TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

Bachelorarbeit

Stetige Funktionen am Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem Kompaktum

ausgeführt am Institut für
Analysis and Scientific Computing
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao. Univ. Prof. Dr. Michael Kaltenbäck

durch
Kim Lindner

26.4.2018

Inhaltsverzeichnis

1 Holomorphie auf $\mathbb{C}^r$

Bekanntlicherweise ist eine auf einem offenen $D \subseteq \mathbb{C}$ definierte Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ genau dann holomorph, wenn sie sich lokal um jeden Punkt $w \in D$ als Grenzfunktion einer Potenzreihe darstellen lässt. Dieses Konzept lässt sich auch in $\mathbb{C}^r$ umsetzen. Dazu benötigen wir den Begriff einer Potenzreihe auf $D \subseteq \mathbb{C}^r$. Wir setzen $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. In diesem Kapitel sei $\mathbb{C}^r$ immer mit der Maximumsnorm $\|z\|_\infty := \max\limits_{i=1,\dots,r} |z_i|$ versehen. Die offene Kugel mit Radius R um einen Punkt $w \in \mathbb{C}^r$ sei mit $U_R(w) := \{z \in \mathbb{C}^r : \|z - w\|_\infty < R\}$ bezeichnet.

Definition 1.1 *Zu einer nichtleeren Menge M sei $\mathcal{E} = \mathcal{E}(M)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von M. Mit der Mengeninklusion als Relation wird $(\mathcal{E}, \subseteq)$ zu einer gerichteten Menge. Sind $a_j \in \mathbb{C}$ für alle $j \in M$, so heißt die Reihe $\sum_{j\in M} a_j$ unbedingt konvergent, falls das Netz $(\sum_{j\in A} a_j)_{A\in\mathcal{E}}$ konvergiert. In diesem Fall setzen wir*

$$\sum_{j\in M} a_j = \lim_{A\in\mathcal{E}} \sum_{j\in A} a_j.$$

Bemerkung 1.2 *Auf dem Maßraum $(M, \mathcal{P}(M), \zeta)$ ist eine Funktion $a : M \to \mathbb{C}$ genau dann bezüglich dem Zählmaß ζ auf der Potenzmenge von M integrierbar, wenn die Reihe $\sum_{j\in M} a_j$ im Sinne von Definition 1.1 konvergiert. In diesem Fall gilt (siehe Bem. 15.2.11 in [ANA3])*

$$\sum_{j\in M} a_j = \int_M a_j \, d\zeta(j).$$

Definition 1.3 *Sind $a_m \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}^r$, $m \in \mathbb{N}_0^r$, so nennt man mit der Bezeichnung $z^m := z_1^{m_1} \cdots z_r^{m_r}$ die komplexwertige Reihe, ob konvergent oder nicht,*

$$f(z) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m (z - w)^m$$

eine Potenzreihe in mehreren Variablen mit Anschlussstelle in $w \in \mathbb{C}^r$.

Definition 1.4 *Eine auf einem offenen $D \subseteq \mathbb{C}^r$ definierte Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt holomorph, falls sie sich lokal um jeden Punkt als eine Potenzreihe in mehreren Variablen darstellen lässt. Das heißt zu jedem $w \in D$ gibt es eine offene Kugel $U_R(w)$ und Koeffizienten $a_m \in \mathbb{C}$, sodass*

$$f(z) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m (z - w)^m$$

im Sinne von Definition 1.1 für alle $z \in U_R(w)$.

Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass die Hintereinanderausführung einer holomorphen Funktion in mehreren Variablen mit einer holomorphen Funktion in einer Variable wieder eine holomorphe Funktion in mehreren Variablen ist. Diese Tatsache werden wir später in einem Beweis benötigen. Zunächst machen wir dafür einige Vorarbeiten.

Lemma 1.5 *Sind X ein kompakter topologischer Raum und Y ein Hausdorff-Raum und $f : X \to Y$ eine stetige, bijektive Funktion, so ist die Umkehrfunktion von f auch stetig.*

Beweis. Siehe zum Beipiel *Korollar* 12.11.9 in [ANA2]. $\square$

Lemma 1.6 *Ist $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen in $\mathbb{C}^r$ mit $K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$ und $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n = D \subseteq \mathbb{C}^r$, und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, sodass $f|_{K_n}$ stetig ist für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist f stetig.*

Beweis. Sind $z_n, z \in D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, dann ist $z \in K_m^\circ$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $z_n \in K_m^\circ \subseteq K_m$ für alle $n \geq N$. Damit ist $(z_n)_{n\geq N}$ eine Folge in K_m mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. Zusammen mit der Stetigkeit von $f|_{K_m}$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z)$. $\square$

Lemma 1.7 *Ist $f(z) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m(z-w)^m$ eine Potenzreihe in mehreren Variablen, die in einem Punkt $\tilde{z}$ mit $\tilde{z}_j \neq w_j$ für alle $j = 1, \dots, r$ konvergiert, dann konvergiert sie auf jeder abgeschlossenen Kugel $K_R(w)$ mit $R < \min\limits_{1\leq j\leq r} |\tilde{z}_j - w_j|$ absolut als Funktionenreihe.*

Beweis. Aus der unbedingten Konvergenz von $f(\tilde{z})$ folgt die unbedingte Konvergenz von $\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} |a_m(\tilde{z}-w)^m|$; siehe *Satz* 5.4.4 in [ANA1].
Setzen wir $\|a_m(z-w)^m\|_{\infty,R} := \sup\limits_{z\in K_R(w)} \|a_m(z-w)^m\|_\infty$, dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} \|a_m(z-w)^m\|_{\infty,R} &\leq \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} |a_m| R^{m_1+\dots+m_r} \\ &\leq \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} |a_m| (\min_{1\leq j\leq r} |\tilde{z}_j - w_j|)^{m_1+\dots+m_r} \leq \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} |a_m(\tilde{z}-w)^m| < +\infty,\end{aligned}$$

was zu zeigen war. $\square$

Satz 1.8 *Ist $R > 0$ und $f(z) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m(z-w)^m$ eine für alle $z \in U_R(w)$ konvergente Potenzreihe in mehreren Variablen, so ist f stetig auf $U_R(w)$.*

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < R$ konvergiert f auf $K_{R-\frac{1}{k}}(w)$ nach *Lemma* 1.7 mit $\tilde{z} = w + (R - \frac{1}{k+1}, \dots, R - \frac{1}{k+1})$ absolut als Funktionenreihe und konvergiert daher auch gleichmäßig. Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $K_{R-\frac{1}{k}}(w)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, so folgt mit *Satz* 8.7.1 in [ANA2]

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(z_n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m(z_n-w)^m \\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} \lim_{n\to\infty} a_m(z_n-w)^m = \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m(z-w)^m = f(z)\end{aligned}$$

Nach *Lemma* 1.6 ist f stetig auf $U_R(w)$. $\square$

Satz 1.9 *Sei* $f(z) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m z^m$ *eine Potenzreihe auf* $U_R(0)$ *und* $w = (w_1, \ldots, w_r) \in U_R(0)$, $j \in \{1, \ldots, r\}$ *fest. Betrachte die Abbildung*
$W_j : U_R^{\mathbb{C}}(0) \to U_R(0) : z \mapsto (w_1, \ldots, w_{j-1}, z, w_{j+1}, \ldots, w_r)$. *Dann ist* $f \circ W_j$ *auf* $U_R^{\mathbb{C}}(0)$ *beliebig oft komplex differenzierbar mit der Ableitung*

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k} f(W_j(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0^r \\ m_j = n+k}} a_m \frac{(n+k)!}{n!} \prod_{i\neq j} w_i^{m_i} \Big) z^n.$$

Zudem ist

$$\frac{\partial^k}{\partial z_j^k} f(w) := \frac{\partial^k}{\partial z^k} f(W_j(z))\Big|_{z=w_j} = \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_{m+ke_j} \frac{(m+ke_j)!}{m!} w^m, \tag{1}$$

eine auf $U_R(0)$ *konvergente Potenzreihe, wobei* e_j *den* j*-ten kanonischen Einheitsektor in* $\mathbb{N}_0^r$ *bezeichnet und* $m! := m_1! \cdot \cdots \cdot m_r!$ *für* $m \in \mathbb{N}_0^r$.

