TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

Bachelorarbeit:
Funktionalanalysis

Axiomatische Spektraltheorie

Gabriel Reikl (1109467)

Wien, am 25. Mai 2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit 'axiomatischer Spektraltheorie'. Wir wollen einen Überblick über die axiomatische Sicht der Spektraltheorie geben. Die Arbeit orientiert sich vorrangig an Kapitel 6 von 'Spectral Theory of Linear Operators' von Vladimir Müller [1]. Doch auch das 1. und das 16. Kapitel, sowie 'On the axiomatic theory of spectrum' , eine Arbeit von V. Kordula und V. Müller [2], waren für die Entstehung dieser Arbeit essenziell.

Zu Beginn beschäftigen wir uns mit den Grundlagen, wie zum Beispiel Banchalgebren und einigen wichtigen Sätzen aus der komplexen Analysis. Im zweiten Kapitel wird die sogenannte Regularität eingeführt, was uns ermöglicht, das Spektrum zu verallgemeinern. Im darauffolgenden Kapitel kommen wir zum Hauptteil dieser Arbeit, der axiomatischen Spektraltheorie und am Ende steht noch ein Kapitel über die Anwendungen, wo wir uns mit dem essenziellen Spektrum und dem Browder Spektrum auseinandersetzen.

1 Grundlagen

1.1 Banachalgebren

Definition 1.1. Eine Algebra $\mathcal{A}$ ist ein linearer Raum über $\mathbb{C}$ zusammen mit einer zweistelligen Verknüpfung $\cdot(x, y) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $\cdot$(x,y) $\to$ xy, welche folgende Eigenschaften für alle x, y, z $\in \mathcal{A}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ erfüllt:

i) $(xy)z = x(yz)$

ii) $x(y + z) = xy + xz; (x + y)z = xz + yz$

iii) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$

iv) Es existiert ein eindeutiges neutrales Element $1_{\mathcal{A}} \neq 0$: und $1_{\mathcal{A}}x = x1_{\mathcal{A}} = x$ für alle $x \in \mathcal{A}$

Definition 1.2. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra.
Eine Algebra-Seminorm ist eine Funktion $\|.\| : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$, welche folgende Eigenschaften erfüllt:

i) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

iii) $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

iv) $\|1_{\mathcal{A}}\| = 1$

Eine Algebra-Norm ist eine Algebra-Seminorm, falls gilt:

v) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Definition 1.3. Eine normierte Algebra ist ein Paar $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$, wobei $\mathcal{A}$ eine Algebra und $\|\cdot\|$ eine Algebra-Norm ist. Eine Banachalgebra ist eine normierte Algebra, welche unter der Norm vollständig ist.

Beispiel 1.4. *Beispiele für Banachalgebren:*

i) Ist X ein topologischer Raum und bezeichnet $C_b(X,\mathbb{C})$ den Vektorraum aller beschränkten stetigen komplexwertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{t\in X}|f(t)|$, so ist $C_b(X,\mathbb{C})$ bekannterweise ein Banachraum. Betrachtet man nun die Abbildung

$$C_b(X,\mathbb{C}) \times C_b(X,\mathbb{C}) \to C_b(X,\mathbb{C}, \cdot(f,g) \to f \cdot g$$

also die punktweise Multiplikation, so gilt $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$. Also ist $C_b(X,\mathbb{C})$ eine offensichtlich auch kommutative Banachalgebra. Schließlich ist die konstante Einsfunktion offensichtlich ein normiertes Einselement.
vgl. Funktionalanalysis, S. 105 6.3.3 ii) [3]

ii) Sei L^1 die Menge aller integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Definiere die Multiplikation und Norm auf dem L^1 als:

$$(f * g)(s) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(s-t)dt$$

und

$$\|f\| := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt.$$

Der L^1 erfüllt alle Axiome einer Banachalgebra außer der Existenz des Einselements. Die Verwendung von $L^1 \oplus \mathbb{C}$ mit der Norm $\|f \oplus \lambda\| = \|f\||\lambda|$ und der Multplikation $(f \oplus \lambda) \cdot (g \oplus \mu) = f * g + \lambda g + \mu f \oplus \lambda\mu$ ist eine Banachalgebra.
vgl. [6]

Proposition 1.5. *Sei $(X, \|.\|)$ ein Banachraum, dann ist $B(X) := B(X,X)$ die Algebra der beschränkten linearen Operatoren versehen mit der Operatornorm eine Banachalgebra.*

Beweis. Teil 1) $B(X)$ ist vollständig:
Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von Operatoren aus $B(X)$. Insbesondere gilt für jedes x, dass $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X ist. Da X ein Banachraum ist, existiert der Grenzwert und wir setzen $A(x) := \lim_{n\to\infty} A_n(x)$. Sei x beliebig und $\epsilon > 0$, so können wir ein N wählen, sodass $\|A_n - A\| \leq \epsilon$ und zwar für alle $n \geq N$. Damit konvergiert A_n gleichmäßig gegen A, welches somit beschränkt ist.

Teil 2) $B(X)$ ist eine Algebra und es gilt die multiplikatve Dreiecksungleichung:
Als Einselement haben wir die Identität $I : Ix = x$. Man sieht leicht, dass $\|I\| = 1$

Für $A, B \in B(X)$ definieren wir die Multiplikation als das Hintereinanderausführen der beiden Operatoren : $A \cdot B : X \to X, x \to A(B(x))$. Damit folgen die Assoziativität, die Distributivität und das Rausziehen eines Skalars. Auch die Gültigkeit der multiplikativen Dreiecksungleichung ist nicht schwer zu beweisen: $\|(S \cdot T)(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\| \cdot \|T\|\|x\|$ und damit gilt $\|S \cdot T\| \leq \|S\|\|T\|$.

□

Definition 1.6.

$$\mathrm{Inv_l}(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{A} : \exists y \in \mathcal{A} : yx = 1\}$$

$$\mathrm{Inv_r}(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{A} : \exists y \in \mathcal{A} : xy = 1\}$$

$$\mathrm{Inv}(\mathcal{A}) := \mathrm{Inv_l}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Inv_r}(\mathcal{A})$$

Lemma 1.7. *Sei* $a \in \mathcal{A}, \|a\| < 1$, *dann gilt* $1 - a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$

Beweis. Sei $\|a\| < 1, \|a^k\| \leq \|a\|^k$ und somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ konvergent und es gilt: $(1-a)(\sum_{k=0}^{\infty} a^k) = (\sum_{k=0}^{\infty} a^k)(1-a) = \lim_{k\to\infty}(\sum_{k=0}^{k} a^k - \sum_{k=0}^{k} a^{k+1}) = \lim_{k\to\infty}(1 - a^{k+1}) = 1$

□

Lemma 1.8. *Die Mengen* $\mathrm{Inv_r}(\mathcal{A}), \mathrm{Inv_l}(\mathcal{A})$ *und* $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ *sind offen.*

Beweis. Sei $yx = 1$ und sei $\|u\| < \|y\|^{-1}$. Dann gilt: $y(x+u) = 1 + yx$, wobei $\|yu\| \leq \|y\|\|u\| < 1$ und nach Lemma 1.7 ist $y(x+u)$ invertierbar mit:
$(y(x+u))^{-1}(y + (x+u)) = 1$, das bedeutet $(x+u) \in \mathrm{Inv}_l(\mathcal{A})$.
Der Beweis funktioniert analog für $\mathrm{Inv}_r(\mathcal{A})$. Da $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ der Durchschnitt zweier offener Mengen ist, ist $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ wieder offen.

□

1.2 Komplexe Analysis

In den folgenden Kapiteln werden einige Resultate der komplexen Analysis verwendet, welche hier aufgelistet werden sollen.

Definition 1.9. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}, D \subseteq \mathbb{C}$ offen, wird analytisch in D genannt, falls sie an jedem Punkt komplex differenzierbar ist, oder anders ausgedrückt, für jeden Punkt $a \in D$ folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Lemma 1.10. *Seien* $f, g : D \to \mathcal{C}$ *Funktionen, welche in* $a \in D$ *komplex differenzierbar sind, dann sind es auch die Funktionen* $f + g, f \cdot g, 1/f$ *und* λf, *für* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lemma 1.11. *Seien $f : D \to \mathbb{C}$, $g : D' \to \mathbb{C}$ Funktionen und $f(D) \subseteq D'$, f in a und g in $f(a)$ komplex differenzierbar, dann ist die Zusammensetzung $f \circ g : D \to \mathbb{C}$ in a komplex differenzierbar und es gilt $(f \circ g)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.*

Beweis. Die Beweise von Lemma 1.10 und Lemma 1.11 finden sich in [7] ab Seite 36.

Definition 1.12. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, so nennt man $\lambda \in D$ Nullstelle n-ter Ordnung, wenn folgendes gilt: $f(\lambda) = 0, f^{(1)}(\lambda) = 0, ..., f^{(n-1)}(\lambda) = 0$ und $f^{(n)}(\lambda) \neq 0$.

Satz 1.13. *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch, $D \subseteq \mathbb{C}$. $U_R(a) \subseteq D$, dann gilt:*
$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$, für alle $z \in U_R(a)$ und mit $a_k = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Der Beweis dazu befindet sich in [7] auf seite 107.

Definition 1.14. Eine Menge M heißt zusammenhängend, wenn sie nicht in zwei disjunkte offene Mengen zerlegt werden kann. Das bedeutet, dass für zwei beliebige disjunkte offene Mengen $O_1, O_2 \neq \emptyset$ gilt, dass $O_1 \cup O_2 \neq M$.

Definition 1.15. Ein Gebiet ist eine offene, nichtleere und zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes. Ein bezüglich der Mengeninklusion maximales Gebiet nennt man Zusammenhangskomponente.

Satz 1.16. *(Identitätssatz) Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ zwei analytische Funktionen auf einem Gebiet, so ist $f = g$ genau dann, wenn die Koinzidenmenge $\{z \in D : f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in D hat.*

Beweis. Die eine Richtung ist trivial. Für die andere Richtung nehmen wir an, dass die Koinzidenmenge M einen Häufungspunkt a in D hat. Wir betrachten die Funktion $h := f - g$. Für diese Funktion stimmen die Nullstellen mit M überein. Nun müssen wir zeigen, dass h konstant 0 auf D ist. Wir entwickeln h als Potenzreihe um a: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n(z-a)^k$, für $|z-a| < r$. a ist Häufungspunkt von M, damit gibt es in jeder Umgebung von a Punkte $z \neq a$ mit $f(z) = 0$. Aus der Stetigkeit von f folgt, dass $a_0 = f(a) = 0$. Wir wenden induktiv die gleiche Argumentation auf $\frac{f(z)}{(z-a)^i}$ an und erhalten, dass alle Koeffizienten der Potenzreihe verschwinden. Damit ist $f(z) \equiv 0$ für alle $z \in U_r(a)$. Nun ist $U := \{z \in D : z$ Häufungspunkt von $M\}$ offen. Ebenso ist $V := \{z \in D : z$ kein Häufungspunkt von $M\}$ offen. D ist aber ein Gebiet und damit zusammenhängend, woraus folgt, dass eine der Mengen leer sein muss. Da U nicht leer ist muss gelten $V = \emptyset$ und $U = D$.

□

Lemma 1.17. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch, $K \subsetneq G$ kompakt, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ Nullstellen von f in K, der Vielfachheit oft gezählt. Sei D eine offene Umgebung von K ohne weitere Nullstellen von f, dann gibt es eine nullstellenfreie analytische Funktion $g : D \to \mathbb{C}$, sodass folgendes gilt: $f(z) = (z-\lambda_1) \cdot ... \cdot (z-\lambda_n)g(z)$.*

Beweis. Es gibt n Nullstellen, was $P := (z-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(z-\lambda_n)$ zu einem Polynom n-ten Grades macht. P ist demnach analytisch, genau wie $1/P$. Nach Lemma 1.10 ist damit auch $g = f/P$ analytisch. Nun ist zu zeigen, dass g nullstellenfrei ist. P ist beschränkt, folglich sind die einzigen Punkte, an den Nullstellen auftreten könnten die λ_i. Sei λ_i eine Nullstelle der Ordnung n. Wir entwickeln f als Potenzreihe um λ_i. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-\lambda_i)^k$. Wir wissen, dass $f^{(n)}(\lambda_i) \neq 0$. Das bedeutet, dass $a_k = 0$, für $k \leq n$ und $a_{n+1} \neq 0$. Es gilt: $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-\lambda_i)^k/P(z)$. Der Faktor $(z-\lambda_i)$ tritt in P genau n mal auf. Wir definieren $Q := \prod_{j=1,\lambda_j\neq\lambda_i}^{n}(z-\lambda_j)$. Damit erhalten wir $g(\lambda_i) = \frac{0+a_{n+1}+\sum_{k=n+2}^{\infty} a_k\cdot 0}{Q(\lambda_i)}$. Q ist ein Polynom und damit beschränkt, im Zähler steht eine Zahl $\neq 0$ und damit ist $g(\lambda_i) \neq 0$.

