z|$$

ist.

Wir wollen an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich darauf hinweisen, daß von der Parametermatrix $W(z)$ nur w_{53} und $p(z)$ in die Lösungsformel eingeht.

5.1.3 Der Parameter $W(z) \equiv 0$

Wie schon am Anfang dieses Kapitels gesagt wollen wir uns nun mit der eindeutigen Lösung des von uns betrachteten Interpolationsproblems mit minimaler Anzahl negativer Quadrate beschäftigen.

In Kapitel 3 haben wir gesehen, daß man eine in gewissem Sinne eindeutige Beziehung zwischen den Lösungen des Interpolationsproblems (1.3) und den, von uns in Kapitel 4 beschriebenen selbstadjungierten Erweiterungen von S herstellen kann. Dies gilt jedoch nur im Fall $\kappa \geq \kappa_1 + \text{def } \mathbf{IP}$. Wir stellen uns nun die Frage ob man auch die Lösung in der Klasse N_{κ_1} mit Hilfe einer gewissen Erweiterung, oder zumindest mit Hilfe eines gewissen Parameters $W(z)$ in unserer Beschreibung erhalten kann. Notwendig dafür ist jedenfalls, daß die eindeutige Lösung (als rationale Funktion) für $z \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt. Nach unserer Beschreibung der eindeutigen Lösung sieht man, daß diese Bedingung jedenfalls im ersten geometrischen Fall erfüllt ist.

Wir werden auch hier die zu Beginn dieses Abschnitts gemachten Voraussetzungen einhalten, fordern also zusätzlich, daß der Defekt der Pick-Matrix \mathbf{IP} Eins beträgt.

Setzt man in den Formeln von Lemma 4.2 den Parameter $W(z) \equiv 0$ ein, so ist insbesondere² $w_{53}(z) = 0$, also mit den dortigen Bezeichnungen $H = 0$. Damit gilt (wieder mit dortiger Notation):

$$X_{11} = A^{-1} = (A_{11} - z)^{-1},$$

$$X_{12} = 0, X_{31} = 0 \text{ und } X_{32} = 0.$$

Es ist also für die zum Parameter $W(z) \equiv 0$ gehörende Erweiterung \tilde{S}

$$[(\tilde{S} - z)^{-1}e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow}] = [(A_{11} - z)^{-1}e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow}].$$

Weiters sind die Datenpunkte z_i für $i = 1, \dots, n$ in der Resolvente von \tilde{S} , es gilt nämlich

Lemma 5.2 *Sei $z \in \rho(A_{11})$, $z \neq 0$, dann ist auch $(\tilde{S} - z)$ invertierbar. Für nichtreelles z ist damit sogar $z \in \rho(\tilde{S})$.*

Beweis : Die dem Operator $\tilde{S} - z$ entsprechende Matrix hat die Gestalt

$$\tilde{S} - z \simeq \begin{pmatrix} A_{11} - z & 0 & A_{31}^+ \\ A_{31} & -z & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

²Die folgenden Überlegungen gelten für jeden Parameter $W(z)$ mit $w_{53}(z) = 0$.

Man bestätigt durch beidseitiges Ausmultiplizieren (siehe auch Lemma 4.2), daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} (A_{11} - z)^{-1} & 0 & \frac{1}{z}(A_{11} - z)^{-1}A_{31}^+ \\ \frac{1}{z}A_{31}(A_{11} - z)^{-1} & -\frac{1}{z} & \frac{1}{z^2}A_{31}(A_{11} - z)^{-1}A_{31}^+ \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

die inverse Matrix der Blockmatrix (5.3) ist.

□

Zusammenfassend erhält man den Satz

Satz 5.1 Die Funktion $f_{\tilde{S}}$ für die zum Parameter $W(z) \equiv 0$ gehörende Erweiterung \tilde{S} stellt die eindeutige N_{κ_1} -Lösung des Interpolationsproblems (5.1) dar.

Beweis : Da nach Lemma 5.1 für $i = 1, \dots, n$ stets $z_i \in \rho(A_{11})$ gilt, folgt mit Lemma 5.2 $z_i \in \rho(\tilde{S})$. Es ist also $f_{\tilde{S}}(z_i) = w_i$ für $i = 1, \dots, n$. Damit hat die Funktion $f_{\tilde{S}}$ mindestens κ_1 negative Quadrate. Da A_{11} in dem Π_{κ_1} -Raum D selbstadjungiert ist, hat die Funktion $f_{\tilde{S}}$ auch höchstens κ_1 negative Quadrate.