Beweis. Wegen $W_j(z) \in U_R(0)$ konvergiert

$$\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m z^{m_j} \prod_{i\neq j} w_i^{m_i} = \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m W_j(z)^m \quad \textit{für alle } z \in U_R^{\mathbb{C}}(0).$$

Partitioniert man $\mathbb{N}_0^r$ in $\mathbb{N}_0^r = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}_0} \{m \in \mathbb{N}_0^r : m_j = n\}$, dann folgt aus *Proposition* 5.4.8 in [ANA1]

$$\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m W_j(z)^m = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0^r \\ m_j=n}} a_m z^{m_j} \prod_{i\neq j} w_i^{m_i} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0^r \\ m_j=n}} a_m \prod_{i\neq j} w_i^{m_i} \Big) z^n.$$

Damit ist $z \mapsto \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m W_j(z)^m$ eine klassische, auf $U_R^{\mathbb{C}}(0) \subseteq \mathbb{C}$ definierte Potenzreihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, mit $b_n = \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0^r \\ m_j=n}} a_m \prod_{i\neq j} w_i^{m_i}$, welche bekanntlich beliebig oft differenzierbar mit der Ableitung $\frac{\partial^k}{\partial z^k} \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m W_j(z)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0^r \\ m_j=n+k}} a_m (\prod_{i\neq j} w_i^{m_i}) \frac{(n+k)!}{n!} z^n$ ist. Die Ableitungen besitzen denselben Konvergenzradius und sind daher auf $U_R^{\mathbb{C}}(0)$ wohldefiniert. Mit einer Indexverschiebung und *Proposition* 5.4.8 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^k}{\partial z^k} f(W_j(z))\Big|_{z=w_j} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0^r \\ m_j=n+k}} a_m (\prod_{i\neq j} w_i^{m_i}) \frac{(n+k)!}{n!} w_j^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0^r \\ m_j=n}} a_{m+ke_j} (\prod_{i\neq j} w_i^{m_i}) \frac{(m_j+k)!}{m_j!} w_j^{m_j}
\end{aligned}$$

Wegen *Satz* 5.4.4 in [ANA1] konvergiert die Reihe $\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}|a_m W_j(z)^m|$ für alle $z\in U_R^{\mathbb{C}}(0)$, womit $z\mapsto\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}|a_m\prod_{i\neq j}w_i^{m_i}|z^{m_j}$ auf $U_R^{\mathbb{C}}(0)$ definiert. Wir erhalten analog die unbedingte Konvergenz von $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0^r\\ m_j=n+k}}|a_{m+ke_j}\prod_{i\neq j}w_i^{m_i}\frac{(m_j+k)!}{m_j!}w_j^{m_j}|$ und es folgt

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(W_j(z))\Big|_{z=w_j}=\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}a_{m+ke_j}\frac{(m+ke_j)!}{m!}w^m.$$

Da $w\in U_R(0)$ beliebig war, ist

$$\frac{\partial^k}{\partial z_j^k}f(w):=\frac{\partial^k}{\partial z^k}f(W_j(z))\Big|_{z=w_j}=\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}a_{m+ke_j}\frac{(m+ke_j)!}{m!}w^m$$

eine auf $U_R(0)$ definierte Potenzreihe in mehreren Variablen.

□

Definition 1.10 *Eine Funktion $f:D\to\mathbb{C}$, mit einem offenen $D\subseteq\mathbb{C}^r$, heißt komplex partiell differenzierbar, falls für alle $w\in D$, $j\in\{1,\dots,r\}$ der Ausdruck $f\circ W_j$ in w_j komplex differenzierbar ist. In diesem Fall schreiben wir*

$$\frac{\partial}{\partial z_j}f(w):=\frac{\partial}{\partial z}f(W_j(z))\Big|_{z=w_j},\quad w\in D.$$

Sie ist unendlich oft komplex partiell differenzierbar, falls für alle $n\in\mathbb{N}$ und Indizes $j_i\in\{1,\dots,r\}$, $i=1,\dots,n$ die Funktion

$$\frac{\partial}{\partial z_{j_n}}\cdots\frac{\partial}{\partial z_{j_1}}f$$

auf D existiert.

Für Potenzreihen in mehreren Variablen gilt ein zum *Satz von Schwarz* ähnliches Resultat.

Korollar 1.11 *Ist $f(z)=\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}a_m z^m$ eine Potenzreihe definiert auf $U_R(0)$, dann ist f unendlich oft komplex partiell differenzierbar, und es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}f\Big)=\frac{\partial}{\partial z_j}\Big(\frac{\partial}{\partial z_i}f\Big)\quad\text{für alle } i,j\in\{1,\dots,r\}.$$

Beweis. Nach *Satz* 1.9 ist f partiell differenzierbar. Setzen wir $b_m=a_{m+e_j}\dfrac{(m+e_j)!}{m!}$, dann ist $\dfrac{\partial}{\partial z_j}f(z)=\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}b_m z^m$ eine Potenzreihe auf $U_R(0)$ und selbiger Satz liefert

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}f\Big)(z)=\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}b_{m+e_i}\frac{(m+e_i)!}{m!}z^m=\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}a_{m+e_i+e_j}\frac{(m+e_i+e_j)!}{m!}z^m$$

Wiederholt man diese Prozedur in umgekehrter Reihenfolge, das heißt man bildet zuerst $\frac{\partial}{\partial z_i} f$ und dann $\frac{\partial}{\partial z_j}\big(\frac{\partial}{\partial z_i} f\big)$, so erhalten wir genauso

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\Big(\frac{\partial}{\partial z_i} f\Big)(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} a_{m+e_i+e_j} \frac{(m+e_i+e_j)!}{m!} z^m.$$

Somit gilt $\frac{\partial}{\partial z_i}\big(\frac{\partial}{\partial z_j} f\big) = \frac{\partial}{\partial z_j}\big(\frac{\partial}{\partial z_i} f\big)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, wobei beide Grenzfunktionen auf $U_R(0)$ definiert sind. Da jede partielle Ableitung von f die Voraussetzung von *Satz* 1.9 erfüllt, ist f unendlich oft differenzierbar.

□

Bemerkung. Induktiv folgt, dass es bei Ableitungen höherer Ordnung nicht darauf ankommt, in welcher Reihenfolge differenziert wird.

Folgende Definition wird durch die letzten beiden Sätze gerechtfertigt.

Definition 1.12 *Ist $f(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} a_m z^m$ eine Potenzreihe und $\alpha \in \mathbb{N}_0^r$, dann definieren wir*

$$f^{(\alpha)}(z) := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial z_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_r}}{\partial z_r^{\alpha_r}} f(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} a_{m+\alpha} \frac{(m+\alpha)!}{m!} z^m.$$

Satz 1.13 *Die Koeffizienten einer Potenzreihendarstellung sind eindeutig; gilt also $f(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} a_m z^m = \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} b_m z^m$ für alle $z \in U_R(0)$, dann folgt $a_m = b_m$ für alle $m \in \mathbb{N}_0^r$.*

Beweis. Für ein festes $\alpha \in \mathbb{N}_0^r$ gilt nach *Satz* 1.9

$$f^{(\alpha)}(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} a_{m+\alpha} \frac{(m+\alpha)!}{m!} z^m = \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} b_{m+\alpha} \frac{(m+\alpha)!}{m!} z^m$$

und daher $f^{(\alpha)}(0) = a_\alpha \alpha! = b_\alpha \alpha!$, das heißt $a_\alpha = b_\alpha$. Da $\alpha \in \mathbb{N}_0^r$ beliebig war, folgt $a_m = b_m$ für alle $m \in \mathbb{N}_0^r$.

□

Bemerkung. Die bisherigen Resultate gelten auch entsprechend für Potenzreihen der Form $\sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} a_m (z-w)^m$.

Im Folgenden setzen wir $\prod m := \prod_{i=1}^{r} \{1, \ldots, m_i\}$ für ein $m \in \mathbb{N}_0^r$.