□

Satz 1.18. *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra, $a \in \mathcal{A}$, G eine offene Umgebung von $\sigma(a)$, $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann existiert eine Menge von einfach positiv orientierten geschlossenen Kurven $\Gamma := \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$, in $G\backslash\sigma(a)$, sodass folgender Ausdruck wohldefiniert ist.*

$$f(a) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)(ze-a)^{-1}dz$$

Beweis. Den Beweis findet man in [8] ab Seite 200.

Definition 1.19. Sei $\mathrm{Hol}(a)$ die Algebra aller analytischen Funktionen, welche in einer Umgebung von $\sigma(a)$ definiert sind.

Die Addition ergibt eine Funktion, welche auf dem Schnitt der Funktionsbereiche der einzelnen Funktionen definiert ist. Außerdem muss man zwei Funktionen, welche auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche gleich sind, als äquivalent betrachten.

Satz 1.20. *(Riesz-Dunford'sche Funktionalkalkül) Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra, $a \in \mathcal{A}$, dann gilt folgendes:*

i) Die Abbildung $\Phi_a : f \to f(a)$, von Hol(a) $\to \mathcal{A}$ ist ein Algebrahomomorphismus.

ii) $f(z) \equiv 1$, dann gilt $f(a) = e$.

iii) $f(z) = z$, dann gilt $f(a) = a$.

iv) $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ mit $\alpha_k \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $R > r(a)$, dann gilt $f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k a^k$.

v) $f(z) \neq 0, \forall z \in \sigma(a)$, dann gibt es eine Inverse zu $f(a)$. $f(a)^{-1} = (1/f)(a)$.

vi) $f, f_1, f_2, ...$ analytisch mit dem gleichen Definitionsbereich G, $\sigma(a) \subseteq G$, und $f_n(z) \to f(z)$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von G, dann gilt $\|f_n(a) - f(a)\| \to 0$.

Beweis. Der Beweis ist ebenfalls in [8] ab Seite 201 zu finden.

2 Verallgemeinertes Spektrum

2.1 Regularitäten

Für den folgenden Teil, in dem das Spektrum verallgemeinert wird, ist die Einführung des Begriffs Regularität vonnöten.

Definition 2.1. Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $\mathcal{R}$ eine nicht leere Teilmenge von $\mathcal{A}$, so nennt man $\mathcal{R}$ eine Regularität, genau dann, wenn folgende zwei Punkte erfüllt sind:

i) Sei $a \in \mathcal{A}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a^n \in \mathcal{R}$;

ii) Seien a, b, c, d paarweise kommutierende Elemente aus $\mathcal{A}$ und $ac + bd = 1_\mathcal{A}$, dann gilt:

$$ab \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a \in \mathcal{R} \text{ und } b \in \mathcal{R}.$$

Proposition 2.2. *Sei $\mathcal{R}$ eine Regularität in einer Banachalgebra $\mathcal{A}$, dann gilt:*

i) $1_\mathcal{A} \in \mathcal{R}$

ii) $\mathrm{Inv}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{R}$

iii) Für $a, b \in \mathcal{A}, ab = ba$ und $a \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ folgt:
$ab \in \mathcal{R} \Leftrightarrow b \in \mathcal{R}$
Insbesondere gilt: $0 \neq a = \lambda \in \mathbb{C}$ *und* $b \in \mathcal{R} \Rightarrow \lambda b \in \mathcal{R}$

Beweis. i) Wir wählen ein beliebges $b \in \mathcal{R} \neq \emptyset$, so gilt: $1_\mathcal{A} \cdot 1_\mathcal{A} + 0 \cdot b = 1_\mathcal{A}$ und damit folgt aus Definition 2.1 ii) $1_\mathcal{A} \cdot b \in \mathcal{R} \Leftrightarrow 1_\mathcal{A} \in \mathcal{R}$ und $b \in \mathcal{R}$.
ii) Sei $c \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ beliebig: $c \cdot c^{-1} + 0 \cdot c^{-1} = 1_\mathcal{A}$, aus i) folgt damit $c \in \mathcal{R}$.
iii) $a \cdot a^{-1} + 0 \cdot b = 1_\mathcal{A}$ damit folgt aus i) und Definition 2.1 ii) sofort die Behauptung.

□

Korollar 2.3. *Sei $\mathcal{R}$ eine Regularität in einer Banachalgebra $\mathcal{A}$. Sei $\mathcal{R}$ abgeschlossen, so gilt $0 \in \mathcal{R}$.*

Beweis. Aus vorrangegangener Proposition wissen wir, dass $1_\mathcal{A}$ in jeder Regularität liegt und dass in jeder Regularität Folgendes gilt: $\lambda \neq 0$ und $a \in \mathcal{R} \Rightarrow \lambda a \in \mathcal{R}$. Daraus folgt, dass für jedes $\epsilon > 0$ gilt: $\|\frac{\epsilon}{2} 1_\mathcal{A} - 0\| < \epsilon$. Sei $\mathcal{R}$ abgeschlossen, dann liegt 0 sicherlich in $\mathcal{R}$.

□

Im Zuge dieser Arbeit werden noch einige Regularitäten behandelt werden, welche man nicht immmer sofort als solche identifizieren kann. Das folgende Kriterium kann dabei in einigen Fällen hilfreich sein.

Satz 2.4. *Sei $\mathcal{R}$ eine nicht leere Teilmenge einer Banachalgebra $\mathcal{A}$. Sei vorrausgesetzt, dass für alle kommutierenden Elemente $a, b \in \mathcal{A}$ gilt, dass:*

$$ab \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a \in \mathcal{R} \text{ und } b \in \mathcal{R} \tag{1}$$

Dann ist $\mathcal{R}$ eine Regularität.

Beweis. Teil 1) zz. i) für $a \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$ gilt: $a^n \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a \in \mathcal{R}$
Da a mit a^{n-1} kommutiert, gilt nach (1), wenn man $b = a^{n-1}$ setzt, genau das Geforderte.
Teil 2) Punkt ii) der Definition ist erfüllt, wenn die Äquivalenz (1) für alle kommutierenden Elemente gilt.

□

Beispiel 2.5. *Beispiele für Regularitäten in einer Banachalgebra $\mathcal{A}$:*

i) $R_1 = \mathcal{A}$

ii) $R_2 = \operatorname{Inv}(\mathcal{A})$

iii) $R_3 = \operatorname{Inv}_l(\mathcal{A})$

iv) $R_4 = \operatorname{Inv}_r(\mathcal{A})$

Beweis. i) Man sieht leicht, dass i) alle Bedingungen erfüllt, um eine Regularität zu sein.
ii) Für R_2 verwenden wir den vorangegangenen Satz. Seien a, b kommutierende Elemente, dann muss Aquivalenz (1) gelten.
$\Leftarrow$: Für a, b invertierbare Elemente, ist sicherlich $b^{-1}a^{-1}$ das Inverse zu ab.
$\Rightarrow$: Sei ab invertierbar, dann gilt: $(ab)^{-1}ab = 1$. Nach dem Assoziativgesetz gilt: $((ab)^{-1}a)(b) = 1$, was bedeutet, dass b invertierbar ist. Die Invertierbarkeit von a zeigt man genauso, jedoch benötigt man einmal das Kommutativgesetz. Für iii) und iv) verläuft der Beweis genau wie für Punkt ii).

□

Lemma 2.6. *Seien $(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Regularitäten, dann ist $\tilde{R} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_n$ wieder eine Regularität.*

Beweis. Wir müssen beide Punkte in Definition 2.1 zeigen. i) Für ein $a \in \tilde{R}$ gilt, dass es in jeder Regularität $\mathcal{R}_i$ liegt. In jeder dieser Regularitäten liegen auch die Elemente a^n. Ebenso gilt für ein a^n, welches in allen Regularitäten $\mathcal{R}_i$ liegt, dass in jeder Regularitäten auch a liegt. Damit liegt a auch in $\tilde{R}$.
Nun zu Punkt ii): Liegt $ab = ba$ in $\tilde{R}$, dann liegt es auch in allen Regularitäten $\mathcal{R}_i$. In jeder dieser Regularitäten liegen auch a und b, welche dann wieder in $\tilde{R}$ liegen. Ebenso wenn a und b mit $ab = ba$ in $\tilde{R}$ liegt, dann liegen a und b in den Regularitäten $\mathcal{R}_i$ und damit liegt auch ab in jeder Regularität $\mathcal{R}_i$. Damit liegt ab in $\tilde{R}$.

□

Lemma 2.7. *Seien $(\mathcal{R}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Regularitäten. Sei vorrausgesetzt, dass für jedes $a, b \in \mathbb{N}$ ein $c \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $R_a \cup R_b \subseteq R_c$. Dann ist $\bar{R} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_n$ eine Regularität.*

Beweis. i) Liegt a in einer Regularität, dann liegt auch a^n in dieser Regularität und damit liegt es auch in der Vereinigung. Dassselbe gilt wenn ein a^n in einer Regularität liegt, dann liegt auch a darin und es liegt auch in der Vereinigung.
ii) Sei ab aus $\bar{R}$, dann liegt ab in einer Regularität $\mathcal{R}_i$. Dort liegen auch a und b, welche damit auch wieder in der Vereinigung liegen. Für a, b aus $\bar{R}$ gibt es ein i und ein j, sodass a in $\mathcal{R}_i$ liegt und b in $\mathcal{R}_j$. Nach Vorraussetzung gibt es in k, sodass a und b in $\mathcal{R}_k$ liegen. Dort liegt auch ab, welches dann in $\bar{R}$ liegt.

□

2.2 Definition des Spektrums

Nun, da wir alle nötigen Grundlagen ausgearbeitet haben, können wir das verallgemeinerte Spektrum definieren.

Definition 2.8. Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $\mathcal{R}$ eine Regularität, dann ist das zu $\mathcal{R}$ zugehörige Spektrum definiert als:

$$\sigma_{\mathcal{R}}(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \notin \mathcal{R}\}$$

Dieser neue Begriff des Spektrums stimmt für $R = \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ mit dem bisherigen Spektrum σ überein. Für den Rest dieser Arbeit gilt: $\sigma := \sigma_{\mathrm{Inv}(\mathcal{A})}$. Für eine beliebige Regularität $\mathcal{R}$ gilt $\sigma_{\mathcal{R}} \subseteq \sigma$.

Beweis. Dies folgt sofort aus der Tatsache, dass jede Regularität $\mathcal{R}$ eine Obermenge von $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ ist.

Lemma 2.9. *Sei $\mathcal{R}_n$ eine Folge von Regularitäten und $R_1 := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_n$, dann gilt*

$$\sigma_{R_1}(a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{\mathcal{R}_n}(a)$$

Beweis. Nach Lemma 2.6 ist R_1 wieder eine Regularität. Das heißt σ_{R_1} existiert und es gelten die Äquivalenzen:
$\lambda \in \sigma_{R_1}(a) \Leftrightarrow (a - \lambda) \notin R_1 \Leftrightarrow (a - \lambda) \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ es gibt ein $R_0 : (a - \lambda) \notin R_0 \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_{R_0} \Leftrightarrow \lambda \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{\mathcal{R}_n}(a)$ das bedeutet:
$\lambda \in \sigma_{R_1}(a) \Leftrightarrow \lambda \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{\mathcal{R}_n}(a)$

□

Lemma 2.10. *Sei $\mathcal{R}_n$ eine Folge von Regularitäten, es gilt zusätzlich, dass für jedes $a, b \in \mathbb{N}$ ein $c \in \mathbb{N}$ existiert, sodass: $\mathcal{R}_a \cup \mathcal{R}_b \subseteq \mathcal{R}_c$ und $R_2 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_n$, dann gilt:*

$$\sigma_{R_2}(a) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{\mathcal{R}_n}(a)$$

Beweis. R_2 ist dank Lemma 2.7 wieder eine Regularität und damit existiert das zugehörige Spektrum.
Sei $\lambda \in \sigma_{R_2}(a) \Leftrightarrow (a-\lambda) \notin R_2 \Leftrightarrow (a-\lambda) \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ für alle n gilt : $(a-\lambda) \notin R_n \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_{R_n} \Leftrightarrow \lambda \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{\mathcal{R}_n}(a)$ damit gilt:
$\lambda \in \sigma_{R_2}(a) \Leftrightarrow \lambda \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{\mathcal{R}_n}(a)$

□

2.3 Der Spektralabbildungssatz

Zu Beginn möchte ich den Spektralabbildungssatz für Polynome auf dem herkömmlichen Spektrum ausführen.