□

5.2 Einige Beispiele

Wir wollen in diesem Abschnitt einige Interpolationsprobleme konkret vorgeben und mit den von uns entwickelten Methoden lösen. Wir betrachten im folgenden ein Beispiel für den ersten und ein Beispiel für den zweiten geometrischen Fall, in denen wir explizite Lösungsformeln angeben. Weiters geben wir ein Beispiel für den dritten geometrischen Fall. In diesen Beispielen wird der Teilraum H_0 stets eindimensional sein. Darum geben wir ein viertes Beispiel, in dem der Teilraum H_0 zweidimensional ist. In den beiden letzten Beispielen werden die expliziten Lösungsformeln zu kompliziert um sie hinzuschreiben. Die Vorgangsweise zur Lösung eines konkreten Interpolationsproblems und insbesondere unsere Sätze über die eindeutige Lösung mit minimaler Anzahl negativer Quadrate werden aber deutlich demonstriert.

Beispiel 1:

$$z_1 = i, z_2 = 2i, w_1 = 4i, w_2 = 2i.$$

Die Pick-Matrix hat die Gestalt

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und man berechnet

$$|\mathbf{P} - \lambda| = (4 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 = \lambda(\lambda - 5).$$

Damit ist \mathbf{P} singular und hat $\kappa_1 = 0$ negative Eigenwerte. Im Raum \mathbf{H} schreibt sich bezüglich der Basis $\{e_{z_1}^{\vec{}}, e_{z_2}^{\vec{}}\}$

$$\mathbf{H}^\circ = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle, D = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Offensichtlich ist $\mathbf{H} = D[+] \mathbf{H}^\circ$, es liegt also der erste geometrische Fall vor.

Wir bestimmen die eindeutige Lösung des Interpolationsproblems in der Klasse \mathbf{N}_0 . Dazu sei $h^{\circ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}^\circ$:

$$f_{h^{\circ}}(z) = \frac{1(-4i)(z + 2i) + (-2)(-2i)(z + i)}{1(z + 2i) + (-2)(z + i)} = -\frac{4}{z}.$$

Um nun Lösungen des Interpolationsproblems in der Klasse \mathbf{N}_κ zu erhalten führen wir im Raum \mathbf{H} eine neue Basis $\{\vec{d}, \vec{b}\}$ ein:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e_{z_1}^{\vec{}} - e_{z_2}^{\vec{}}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = e_{z_1}^{\vec{}} - 2e_{z_2}^{\vec{}}.$$

Bezüglich dieser Basis schreibt sich der Operator S als

$$S\vec{d} = ie_{z_1}^{\vec{}} - 2ie_{z_2}^{\vec{}} = i\vec{b}.$$

Die Matrixdarstellung einer selbstadjungierten Erweiterung \tilde{S} von S in einem Π_κ -Raum $\tilde{\mathbf{H}} (\supseteq \mathbf{H})$ hat also die Gestalt

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ i & B_{33} & B_{35} & B_{65}^+ \\ 0 & B_{53} & B_{33}^+ & B_{63}^+ \\ 0 & B_{63} & B_{65} & B_{66} \end{pmatrix}.$$

Berechnen wir die verallgemeinerte Resolvente $P_H(\tilde{S} - z)^{-1}|_H$, so ergibt sich

$$P_H(\tilde{S} - z)^{-1}|_H = \begin{pmatrix} -z & 0 & -\iota \\ \iota & w_{33} - z & w_{35} \\ 0 & w_{53} & \overline{w_{33}} - z \end{pmatrix}^{-1},$$

wobei

$$W(z) = \begin{pmatrix} w_{53} & \overline{w_{33}} \\ w_{33} & w_{35} \end{pmatrix} \in \bigcup_{\kappa'=0}^{\kappa_3} \mathbb{N}_{\kappa'}^{2 \times 2},$$

und $\kappa_3 = \kappa - \text{def } \mathbf{IP} - \kappa_1 = \kappa - 1$ ist. Setzt man nun in die im letzten Kapitel entwickelten Formeln ein, so erhält man