Lemma 1.14 *Sind x_m, y_m, z_m, $m \in \mathbb{N}_0^r$ komplexe Zahlen, sodass $\sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} \sum_{k \in \prod m} |x_m y_k z_{m-k}|$ unbedingt konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{k \in \mathbb{N}_0^r} \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} x_{m+k} y_k z_m$ unbedingt und es gilt*

$$\sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} \sum_{k \in \prod m} x_m y_k z_{m-k} = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^r} \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} x_{m+k} y_k z_m.$$

Beweis. Setzen wir x_m, y_m, z_m auf $\mathbb{Z}^r$ mit 0 fort, so gilt mit *Bemerkung* 1.2

$$\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}\sum_{k\in\prod m} x_m y_k z_{m-k} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^r}\sum_{k\in\mathbb{Z}^r} x_m y_k z_{m-k} = \int_{\mathbb{Z}^r}\int_{\mathbb{Z}^r} x_m y_k z_{m-k}\, d\zeta(k) d\zeta(m) \tag{2}$$

Aus der unbedingten Konvergenz von $\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}\sum_{k\in\prod m} |x_m y_k z_{m-k}|$ folgt

$$\int_{\mathbb{Z}^r}\int_{\mathbb{Z}^r} |x_m y_k z_{m-k}|\, d\zeta(k) d\zeta(m) < \infty.$$

Für festes $k \in \mathbb{Z}^r$ ist die Transformation $T(m) = m - k$ eine Bijektion auf $\mathbb{Z}^r$ und es gilt $\zeta T^{-1} = \zeta$. Mit dem Transformationssatz und dem *Satz von Fubini* stimmt (2) überein mit

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Z}^r}\int_{\mathbb{Z}^r} x_m y_k z_{m-k}\, d\zeta(k) d\zeta(m) &= \int_{\mathbb{Z}^r}\int_{\mathbb{Z}^r} x_m y_k z_{m-k}\, d\zeta(m) d\zeta(k) = \int_{\mathbb{Z}^r}\int_{\mathbb{Z}^r} x_{m+k} y_k z_m\, d\zeta(m) d\zeta(k)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^r}\sum_{m\in\mathbb{Z}^r} x_{m+k} y_k z_m = \sum_{k\in\mathbb{N}_0^r}\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} x_{m+k} y_k z_m.\end{aligned}$$

□

Eine leichte Verallgemeinerung von *Korollar* 5.4.11 in [ANA1] ist

Lemma 1.15 *Sind* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{1,n}, \ldots, \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{p,n}$ *unbedingt konvergente Reihen, dann gilt*

$$\prod_{i=1}^{p}\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{i,n} = \sum_{m\in\mathbb{N}_0^p}\prod_{i=1}^{p} a_{i,m_i}.$$

Satz 1.16 *Sei* $f(z) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m (z - z_0)^m$ *eine Potenzreihe definiert auf* $U_R(z_0)$. *Sind* $w \in U_R(z_0)$ *und* $\epsilon > 0$ *mit* $U_\epsilon(w) \subseteq U_R(z_0)$, *dann konvergiert* $\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} \frac{f^{(m)}(w)}{m!}(z - w)^m$ *für jedes* $z \in U_\epsilon(w)$ *und es gilt* $f(z) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} \frac{f^{(m)}(w)}{m!}(z - w)^m$.

Beweis. Mit der binomischen Formel und *Lemma* 1.15 erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m (z - z_0)^m &= \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m \prod_{i=1}^{r}((z_i - w_i) + (w_i - z_{0,i}))^{m_i}\\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m \prod_{i=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_i}\binom{m_i}{k}(z_i - w_i)^k (w_i - z_{0,i})^{m_i-k}\\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m \sum_{k\in\prod m}\prod_{i=1}^{r}\binom{m_i}{k_i}(z_i - w_i)^{k_i}(w_i - z_{0,i})^{m_i-k_i}\\ &= \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}\sum_{k\in\prod m} a_m m! \frac{(z - w)^k}{k!}\frac{(w - z_0)^{m-k}}{(m - k)!}\end{aligned}$$

Der maximal wählbare Radius ist $\epsilon = R - \|w - z_0\|$, denn für jeden größeren Radius $\rho > \epsilon$ wäre die Kugel $U_\rho(w)$ nicht mehr in $U_R(z_0)$ enthalten. Für ein festes $z \in U_\epsilon(w)$ gilt $\|z - z_0\| \leq \|z - w\| + \|w - z_0\| < R$. Sei $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, sodass $c := \|z - w\| + \|w - z_0\| + \frac{1}{n} < R$. Nach *Lemma* 1.7 mit $\tilde{z} = z_0 + (c, \ldots, c) \in U_R(z_0)$ erhalten wir insbesondere die unbedingte Konvergenz von $\sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} |a_m(z - z_0)^m|$ im Punkt $z = z_0 + (c - \frac{1}{n}, \ldots, c - \frac{1}{n}) \in K_{c-\frac{1}{n}}(z_0)$. Wegen

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \prod m} \left| a_m m! \frac{(z-w)^k}{k!} \frac{(w - z_0)^{m-k}}{(m-k)!} \right| &= |a_m| \prod_{i=1}^{r} (|z_i - w_i| + |w_i - z_{0,i}|)^{m_i} \\ &\leq |a_m| (c - \frac{1}{n}, \ldots, c - \frac{1}{n})^m \qquad \textit{für alle } m \in \mathbb{N}_0^r\end{aligned}$$

folgt die unbedingte Konvergenz von $\sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} \sum_{k \in \prod m} \left| a_m m! \frac{(z-w)^k}{k!} \frac{(w - z_0)^{m-k}}{(m-k)!} \right|$. *Lemma* 1.14 angewendet auf $x_m = a_m m!$, $y_m = \frac{(z-w)^m}{m!}$, $z_m = \frac{(w - z_0)^m}{m!}$ ergibt

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0^r} \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} a_{m+k} (m+k)! \frac{(z-w)^k}{k!} \frac{(w-z_0)^m}{m!} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}_0^r} \frac{1}{k!} \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} a_{m+k} \frac{(m+k)!}{m!} (w - z_0)^m (z-w)^k = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^r} \frac{f^{(k)}(w)}{k!} (z-w)^k.\end{aligned}$$

□

Folgerung. *Die Grenzfunktion einer Potenzreihe in mehreren Variablen, definiert auf einer offenen Kugel, ist holomorph.*

Satz 1.17 *Folgende Aussagen über eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}^r$ offen, sind äquivalent:*

a) f ist holomorph.

b) f ist stetig und komplex partiell differenzierbar.

Beweis. *a)* $\Rightarrow$ *b)*: Diese Richtung folgt aus *Satz* 1.8 und 1.9.
b) $\Rightarrow$ *a)*: Sei $w \in \mathbb{C}$ beliebig. Wähle ein $\epsilon > 0$, sodass $K_\epsilon(w) \subseteq D$. Wir zeigen, dass f die Grenzfunktion einer Potenzreihe auf $U_\epsilon(w)$ ist. Daraus erhalten wir unmittelbar die Holomorphie von f. Aus der partiellen Differenzierbarkeit von f in z_r folgt mit der Cauchyschen Integralformel für ein $z \in U_\epsilon(w)$ wegen $|z_r - w_r| < \epsilon$

$$f(z_1, \ldots, z_r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_r - w_r| = \epsilon} \frac{f(z_1, \ldots, z_{r-1}, \zeta_r)}{\zeta_r - z_r} \, d\zeta_r$$

Für $f(z_1,\dots,z_{r-1},\zeta_r)$ erhalten wir analog

$$f(z_1,\dots,z_{r-1},\zeta_r)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta_{r-1}-w_{r-1}|=\epsilon}\frac{f(z_1,\dots,z_{r-2},\zeta_{r-1},\zeta_r)}{\zeta_{r-1}-z_{r-1}}\,d\zeta_{r-1},$$

und daher

$$f(z_1,\dots,z_r)=\Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2\int\limits_{|\zeta_r-w_r|=\epsilon}\int\limits_{|\zeta_{r-1}-w_{r-1}|=\epsilon}\frac{f(z_1,\dots,z_{r-2},\zeta_{r-1},\zeta_r)}{(\zeta_{r-1}-z_{r-1})(\zeta_r-z_r)}\,d\zeta_{r-1}d\zeta_r.$$

Induktiv erhalten wir

$$f(z_1,\dots,z_r)=\Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^r\int\limits_{|\zeta_r-w_r|=\epsilon}\cdots\int\limits_{|\zeta_1-w_1|=\epsilon}\frac{f(\zeta_1,\dots,\zeta_r)}{(\zeta_1-z_1)\dots(\zeta_r-z_r)}\,d\zeta_1\dots d\zeta_r. \tag{3}$$

Für ein $\zeta\in U_\epsilon(w)$ mit $|\zeta_j-w_j|=\epsilon$, $j=1,\dots,r$, gilt $\left|\dfrac{z_j-w_j}{\zeta_j-w_j}\right|<1$ für alle $j\in\{1,\dots,r\}$. Daher gilt mit *Lemma* 1.15