Satz 2.11. (Spektralabbildungssatz für Polynome)
Sei $\mathcal{A}$ eine Banchalgebra und $a \in \mathcal{A}$ und p ein Polynom, dann gilt:

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) \tag{2}$$

Beweis. Es gilt $\sigma \neq \emptyset$. Damit ist die Gleichheit für konstante Polynome klar. Sei p nicht konstant und $\lambda \in \mathbb{C}$, dann gibt es $\beta, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$, wobei $\beta \neq 0, n \geq 1$, sodass gilt $p(z) - \lambda = \beta(z-\alpha_1) \cdot ... \cdot (z-\alpha_n)$. Somit ist klar, dass $p(a) - \lambda$ nicht invertierbar ist, wenn es ein $i \in 1, ..., n$ gibt, sodass $(a - \alpha_i)$ nicht invertierbar ist. Woraus folgt, dass $\lambda \in \sigma(p(a))$ genau dann wenn $p(z) - \lambda = 0$.

□

Lemma 2.12. *Für relativ prime Polynome p, q existieren Polynome p_1, q_1 so, dass $pp_1 + qq_1 = 1$.*

Beweis. Der Beweis und zusätzliches Material ist in [9] auf Seite 234 zu finden.

Satz 2.13. (Spektraler Abbildungssatz)
Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra, $\mathcal{R}$ eine Regularität und das zugehörige Spektrum $\sigma_{\mathcal{R}}$, dann gilt:

$$f(\sigma_{\mathcal{R}}(a)) = \sigma_{\mathcal{R}}(f(a)) \tag{3}$$

für alle $a \in \mathcal{A}$ und jede analytische Funktion f, welche auf einer Umgebung von $\sigma(a)$ definiert ist und dabei auf jeder Zusammenhangskomponente[1] lokal nicht-konstant ist.

Beweis. Wir bemerken zu Beginn, dass für eine analytische Funktion f der Ausdruck $f(a)$ nach Satz 1.18 sinnvoll ist. Sei $\mu \in \mathbb{C}$. Es genügt zu zeigen, dass

$$\mu \notin \sigma_{\mathcal{R}}(f(a)) \Leftrightarrow \mu \notin f(\sigma_{\mathcal{R}}(a)) \tag{4}$$

[1] Zusammenhangskomponente: siehe Kapitel 1.2

Aufgrund der Vorraussetzung und des Identitätssatzes für analytische Funktionen[2] hat $(f-\mu)$ nur endlich viele Nullstellen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \sigma(a)$ und kann nach Lemma 1.17 dargestellt werden als $f(z)-\mu = (z-\lambda_1)\cdot ... \cdot(z-\lambda_n)\cdot g(z)$ wobei g eine analytische Funktion ist, mit $g(z) \neq 0 \forall z \in \sigma(a)$.
Damit gilt $f(a)-\mu = (a-\lambda_1)\cdot ... \cdot(a-\lambda_n)\cdot g(a)$ und nach Satz 1.20 v) ist $g(a)$ invertierbar. Nun ist (4) äquivalent zu Folgendem:

$$f(a) - \mu \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a - \lambda_i \in \mathcal{R} \quad (i = 1, ..., n) \tag{5}$$

Da $g(a)$ invertierbar ist, sind nach Proposition 2.2 iii) die Gleichungen (5) und (6) äquivalent:

$$(a - \lambda_1) \cdot ... \cdot (a - \lambda_n) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (a - \lambda_i) \in \mathcal{R} \quad (i = 1, ..., n) \tag{6}$$

Für relativ prime Polynome p, q gibt es nach Lemma 2.13 Polynome p_1, q_1 so, dass $pp_1 + qq_1 = 1$.
Für alle $i \in I := \{1, ..., n\} : p(z) = (z - \lambda_i)$ und $q(z) = \prod_{k \in I \setminus \{i\}} (z - \lambda_k)$. Damit existieren p_1, q_1 so, dass $p(a)p_1(a) + q(a)q_1(a) = 1_{\mathcal{A}}(a)$. Somit folgt (6) aus dem 2. Punkt der Definition von Regularitäten.

$\square$

[2] Identitätssatz für analytische Funktionen: siehe Kapitel 1.2

3 Axiomatische Spektraltheorie

Jetzt, da wir schon begonnen haben uns in das Feld der Spektraltheorie etwas vorzutasten, können wir versuchen, bestimmte Eigenschaften der Spektren an bestimmten Kriterien festzumachen. So kann man sich fragen, ob man ein Kriterium dafür findet, wann die Spektren abgeschlossen sind und wann nicht. Die Antwort darauf und noch einige weitere liefert die axiomatische Spektraltheorie.

3.1 Halbstetigkeit von oben

Die erste Eigenschaft, die wir in diesem Zusammenhang definieren werden, ist die Halbstetigkeit von oben. Doch zuerst sollten wir wiederholen, was es heißt, dass eine mengenwertige Abbildung halbstetig von oben ist.

Definition 3.1. Seien X, Y metrische Räume und sei $\phi : X \to \mathcal{P}(Y)$ eine Abbildung, die jedem $x \in X$ eine abgeschlossene Teilmenge von Y zuordnet. Weiters sei $x_0 \in X$. Dann heißt ϕ halbstetig von oben an x_0, falls für jede Umgebung U von $\phi(x_0)$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass für alle $x \in U_\epsilon(x_0)\phi(x)$ in U liegt. Die Abbildung ϕ wird halbstetig von oben genannt, falls sie halbstetig von oben an jedem $x \in X$ ist.

Definition 3.2. Seien A, B Teilmengen eines metrischen Raums (Y, d), dann sei $\Delta(A, B) := \sup_{x \in A} d(x, B)$. Man beachte jedoch, dass dieser Abstandsbegriff zweier Mengen nicht symmetrisch ist.

Satz 3.3. *Seien X, Y metrische Räume und sei Y kompakt. Sei $x \in X$ und ϕ eine Abbildung, welche jedem Punkt aus X eine kompakte Menge aus Y zuordnet, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) ϕ ist halbstetig von oben bei x_0.

ii) Sei $x_n \in X$ und gelte $x_n \to x_0$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} \Delta(\phi(x_n), \phi(x_0)) = 0$.

iii) Sei $x_n \in X$, $y_n \in \phi(x_n)$ und $y \in Y$, dann gilt folgendes:
$(x_n \to x)$ und $(y_n \to y) \Rightarrow y \in \phi(x)$.

Beweis.

- *i) $\Rightarrow$ ii)* : Sei $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Umgebung von $\phi(x_0)$ und es gelte $\lim_{n\to\infty} \Delta(U_i, \phi(x_0)) = 0$. Dann gibt es für jede dieser Umgebungen ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\phi(x_n) \subseteq U_i$, für alle $n > N$. Deswegen gilt: $\lim_{n\to\infty} \Delta(\phi(x_n), \phi(x_0)) \leq \lim_{i\to\infty} \Delta(U_i, \phi(x_0)) = 0$.

- *ii) $\Rightarrow$ iii)* : Aus $x_n \to x_0, y_n \to y, y_n \in \phi(x_n)$ soll folgen, dass y in $\phi(x_0)$ liegt. Sei angenommen, dass y nicht in $\phi(x_0)$ liegt. Dann gibt es, da das Bild von ϕ abgeschlossen ist, eine δ - Kugel um y, welche mit $\phi(x_0)$ einen leeren Schnitt hat. Daraus folgt, dass $B := \mathcal{U}_{\delta/3}(y)$ und $A := (\phi(x_0) + \mathcal{U}_{\delta/3}(0))$ einen leeren Schnitt haben. Daraus folgt, dass es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $y_n \in B$, für alle n ab dem

Index N_1. Andererseits folgt aus ii), dass es ein $N_2 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\phi(x_n)$ in A liegt, für n ab dem Index N_2. Sei $N := \max(N_1, N_2)$ dann können wir folgern, dass $y_N \notin \phi(x_N)$, was ein Widerspruch ist.

- *iii)* $\Rightarrow$ *i)* : Sei x_n eine Folge in X welche gegen x_0 konvergiert mit der Abschätzung $\|x_n - x_0\| \leq 1/n$. Wir nehmen an, es gäbe eine offene Umgebung von $\phi(x_0)$ mit der Eigenschaft, dass $\phi(x_n) \subsetneq U$. Sei r der Abstand zwischen einer abgeschlossenen Menge U^c und der kompakten Menge $\phi(x_0)$ und damit positiv. $r := d(U^c, \phi(x_0)) > 0$ Nun wählen wir $y_n \in \phi(x_n) \cap U^c$. Da Y kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $y_{n_k} \to y \in Y$. Aus iii) folgt, dass y in $\phi(x_0)$ liegt. Dies ist ein Widerspruch, da folgendes gelten müsste: $d(\{y_n\}, \phi(x_n)) \geq r$.

□

Definition 3.4. (P2) Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $\mathcal{R}$ eine Regularität. Das zugehörige Spektrum $\sigma_{\mathcal{R}}$ wird genau dann halbstetig von oben genannt, wenn für
$a_n, a \in \mathcal{A}, a_n \to a, \lambda_n \in \sigma_{\mathcal{R}}(a_n)$ und $\lambda_n \to \lambda$ gilt: $\lambda \in \sigma_{\mathcal{R}}(a)$

Satz 3.5. *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra, $\mathcal{R}$ eine Regularität und $\sigma_{\mathcal{R}}$ das zugehörige Spektrum, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) (P2);

ii) $\sigma_{\mathcal{R}}(a)$ ist abgeschlossen und die Abbildung $a \to \sigma_{\mathcal{R}}(a)$ ist halbstetig von oben.

iii) $\mathcal{R}$ ist offen.

Beispiel 3.6. *Sei $\mathcal{R} = \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Laut Lemma 1.8 ist $\mathcal{R}$ offen und wir wissen, dass σ abgeschlossen ist, was bekräftigen würde, dass Satz 3.5 korrekt ist.*

Beweis. (von Satz 3.5)

- iii) $\Rightarrow$ i):Seien $a_n, a \in \mathcal{A}, a_n \to a, \lambda_n \in \sigma_{\mathcal{R}}(a_n)$ und $\lambda_n \to \lambda$. Dann gilt, dass $a_n - \lambda_n \notin \mathcal{R}$. Da $\mathcal{A} \setminus \mathcal{R}$ abgeschlossen ist folgt, dass $a - \lambda \notin \mathcal{R}$ und deswegen $\lambda \in \sigma_{\mathcal{R}}(a)$.

- i) $\Rightarrow$ iii): $\mathcal{R}$ ist offen, genau dann wenn $\mathcal{A} \setminus \mathcal{R}$ abgeschlossen ist. Seien $a_n \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{R}, a_n \to a$. Dann ist $0 \in \sigma_{\mathcal{R}}(a_n)$ für alle n, und aus i) folgt, dass $0 \in \sigma_{\mathcal{R}}(a)$, was bedeutet, dass $a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{R}$.

- i) $\Leftrightarrow$ ii): Sei $a \in \mathcal{A}$ beliebig. Betrachtet man die konstante Folge $a_n = a$, so folgt aus i), dass das Spektrum $\sigma_{\mathcal{R}}$ abgeschlossen und damit kompakt ist. Der Rest dieser Äquivalenz folgt aus Satz 3.3.

□

3.2 Halbstetigkeit von oben für kommutierende Elemente

Eine weitere Eigenschaft ist (P3), die Halbstetigkeit von oben für kommutierende Elemente. Wie man aus dem Namen schließen kann, ist diese sehr ähnlich der Halbstetigkeit von oben.

Definition 3.7. Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra, $\mathcal{R}$ eine Regularität und $\sigma_\mathcal{R}$ das zugehörige Spektrum. $\mathcal{R}$ wird (P3) genannt, falls $\sigma_\mathcal{R}$ halbstetig von oben für kommutierende Elemente ist. Das bedeutet für $a_n, a \in \mathcal{A}, a_n \to a, a_n a = a a_n, \lambda_n \in \sigma_\mathcal{R}(a_n)$ und $\lambda_n \to \lambda$ gilt: $\lambda \in \sigma_\mathcal{R}(a)$.

Wie man leicht sehen kann, gilt $(P2) \Rightarrow (P3)$.