$$X_{11} = \frac{(w_{33} - z)(\overline{w_{33}} - z) - w_{35}w_{53}}{w_{53} - z((w_{33} - z)(\overline{w_{33}} - z) - w_{35}w_{53})},$$

$$X_{31} = \frac{-\iota w_{53}}{w_{53} - z((w_{33} - z)(\overline{w_{33}} - z) - w_{35}w_{53})},$$

$$X_{12} = \frac{-\iota w_{53}}{w_{53} - z((w_{33} - z)(\overline{w_{33}} - z) - w_{35}w_{53})},$$

$$X_{32} = \frac{-z w_{53}}{w_{53} - z((w_{33} - z)(\overline{w_{33}} - z) - w_{35}w_{53})}.$$

Man berechnet daraus

$$[(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow}] = \frac{4((w_{33} - z)(\overline{w_{33}} - z) - w_{35}w_{53}) + z w_{53}}{w_{53} - z((w_{33} - z)(\overline{w_{33}} - z) - w_{35}w_{53})}.$$

Damit hat man durch

$$f_{\tilde{S}}(z) = -4\iota + 4(z + \iota) + (z^2 + 1)[(\tilde{S} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow}]$$

solange der Nenner

$$w_{53} - z((w_{33} - z)(\overline{w_{33}} - z) - w_{35}w_{53})$$

an den Stellen z_1 und z_2 verschieden von Null ist, interpolierende Funktionen geben (wie man unmittelbar nachrechnet).

Beispiel 2:

$$z_1 = i, z_2 = 2i, w_1 = -i, w_2 = -2i.$$

Die Pick-Matrix hat die Gestalt

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

und man berechnet

$$|\mathbf{P} - \lambda| = (-1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 1 = \lambda(\lambda + 2).$$

Damit ist \mathbf{P} singulär und hat $\kappa_1 = 1$ negative Eigenwerte. Im Raum \mathbb{H} schreibt sich bezüglich der Basis $\{\vec{e}_{z_1}, \vec{e}_{z_2}\}$

$$\mathbb{H}^\circ = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = D = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da $\mathbb{H}^\circ = D$ gilt, liegt der zweite geometrische Fall vor.

Wir bestimmen die eindeutige Lösung des Interpolationsproblems in der Klasse N_1 . Dazu sei $\vec{h}^\circ = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^\circ$:

$$f_{\vec{h}^\circ}(z) = \frac{1(\iota)(z + 2\iota) + (-1)(2\iota)(z + \iota)}{1(z + 2\iota) + (-1)(z + \iota)} = -z.$$

Um nun Lösungen des Interpolationsproblems in der Klasse N_κ zu erhalten führen wir im Raum \mathbb{H} eine neue Basis $\{\vec{b}, \vec{d}\}$ ein:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{e}_{z_1} - 2\vec{e}_{z_2}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{e}_{z_1} - \vec{e}_{z_2}.$$

Bezüglich dieser Basis schreibt sich der Operator S als

$$S\vec{d} = \iota\vec{e}_{z_1} - 2\iota\vec{e}_{z_2} = -\iota\vec{d} + 2\iota\vec{b}.$$

Die Matrixdarstellung einer selbstadjungierten Erweiterung \tilde{S} von S in einem Π_κ -Raum $\tilde{\mathbb{H}}$ ($\supseteq \mathbb{H}$) hat also die Gestalt

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} B_{11} & -\iota & B_{31}^+ & B_{41}^+ \\ B_{31} & 2\iota & B_{34} & B_{34}^+ \\ \iota & 0 & -2\iota & 0 \\ B_{41} & B_{34} & 0 & B_{44} \end{pmatrix}.$$

Berechnen wir die verallgemeinerte Resolvente $P_H(\tilde{S} - z)^{-1}|_H$, so ergibt sich

$$P_H(\tilde{S} - z)^{-1}|_H = \begin{pmatrix} w_{11} - z & -\iota & \overline{w_{31}} \\ w_{31} & 2\iota - z & w_{34} \\ \iota & 0 & -2\iota - z \end{pmatrix}^{-1},$$

wobei

$$W(z) = \begin{pmatrix} w_{53} & \overline{w_{33}} \\ w_{33} & w_{35} \end{pmatrix} \in \bigcup_{\kappa'=0}^{\kappa_3} \mathbb{N}_{\kappa'}^{2 \times 2},$$