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\zeta-z)^{(1,\dots,1)}}&=\frac{1}{(\zeta_1-w_1-(z_1-w_1))\dots(\zeta_r-w_r-(z_r-w_r))}\\&=\frac{1}{(\zeta_1-w_1)\dots(\zeta_r-w_r)(1-\frac{z_1-w_1}{\zeta_1-w_1})\dots(1-\frac{z_r-w_r}{\zeta_r-w_r})}\\&=\frac{1}{(\zeta-w)^{(1,\dots,1)}}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z_1-w_1}{\zeta_1-w_1}\Big)^n\dots\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z_r-w_r}{\zeta_r-w_r}\Big)^n\\&=\frac{1}{(\zeta-w)^{(1,\dots,1)}}\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}\Big(\frac{z-w}{\zeta-w}\Big)^m=\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}\frac{(z-w)^m}{(\zeta-w)^{m+(1,\dots,1)}}.\end{aligned}$$

Da f stetig ist, ist f auf $K_\epsilon(w)$ durch ein gewisses $M>0$ beschränkt. Wir erhalten wegen

$$\left|f(\zeta)\frac{(z-w)^m}{(\zeta-w)^{m+(1,\dots,1)}}\right|\le M\frac{|(z-w)^m|}{\epsilon^{|m|+r}}$$

die absolute Konvergenz von $\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}f(\zeta)\frac{(z-w)^m}{(\zeta-w)^{m+(1,\dots,1)}}$ als Funktionenreihe in ζ, da $\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}\frac{|(z-w)^m|}{\epsilon^{|m|}}$ das Produkt von r vielen, endlichen geometrischen Reihen ist. Insbesondere ist $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{(1,\dots,1)}}$ gleichmäßiger Grenzwert von$\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}f(\zeta)\frac{(z-w)^m}{(\zeta-w)^{m+(1,\dots,1)}}$. Mit (3) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}f(z)&=\Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^r\int\limits_{|\zeta_r-w_r|=\epsilon}\cdots\int\limits_{|\zeta_1-w_1|=\epsilon}\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}f(\zeta)\frac{(z-w)^m}{(\zeta-w)^{m+(1,\dots,1)}}\,d\zeta_1\dots d\zeta_r\\&=\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}\bigg(\Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^r\int\limits_{|\zeta_r-w_r|=\epsilon}\cdots\int\limits_{|\zeta_1-w_1|=\epsilon}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)^{m+(1,\dots,1)}}\,d\zeta_1\dots d\zeta_r\bigg)(z-w)^m.\end{aligned}$$

□

Mit diesem Resultat können wir *Korollar* 1.11 verschärfen.

Korollar 1.18 *Ist $f : D \to \mathbb{C}$, mit einem offenen $D \subseteq \mathbb{C}^r$, stetig und komplex partiell differenzierbar, dann ist f unendlich oft differenzierbar, wobei Ableitungen höherer Ordnung nicht von der Differentationsreihenfolge abhängen. Zudem sind alle partiellen Ableitungen holomorph.*

Beweis. Nach dem letzten Satz ist f holomorph und daher um jeden Punkt $w \in D$ lokal die Grenzfunktion einer Potenzreihe. Gemäß *Korollar* 1.11 ist f lokal um w unendlich oft partiell differenzierbar, wobei jede Ableitung nicht von der Differentationsreihenfolge abhängt und wieder eine Potenzreihe ist. Somit existieren alle partiellen Ableitungen und sind holomorph.

$\square$

Satz 1.19 *Sind $f : D \to \mathbb{C}$, $g : E \to \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $E \subseteq \mathbb{C}^r$ offen, mit $g(E) \subseteq D$, f und g holomorph, so ist auch $f \circ g$ holomorph. Insbesondere ist die Komposition zweier Potenzreihen wieder eine Potenzreihe. Die Koeffizienten sind gegeben durch*

$$c_{(0,\dots,0)^T} = b_0,\ c_k = \sum_{n=1}^{|k|} \sum_{M \in A_k} b_n \prod_{j=1}^{n} \tilde{a}_{Md_j} \quad \textit{für } k \neq (0,\dots,0)^T, \tag{4}$$

wobei $\tilde{a}_k = \begin{cases} 0 & , k = 0 \\ a_k & , k \neq 0. \end{cases}$

Beweis. Zu einem $x \in E$ gibt es $R_1 > 0$, $R > 0$ mit $U_R(g(x)) \subseteq D$, $U_{R_1}(x) \subseteq E$, sodass $f(w) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}_0} b_n (w - g(x))^n$ für alle $w \in U_R(g(x))$ und $g(y) = \sum\limits_{m \in \mathbb{N}_0^r} a_m (y-x)^m$ für alle $y \in U_{R_1}(x)$. Die Funktion $\tilde{g} := \Big(y \mapsto g(x) + \sum\limits_{\substack{m \in \mathbb{N}_0^r \\ m \neq (0,\dots,0)^T}} |a_m| (y-x)^m\Big)$ ist wegen *Lemma* 1.7 auf $U_{R_1}(x)$ wohldefiniert und gemäß *Satz* 1.8 stetig, daher gibt es ein $\epsilon \in (0, R_1]$, sodass $\tilde{g}(U_\epsilon(x)) \subseteq U_R(\tilde{g}(x)) = U_R(g(x))$, womit die Komposition $f(\tilde{g}(y)) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}_0} b_n \big(\sum\limits_{\substack{m \in \mathbb{N}_0^r \\ m \neq (0,\dots,0)^T}} |a_m| (y-x)^m \big)^n$ für alle $y \in U_\epsilon(x)$ wohldefiniert ist. Für $y \in U_\epsilon(x)$ ist auch $\tilde{y} := x + (\|y-x\|, \dots, \|y-x\|) \in U_\epsilon(x)$. Wegen

$$\begin{aligned} |g(y) - g(x)| &= |\sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} a_m (y-x)^m - g(x)| = |\sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} a_m (y-x)^m - a_{(0,\dots,0)^T}| \\ &\leq \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0^r \\ m \neq (0,\dots,0)^T}} |a_m (y-x)^m| \leq |\tilde{g}(\tilde{y}) - g(x)| < \epsilon \end{aligned}$$

ist auch $f \circ g$ auf $U_\epsilon(x)$ wohldefiniert. Wir setzen zur Vereinfachung o.B.d.A. $a_{(0,\dots,0)^T} = 0$ und $z = y - x$.
Für $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}_0^r$ setzen wir $M = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^{r \times n}$. Weiters seien $d_j \in \mathbb{N}_0^n$, $e_i \in \mathbb{N}_0^r$ die kanonischen Einheitsbasisvektoren in den entsprechenden Räumen. Zudem

definieren wir $|(a_1,\dots,a_k)| = \sum_{i=1}^{k} a_i$ für $(a_1,\dots,a_k) \in \mathbb{R}^k$.

Aus der unbedingten Konvergenz von $\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} |a_m z^m|$ folgt durch wiederholtes anwenden von *Korollar* 5.4.11 in [ANA1] für $y \in U_\epsilon(x)$

$$f(g(y)) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n\Big(\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} a_m z^m\Big)^n = b_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \sum_{m_1\in\mathbb{N}_0^r} \cdots \sum_{m_n\in\mathbb{N}_0^r} \prod_{j=1}^{n} a_{m_j} z^{m_j}$$

$$= b_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \sum_{M\in\mathbb{N}_0^{r\times n}} \prod_{j=1}^{n} a_{Md_j} z^{Md_j}, \tag{5}$$

wobei der Ausdruck $\sum_{M\in\mathbb{N}_0^{r\times n}} \prod_{j=1}^{n} a_{Md_j} z^{Md_j}$ wegen des gleichen Satzes unbedingt konvergiert.

Es gilt $\prod_{j=1}^{n} z^{Md_j} = z_1^{m_{11}} z_2^{m_{21}} \dots z_r^{m_{r1}} z_1^{m_{12}} \dots z_r^{m_{r2}} \dots\dots z_1^{m_{1n}} \dots z_r^{m_{rn}} = \prod_{i=1}^{r} z_i^{|e_i^T M|}$. Damit stimmt (5) überein mit

$$b_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \sum_{M\in\mathbb{N}_0^{r\times n}} \prod_{j=1}^{n} a_{Md_j} \prod_{i=1}^{r} z_i^{|e_i^T M|}. \tag{6}$$

Setzen wir $A_k = \{M \in \mathbb{N}_0^{r\times n} : |e_i^T M| = k_i \textit{ für alle } i = 1,\dots r\}$, $k \in \mathbb{N}_0^r$, dann ist $\mathbb{N}_0^{r\times n} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_0^r} A_k$.