Korollar 3.8. *Betrachtet man für ein beliebiges $a \in \mathcal{A}$ die konstante Folge $a_n = a$, so sieht man, dass das zugehörige Spektrum $\sigma_\mathcal{R}(a)$ abgeschlossen ist.*

Satz 3.9. *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra, $\mathcal{R}$ eine Regularität und $\sigma_\mathcal{R}$ das zugehörige Spektrum, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) (P3);

ii) $\sigma_\mathcal{R}(a)$ ist abgeschlossen für jedes $a \in \mathcal{A}$ und für jede Umgebung U von $\sigma_\mathcal{R}(a)$ gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass $\sigma_\mathcal{R}(a+u) \subseteq U$, für $u \in \mathcal{A}, au = ua$, $\|u\| < \epsilon$.

iii) Für jedes $a \in \mathcal{R}$ gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass aus $u \in \mathcal{A}, ua = au$ und $\|u\| < \epsilon$, folgt, dass $a + u \in \mathcal{R}$.

Beweis.

- i) $\Rightarrow$ ii): Nach Korollar 3.8 ist $\sigma_\mathcal{R}(a)$ abgeschlossen. Sei $a_n, a \in \mathcal{A}$, $a_n \to a$, $a_n a = a a_n$ für jedes n, sei $\lambda_n \in \sigma_\mathcal{R}(a_n)$ und $\lambda_n \to \lambda$. Dann müsste nach (P3) gelten, dass λ in $\sigma_\mathcal{R}(a)$ liegt, was jetzt durch Kontraposition gezeigt wird. $\lambda \in \sigma_\mathcal{R}(a) \Leftrightarrow a - \lambda \notin \mathcal{R}$. Wir nehmen an, dass $a - \lambda \in \mathcal{R}$. Dann gibt es für ein $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N} : \|a_n - a\| < \epsilon/2$ und $|\lambda - \lambda_n| < \epsilon/2$. Damit gilt: $\|(a - \lambda) - (a_n - \lambda_n)\| < \epsilon$. Nach den Vorraussetzungen gilt: $a(a_n - a) = a a_n - a^2 = (a_n - a)a$. Auch $(a - \lambda)$ und $(a_n - \lambda_n)$ kommutieren, da Skalare mit den Elementen einer Banachalgebra vertauschen. Nun gilt nach iii), dass $((a - \lambda) + (a_n - \lambda_n - a + \lambda)) = (a_n - \lambda_n) \in \mathcal{R}$, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

- ii) $\Rightarrow$ iii): Sei $a \in \mathcal{R}, u_n \in \mathcal{A} : u_n a = a u_n, \|u_n\| < 1/n, a + u_n \notin \mathcal{R}, a + u_n \notin \mathcal{R} \Leftrightarrow 0 \in \sigma_\mathcal{R}(a + u_n)$. Sei U die δ - Umgebung von $\sigma_\mathcal{R}(a)$. Dann gilt nach ii), dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass $\sigma_\mathcal{R}(a+u) \subseteq U$, für alle $u \in \mathcal{A}$ mit $au = ua, \|u\| < \epsilon$.
Demnach liegen alle $\sigma_\mathcal{R}(a + u_n) \subseteq U$ für $n > 1/\epsilon$. Insbesondere liegt auch 0 in U. Wir haben δ beliebig gewählt, woraus folgt, dass 0 in $\overline{\sigma_\mathcal{R}(a)}$. Da dieses nach ii) abgeschlossen ist, gilt $0 \in \sigma_\mathcal{R}(a)$ und damit $0 \notin \mathcal{R}$. Widerspruch.

- iii) $\Rightarrow$ i): Seien $a_n, a \in \mathcal{A}, a_n \to a, a_n a = a a_n, \lambda_n \to \lambda, \lambda_n \in \sigma_{\mathcal{R}}(a_n)$. Wir nehmen an, dass λ nicht in $\sigma_{\mathcal{R}}(a)$ liegt, oder äquivalent $a - \lambda \in \mathcal{R}$. Nach iii) existiert ein $\epsilon > 0$, sodass für $u \in \mathcal{A}$ mit $\|u\| < \epsilon, au = ua$ gilt, dass $a + u$ in $\mathcal{R}$ liegt. Wir wählen $u_n := (a_n - \lambda_n) - (a - \lambda)$. Da a_n, λ_n gegen a, λ konvergieren folgt, dass $\|u_n\| \to 0$. Für großes n wird $\|u_n\| < \epsilon$. Damit folgt aus iii), dass $(a - \lambda) + u$ in $\mathcal{R}$ liegt, was bedeutet, dass $(a_n - \lambda_n)$ in $\mathcal{R}$ liegt. Äquivalent zu dieser Aussage ist $\lambda_n \notin \sigma_{\mathcal{R}}(a_n)$, was einen Widerspruch zur Annahme ergibt.

□

Die Eigenschaft (P3) ermöglicht es uns, Regularitäten auf eine zusätzliche Weise darzustellen.

Satz 3.10. *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $\mathcal{R}$ eine nicht leere Teilmenge von $\mathcal{A}$, welche die Eigenschaft (P3) und folgende leicht abgeänderte Punkte erfüllt:*

i) Sei $a \in \mathcal{A}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a \in \mathcal{R} \Rightarrow a^n \in \mathcal{R}$;

ii) Seien a, b, c, d paarweise kommutierende Elemente aus $\mathcal{A}$ und $ac + bd = 1_{\mathcal{A}}$, dann gilt:

$$ab \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a \in \mathcal{R} \text{ und } b \in \mathcal{R}.$$

Dann ist $\mathcal{R}$ eine Regularität.

Beweis. Der Unterschied zur Definition einer Regularität liegt in Punkt i). Wir müssen zeigen, dass aus (P3) folgt, dass $a^n \in \mathcal{R} \Rightarrow a \in \mathcal{R}$, für $n \in \mathbb{N} : n \geq 2$. Aus (P3) folgt, dass aus $a^n \in \mathcal{R}$ folgt, dass $a^n - \mu a = a(a^{n-1} - \mu) \in \mathcal{R}$, für $\mu \in \mathbb{C}$. Es gilt: $(a^{n-1} - \mu)(-\mu^{-1}) + a(\mu^{-1} a^{n-2}) = 1_{\mathcal{A}}$
Damit folgt aus ii) die gewünschte Eigenschaft.

□

3.3 Stetigkeit für kommutierende Elemente

Die dritte Eigenschaft, die wir in diesem Kontext anführen möchten, ist die Stetigkeit für kommutierende Elemente. In den letzten beiden Unterkapiteln haben wir uns mit Halbstetigkeit von oben auseinandergesetzt. Wie üblich ist eine Funktion genau dann stetig, wenn sie halbstetig von oben und halbstetig von unten ist.

Definition 3.11. Seien X, Y metrische Räume und sei die Abbildung $\phi : X \to \mathcal{P}(Y)$, eine Abbildung die jedem $x \in X$ eine abgeschlossene Teilmenge von Y zuordnet. Sei $x_0 \in X$. ϕ wird halbstetig von unten an x_0 genannt, falls für jede offene Menge U mit $U \cap \phi(x_0) \neq \emptyset$ Folgendes gilt: Es existiert ein $\epsilon > 0$, sodass für jedes $x \in \mathcal{U}_\epsilon(x_0)$ gilt, dass $U \cap \phi(x) \neq \emptyset$. Die Abbildung ϕ wird halbstetig von unten genannt, falls sie halbstetig von unten an jedem $x \in X$ ist.

Satz 3.12. *Seien X, Y metrische Räume und sei $x \in X$ und ϕ eine Abbhildung, welche jedem Punkt aus X eine kompakte Menge aus Y zuordnet, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) ϕ *ist halbstetig von unten bei* x_0.

ii) *Sei* $x_n \in X$ *und gelte* $x_n \to x_0$, *dann gilt* $\lim_{n\to\infty} \Delta(\phi(x_0), \phi(x_n)) = 0$.

iii) *Sei* $x_n \in X$, $x_n \to x_0$ *und* $y \in \phi(x_0)$, *dann existiert ein* $y_n \in \phi(x_n)$ *so, dass* $y_n \to y$.

Beweis.

- *i)* $\Rightarrow$ *ii)* : Sei U eine endliche Überdeckung von $\phi(x_0)$ mit δ - Kugeln. Eine solche ist zu finden, da das Bild von ϕ kompakt ist. Aus i) erhalten wir für jede dieser Kugeln ein ϵ_i. Sei ϵ das Kleinste davon. Dann gilt, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für jedes $n > N$ gilt, dass $\phi(x_n)$ jede dieser δ - Kugeln schneidet. Woraus folgt, dass $\Delta(\phi(x_0), \phi(x_n)) < \delta$.

- *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* : Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, welche gegen x_0 konvergiert, $y \in \phi(x_0)$. Zu zeigen ist, dass eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so existiert, dass $y_n \in \phi(x_n)$ und $y_n \to y$. Wir wissen, dass $\Delta(\phi(x_0), \phi(x_n))$ beliebig klein wird. Damit gilt aber, dass $d(y, \phi(x_n))$ beliebig klein wird. Da $\phi(x_n)$ kompakt ist, gibt es ein Element mit minimalem Abstand für jede Menge $\phi(x_n)$. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau diese Folge, dann folgt daraus, dass der Abstand von y_n zu y beliebig klein wird, oder anders ausgedrückt, dass y_n gegen y konvergiert.

- *iii)* $\Rightarrow$ *i)* : Sei U eine offene Menge, mit $U \cap \phi(x_0) \neq \emptyset$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \neq x_0$ und $x_n \to x_0$. Sollte die Metrik nur Folgen gegen x_0 konvergieren lassen, welche ab einem gewissen Index konstant sind, dann ist dieser Punkt trivialerweise erfüllt. Andernfalls wähle $y \in \phi(x_0) \cap U$. Damit gibt es nach iii) eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n \in \phi(x_n)$. Da U offen ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\mathcal{U}_\delta(y) \subseteq U$. Insgesamt folgt daraus, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, mit $d(y_n, y) < \delta$, für alle $n > N$. Woraus schließlich folgt, dass ab diesem N jedes dieser x_n einen nichtleeren Schnitt mit U hat.

□

Definition 3.13. (P4) Das zu einer Regularität $\mathcal{R}$, in einer Banachalgebra $\mathcal{A}$, zugehörige Spektrum $\sigma_\mathcal{R}$ wird stetig für kommutierende Elemente genannt, wenn für $a_n, a \in \mathcal{A}, a_n \to a, a_n a = a a_n$, folgt:
$\lambda \in \sigma_\mathcal{R}(a)$ genau dann, wenn $\lambda_n \in \sigma_\mathcal{R}(a_n)$ und $\lambda_n \to \lambda$

Offensichtlich gilt: $(P4) \Rightarrow (P3)$. Für Regularitäten mit Eigenschaft (P4) ist deswegen das zugehörige Spektrum $\sigma_\mathcal{R}(a)$ abgeschlossen.

Definition 3.14. Seien A, B beschränkte Teilmengen von $\mathbb{C}$, dann sei $\delta(A, B)$ der Hausdorff Abstand von A zu B, welcher defniniert ist als:

$$\delta(A, B) = \max\{\Delta(A, B), \Delta(B, A)\}.$$

Satz 3.15. *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra, $\mathcal{R}$ eine Regularität und $\sigma_{\mathcal{R}}$ das zugehörige Spektrum, dann gelten folgende zwei Aussagen:*

i) Sei angenommen für jedes $a \in \mathcal{A}$ gelte:

$$\inf\{|z| : z \in \mathbb{C}, a - z \notin \mathcal{R}\} = \inf\{\|u\| : u \in \mathcal{A}, ua = au, a - u \notin \mathcal{R}\}$$

Dann ist $\delta(\sigma_{\mathcal{R}}(a), \sigma_{\mathcal{R}}(b)) \leq \|a - b\|$ für alle kommutierenden Elemente $a, b \in \mathcal{A}$.

ii) Wenn $\sigma_{\mathcal{R}}(a)$ abgeschlossen, für jedes $a \in \mathcal{A}$ ist und $\delta(\sigma_{\mathcal{R}}(a), \sigma_{\mathcal{R}}(b)) \leq \|a - b\|$ für alle kommutierenden Elemente $a, b \in \mathcal{A}$, dann erfüllt $\sigma_{\mathcal{R}}$ (P4).