und $\kappa_3 = \kappa - \text{def } \mathbf{IP} - \kappa_1 = \kappa - 2$ ist. Setzt man nun in die im letzten Kapitel entwickelten Formeln ein, so erhält man

$$X_{11} = \frac{z^2 + 4}{p(z)}, \quad X_{12} = \frac{-iz + 2}{p(z)},$$

$$X_{31} = \frac{2 + iz}{p(z)}, \quad X_{32} = \frac{1}{p(z)}.$$

Hier wurde abkürzend

$$p(z) = (w_{11} - z)(z^2 + 4) + w_{34} + (2(w_{31} + \overline{w_{31}}) - iz(w_{31} - \overline{w_{31}}))$$

gesetzt. Damit ergibt sich

$$[(\tilde{\mathbf{S}} - z)^{-1} e_{z_1}^{\rightarrow}, e_{z_1}^{\rightarrow}] = -\frac{z^2 + 4}{p(z)},$$

und man hat durch

$$f_{\tilde{\mathbf{S}}}(z) = i - (z + i) - (z^2 + 1) \frac{z^2 + 4}{p(z)}$$

solange der Nenner $p(z)$ an den Stellen z_1 und z_2 verschieden von Null ist, interpolierende Funktionen geben.

Beispiel 3:

$$z_1 = i, z_2 = 2i, z_3 = 1 + i, \quad w_1 = 6 + 9i, w_2 = 12 + 18i, w_3 = 13 + 5i.$$

Die Pick-Matrix hat die Gestalt

$$\mathbf{IP} = \begin{pmatrix} 9 & 9 - 2i & 7 \\ 9 + 2i & 9 & 7 + 2i \\ 7 & 7 - 2i & 5 \end{pmatrix}$$

und man berechnet

$$|\mathbf{IP} - \lambda| = \dots = -\lambda(\lambda^2 - 23\lambda - 16).$$

Die Eigenwerte lauten

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \frac{23}{2} \pm \frac{\sqrt{593}}{2}.$$

Damit ist \mathbf{IP} singular und hat $\kappa_1 = 1$ negative Eigenwerte. Im Raum H schreibt sich bezüglich der Basis $\{e_{z_1}^{\vec{}}, e_{z_2}^{\vec{}}, e_{z_3}^{\vec{}}\}$

$$H^\circ = \left\langle \begin{pmatrix} 1+i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, D = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Offensichtlich ist $H^\circ \subseteq D$, es liegt also der zweite oder dritte geometrische Fall vor. Nun gilt

$$\mathbf{IP} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \mathbf{IP} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ und}$$

$$\mathbf{IP} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$$

also $[D, D] = 0$. Wegen $H^\circ \neq D$ liegt der dritte geometrische Fall vor.

Wir bestimmen die eindeutige Lösung des Interpolationsproblems in der Klasse N_1 . Dazu sei $\vec{h}^\circ = \begin{pmatrix} 1+i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \in H^\circ$:

$$f_{\vec{h}^\circ}(z) = \dots = -2z^2 + 9z + 4.$$

Um nun Lösungen des Interpolationsproblems in der Klasse N_κ zu erhalten führen wir im Raum H eine neue Basis $\{\vec{d}_0, \vec{d}_1, \vec{h}\}$ ein:

$$\vec{d}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{8}i \\ \frac{9}{8}i \end{pmatrix} = -\frac{5}{8}ie_{z_2}^{\vec{}} + \frac{9}{8}ie_{z_3}^{\vec{}},$$

$$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_{z_1}^{\vec{}} - e_{z_2}^{\vec{}} \text{ und}$$

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 + \iota \\ -\iota \\ -1 \end{pmatrix} = (1 + \iota)e_{z_1} - \iota e_{z_2} - e_{z_3}.$$

Diese Basis hat alle in Abschnitt 4.4 geforderten Eigenschaften.