Ist $M \in A_{k_1} \cap A_{k_2}$, dann gilt $k_{1,i} = |e_i^T M| = k_{2,i}$ für alle $i = 1,\dots,r$, woraus $k_1 = k_2$ folgt. Also sind die A_k paarweise disjunkt und bilden eine Partition von $\mathbb{N}_0^{r\times n}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{M\in\mathbb{N}_0^{r\times n}} \prod_{j=1}^{n} a_{Md_j} \prod_{i=1}^{r} z_i^{|e_i^T M|}$ unbedingt konvergent. Somit folgt aus *Proposition* 5.4.8 in [ANA1]

$$\sum_{M\in\mathbb{N}_0^{r\times n}} \prod_{j=1}^{n} a_{Md_j} \prod_{i=1}^{r} z_i^{|e_i^T M|} = \sum_{k\in\mathbb{N}_0^r} \sum_{M\in A_k} \prod_{j=1}^{n} a_{Md_j} \prod_{i=1}^{r} z_i^{|e_i^T M|},$$

Analog erhalten wir aus der unbedingten Konvergenz der Potenzreihendarstellung von $f \circ \tilde{g}$ auf $U_\epsilon(x)$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n(\sum_{m\in\mathbb{N}_0^r} |a_m z^m|)^n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}_0^r} \sum_{M\in A_k} |b_n \prod_{j=1}^{n} a_{Md_j} \prod_{i=1}^{r} z_i^{|e_i^T M|}|$$

Daher stimmt (6) wegen (5.19) in [ANA1] überein mit

$$\begin{aligned}
&b_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}_0^r} \sum_{M\in A_k} b_n \prod_{j=1}^{n} a_{Md_j} \prod_{i=1}^{r} z_i^{|e_i^T M|} \\
&= b_0 + \sum_{k\in\mathbb{N}_0^r} \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{M\in A_k} b_n \prod_{j=1}^{n} a_{Md_j} \prod_{i=1}^{r} z_i^{k_i} \\
&= b_0 + \sum_{k\in\mathbb{N}_0^r} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{M\in A_k} b_n \prod_{j=1}^{n} a_{Md_j} \Big) (y-x)^k.
\end{aligned}$$

Somit lässt sich $f \circ g$ auf $U_\epsilon(x)$ in die Potenzreihe $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0^r} c_m(y-x)^m$ mit

$$c_{(0,\dots,0)^T} = b_0,\ c_k = \sum_{n=1}^{|k|} \sum_{M\in A_k} b_n \prod_{j=1}^{n} a_{Md_j} \quad \textit{für } k \neq (0,\dots,0)^T, \tag{7}$$

entwickeln. Warum die Summe nur bis $|k|$ läuft kann man sich folgendermaßen überlegen. Es gilt $a_{(0,\dots,0)^T} = 0$. Für $n > |k|$ und einem $M \in A_k = \{M \in \mathbb{N}_0^{r\times n} : |e_i^T M| = k_i\}$ muss M aus Dimensionsgründen mindestens eine Nullspalte Md_{j_0} besitzen. Für diese Spalte gilt per definitionem $a_{Md_{j_0}} = 0$ und daher taucht in diesem Fall im Produkt $\prod\limits_{j=1}^{n} a_{Md_j}$ immer ein Faktor 0 auf. □

Definition 1.20 *Für ein* $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ *definieren wir den komplexen Logarithmus durch*

$$log(z) = ln|z| + i \cdot arg(z),$$

wobei ln den reellen, natürlichen Logarithmus bezeichnet und $arg(z) \in (-\pi,\pi)$ *der eindeutige Winkel mit* $z = |z|e^{iarg(z)}$ *ist.*

Bekanntlich ist die Exponentialfunktion eingeschränkt auf $\mathbb{R}\times(-\pi,\pi)$ eine Bijektion auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$. Es existiert daher eine Umkehrfunktion. Man kann elementar nachrechnen, dass der *komplexe Logarithmus* im Sinne von *Definition* 1.20, genau diese Umkehrfunktion ist.

Bemerkung. Der komplexe Logarithmus ist stetig auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$.

Satz 1.21 *Es gelten folgende Rechenregeln für den komplexen Logarithmus log:*

- $log(z\cdot w) = log(z) + log(w)$, *falls* $z, w \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ *und* $arg(z) + arg(w) \in (-\pi,\pi)$
- $log(z^{-1}) = -log(z)$, *falls* $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$.

Beweis. Aus $arg(z) + arg(w) \in (-\pi, \pi)$ folgt $log(z) + log(w) \in \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ und $z \cdot w \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. Es gilt wegen $z, w, z \cdot w \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$

$$\exp(log(z \cdot w)) = z \cdot w = \exp(log(z)) \exp(log(w)) = \exp(log(z) + log(w)).$$

Da die Exponentialfunktion injektiv auf $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ ist, folgt

$$log(z \cdot w) = log(z) + log(w)$$

für alle z, $w \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ mit $arg(z) + arg(w) \in (-\pi, \pi)$. Den zweiten Punkt zeigt man analog.

□

Proposition 1.22 *Für* $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n$, $z \in U_1(1)$ *gilt* $g(z) = log(z)$.

Beweis. Gemäß *Satz* 1.19 erhalten wir für $\exp(g(z))$ mit $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ und $b_n = \frac{1}{n!}$

$$\begin{aligned}\exp(g(z)) = \sum_{k=0} c_k(z-1)^k &= b_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_0^n \\ |m|=k}} b_n \prod_{j=1}^{n} a_{m_j}(z-1)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\sum_{\substack{m_1+\dots+m_n=k \\ m_j\neq 0}} \frac{1}{n!}\prod_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{m_j+1}}{m_j}(z-1)^k.\end{aligned}$$

Es gilt $c_0 = 1$, $c_k = \sum_{n=1}^{k}\sum_{\substack{m_1+\dots+m_n=k \\ m_j\neq 0}} \frac{1}{n!}\prod_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{m_j+1}}{m_j} = \begin{cases} 1 & ,k=1 \\ 0 & ,k\neq 0,1 \end{cases}$, was wir mit vollständiger Induktion zeigen werden. Für $p = 2$ ist $c_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$. Angenommen die Aussage ist für alle natürlichen Zahlen zwischen 2 und p gültig. Es gilt

$$(\exp \circ g)'(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}(z-1)^k = \exp(g(z))g'(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} c_n(-1)^{k-n}(z-1)^k,$$

wobei wir bei der letzten Gleichheit das Cauchyprodukt verwendet haben. Mit *Satz* 1.13 erhalten wir

$$(p+1)c_{p+1} = \sum_{n=0}^{p} c_n(-1)^{p-n} = (-1)^p + (-1)^{p-1} + \sum_{n=2}^{p} c_n(-1)^{p-n}.$$

Die rechte Seite ergibt wegen der Induktionsvoraussetzung 0. Daraus folgt $c_{p+1} = 0$ und daher $\exp(g(z)) = z$. Wir erhalten $log(z) = g(z) + k_z 2\pi i$ für ein gewisses $k_z \in \mathbb{Z}$. Wegen der Stetigkeit von g und log muss k_z konstant für jedes $z \in U_1(1)$ sein. Aus $g(1) = 0 = log(1) = g(1) + k_1 2\pi i$ folgt $k_z = 0$ und somit $g(z) = log(z)$. □

Korollar 1.23 *Für jeden Punkt* $w \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *gilt*

$$log(z) = log(w) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nw^n}(z-w)^n, \quad \textit{für alle } z \in U_\epsilon(w),$$

wobei $\epsilon = \begin{cases} |Im\, w| & , w \notin \mathbb{R} \\ |w| & , w \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$ *Der komplexe Logarithmus ist somit holomorph auf* $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$.