Beweis.

i) Seien $a, b \in \mathcal{A}, ab = ba, \lambda \in \sigma_{\mathcal{R}}(a)$.
Wir zeigen zuerst, dass $d(\lambda, \sigma_{\mathcal{R}}(b)) \leq \|a - b\|$. Für $\lambda \in \sigma_{\mathcal{R}}(b)$ ist dieser Punkt trivialerweise erfüllt. Für $\lambda \notin \sigma_{\mathcal{R}}(b)$ gilt: $\|a - b\| = \|(a - \lambda) - (b - \lambda)\| \geq \inf\{\|u\| : u \in \mathcal{A}, u(b - \lambda) = (b - \lambda)u, (b - \lambda) + u \notin \mathcal{R}\}$. Das ist nach Annahme äquivalent zu: $\inf\{|z| : z \in \sigma_{\mathcal{R}}(b - \lambda)\}$. Äquivalent dazu ist $d(0, \sigma_{\mathcal{R}}(b - \lambda)$, was $d(\lambda, \sigma_{\mathcal{R}}(b))$ entspricht. Nun können wir das Gewünschte zeigen. $\Delta(\sigma_{\mathcal{R}}(a), \sigma_{\mathcal{R}}(b)) = \sup_{\lambda \in \sigma_{\mathcal{R}}(a)} d(\lambda, \sigma_{\mathcal{R}}(b)) \leq \|a - b\|$. Aufgrund der Symmetrie folgt, dass
$\delta(\sigma_{\mathcal{R}}(a), \sigma_{\mathcal{R}}(b)) \leq \|a - b\|$.

ii) Sei $a_n \to a, aa_n = a_n a, \lambda_n \in \sigma_{\mathcal{R}}(a_n), \lambda_n \to \lambda$. Aus i) folgt, dass es für jedes n ein $\mu_n \in \sigma_{\mathcal{R}}(a_n)$ gibt, sodass $|\mu_n - \lambda_n| \leq \|a_n - a\|$. Da die rechte Seite konvergiert, muss es auch die linke. Es gilt also $\mu_n \to \lambda$. Da $\sigma_{\mathcal{R}}(a)$ abgeschlossen ist, folgt, dass λ in $\sigma_{\mathcal{R}}(a)$ liegt. Damit folgt nach Satz 3.3 die Halbstetigkeit von oben. Es fehlt die Halbstetigkeit von unten, welche aus Satz 3.12 folgt, wenn man bemerkt, dass für jedes n ein μ_n so existieren muss, dass $|\mu_n - \lambda| \leq \|a_n - a\|$. Dieses μ_n liegt in $\sigma_{\mathcal{R}}(a_n)$ und muss, genau wie oben, gegen λ konvergieren.

$\square$

3.4 Spektralradius

Wir wissen, dass für einen beschränkten Operator a das gewöhnliche Spektrum $\sigma(a)$ innerhalb der Kreisscheibe $U_{\|a\|}(0)$ liegt. In vielen Fällen ist das Spektrum jedoch wesentlich kleiner. Dafür haben wir in der Funktionalanalysis 1 bereits den folgendermaßen definierten Spektralradius kennengelernt:

$$r(a) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$$

Es gibt auch die Möglichkeit diesen zu berechnen, denn es gilt $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_n \|a^n\|^{1/n}$.
Jetzt, da wir weitere Spektren betrachten, können wir uns fragen, wie diese im Vergleich zum gewöhnlichen Spektrum aussehen. Dafür haben wir bereits gezeigt, dass für alle Regularitäten $\mathcal{R}$ gilt: $\sigma_{\mathcal{R}}(a) \subseteq \sigma(a)$. Wesentlich ist auch folgende Eigenschaft:

Definition 3.16. Sei $\mathcal{R}$ eine Regularität in einer Banachalgebra $\mathcal{A}$. Man nennt das zugehörige Spektrum $\sigma_{\mathcal{R}}$ Spektralradius erhaltend, falls $\sigma_{\mathcal{R}}$ abgeschlossen ist und es gilt: $\max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathcal{R}}(a)\} = r(a)$, für alle $a \in \mathcal{A}$.

Hier ist klarzustellen, dass sich $r(a)$ auf den Spektralradius des gewöhnlichen Spektrums bezieht.

Korollar 3.17. *Sei $\mathcal{R}$ eine Regularität in einer Banachalgebra $\mathcal{A}$. Sei das zugehörige Spektrum $\sigma_{\mathcal{R}}$ Spektralradius erhaltend, dann gilt: $\partial\sigma \subseteq \sigma_{\mathcal{R}}$ für alle $a \in \mathcal{A}$.*

Beweis. Wir zeigen das Gewünschte durch Kontraposition. Sei $\lambda_0 \in \partial\sigma(a)$. Angenommen es existiert ein $\epsilon > 0$ so, dass $\{z : |z - \lambda_0| < \epsilon\} \cap \sigma_{\mathcal{R}} = \emptyset$. Jetzt wählen wir ein $\lambda_1 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(a)$ mit $|\lambda_0 - \lambda_1| < \epsilon/2$ und betrachten die Funktion $f(z) = (z - \lambda_1)^{-1}$. Wir können die Inverse des Abstands zwischen λ_1 und dem Spektrum betrachten, da $\lambda_1 \notin \sigma_{\mathcal{R}}(a)$. Es gilt: $d(\lambda_1, \sigma_{\mathcal{R}}(a))^{-1} = \sup\{|f(z)| : z \in \sigma_{\mathcal{R}}(a)\} = \sup\{|z| : z \in f(\sigma_{\mathcal{R}})\}$. Laut dem Spektralen Abbildungssatz gilt: $\sup\{|z| : z \in f(\sigma_{\mathcal{R}}(a))\} = \sup\{|z| : z \in \sigma_{\mathcal{R}}(f(a))\} = r(f(a)) = \max\{|f(z)| : z \in \sigma(a)\} \geq \frac{1}{|\lambda_0 - \lambda_1|} > 2/\epsilon$.
Das bedeutet, es gibt ein $\lambda_2 \in \sigma_{\mathcal{R}}(a)$ mit $|\lambda_2 - \lambda_1| < \epsilon/2$. Der Abstand $|\lambda_0 - \lambda_2| \leq |\lambda_0 - \lambda_1| + |\lambda_1 - \lambda_2| < \epsilon$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme und damit folgt das Gewünschte.

□

Aus dem Korollar folgt insbesondere, dass Spektralradius erhaltende Spektren nicht leer sind.

4 Komplexere Beispiele

4.1 Fredholmoperatoren

Fredholmoperatoren sind jene beschränkten Operatoren, die den Invertierbaren am nächsten kommen. Doch zuerst sind einige Definitionen notwendig.

Definition 4.1. Seien X, Y Banachräume, $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, und sei das Bild von A abgeschlossen.

i) $\alpha(A) := \dim(\ker(A))$ (= Dimension des Kerns)

ii) $\beta(A) := \operatorname{codim}(\operatorname{ran}(A))$ (= Defekt)

Definition 4.2. A heißt Fredholmoperator, wenn $\operatorname{ran}(A)$ abgeschlossen ist und $\alpha(A) < \infty$ und $\beta(A) < \infty$.
A heißt semi - Fredholmoperator, wenn $\operatorname{ran}(A)$ abgeschlossen ist und $\alpha(A) < \infty$ oder $\beta(A) < \infty$.
$\operatorname{ind}(A) := \alpha(A) - \beta(A)$ (= Index)

$\Phi(X,Y)$ beziehungsweise $\Phi(X)$ bezeichnet die Menge aller Fredholmoperatoren von X nach Y beziehungsweise X nach X. Fredholmoperatoren haben immer einen endlichen Index. Semi - Fredholmoperatoren dagegen können auch einen Index von ∞ oder $-\infty$ haben. $\Phi_+(X)$ bezeichnet die Menge aller semi - Fredholmoperatoren mit einem $\alpha < \infty$. Diese werden auch upper semi - Fredholmoperatoren genannt. $\Phi_-(X)$ dagegen bezeichnet die lower semi - Freholmoperatoren mit $\beta < \infty$. Ihr Index kann endlich sein, aber auch den Wert ∞ annehmen. Die nächsten Lemmata werden zeigen, dass ein endlicher Index für einen Operator ausreicht, um Fredholm zu sein.

Lemma 4.3. *Sei A ein Fredholmoperator, dann gibt es abgeschlossene Unterräume X_0, Y_0 so, dass $X = X_0 \oplus \ker(A), Y = Y_0 \oplus \operatorname{ran}(A)$.*

Beweis. Es gilt: $\beta(A) < \infty$ und damit kann man Y als direkte Summe aufschreiben. $Y = \operatorname{ran}(A) \oplus Y_0$, wobei Y_0 endlich dimensional und damit abgeschlossen ist. Wir wollen zeigen, dass es eine stetige Projektion π von X auf $\ker(A)$ gibt, denn damit wäre $X_0 := \ker(\pi)$ abgeschlossen und wir hätten: $X = X_0 \oplus \ker(A)$. Wir wissen, dass $\dim(\ker(A)) < \infty$. Damit gibt es eine endliche Basis: $\{b_1, ..., b_n\}$ von $\ker(A)$ und $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ definiert durch $\langle b_j, \phi_i \rangle := \delta_{ij}$ eine duale Basis von $\ker(A)'$. Nach Hahn-Banach gibt es Fortsetzungen der linearen Funktinoale ϕ_j zu $x'_j \in X'$. Damit können wir uns die stetige Projektion P konstruieren als $Px = \sum_{j=1}^{n} \langle x, x'_j \rangle x'_j$.

□

Definition 4.4. Sei $A : X \to Y$ ein Fredholmoperator, X_0, Y_0 abgeschlossene Unterräume wie sie nach dem obigen Lemma existieren, dann nennt man $\tilde{A}$ die Bijektion assoziiert mit A, X_0 und Y_0, wobei $\tilde{A} : X_0 \times Y_0 \to Y$, $(x_0, y_0) \to (Ax_0 + y_0)$.

Beweis. $\tilde{A}$ ist eine Bijektion, da erstens $\ker(\tilde{A}) = \{0\}$ und zweitens, da aufgrund der Konstruktion jeder Punkt $y \in Y$ ein Urbild hat.

□

Lemma 4.5. *Seien X, Y Banachräume. $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, mit $\beta(A) < \infty$, dann folgt, dass $\operatorname{ran}(A)$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Sei $\tilde{A} : X/\ker(A) \times Y_0 \to Y, A(x,z) := Ax + z$. Eine Konstruktion sehr ähnlich der Obrigen, jedoch verwenden wir hier nur, dass $\beta(A) < \infty$ ist. Dieser lineare und beschränkte Operator ist bijektiv und hat nach dem Satz vom inversen Operator eine stetige Inverse: $\tilde{A}^{-1}$. Schlussendlich können wir das Bild von A schreiben als: $\operatorname{ran}(A) = (\tilde{A}^{-1})^{-1}(\hat{X} \times \{0\})$. Damit ist $\operatorname{ran}(A)$ als stetiges Urbild einer abgeschlossenen Menge wieder abgeschlossen.

□

Operatoren mit abgeschlossenem Bild werden normal auflösbar genannt und sind aufgrund der folgenden Gleichung interessant.

$$\overline{\operatorname{ran}(A)} = (\ker A^*)^{\perp} \tag{7}$$

Satz 4.6. *Sei $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ und sei das Bild von A abgeschlossen. Dann gilt $\alpha(A^*) = \beta(A)$ und $\beta(A^*) = \alpha(A)$.*

Beweis. $\beta(A) = \dim(Y/\operatorname{ran}(A)) = \dim(Y/\operatorname{ran}(A))^* = \dim(\operatorname{ran}(A)^{\perp}) = \dim(\ker(A^*)) = \alpha(A^*)$
$\alpha(A) = \dim(\ker(A)) = \dim(\ker(A)^*) = \dim(X^*/(\ker(A)^{\perp})) = \dim(X^*/\operatorname{ran}(A^*) = \beta(A^*)$

□

Korollar 4.7. *Aus dem letzten Satz folgt, dass sich Adjungieren folgendermaßen auf den Index auswirkt:* $\operatorname{ind}(A^*) = -\operatorname{ind}(A)$. *Deshalb gilt:*

i) $A \in \Phi(X,Y) \Leftrightarrow A^* \in \Phi(Y^*, X^*)$

ii) $A \in \Phi_+(X,Y) \Leftrightarrow A^* \in \Phi_-(Y^*, X^*)$

iii) $A \in \Phi_-(X,Y) \Leftrightarrow A^* \in \Phi_+(Y^*, X^*)$

Aus Lemma 4.5 folgt, dass Operatoren mit endlichem Index immer ein abgeschlossenes Bild haben. Desweiteren haben auch Operatoren mit einem Index von $-\infty$, also lower semi - Fredholmoperatoren, ein abgeschlossenes Bild. Für upper semi - Fredholmoperatoren müssen wir diese Eigenschaft echt fordern. Zu bemerken sei noch, dass ein Operator, der sowohl upper semi - Fredholm und lower semi - Fredholm ist, einen endlichen Index hat und damit ein Fredholmoperator ist.