Der Operator S schreibt sich bezüglich dieser Basis als

$$S\vec{d}_1 = \iota e_{z_1} - 2\iota e_{z_2} = -2\vec{d}_0 + \left(-\frac{9}{4} + \frac{13}{4}\iota\right)\vec{d}_1 + \frac{9}{4}\vec{h},$$

$$S\vec{h} = (-1 + \iota)e_{z_1} + 2e_{z_2} - (1 + \iota)e_{z_3} = -(1 + \iota)\vec{d}_1 + (1 + \iota)\vec{h}.$$

Die Matrixdarstellung einer Erweiterung \tilde{S} von S in einem Π_κ -Raum \tilde{H} ($\supseteq H$) hat also die Gestalt

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} B_{11} & -2 & 0 & B_{15} & B_{16} \\ B_{21} & -\frac{9}{4} + \frac{13}{4}\iota & -(1 + \iota) & B_{35} & B_{36} \\ B_{41} & -\frac{9}{4}\iota & 1 + \iota & B_{45} & B_{46} \\ B_{51} & 0 & 0 & B_{55} & B_{56} \\ B_{61} & 0 & 0 & B_{65} & B_{66} \end{pmatrix}.$$

Für selbstadjungierte Erweiterungen nutzen wir wieder die Symmetrie aus und bestimmen so weitere Eintragungen. Berechnen wir schließlich die verallgemeinerte Resolvente $P_H(\tilde{S} - z)^{-1}|_H$, so ergibt sich

$$P_H(\tilde{S} - z)^{-1}|_H = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} - \frac{13}{4}\iota - z & -2 & 0 & \frac{9}{4}\iota \\ w_{21} & -\frac{9}{4} + \frac{13}{4}\iota - z & -(1 + \iota) & \frac{w_{41}}{w_{45}} \\ w_{41} & -\frac{9}{4}\iota & (1 + \iota) - z & w_{45} \\ -1 + \iota & 0 & 0 & 1 - \iota - z \end{pmatrix}^{-1},$$

wobei

$$W(z) = \begin{pmatrix} w_{21} & \overline{w_{41}} \\ w_{41} & w_{45} \end{pmatrix} \in \bigcup_{\kappa'=0}^{\kappa_3} N_{\kappa'}^{2 \times 2},$$

und $\kappa_3 = \kappa - \text{def } \mathbf{P} - \kappa_1 = \kappa - 2$ ist. Diese Inverse läßt sich nun zwar ausrechnen, das Ergebnis ist jedoch zu kompliziert um hier angegeben zu werden.

Beispiel 4:

$$z_1 = \iota, z_2 = 2\iota, z_3 = 4\iota, w_1 = 4\iota, w_2 = 2\iota, w_3 = \iota.$$

Die Pick-Matrix hat die Gestalt

$$\mathbf{IP} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

und man berechnet

$$|\mathbf{IP} - \lambda| = \dots = -\lambda^2\left(\lambda - \frac{21}{4}\right).$$

Damit ist \mathbf{IP} singulär ($\text{rg}\mathbf{IP} = 1$!) und hat $\kappa_1 = 0$ negative Eigenwerte. Im Raum H schreibt sich bezüglich der Basis $\{e_{z_1}, e_{z_2}, e_{z_3}\}$

$$H^\circ = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad D = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Offensichtlich gilt $H = H^\circ[+]D$, es liegt also der erste geometrische Fall vor.

Wir bestimmen die eindeutige Lösung des Interpolationsproblems in der

Klasse N_0^3 . Dazu sei $\vec{h}_1^\circ = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in H^\circ$. Dann gilt

$$f_{\vec{h}_1^\circ}(z) = \dots = \frac{4z + 16i}{z^2 + 4iz} = -\frac{4}{z}.$$

An diesem Beispiel können wir unsere Sätze über die Beschreibung der eindeutigen Lösung mit minimaler Anzahl negativer Quadrate demonstrieren.

Wählen wir also einen anderen isotropen Vektor $\vec{h}_2^\circ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \in H^\circ$. Dann

gilt

$$f_{\vec{h}_2^\circ}(z) = \dots = \frac{12z + 24i}{3z^2 + 6iz} = -\frac{4}{z}.$$

Bei diesen beiden rationalen Funktionen war stets der Nenner der ursprünglichen Definition von $f_{\vec{h}^\circ}$ in den Datenpunkten verschieden von Null. Interessant ist nun ein Beispiel, indem dies nicht der Fall ist. Betrachte dazu

$\vec{h}_3^\circ = \begin{pmatrix} 4 \\ -18 \\ 20 \end{pmatrix} \in H^\circ$. Dann gilt

$$f_{\vec{h}_3^\circ}(z) = \dots = \frac{-24z + 24i}{6z^2 - 6iz} = -\frac{4}{z}.$$

³Offenbar müssen wir hier auf das gleiche Ergebnis wie bei Beispiel 1 stoßen.