Beweis. Gemäß der letzten Proposition gilt $log(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n$, für alle $z \in U_1(1)$. Sei $w \notin \mathbb{R}$. Es gilt $arg(\frac{1}{w}) = -arg(w)$. Für ein $z \in U_{|Im\, w|}(w)$ haben die Winkel von z und w stets dasselbe Vorzeichen. Daher haben z und $\frac{1}{w}$ stets verschiedene. Somit gilt $arg(z) + arg(\frac{1}{w}) \in (-\pi, \pi)$. Mit *Satz* 1.21 erhalten wir wegen $|\frac{z}{w} - 1| < 1$

$$log(z) - log(w) = log(\frac{z}{w}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(\frac{z}{w} - 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nw^n}(z-w)^n.$$

Für $w \in \mathbb{R}^+$ und $z \in U_{|w|}(w)$ ist $arg(w) = 0$ und die obige Rechnung ist genauso durchführbar. Setzen wir $\epsilon = \begin{cases} |Im\, w| & , w \notin \mathbb{R} \\ |w| & , w \in \mathbb{R}^+, \end{cases}$ dann gilt

$$log(z) = log(w) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{nw^n}(z-w)^n \tag{8}$$

für alle $z \in U_\epsilon(w)$. Also ist log holomorph auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$.

□

2 Stetige Funktionen auf $W(T)$

Sei $(T, \mathcal{T})$ ein kompakter *Hausdorff*-Raum, $C(T)$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : T \to \mathbb{C}$ und $C(T)'$ dessen topologischer Dualraum, also die Menge aller stetigen Funktionale $\phi : C(T) \to \mathbb{C}$. Mit $M_{reg}(T)$ bezeichnen wir die Menge aller regulären, komplexen Borelmaße auf dem Messraum $(T, \mathfrak{A}_\sigma(\mathcal{T}))$. Ein $A \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathcal{T})$ nennen wir auch eine messbare Menge.
Die letzten beiden Funktionenräume stehen in einem engen Zusammenhang. Wir zitieren den Darstellungssatz von Riesz-Markov in einer Form, in der wir ihn benötigen, ohne Beweis.

Satz 2.1 *Sei L ein kompakter Hausdorff-Raum. Dann ist die Menge $C(L)$ isometrisch isomorph zu $M_{reg}(L)$. Genauer ist die Abbildung $\Phi : M_{reg}(L) \to C(L)'$, die einem regulären komplexen Borelmaß μ das durch*

$$\Phi(\mu)f := \int_L f \, d\mu, \ f \in C_0(L),$$

definierte lineare Funktional $\Phi(\mu)$ zuordnet, ein isometrischer Isomorphismus von $M_{reg}(L)$ auf $C_0(L)'$.

Sei $C(T)'$ versehen mit der w^*-Topologie, also die initiale Topologie aller Auswertungsfunktionale $\iota(f) : C(T)' \to \mathbb{C}$, die definiert sind durch

$$\iota(f)\phi = \phi(f), \quad f \in C(T). \tag{9}$$

Die Urbilder jeder offenen Teilmenge von $C(T)'$ unter Φ aus *Satz* 2.1 induzieren eine Topologie auf $M_{reg}(T)$, die wir mit w^* bezeichnen. Damit wird Φ ein Homöomorphismus. Sei $W(T) := \{\mu \in M_{reg}(T) : \mu \geq 0, \ \mu(T) = 1\}$, also die Menge der regulären Wahrscheinlichkeitsmaße auf T. Die Spurtopologie auf $W(T)$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{O} := w^*|_{W(T)} \tag{10}$$

Satz 2.2 *Ist $\mu \in M_{reg}(T)$, dann gilt*

$$\mu \in W(T) \textit{ genau dann, wenn } \mu(T) = 1 \textit{ und} \tag{11}$$

$$\int_T f \, d\mu \geq 0 \textit{für alle nichtnegativen } f \in C(T).$$

Beweis. Falls $\mu \in W(T)$, dann gilt klarerweise $\mu(T) = 1$ und $\displaystyle\int_T f \, d\mu \geq 0$. Für die Umkehrung benötigen wir das Lemma von Urysohn (*Satz* 12.10.2 in [ANA2]).

Satz 2.3 *Erfüllt $(X, \mathcal{T})$ das vierte Trennungsaxiom, so sind je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen A, B durch eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ trennbar, d.h. $f(A) \subseteq \{0\}$, $f(B) \subseteq \{1\}$.*

Da auf jedem kompakten *Hausdorff*-Raum das vierte Trennungsaxiom erfüllt ist, können wir das Lemma von Urysohn hier anwenden. Mit $\mu \in M_{reg}$ gilt auch $\overline{\mu} \in M_{reg}$ (komplexe Konjugation).
Für $Re\,\mu := \frac{1}{2}(\mu + \overline{\mu})$ und $Im\,\mu := \frac{1}{2i}(\mu - \overline{\mu})$ erhalten wir

$$\mu = \frac{1}{2}(\mu + \overline{\mu}) + i\frac{1}{2i}(\mu - \overline{\mu}) = Re\,\mu + iIm\,\mu.$$

Dabei sind $Re\,\mu$ und $Im\,\mu$ reellwertige, signierte Maße. Diese lassen sich nach dem Zerlegungssatz von Jordan (*Satz* 11.11 in [K]) als Differenz zweier zueinander singulärer, nichtnegativer Maße darstellen. Es gibt also μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 mit $\mu_1 \perp \mu_2$, $\mu_3 \perp \mu_4$, sodass

$$Re\,\mu = \mu_1 - \mu_2, \quad Im\,\mu = \mu_3 - \mu_4. \tag{12}$$

Wir zeigen, dass alle obigen μ_i regulär sind.
Da $M_{reg}(T)$ ein Vektorraum ist, sind $Re\,\mu = \frac{1}{2}(\mu + \overline{\mu})$ und $Im\mu = \frac{1}{2i}(\mu - \overline{\mu})$ als Linearkombination von regulären Maßen auch regulär. Definitionsgemäß ist $Re\,\mu$ genau dann regulär, wenn seine Variation $|Re\,\mu| = \mu_1 + \mu_2$ es ist. Deshalb gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ und $A \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathcal{T})$ eine kompakte Menge K und eine offene Menge O mit $K \subseteq A \subseteq O$, sodass

$$|Re\,\mu|(O \backslash K) = \mu_1(O \backslash K) + \mu_2(O \backslash K) < \epsilon.$$

Daraus folgt

$$\mu_1(O \backslash K) < \epsilon, \ \mu_2(O \backslash K) < \epsilon,$$

was die Regularität von μ_1 und μ_2 zeigt. Analog sind auch μ_3 und μ_4 regulär.
Wir schließen im Folgenden von $\int_T f d\mu \geq 0$ für alle nichtnegativen $f \in C(T)$ auf $\mu \geq 0$.
Wegen (12) und der Linearität des Integrals im Maß gilt für eine nichtnegative Funktion $f \in C(T)$

$$\int_T f\, d\mu = \int_T f\, d\mu_1 - \int_T f\, d\mu_2 + i(\int_T f\, d\mu_3 - \int_T f\, d\mu_4) \geq 0$$

Daraus folgt $\int_T f\, d\mu_1 \geq \int_T f\, d\mu_2$ und $\int_T f\, d\mu_3 - \int_T f\, d\mu_4 = 0$. Wir müssen $\mu_1 \geq \mu_2$ und $\mu_3 = \mu_4$ zeigen, woraus wegen $\mu_1 \perp \mu_2$, $\mu_3 \perp \mu_4$ unmittelbar $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$ und daher $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4) \geq 0$ folgt. Sei $A \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathcal{T})$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen der Regularität von μ_1, μ_2 gibt es eine offene Menge $O \supseteq A$ mit $\mu_1(A) > \mu_1(O) - \epsilon$ und eine kompakte Menge $K \subseteq A$ mit $\mu_2(K) > \mu_2(A) - \epsilon$. Das Lemma von Urysohn gewährt die Existenz einer stetigen Funktion $f : T \to [0,1]$ mit $f(O^c) \subseteq \{0\}$ und $f(K) \subseteq \{1\}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mu_1(A) > \mu_1(O) - \epsilon = \int_T \mathbb{1}_O\, d\mu_1 - \epsilon \geq \int_T f\, d\mu_1 - \epsilon \\ \geq \int_T f\, d\mu_2 - \epsilon \geq \int_T \mathbb{1}_K\, d\mu_2 - \epsilon = \mu_2(K) - \epsilon > \mu_2(A) - 2\epsilon.\end{aligned}$$

Da ϵ beliebig war, gilt $\mu_1 \geq \mu_2$. Analog erhält man $\mu_3 \geq \mu_4$ und aus Symmetriegründen auch $\mu_4 \geq \mu_3$ und daher $\mu_3 = \mu_4$. Damit ist μ ein nichtnegatives Maß und (11) ist vollständig bewiesen. □