Satz 4.8. (Produkt von Fredholmoperatoren) *Seien X, Y und Z Banachräume, $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ und $B \in \mathcal{B}(Y,Z)$, dann gilt:*

i) A und B lower semi - Fredholm, dann ist auch BA lower semi - Fredholm.

ii) A und B upper semi - Fredholm, dann ist auch BA upper semi - Fredholm.

iii) A und B Fredholm, dann ist auch BA Fredholm.

Beweis.

i) Für einen lower semi - Fredholmoperator $A : X \to Y$, gibt es einen endlich dimensionalen linearen Raum $Y_0 \subset Y$ so, dass $Y = \operatorname{ran}(Y) + Y_0$. Wir wählen Z_0 für den Operator B auf die gleiche Weise. Nun gilt: $Z = Z_0 + B(Y) = Z_0 + B(\operatorname{ran}(A)) + B(Y_0) = \operatorname{ran}(BA) + (Z_0 + B(Y_0))$. $\dim(Z_0 + B(Y_0)) < \infty$. Damit ist BA ein lower semi - Fredholmoperator.

ii) Seien A, B upper semi - Fredholmoperatoren, dann sind nach Satz 4.7 A^*, B^* lower semi - Fredholmoperatoren und nach i) damit auch der Operator A^*B^*, woraus folgt, dass BA ein upper semi - Freholmoperator ist.

iii) Aus i) und ii) folgt, dass BA ein Fredholmoperator ist.

□

Lemma 4.9. *Sei $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, $M \subsetneq X$ ein abgeschlossener Unterraum mit $\dim(X/M) = n < \infty$. Dann folgt, dass A genau dann ein Fredholmoperator ist, wenn $A_0 := A \downharpoonleft M$ ein Fredholmoperator ist. Für den Index gilt Folgendes: $\operatorname{ind}(A) = \operatorname{ind}(A_0) + n$.*

Beweis. Wir beweisen das Lemma für $\dim(X/M) = 1$. Der Rest folgt mittels Induktion. Wir können X darstellen als $X = M \oplus \mathit{span}\{x_1\}$. Nun müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

1. Fall: $Ax_1 \notin \operatorname{ran}(A_0)$
   $\operatorname{ran}(A) = \operatorname{ran}(A_0) \oplus \mathit{span}\{Ax_1\}, \beta(A_0) = \beta(A) + 1, \mathit{ker}(A) = \mathit{ker}(A_0), \alpha(A) = \alpha(A_0)$
   A Fredholm $\Leftrightarrow A_0$ Fredholm, $\operatorname{ind}(A) = \operatorname{ind}(A_0) + 1$

2. Fall: $Ax_1 \in \operatorname{ran}(A_0)$
   $\operatorname{ran}(A) = \operatorname{ran}(A_0)$, es existiert ein $u \in M : Ax_1 = Au \Rightarrow A(x_1 - u) = 0, \ker(A) = \ker(A_0) \oplus \mathit{span}\{x_1 - u\}, \alpha(A) = \alpha(A_0) + 1$
   A Fredholm $\Leftrightarrow A_0$ Fredholm, $\operatorname{ind}(A) = \operatorname{ind}(A_0) + 1$

Satz 4.10. *$A \in \Phi(X,Y)$ sei $\tilde{A}$ eine Bijektion wie in Definition 4.4 , $B \in \mathbf{B}(X,Y)$ mit $\|B\| < \frac{1}{\|\tilde{A}^{-1}\|}$, dann gilt:*

i) $(A + B)$ ist Fredholm.

ii) $\operatorname{ind}(A + B) = \operatorname{ind}(A)$.

Beweis. Seien X_0, Y_0 wie in Definition 4.6. $C := A + B, \tilde{C} : X_0 \times Y_0 \to Y, (x_0, y_0) \to Cx_0 + y_0$. Dann gilt: $\|\tilde{C} - \tilde{A}(x_0, y_0)\| = \|(C - A)(x_0)\| \leq \|B\|\|x_0\| \leq \|B\|\|(x_0, y_0)\|$. Das bedeutet: $\|\tilde{C} - \tilde{A}\| \leq \|B\| < 1/\|\tilde{A}^{-1}\|$. Damit ist $\tilde{C}$, mithilfe der Neumanschen Reihe, invertierbar, woraus folgt, dass $\tilde{C}$ Fredholm ist. Nun bemühen wir Lemma 4.9 und können folgern, dass $C_0 := C \downharpoonleft X_0$ Fredholm ist. Erneut mit Lemma 4.9 ergibt sich, dass C Fredholm ist.
$\text{ind}(C) = \text{ind}(C_0) + \dim(X/X_0) = \text{ind}(C_0) + \dim(ker(A)) = \text{ind}(\tilde{C}) - \dim((X_0 \times Y)/(X_0 \times \{0\})) - \alpha(A)$. Da $\tilde{C}$ invertierbar ist, gilt $\text{ind}(\tilde{C}) = 0$, woraus folgt: $\text{ind}(C) = \text{ind}(A)$.

□

Daraus folgt, dass $\Phi(X)$ bezüglich der Operatornorm offen ist. Auch $\Phi_+(X)$ und $\Phi_-(X)$ sind offen bezüglich der Operatornorm, der Beweis würde jedoch zusätzliche Theorie benötigen. Er ist in [1] auf Seite 158 zu finden.

Lemma 4.11. *Sei $A \in \mathcal{B}(X, Y)$, dann ist A genau dann upper semi - Fredholm, wenn es einen abgeschlossenen Unterraum $M \subsetneq X$ gibt mit $\dim(X/M) = m < \infty$, sodass* $\inf\{\|Ax\| : x \in M : \|x\| = 1\} > 0$.

Beweis.
"$\Rightarrow$": $A \in \Phi_+(X, Y), \dim(\ker(A)) < \infty$ und es gibt einen abgeschlossenen Unterraum M, sodass $X = \ker(A) \oplus M$. $A \downharpoonleft M : M \to \text{ran}(A)$. Der Kern dieses Operators ist $\{0\}$ und sein Bild ist abgeschlossen. Damit ist er, wie im Lemma gefordert, nach unten beschränkt.
"$\Leftarrow$": Sei $M \subsetneq X, \dim(X/M) = m < \infty$ und $\inf\{\|Ax\| : x \in M : \|x\| = 1\} = C > 0$. Dann gilt $\ker(A) \cap M = \{0\}$ und daraus folgt, dass $\dim(\ker(A)) < \infty$.
Sei $X = M \oplus F, \text{ran}(A) = AF + AM$. AF ist abgeschlossen, da F endlichdimensional ist. Damit bleibt zu zeigen, dass $A \downharpoonleft M$ ein abgeschlossenes Bild hat. Für eine Cauchyfolge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\text{ran}(A \downharpoonleft)$ gibt es $x_n \in M$ so, dass $Ax_n = y_n$. $\epsilon > \|y_n - y_m\| = \|Ax_n - Ax_m\| \geq C\|x_n - x_m\|$. Damit bilden die x_n eine Cauchyfolge in M. Da A ein beschränkter Operator ist gilt $Ax = y$, wobei x und y die Grenzwerte ihrer Folgen sind.

□

Satz 4.12. (kompakte Störung) *Sei A ein semi - Fredholmoperator welcher von X nach Y abbildet, $K : X \to Y$ ein kompakter Operator, dann ist $(A + K)$ wieder ein semi - Fredholmoperator. Falls A ein Fredholmoperator ist, dann gilt:* $\text{ind}(A) = \text{ind}(A + K)$.

Beweis.

i) Sei $A \in \Phi_+(X, Y)$. Nach dem vorherigen Lemma gibt es einen abgeschlossenen Unterraum M_1 von X mit $\dim(X/M_1) = m_1 < \infty$ und $\inf\{\|Ax\| : x \in M : \|x\| = 1\} = c > 0$. K ist kompakt und damit gibt es einen abgeschlossenen Unterraum $M_2 \subsetneq X$ mit $\dim(X/M_2) = m_2 < \infty$, sodass $\sup\{\|Kx\| : x \in M_2, \|x\| = 1\} = c/2$. $M := M_1 \cap M_2, \dim(X/M) < m_1 + m_2 < \infty$ und ist wieder abgeschlossen.

$\inf\{\|(A+K)x\| : x \in M, \|x\| = 1\} \geq \inf\{\} \geq c/2$. Damit liegt $T+K$ wieder in $\Phi_+(X,Y)$.

ii) Für $A \in \Phi_-(X,Y)$ sind $A^* \in \Phi_+(Y^*,X^*)$ und $K^* \in \mathcal{K}(Y^*,X^*)$. Nach (i) ist (A^*+K^*) wieder in $\Phi_+(Y^*,X^*)$, woraus folgt, dass $(A+K)$ in $\Phi_-(X,Y)$ liegt.

iii) Sei A Fredholm, dann ist $(A+K)$ sowohl upper - als auch lower semi - Fredholm und damit wieder Fredholm. Für den Index gilt Folgendes: Sei $f(t) := \operatorname{ind}(A+tK)$, dann ist diese Funktion nach Satz 4.10 stetig. Die Funktion bildet nur auf Werte in $\mathbb{Z}$ ab, woraus folgt, dass sie konstant ist. $\operatorname{ind}(A) = f(0) = f(1) = \operatorname{ind}(A+K)$.

□

Satz 4.13. (verallgemeinerte Inverse) *Sei $A \in \mathcal{B}(X,Y)$, dann gilt Folgendes:*

i) Sei A Fredholm, dann gibt es einen Operator aus $\mathcal{B}(Y,X)$, sodass $(I-TA)$ und $(I-AT)$ endlichen Rang haben.

ii) Für A und T wie in i) gelten die Gleichungen $ATA = A$ und $TAT = T$, dabei wird T als die verallgemeinerte Inverse zu A bezeichnet.

iii) A ist genau dann Fredholm, falls es einen Operator $T \in \mathcal{B}(Y,X)$ gibt, sodass $(I-TA)$ und $(I-AT)$ kompakt sind.

Beweis.

i) Für A gibt es abgeschlossene Unterräume, sodass man die Räume X und Y zerlegen kann: $X = \ker(A) \oplus X_0$ und $Y = \operatorname{ran}(A) \oplus Y_0$. $A_0 := A \downharpoonright X_0 : X_0 \to \operatorname{ran}(A)$. Diese Abbildung ist bijektiv und damit Fredholm. Das bedeutet man kann die Abbildung invertieren und es gilt: $A_0^{-1} \in \mathcal{B}(\operatorname{ran}(A), X_0)$. Sei Q die Projektion von Y auf $\operatorname{ran}(A)$ entlang Y_0. Es gilt also: $\ker(Q) = Y_0, \operatorname{ran}(Q) = \operatorname{ran}(A)$. Jetzt können wir uns den Operator T definieren $T := A_0^{-1}Q$. T ist wohldefiniert, da wir Q genau so gewählt haben, dass das Bild von Q und der Definitionsbereich von A_0^{-1} übereinstimmen. Nun betrachten wir $(I-TA)$: Hier müssen wir zwei Fälle unterscheiden:
1) $x \in \ker(A) :\to (I-TA)(x) = x - 0 = x$
2) $x \in X_0 :\to (I-TA)(x) = x - A_0^{-1}QA = 0$
Daraus folgt, dass $(I-TA)$ eine Projektion von X auf $\ker(A)$ entlang von X_0 ist. $\dim(\ker(A)) < \infty$, woraus folgt, dass es sich um einen Operator von endlichem Rang handelt.
Wir betrachten nun $(I-AT)$. Erneut gibt es zwei Fälle zu unterscheiden.
1) $y \in \operatorname{ran}(A) : (I-AT)y = y - AA_0^{-1}Qy = 0$
2) $y \in Y_0 : (I-AT)y = y - 0 = y$
Daraus folgt, dass $(I-AT)$ eine Projektion von Y auf Y_0 entlang $\operatorname{ran}(A)$ ist. $\dim(Y_0) < \infty$ woraus folgt, dass auch $(I-AT)$ endlichen Rang hat.

ii) $(A - ATA) = A(I - TA)$, da entweder x in $\ker(A)$ oder in X_0 liegt, gilt dass immer einer der beiden Faktoren gleich 0 ist, woraus folgt, dass $A - ATA = 0$ oder anders ausgedrückt $ATA = A$. Analog dazu erhällt man folgende Äquivalenz: $TAT = T$.

iii) Sei $TA = I - K_1$ und $AT = I - K_2$, mit K_1, K_2 kompakt. Dann gilt $\ker(A) \subseteq \ker(TA)$. Damit kann man $\alpha(A)$ abschätzen. $\alpha(A) \leq \alpha(TA) = \alpha(I - K_1) < \infty$. Für die Abschätzung von $\beta(A)$ verwenden wir folgende Gleichung: $\operatorname{ran}(A) \supseteq \operatorname{ran}(AT)$. Daraus folgt: $\beta(A) \leq \beta(AT) = \beta(I - K_2) < \infty$. Insgesamt ergibt sich daraus für A ein endlicher Index, was bedeutet, dass es sich um einen Fredholmoperator handelt.