Der Nenner in der Definition von $f_{h_3^0}$ hat bei $z_1 = \iota$ eine Nullstelle.

Um nun Lösungen des Interpolationsproblems in der Klasse N_κ zu erhalten führen wir im Raum H eine neue Basis $\{\vec{d}, \vec{k}, \vec{h}\}$ ein:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_{z_1} - e_{z_2},$$

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = e_{z_1} - 3e_{z_2} + 2e_{z_3} \text{ und}$$

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = e_{z_1} - 2e_{z_2}.$$

Hier ist $H^\circ \cap D = \langle \vec{k} \rangle$.

Der Operator S schreibt sich bezüglich dieser Basis als

$$S\vec{d} = \iota e_{z_1} - 2\iota e_{z_2} = \iota \vec{k},$$

$$S\vec{k} = \iota e_{z_1} - 6\iota e_{z_2} + 8\iota e_{z_3} = 4\iota \vec{k} - 3\iota \vec{h}.$$

Die Matrixdarstellung einer Erweiterung \tilde{S} von S in einem Π_κ -Raum \tilde{H} ($\supseteq H$) hat also die Gestalt

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\iota & 0 \\ 0 & -4\iota & B_{23} & B_{24} & B_{34}^+ & B_{64}^+ \\ \iota & -3\iota & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{65}^+ \\ 0 & 0 & 0 & -4\iota & 3\iota & 0 \\ 0 & 0 & B_{53} & B_{23}^+ & B_{33}^+ & B_{63}^+ \\ 0 & 0 & B_{63} & B_{64} & B_{65} & B_{66} \end{pmatrix}.$$

Berechnen wir die verallgemeinerte Resolvente $P_H(\tilde{S} - z)^{-1}|_H$, so ergibt sich

$$P_H(\tilde{S} - z)^{-1}|_H = \begin{pmatrix} -z & 0 & 0 & 0 & -\iota \\ 0 & 4\iota - z & w_{23} & w_{24} & \overline{w_{34}} \\ \iota & -3\iota & w_{33} - z & w_{34} & w_{35} \\ 0 & 0 & 0 & -4\iota - z & 3\iota \\ 0 & 0 & w_{53} & \overline{w_{23}} & \overline{w_{33} - z} \end{pmatrix}^{-1},$$

wobei

$$W(z) = \begin{pmatrix} w_{53} & \overline{w_{23}} & \overline{w_{33}} \\ w_{23} & w_{24} & \overline{w_{34}} \\ w_{33} & w_{34} & w_{35} \end{pmatrix} \in \bigcup_{\kappa'=0}^{\kappa_3} \mathbb{N}_{\kappa'}^{3 \times 3},$$

und $\kappa_3 = \kappa - \text{def } \mathbf{IP} - \kappa_1 = \kappa - 2$ ist. Auch um diese Inverse zu bestimmen ist der Rechenaufwand sehr groß, sie wird daher hier nicht explizit angegeben.

Literaturverzeichnis

- [1] N.I.ACHESER-I.M.GLASMANN: *Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum.*
Akademie Verlag 1968
- [2] A.V.ADAMJAN-D.Z.AROV-M.G.KREIN: *Infinite block Hankel matrices and their connection with the interpolation problem.*
[Amer.Math.Soc.Transl. (2) **11**,133-156]
- [3] R.ARENS: *Operational calculus of linear relations.*
[Pac.Math.J. **11** (1961),9-23]
- [4] J.A.BALL: *Interpolations problems of Pick-Nevanlinna and Loewner Type for meromorphic matrix functions.*
[Int.Eq. and Op.Th. **6** (1983),804-840]
- [5] J.A.BALL-I.GOHBERG-L.RODMAN: *Interpolation of rational matrix functions.*
Birkhäuser Verlag 1990
- [6] J.BOGNAR: *Indefinite inner product spaces.*
Springer Verlag 1974
- [7] P.BRUINSMA: *Interpolation problems for Schur and Nevanlinna pairs.*
Dissertation Rijksuniversiteit Groningen
- [8] C.CARATHÉODORY: *Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen.*
[Math.Ann. **64** (1907),95-115]
- [9] C.CARATHÉODORY: *Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen.*
[Rend. di Palermo **32** (1911),193-217]