Bemerkung. Mithilfe von *Satz* 1.2.3 in [F] kann man die Konvergenz eines Netzes in $W(T)$ bzw. $M_{reg}(T)$ folgendermaßen charakterisieren (siehe *Satz* 3.1 im Anhang):
Ist $(\mu_i)_{i\in I}$ ein Netz in $W(T)$ bzw. $M_{reg}(T)$, dann gilt

$$\mu_i \overset{\mathcal{O}}{\to} \mu \text{ bzw. } \mu_i \overset{w^*}{\to} \mu \text{ genau dann, wenn} \int_T f\,d\mu_i \to \int_T f\,d\mu \quad \text{für alle } f \in C(T). \tag{13}$$

Satz 2.4 *$W(T)$ ist eine w^*-kompakte Teilmenge von $M_{reg}(T)$.*

Beweis. Sei $(\mu_i)_{i\in I}$ ein Netz in $W(T)$ mit $\mu_i \overset{w^*}{\to} \mu \in M_{reg}(T)$. Nach der letzten Bemerkung ist dies genau dann der Fall, wenn

$$\int_T f\,d\mu_i \to \int_T f\,d\mu \text{ für alle } f \in C(T).$$

Für $f = \mathbb{1}_T$ folgt klarerweise $\int_T \mathbb{1}_T\,d\mu = 1$ und somit $\mu(T) = 1$. Ist f stetig und nichtnegativ, dann gilt $\int_T f\,d\mu_i \geq 0$ für alle $i \in I$. Der Grenzwert $\int_T f\,d\mu$ dieses Netzes muss dann auch eine nichtnegative Zahl sein. Aus (11) folgt $\mu \in W(T)$. Also ist $W(T)$ eine w^*-abgeschlossene Teilmenge von $M_{reg}(T)$.
Da die Totalvariation jedes $\mu \in W(T)$ eins beträgt, ist $W(T)$ mithilfe der *Riesz-Markov-*Identifikation Φ (siehe *Satz* 2.1) eine Teilmenge der Einheitskugel in $C(T)'$ bezüglich der Operatornorm. Die Einheitskugel ist nach dem Satz von *Banach-Alaoglu* w^*-kompakt, womit das Urbild bezüglich Φ auch kompakt in $M_{reg}(T)$ sein muss. Als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist $W(T)$ ein w^*-kompakter topologischer Raum. □

Lemma 2.5 *Die Funktion $\psi : T \to W(T)$, die jedem $x \in T$ das Punktmaß δ_x zuordnet, ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild.*

Beweis. Das Punktmaß entspricht gemäß *Satz* 2.1 dem Funktional

$$\Phi(\delta_x) = \big(f \mapsto \int_T f\,d\delta_x\big) = \big(f \mapsto f(x)\big), \quad f \in C(T).$$

Nach *Satz* 1.2.1 in [F] ist $x \mapsto \big(f \mapsto f(x)\big)$ stetig, wenn $\iota(g) \circ \Big(x \mapsto \big(f \mapsto f(x)\big)\Big)$ für alle $g \in C(T)$ stetig ist. Wegen

$$\iota(g) \circ \Big(x \mapsto \big(f \mapsto f(x)\big)\Big)(x) = \iota(g)(f \mapsto f(x)) = g(x)$$

ist dies stets erfüllt. Infolge ist auch $\psi = \Phi^{-1} \circ \Big(x \mapsto (f \mapsto \int_T f\,d\delta_x)\Big)$ stetig. Aus der Kompaktheit von T folgt mit *Lemma* 1.5 die Homöomorphie von $\psi : T \to \psi(T)$.
□

Insbesondere ist T in $W(T)$ eingebettet und wir können T als Teilmenge von $W(T)$ betrachten.

Definition 2.6 *Sei $\phi : T \to \mathbb{C}$ eine messbare, beschränkte Funktion. Dann definieren wir*

$$\hat{\phi}(\mu) := \int_T \phi \, d\mu, \quad \mu \in W(T).$$

Bemerkung. Aus der Linearität des Integrals im Maß folgt für eine Konvexkombination $\alpha\mu + (1-\alpha)\nu$ in $W(T)$, $\alpha \in (0,1)$, dass

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\alpha\mu + (1-\alpha)\nu) &= \int_T \phi \, d(\alpha\mu + (1-\alpha)\nu) = \alpha \int_T \phi \, d\mu + (1-\alpha) \int_T \phi \, d\nu \\ &= \alpha\hat{\phi}(\mu) + (1-\alpha)\hat{\phi}(\nu).\end{aligned}$$

Für $\mu \in W(T)$ erhalten wir $\hat{\mathbb{1}_T}(\mu) = \int_T 1 \, d\mu = 1$ und daher $\hat{\mathbb{1}_T} = \mathbb{1}_{W(T)}$. Für die Funktion ψ aus dem letzten Lemma gilt $\hat{\phi} \circ \psi = \phi$.

Satz 2.7 *Für ein stetiges ϕ ist auch $\hat{\phi}$ stetig. Dabei ist $\hat{\cdot}$ eine Isometrie von $C(T)$ nach $C(W(T))$, wenn beide Räume mit der Supremumsnorm versehen sind.*

Beweis. Für ein Netz $\mu_i \in W(T)$ mit $\mu_i \overset{w^*}{\to} \mu$ folgt aus (13)

$$\hat{\phi}(\mu_i) = \int_T \phi \, d\mu_i \to \int_T \phi \, d\mu = \hat{\phi}(\mu),$$

was die Stetigkeit von $\hat{\phi}$ nach sich zieht. Wegen

$$\sup_{\mu \in W(T)} |\hat{\phi}(\mu)| = \sup_{\mu \in W(T)} |\int_T \phi \, d\mu| \leq \sup_{x \in T} |\phi(x)| \quad \textit{und} \quad \hat{\phi}(\delta_x) = \phi(x)$$

ist die Abbildung $\hat{\cdot} : C(T) \to C(W(T))$ eine Isometrie, wenn man beide Räume mit der Supremumsnorm versieht.

□

Definition 2.8 *Sei P_0 die Menge aller konstanten Funktionen von $W(T)$ nach $\mathbb{C}$ und P_n die lineare Hülle in $C(W(T))$ aller Funktionen der Form*

$$\prod_{j=1}^{n} \hat{\phi}_j, \tag{14}$$

wobei $\phi_j \in C(T)$. Zudem setzen wir

$$P_\infty := \bigcup_{k=0}^{\infty} P_n \ \ (\subseteq C(W(T))). \tag{15}$$

Bemerkung. Wegen $\hat{\mathbb{1}_T} = \mathbb{1}_{W(T)}$, kann man in (14) beliebig oft $\mathbb{1}_{W(T)}$ dazu multiplizieren und erhält $P_n \subseteq P_{n+1}$.

Satz 2.9 *P_∞ ist eine nirgends identisch verschwindende, punktetrennende Algebra von Funktionen und liegt somit dicht in $C(W(T))$.*

Beweis. Nach Konstruktion ist P_∞ ein Untervektorraum, der bezüglich der punktweisen Multiplikation abgeschlossen ist.
Damit ist P_∞ eine Algebra von Funktionen, die wegen $\mathbb{1}_{W(T)} \in P_\infty$ nirgends identisch verschwindend ist. Sind $\mu_1, \mu_2 \in W(T)$ mit $\mu_1 \neq \mu_2$, dann sind die durch die *Riesz-Markov*-Identifikation gegebenen Funktionale $f \mapsto \int_T f\, d\mu_1$ und $f \mapsto \int_T f\, d\mu_2$ auch verschieden. Demnach gibt es ein $g \in C(T)$ mit

$$\hat{g}(\mu_1) = \int_T g\, d\mu_1 \neq \int_T g\, d\mu_2 = \hat{g}(\mu_2),$$

wodurch P_∞ punktetrennend ist. Aus dem Satz von *Stone-Weierstrass* folgt, dass P_∞ dicht in $C(W(T))$ bezüglich der Supremumsnorm liegt. $\square$

Beispiel 1: Im Fall $T = \{0, 1\}$ gilt

$$W(T) = \{\mu \in M_{reg}(T) : \mu \geq 0, \mu(\{0\}) + \mu(\{1\}) = 1\} = \{c_0\delta_0 + c_1\delta_1 : c_0 + c_1 = 1,\ c_i \geq 0\}.$$