□

Sei im Folgenden die $\dim(X) = \infty$. $\mathcal{K}(X)$, die Menge der kompakten Operatoren bildet ein bezüglich der Operatornorm abgeschlossenes Ideal in $\mathcal{B}(X)$.

Definition 4.14. $Ca(X) = \mathcal{B}(X)/\mathcal{K}(X)$ wird die Calkin - Algebra genannt.

Die Calkin - Algebra ist sicherlich ein Banachraum und da $\mathcal{K}(X)$ ein Ideal ist, ist sie eine Banachalgebra. Die Identität I ist nicht kompakt und deswegen folgt: $[I] \neq [0]$. Damit ist die Calkin Algebra eine Banachalgebra mit 1.

Beweis. vgl. [5] S. 61

Jetzt kommen wir zu einer anderen Möglichkeit, um Fredhomoperatoren zu charakterisieren.

Satz 4.15. *$A \in \mathcal{B}(X)$, dann gilt: A ist Fredholm $:\Leftrightarrow [A]$ hat eine Inverse in der Calkin - Algebra.*

Beweis.
"$\Rightarrow$": Für einen Fredholmoperator gibt es ein $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, sodass $(I - TA)$ und $(I - AT)$ kompakt sind. Anders ausgedrückt: $[A][T] = [AT] = [I]$ beziehungsweise: $[T][A] = [TA] = [I]$.
"$\Leftarrow$": Angenommen es gibt ein T, sodass $[A][T] = [I] = [T][A]$, dann folgt daraus, dass $(I - AT)$ und $(I - TA)$ kompakt sind. Nach dem Satz 4.13 iii) folgt, dass A ein Fredholmoperator ist.

□

Lemma 4.16. *Sei A ein beschränkter Operator, dann gilt: A ist genau dann Fredholm mit Index 0, falls es einen Operator F mit endlichem Rang gibt, sodass $(A + F)$ invertierbar ist.*

Beweis.
"$\Leftarrow$": Sei $(A+F)$ invertierbar, dann gilt: $\mathrm{ind}(A+F)=0$. Aus Satz 4.12 folgt dann, dass A ebenfalls ein Fredholmoperator ist, mit $\mathrm{ind}(A)=0$.
"$\Rightarrow$": Sei $X = \ker(A) + X_0$, $Y = \mathrm{ran}(A) + Y_0$. Aus einem Index von 0 folgt, dass $\dim(\ker(A)) = \dim(Y_0) < \infty$ ist. Das bedeutet: Es gibt eine bijektive Abbildung $F_0 : \ker(A) \to Y_0$ und eine Projektion Q von X auf $\ker(A)$ entlang X_0. Wir setzen $F := F_0Q$. Nun gilt für $u \in ker(A), x_0 \in X_0 : (A+F)(u+x_0) = Au+Fu+Ax_0+Fx_0 = F_0u+Ax_0$. Diese Abbildung ist erneut bijektiv und kann deshalb invertiert werden.

$\square$

Satz 4.17. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $W : \Omega \to \Phi(X,Y)$ analytisch und angenommen, dass $W(\lambda_0)$ ist invertierbar für ein $\lambda_0 \in \Omega$, dann folgt, dass die Menge $E := \{\lambda \in \Omega : W(\lambda)$ nicht invertierbar $\}$ höchstens abzählbar ist und keinen Häufungspunkt in Ω hat.*

Beweis. Da wir $W(\lambda_0)$ invertieren können gilt, dass $\mathrm{ind}(W(\lambda_0))$ gleich 0 ist. Aus Satz 4.10 folgt, dass $\mathrm{ind}(W(.))$ stetig ist. Außerdem nimmt die Funktion nur Werte in $\mathbb{Z}$ an, woraus folgt, dass sie konstant 0 ist. Sei $\lambda_1 \in \Omega$ beliebig, dann gibt es nach dem vorherigen Lemma ein F mit endlichem Rang, sodass $(W(\lambda_1) + F)$ invertierbar ist. Nun gibt es ein $\delta > 0$, sodass $E(\lambda) := W(\lambda) + F$ invertierbar, für alle $\lambda \in \mathcal{U}_\delta(\lambda_1)$. Es gilt also: $W(\lambda) = E(\lambda) - F = E(\lambda)(I - E(\lambda)^{-1}F)$. Jetzt definieren wir uns folgende Projektionen: $P : X \to X_0$ entlang $\ker(F)$. $Q := (I - P)$ die zweite Projektion. Damit gilt $P + Q = I, PQ = 0$. Wir erhalten folgende Äquivalenzen: $(I - E(\lambda)^{-1}F) = (I - E(\lambda)^{-1}FP)$, da die Projektion auf den Definitionsbereich von F nichts verändert. $(I-E(\lambda)^{-1}FP) = (I-PE(\lambda)^{-1}FP)(I-QE(\lambda)^{-1}FP)$ Die Gleichheit erhällt man durch ausmultiplizieren. Zur Vereinfachung definieren wir $G(\lambda) := (I - QE(\lambda)^{-1}FP)$. Dieses $G(\lambda)$ ist invertierbar, da $G(\lambda)(I + QE(\lambda)^{-1}FP) = I$. Jetzt können wir $W(\lambda)$ darstellen als: $E(\lambda)(I - PE(\lambda)^{-1}FP)G(\lambda)$. $E(\lambda)$ und $G(\lambda)$ sind invertierbar, woraus folgt, dass $W(\lambda)$ genau dann invertierbar ist, falls es $(I - PE(\lambda)^{-1}FP)$ ist.
Sei $W_0 := (I - PE(\lambda)^{-1}FP) \downharpoonleft X_0$. Der ganze Ausdruck ist invertierbar, wenn es W_0 ist. X_0 ist endlichdimensional, also gilt $X_0 \cong \mathbb{C}^n$ und $W_0(\lambda)$ kann man daher als Matrix darstellen. Wir wissen, dass $W_0(\lambda)$ genau dann invertierbar ist, wenn $\det(W_0(\lambda)) \neq 0$. Da W_0 analytisch war, ist es nach Lemma 1.11 auch $\det(W_0(.))$. Es gilt nun entweder:
1. Fall: $\det(W_0(\lambda)) = 0$ für alle $\lambda \in \mathcal{U}_\delta(\lambda_1)$.
2. Fall: $\{\lambda \in \mathcal{U}_\delta(\lambda_1) : \det(W_0(\lambda) = 0\}$ ist höchstens abzählbar und hat keinen Häufungspunkt im Inneren.
Fall 1 ist nicht möglich, da dann nicht einmal $W_0(\lambda_1)$ invertierbar wäre. Das bedeutet: Fall 2 tritt ein und beweist den Satz.

$\square$

4.2 Essenzielles Spektrum

Das essenzielle Spektrum, oder auch das wesentliche Spektrum, ist das Spektrum bezüglich $\Phi(X)$. Um dieses zu betrachten, müssen wir noch zeigen, dass die Fredholmoperatoren eine Regularität bilden.

Satz 4.18. *Seien X, Y und Z Banachräume, $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ und $B \in \mathcal{B}(Y,Z)$, dann gilt:*

i) BA ist lower semi - Fredholm, dann ist B lower semi - Fredholm.

ii) BA ist upper semi - Fredholm, dann ist A upper semi - Fredholm.

iii) BA ist Fredholm, dann ist B lower semi - Fredholm und A upper semi - Fredholm.

Beweis.

i) Für BA lower semi - Fredhom gilt: $\beta(BA) < \infty$ außerdem gilt noch: $\operatorname{ran}(BA) \subseteq \operatorname{ran}(B)$, was bedeutet, dass $\beta(B) \leq \beta(BA) < \infty$.

ii) Sei BA upper semi - Fredholm, damit folgt aus Satz 4.7, dass A^*B^* ein lower semi - Fredholmoperator ist. Aus i) folgt, dass A^* lower semi - Freholm ist und damit folgt, dass A upper semi - Fredholm ist.

iii) Folgt aus i) und ii).

□.

Korollar 4.19. *$\Phi(X), \Phi_+(X)$ und $\Phi_-(X)$ sind Regularitäten.*

Beweis. $A, B \in \mathcal{B}(X)$ und es gilt $AB = BA$.
$\Rightarrow$: Sei AB ein Fredholmoperator, so folgt aus dem vorherigen Satz, dass A lower semi - Fredholm und B upper semi - Fredholm ist. Da aber auch BA ein Fredholmoperator ist folgt auch, dass B lower semi - Fredholm und A upper semi - Fredholm ist. Damit sind A und B sowohl lower - als auch upper semi - Fredholm, was sie zu Fredholmoperatoren macht.
$\Leftarrow$: Nach Satz 4.8 ist das Produkt von zwei Fredholmoperatoren wieder ein Fredholmoperator und damit gilt folgende Gleichung:

$$AB \in \Phi(X) \Leftrightarrow A \in \Phi(X) \text{ und } B \in \Phi(X)$$

Nach Satz 2.4 folgt, dass $\Phi(X)$ eine Regularität ist. Der Beweis für $\Phi_+(X)$ und $\Phi_-(X)$ verläuft analog.

□

Nun, da wir wissen, dass es sich um Regularitäten handelt, können wir uns die zugehörigen Spektra ansehen und versuchen, diese näher zu beschreiben.

Definition 4.20. Das essenzielle Spektrum $\sigma_e(A)$ ist definiert als $\sigma_{\Phi(X)} = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \notin \Phi(X)\}$. Das essenzielle approximative Punktspektrum $\sigma_{\pi e}(A)$ ist das zur Regularität $\Phi_+(X)$ zugehörige Spektrum. Das essenzielle surjektive Spektrum $\sigma_{\delta e}(A)$ ist das Spektrum zugehörig zu $\Phi_-(X)$.

Satz 4.21. *Sei* $\dim(X) = \infty$ *und* $A \in \mathcal{B}(X)$*, dann ist das essenzielle Spektrum* $\sigma_e(A) \neq \emptyset$*.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass das essenzielle Spektrum eines Operators A gleich dem gewöhnlichen Spektrum in der Calkin Algebra ist. $\lambda \notin \sigma_e(A) \Leftrightarrow A - \lambda$ Fredholm $\Leftrightarrow [A] - \lambda[I]$ invertierbar $\Leftrightarrow \lambda \notin \sigma([A])$. Daher gilt: $\sigma_e(A) = \sigma([A])$. Das gewünschte Resultat folgt aus der Tatsache, dass das gewöhnliche Spektrum nicht leer ist.

□

Nach Lemma 2.9 und 2.10 kann man die Vereinigung und den Durchschnitt von Spektren und den dazugehörigen Regularitäten bilden.

Korollar 4.22. *Für einen Operator* $A \in \mathcal{B}(X)$ *gilt:*

$$\sigma_e(A) = \sigma_{\pi e}(A) \cup \sigma_{\delta e}(A). \tag{8}$$

Beweis. Es gilt: $\Phi(X) = \Phi_+(X) \cap \Phi_-(X)$, womit (7) aus Lemma 2.10 folgt.

□

Definition 4.23. Nach Lemma 2.9 gilt, dass $\Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$ wieder eine Regularität ist. Das zugehörige Spektrum wird σ_{e1} genannt.

Sei im Folgenden σ_c das stetige Spektrum.

Satz 4.24. *Für einen Operator A gilt:* $\sigma_c(A) \subseteq \sigma_{e1}(A) \subseteq \sigma_{\pi e}(A) \subseteq \sigma_e(A) \subseteq \sigma(A)$.