- [10] A.DIJKSMA-H.S.V. DE SNOO: *Selfadjoint extensions of symmetric subspaces*.
[Pac.J.Math. **54** (1974),71-99]
- [11] E.FISCHER: *Über das Carathéodory'sche Problem, Potenzreihen mit positivem reellen Teil betreffend*.
[Rend. di Palermo **32** (1911),131-235]
- [12] B.FRITZSCHE-B.KIRSTEIN: *Ausgewählte Arbeiten zu den Ursprüngen der Schur-Analyse*.
Teubner Verlag 1991
- [13] F.R.GANTMACHER-M.G.KREIN: *Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanischer Systeme*.
Akademie Verlag 1960
- [14] M.GROSSMANN-H.LANGER: *Über indexerhaltende Erweiterungen eines hermiteschen Operators im Pontrjaginraum*.
[Math.Nachr. **64** (1974),289-317]
- [15] M.HEINS: *A bibliography of Pick-Nevanlinna interpolation and cognate questions*.
Nach persönlicher Kommunikation (siehe auch [5])
- [16] G.HERGLOTZ: *Über Potenzreihen mit positivem, reellen Teil im Einheitskreis*.
[Berichte ü.d. Verhandlungen d. Königlich Sächsischen Gesellschaft d. Wiss. zu Leipzig. Math. -phys. Klasse **63** (1911), 501-511]
- [17] I.S.IOHVIDOV: *Hankel and Toeplitz matrices and forms*.
Birkhäuser Verlag 1982
- [18] I.S.IOHVIDOV: *Lineare Operatoren in Räumen mit indefiniter Metrik*.
[Trudy Vsjesojusnovo Meatem.Sjesda **3** (1956),254-261]
- [19] I.S.IOHVIDOV-M.G.KREIN: *Spektraltheorie von Operatoren in Räumen mit indefiniter Metrik I*.
[Trudy Mosk.Matem.obschtsch. **5** (1956),367-432]
- [20] I.S.IOHVIDOV-M.G.KREIN: *Spektraltheorie von Operatoren in Räumen mit indefiniter Metrik II*.
[Trudy Mosk.Matem.obschtsch. **8** (1959),413-496]

- [21] I.S.IOHVIDOV-M.G.KREIN-H.LANGER: *Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric.*
Akademie Verlag 1982
- [22] G.KOWALEWSKI: *Einführung in die Determinantentheorie.*
Verlag von Veit & Comp. 1909
- [23] M.G.KREIN-H.LANGER: *Über die verallgemeinerten Resolventen und die charakteristische Funktion eines isometrischen Operators im Raume Π_κ .*
[Coll.Math.Soc.Janoš Bolyai **5** (1970),353-399]
- [24] M.G.KREIN-H.LANGER: *Defect subspaces and generalized resolvents of an hermitian operator in the space Π_κ .*
[Funktionalanalysis u.Anw. **5.2** (1971),59-71]
- [25] M.G.KREIN-H.LANGER: *Defect subspaces and generalized resolvents of an hermitian operator in the space Π_κ (Part 2).*
[Funktionalanalysis u.Anw. **5.3** (1971),54-69]
- [26] M.G.KREIN-H.LANGER: *Über die Q -Funktion eines Π -hermiteschen Operators im Raume Π_κ .*
[Acta Sci.Math.(Szeged) **34** (1973),191-230]
- [27] M.G.KREIN-H.LANGER: *Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume Π_κ zusammenhängen. I. Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen.*
[Math.Nachr **77** (1977),187-236]
- [28] M.G.KREIN-H.LANGER: *Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume Π_κ zusammenhängen. II. Verallgemeinerte Resolventen, u -Resolventen und ganze Operatoren.*
[J. of Func.Anal. **30** (1978),390-447]
- [29] M.G.KREIN-H.LANGER: *Some propositions on analytic matrix functions related to the theory of operators in the space Π_κ .*
[Acta.Sci.Math.(Szeged) **43** (1981),181-205]
- [30] H.LANGER: *Zur Spektraltheorie J -selbstadjungierter Operatoren.*
[Math.Ann. **146** (1962),60-85]

- [31] H.LANGER-P.SORJONEN: *Verallgemeinerte Resolventen hermitescher und isometrischer Operatoren im Pontrjaginraum.*
[Ann.Acad.Sci.Fennicae Ser.AI **561** (1974),3-45]
- [32] K.LÖWNER: *Über monotone Matrixfunktionen.*
[Math.Z. **38** (1934),177-216]
- [33] B.SZ.NAGY-A.KORANY: *Relations d'un problème de Nevanlinna et Pick avec la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien.*
[Acta Math.Acad.Sci.Hungaricae **7** (1957),295-302]
- [34] B.SZ.NAGY-A.KORANY: *Operatortheoretische Behandlung und Verallgemeinerung eines Problemkreises in der komplexen Funktionentheorie.*
[Acta Math. **100** (1958),171-202]
- [35] Z.NEHAARI: *On bounded bilinear forms.*
[Annals of Math. **65** (1957),153-162]
- [36] R.NEVANLINNA: *Über beschränkte analytische Funktionen.*
[Ann.Acad.Sci. Fennicae Ser.A **22.7** (1929),1-75]
- [37] G.PICK: *Über eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreisförmiger Bereiche.*
[Math.Ann. **77** (1916),1-6]
- [38] G.PICK: *Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden.*
[Math.Ann. **77** (1916), 7-23]
- [39] G.PICK: *Über die Beschränkungen analytischer Funktionen durch vorgegebene Funktionswerte.*
[Math.Ann. **78** (1917), 270-275]
- [40] L.S.PONTRJAGIN: *Hermiteische Operatoren im Raum mit indefiniter Metrik.*
[Izvestija Akad.Nauk SSSR ser.matem. **8** (1944),243-280]
- [41] F.RIESZ: *Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales.*
[Ann.Sci. Ecole Norm.Sup. **28** (1911),33-62]
- [42] F.RIESZ: *Über ein Problem des Herrn Carathéodory.*
[Journal f.d. reine u. ang.Math. **146** (1915-16),83-87]

- [43] I.SCHUR: *Über Potenzreihen, die im Inneren des Einheitskreises beschränkt sind.*
[Journal f.d. reine u. ang.Math. **147** (1917),205-232]
- [44] I.SCHUR: *Über Potenzreihen, die im Inneren des Einheitskreises beschränkt sind (Fortsetzung).*
[Journal f.d. reine u. ang.Math. **148** (1918),122-145]
- [45] A.V.ŠTRAUS: *Generalized resolvents of symmetric operators.*
[Izv.Akad.Nauk SSSR Ser.Mat. **18** (1954),51-86]
- [46] O.SZÁSZ: *Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe.*
[Math.Z. **1** (1918),140-183]
- [47] T.TAKAGI: *On an algebraic problem related to an analytic theorem of Carathéodory and Fejér (part 1).*
[Jap.J.Math. **1** (1924),83-93]
- [48] T.TAKAGI: *On an algebraic problem related to an analytic theorem of Carathéodory and Fejér (part 2).*
[Jap.J.Math. **2** (1925),13-17]
- [49] O.TOEPLITZ: *Über die Fourier'sche Entwicklung positiver Funktionen.*
[Rend. di Palermo **32** (1911),191-192]
- [50] E.P.WIGNER-N.J.VON NEUMANN: *Significance of Loewner's theorem in the quantum theory of collisions*
[Ann.Math. **59** (1954),418-433]
- [51] K.YOSIDA: *Functional Analysis.*
Springer Verlag 1974

Lebenslauf

Ich, *Dipl.Ing. Harald Thomas Woracek* bin am 10.7.1969 in Wien geboren.

Meine Schulbildung begann mit dem Besuch der Volksschule (Wichtelgasse, 1170-Wien) in den Jahren 1975-1979. Von 1979 bis 1987 besuchte ich ein Bundesrealgymnasium (Geblergasse, 1170-Wien). Danach hat mein Hochschulstudium an der Technischen Universität Wien begonnen. Im Studienjahr 1987/88 war ich für die Studienrichtung Technische Chemie inskribiert, ab SS1988 auch für die Studienrichtung Technische Mathematik. Das Studium der technischen Mathematik habe ich durch Ablegung einer Diplomprüfung im April 1992 abgeschlossen. Mit dem WS1992/93 habe ich das Doktoratsstudium der Technischen Mathematik begonnen.

Seit Jänner 1992 bin ich an der Technischen Universität Wien zunächst als Studienassistent, dann (ab Juni 1992) als Vertragsassistent beschäftigt.

Wien, im Dezember 1993