Beweis. Für $\lambda \in \sigma_c(A)$ gilt, dass $\operatorname{ran}(A - \lambda)$ nicht abgeschlossen ist. Damit kann $(A - \lambda)$ kein semi - Fredholmoperator sein, was äquivalent ist zu $\lambda \in \sigma_{e1}(A)$. Aus der Tatsache, dass $(A - \lambda)$ kein semi - Fredholmoperator folgt, dass $(A - \lambda)$ auch kein upper semi - Fredholmoperator, oder anders ausgedrückt: $\lambda \in \sigma_{e1}(A) \Rightarrow \lambda \in \sigma_{\pi e}(A)$. Ein Operator der nicht upper semi - Fredholm ist, ist sicherlich auch nicht Fredholm. Damit gilt: $\lambda \in \sigma_{\pi e}(A) \Rightarrow \lambda \in \sigma_e(A)$. Schließlich ist jedes Spektrum Teilmenge des gewöhnlichen Spektrums.

□

Bermerkt sei noch, dass man in der Kette in Satz 4.20 auf $\sigma_{\delta e}(A)$ statt $\sigma_{\pi e}(A)$ anführen könnte, wobei man den Beweis nicht verändern bräuchte.

Korollar 4.25. *Die Regularitäten* $\Phi(X), \Phi_+(X), \Phi_-(X)$ *und* $\Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$ *sind offen und die zugehörigen Spektren erfüllen (P2).*

Beweis. Nach Satz 4.10 und der Tatsache, dass die Vereinigung von offenen Mengen wieder offen ist, folgt, dass die oben aufgezählten Regularitäten offen sind. Aufgrund von Satz 3.5 gilt, dass jedes der zugehörigen Spektren die Eigenschaft (P2) erfüllt.

□

Satz 4.26. *Sei A ein beschränkter Operator, Ω eine offene, zusammenhängende Menge mit folgenden Eigenschaften: $\Omega \cap \sigma_e(A) = \emptyset$, $\Omega \cap \rho(A) \neq \emptyset$, dann folgt, dass $\Omega \cap \sigma(A)$ höchstens abzählbar ist und keinen Häufungspunkt in Ω hat. Für λ aus diesem Durchschnitt gilt: λ ist ein Eigenwert mit endlicher Vielfachheit.*

Beweis. Sei $W(\lambda)(x) := Ax - \lambda x$, für $x \in X, \lambda \in \Omega$, dann ist W analytisch auf Ω. Da das essenzielle Spektrum nicht geschnitten wird, ist $W(\lambda)$ Fredholm für alle λ. Da Ω und $\rho(A)$ nichtleeren Schnitt haben, gibt es ein λ_0, sodass $A - \lambda_0$ beziehungsweise $W(\lambda_0)$ invertierbar ist. Aus Satz 4.17 folgt, dass die Menge $\Omega \cap \sigma(A)$ oder anders formuliert $\{\lambda \in \Omega : W(\lambda)$ nicht invertierbar $\}$ höchstens abzählbar ist und keinen Häufungspunkt in Ω hat. Für den Index von $W(\lambda)$ gilt, dass er konstant 0 ist, für alle $\lambda \in \Omega$. Für $\lambda \in \Omega \cap \sigma(A)$ folgt jedoch, dass entweder α oder β von $(A - \lambda)0$ ungleich 0 sind. Aus einem Index von 0 folgt, dass $\alpha = \beta$. Damit muss auf jeden Fall gelten, dass $\alpha(A-\lambda) \neq 0$ und damit $\ker(A-\lambda) < \infty$. Das bedeutet, dass es sich bei λ um einen Eigenwert handelt, welcher aufgrund der Fredholmeigenschaft nur endliche Vielfachheit haben kann.

□

Satz 4.27. *Die Spektren der Regularitäten $\Phi(X), \Phi_+(X), \Phi_-(X)$ und $\Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$ sind unter kompakten Störungen invariant. Sei σ eines dieser Spektren, $A \in \mathcal{B}(X)$, $K \in \mathcal{K}(X)$, dann gilt:*

$$\sigma(A + K) = \sigma(A)$$

Beweis. Wir beweisen diesen Satz für σ_e, die anderen Beweise verlaufen analog. Sei $\lambda \notin \sigma_e(A)$, dann ist $A - \lambda$ ein Fredholmoperator und nach Satz 4.12 ist das äquivalent dazu, dass $A - \lambda + K$ Fredholm ist. Das bedeutet, dass $\lambda \notin \sigma(A + K)$.

□

4.3 Browder Spektrum

Sei $R_0(X)$ die Menge aller Fredholmoperatoren mit den Eigenschaften, dass T invertierbar ist oder 0 ein isolierter Punkt in $\sigma(T)$ ist.

Definition 4.28. Sei $T \in \mathcal{B}(X)$, dann sei $N(T) := \ker(T)$ und $R(T) := \operatorname{ran}(T)$.
$N^\infty := \bigcup_{n=0}^\infty N(T^n)$ und $R^\infty := \bigcap_{n=0}^\infty R(T^n)$

Lemma 4.29. *Für einen Operator $T \in \mathcal{B}(X)$ gilt: $T \in R_0(X)$ genau dann, wenn es eine Zerlegung von X gibt, sodass $X = X_1 \oplus X_2$, $T(X_i) \subseteq X_i, (i = 1, 2), \dim(X_1) < \infty$, $\sigma(T \downharpoonleft X_1) \subseteq \{0\}$ und $T \downharpoonleft X_2$ ist invertierbar.*

Beweis.
"$\Rightarrow$": Für $T \in R_0(X)$ sei: $X_1 = N^\infty(T)$ und $X_2 = R^\infty(T)$. Aufgrund der Definition gilt, dass sowohl X_1 als auch X_2 invariant bzgl. T sein müssen. Um zu zeigen, dass X_1 endlichdimensional ist benötigt man die so genannte Kato Zerlegung, welche hier nicht ausgeführt wird. Man findet den Beweis in [1] auf Seite 164. Im Gegensatz dazu ist klar, dass das Spektrum von $T \downharpoonleft X_1$ Teilmenge von $\{0\}$ ist. $T \downharpoonleft X_2$ ist invertierbar, da mindestens der Kern von T herausfaktorisiert wurde und damit gilt $\ker(T) = \{0\}$: Außerdem ist die Abbildung surjektiv, da X_2 der Durchschnitt der Bilder von T^n ist.
"$\Leftarrow$": Angenommen wir hätten eine Zerlegung $X = X_1 \oplus X_2$. Dann gilt $\alpha(T) = \dim(\ker(T)) \leq \dim(X_1) < \infty$. X_2 ist invertierbar und damit surjektiv, damit folgt: $\beta(T) = \dim(Y/\operatorname{ran}(T)) \leq \dim(X_1) < \infty$. Wir wissen nun, dass T Fredholm ist. Angenommen $\dim(X_1) = 0$, dann folgt daraus, dass T invertierbar ist. Andernfalls gilt: $0 \in \sigma(T)$. Aber es gilt auch $0 \notin \sigma(T \downharpoonleft X_2)$. Da das Spektrum $\sigma(.)$ abgeschlossen ist, muss gelten, dass 0 ein isolierter Punkt in $\sigma(T)$ ist.

□

Lemma 4.30. *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra, $a, b \in \mathcal{A}$ und es gelte $ab = ba$, dann gilt: $\sigma(ab) \subseteq \sigma(a) \cdot \sigma(b)$*

Beweis. Der zugehörige Beweis benötigt noch zusätzliche Theorie über kommutative Banachalgebren und wird deshalb hier nicht aufgeführt. Er ist in [1] auf Seite 20 zu finden.

Satz 4.31. *$R_0(X)$ ist eine Regularität.*

Beweis. Um zu zeigen, dass $R_0(X)$ eine Regularität ist, bemühen wir erneut Satz 2.4.
"$\Leftarrow$": Sei angenommen $a, b \in R_0(X)$ und es gilt $ab = ba$. Nach Satz 4.8 ist ab wieder ein Fredholmoperator. Nach Lemma 4.30 gilt folgende Gleichung: $\sigma(ab) \subseteq \sigma(a) \cdot \sigma(b)$, und da für a als auch b gilt, dass entweder 0 nicht im Spektrum liegt, oder 0 ein isolierter Punkt ist, folgt, dass genau das auch für ab gelten muss, was bedeutet, dass ab in $R_0(X)$ liegt.
"$\Rightarrow$": Sei $ab \in R_0(X)$. Dann gilt nach Lemma 4.29 : $X = N^\infty(ab) \oplus R^\infty(ab)$. Da $N^\infty(ab)$ endlichdimensional ist und da $ab \downharpoonleft R^\infty(ab)$ invertierbar ist, folgt, dass nach dem gleichen Argument wie in Beispiel 2.5 2)$a \downharpoonleft R^\infty(ab)$ invertierbar ist. Sei M der Eigenraum

zu allen von 0 verschiedenen Spektralpunkten des Operators $a \downharpoonleft N^\infty(ab)$. Da $N^\infty(ab)$ endlichdimensional ist, folgt, dass M der Eigenraum zu endlich vielen Eigenwerten ist. Damit kann man X folgendermaßen zerlegen: $X = N^\infty(a) \oplus (R^\infty(ab) \oplus M)$. Es gilt: $N^\infty(a) \subseteq N^\infty(ab)$ Damit ist $N^\infty(a)$ auch endlichdimensional. Nach Definition von M und der Tatsache, dass $a \downharpoonleft R^\infty(ab)$ invertierbar ist, folgt, dass $a \downharpoonleft (R^\infty(ab) \oplus M)$ invertierbar ist. Aus Lemma 4.29 folgt, dass a in $R_0(X)$ liegt. Es gilt $ab = ba$ und damit folgt nach dem gleichen Prinzip, dass auch b in $R_0(X)$ liegt.

□

Definition 4.32. Das zu $R_0(X)$ zugehörige Spektrum σ_{R_0} wird Browder Spektrum genannt.

Satz 4.33. *$R_0(X)$ ist offen.*

Beweis. Sei $A \in R_0(X)$. Da A Fredholm ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass für beschränkte Operatoren B mit $\|B\| < \epsilon$ nach Satz 4.10 gilt, dass $A + B$ wieder Fredholm ist. A ist außerdem invertierbar oder 0 ist ein isolierter Punkt von $\sigma(A)$, was bedeutet, dass es ein $\delta_0 > 0$ gibt, sodass $\mathcal{U}_{3\delta_0}(0) \cap \sigma(A) \subseteq \{0\}$. Zusätzlich besitzen sowohl das gewöhnliche Spektrum als auch das essenzielle Spektrum die Eigenschaft (P2), also Halbstetigkeit von oben. Daraus folgt, dass es ein δ gibt und sei B ein beschränkter Operator mit $\|B\| < \delta$ so, dass folgendes gilt:

$$\sigma(A + B) \subsetneq \mathcal{U}_\delta(0) \cup \{z : |z| \geq 2\delta\}$$

$$\sigma_e(A + B) \subsetneq \{z : |z| \geq 2\delta\}$$

Daraus folgt, dass $A + B$ entweder invertierbar ist, oder $0 \in \sigma(A + B)\backslash\sigma_e(A + B)$. Aus Lemma 4.22 folgt, dass in diesem Fall 0 ein isolierter Punkt mit endlicher Vielfachheit ist. Insgesamt folgt daraus, dass $A + B$ wieder in $R_0(X)$ liegt.

□

Korollar 4.34. *Das Browder Spektrum erfüllt Eigenschaft (P2).*

Beweis. Dies folgt aus der Tatsache, dass $R_0(X)$ offen ist.

□

Literatur

[1] V. Müller,
Spectral Theory of Linear Operators: and Spectral Systems in Banach Algebras,
Birkhauser Basel, 2007.

[2] V. Kordula V. Müller,
On the axiomatic theory of spectrum,
Studia Mathematica, 1996,
Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences.

[3] H. Woracek, M. Kaltenbäck, M. Blümlinger,
Funktionalanalysis,
Vorlesungsskript, TU WIEN, 2014.
http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/fana2015.pdf

[4] D.E. Edmunds, W.D. Evans,
Spectral Theory and Differential Operators,
Clarendon Press, Oxford, 1987.

[5] W. Kaballo,
Grundkurs Funktionalanalysis,
Spektrum-Verlag, 2011.

[6] D. Werner,
Funktionalanalysis, 7. Auflage
Springer-Verlag, 2011.

[7] E. Freitag, R. Busam,
Funktionentheorie 1, 3. Auflage
Springer-Verlag, 2000.

[8] J. B. Conyway,
A Course in Functional Analysis, 2. Auflage
Springer-Verlag, 1990.

[9] S. H. Weintraub,
A Guide to Advanced Linear Algebra,
The Mathematical Association of America, 2011.