Identifiziert man δ_0 mit 0 und δ_1 mit 1, dann entspricht die obige Menge genau dem Intervall $[0, 1]$. Genauso erhält man für $T = \{0, 1, 2\}$

$$W(T) = \{c_0\delta_0 + c_1\delta_1 + c_2\delta_2 : c_0 + c_1 + c_2 = 1,\ c_i \geq 0\}.$$

Identifiziert man $\delta_0 \cong \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\delta_1 \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\delta_2 \cong \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$, dann entspricht die obige Menge genau der konvexen Hülle von $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, also das von den 3 Punkten aufgespannte Dreieck, da die c_i genau die Bedingungen für die Koeffizienten einer Konvexkombination erfüllen.
Mit denselben Überlegungen entspricht $W(T)$ für $T = \{0, \dots, n\}$ der konvexen Hülle der kanonischen Einheitsbasis mit 0 in $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 2: Sei $\mathbb{N}$ mit der diskreten Topologie, also der Potenzmenge, versehen und sei $T = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die Alexandroff-Kompaktifizierung gemäß *Satz* 13.1.1 in [ANA3]. Da die kompakten Mengen von $\mathbb{N}$ genau die endlichen Mengen sind, ist der Umgebungsfilter von $\{\infty\}$ gegeben durch

$$\{\{\infty\} \cup N : N^c \textit{ ist endlich, } N \subseteq \mathbb{N}\}.$$

Wir setzen

$$K_1^+ := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}) : \sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq 1\} \cap [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$$

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus diesem Raum entspricht einem $\mu_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} \in W(T)$ mit $\mu_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}(\{n\}) = x_n$ und $\mu_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}(\{\infty\}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Ist umgekehrt μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, dann

ist $(\mu(\{n\}))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K_1^+. Mit $\beta : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \mu_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ besteht also ein bijektiver Zusammenhang zwischen K_1^+ und $W(T)$.
Für ein beschränktes $\phi : T \to \mathbb{C}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\mu_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}) = \int_T \phi \, d\mu_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} &= \phi(\infty)(1 - \sum_{n=1}^{\infty} x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \phi(n) x_n \\ &= \phi(\infty) + \sum_{n=1}^{\infty} (\phi(n) - \phi(\infty)) x_n. \end{aligned} \tag{16}$$

Ist ϕ stetig, dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung U von ∞ mit

$$\phi(U) \subseteq U_\epsilon^{\mathbb{C}}(\phi(\infty)).$$

Da jede Umgebung von ∞ alle bis auf endlich viele Elemente von $\mathbb{N}$ enthält, gilt

$$\phi(n) \in U_\epsilon^{\mathbb{C}}(\phi(\infty))$$

für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$, woraus $\lim_{n\to\infty} \phi(n) = \phi(\infty)$ folgt.
Gilt umgekehrt $\lim_{n\to\infty} \phi(n) = \phi(\infty)$, dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\phi(n) \in U_\epsilon^{\mathbb{C}}(\phi(\infty))$ für alle $n \geq n_0$. Die Menge

$$D := \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\} \cup \{\infty\}$$

ist eine Umgebung von ∞ mit $\phi(D) \subseteq U_\epsilon^{\mathbb{C}}(\phi(\infty))$. Das zeigt die Stetigkeit von ϕ bei ∞. Da $\{n\}$ eine Umgebung von n und folglich $\phi(\{n\})$ in jeder Umgebung von $\phi(n)$ enthalten ist, ist ϕ stetig bei n. Wir erhalten, dass

$$\phi \textit{ genau dann stetig ist, wenn } \lim_{n\to\infty} \phi(n) = \phi(\infty). \tag{17}$$

//

Bekanntlich ist $\ell^1(\mathbb{N}) = \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty\}$ mit der Abbildung $\psi : \ell^1(\mathbb{N}) \to c_0(\mathbb{N})'$, die einer Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ das Funktional

$$\psi((z_n)_{n\in\mathbb{N}})(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n =: < (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} > \tag{18}$$

zuordnet, isometrisch isomorph zum topologischen Dualraum von $c_0(\mathbb{N})$, dem Raum aller komplexwertigen Nullfolgen. Versieht man $c_0(\mathbb{N})'$ mit der w^*-Topologie, dann induziert ψ ähnlich wie bei der Konstruktion des topologischen Raumes $(M_{reg}(T), w^*)$, eine Topologie auf $\ell^1(\mathbb{N})$. Wir bezeichnen beide Topologien mit $w^*_{c_0'}$. Es sollte aus dem Kontext klar sein welche gemeint ist.
Wir betrachten wieder den topologischen Raum $T = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ aus *Beispiel* 2 und konstruieren daraus den w^*-topologisierten Raum $(W(T), \mathcal{O})$; vgl. (10). Wir haben vorher mit $\beta : x \mapsto \mu_x$ einen bijektiven Zusammenhang zwischen K_1^+ und $W(T)$ festgestellt. Wir werden in *Satz* 2.11 zeigen, dass $\beta : (K_1^+, w^*_{c_0'}|_{K_1^+}) \to (W(T), \mathcal{O})$ ein Homöomorphismus ist.

Lemma 2.10 *$(K_1^+, w^*_{c_0'}|_{K_1^+})$ ist kompakt und konvex. Dasselbe gilt auch für die Menge $K_1^{+,m} := \{\alpha \in K_1^+ : \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots\}$.*

Beweis. Die Konvexität lässt sich elementar nachprüfen. Die Menge K_1^+ kann als eine Teilmenge in der abgeschlossenen Einheitskugel in $c_0(\mathbb{N})'$, welche nach *Banach-Alaoglu* $w^*_{c_0'}$-kompakt ist, identifiziert werden. Es reicht daher die Abgeschlossenheit von K_1^+ bezüglich $w^*_{c_0'}$ nachzuprüfen. Sei dazu $(x(i)_{i\in I})$ ein Netz in K_1^+, das bezüglich $w^*_{c_0'}$ gegen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ konvergiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\lim_{i\in I}\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n(i) - \sum_{j=1}^{\infty} y_n x_n = \lim_{i\in I}\sum_{j=n}^{\infty} y_n(x_n(i) - x_n) = 0 \quad \textit{für alle } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N}), \tag{19}$$

da die initiale Topologie über alle Auswertungsfunktionale $\iota((y_n)_{n\in\mathbb{N}})$ gebildet wird.
Für die Folge $(\delta_{j,n})_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$ erhalten wir daher

$$0 = \lim_{i\in I}\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{j,n}(x_n(i) - x_n) = \lim_{i\in I}(x_j(i) - x_j) \ \textit{bzw.}\ \lim_{i\in I} x_j(i) = x_j \ \textit{für alle } j \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Somit gilt $x_j \geq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wäre $\sum_{n=1}^{\infty} x_n > 1$, dann gäbe es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=1}^{N} x_n > 1$. Mit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sum_{j=1}^{N} \delta_{jn})_{n\in\mathbb{N}}$ hätten wir wegen

$$0 = \lim_{i\in I}\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x_n(i) - x_n) = \lim_{i\in I}\sum_{n=1}^{N}(x_n(i) - x_n)$$

einen Widerspruch zu $\sum_{n=1}^{N} x_n(i) \leq 1$ für alle $i \in I$. Das zeigt $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq 1$ und somit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K_1^+$.
Ist $(x(i))_{i\in I}$ ein Netz in $K_1^{+,m}$ mit $\lim\limits_{i\in I} x(i) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so folgt wegen $x_n(i) \geq x_{n+1}(i)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aus (20)

$$x_n = \lim_{i\in I} x_n(i) \geq \lim_{i\in I} x_{n+1}(i) = x_{n+1} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und daher $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K_1^{+,m}$.

□

Satz 2.11 *Die Abbildung $\beta : (K_1^+, w^*_{c_0'}|_{K_1^+}) \to (W(T), \mathcal{O}) : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \mu_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Da die Topologie $\mathcal{O}$ auf $W(T)$ die initiale Topologie von den Auswertungsfunktionalen in (9) ist, ist $\beta : x \mapsto \mu_x$ nach *Satz* 12.5.1 in [ANA2] genau dann stetig, wenn die Abbildung

$$\begin{aligned}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \int\limits_{\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \phi \, d\mu_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} &= \phi(\infty) + \sum_{n=1}^{\infty}(\phi(n) - \phi(\infty))x_n \\ &= \phi(\infty) + < (\phi(n) - \phi(\infty))_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} >\end{aligned}$$

für jedes $\phi \in C(\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ stetig ist. Für $\phi \in C(\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ sind $(\phi(n) - \phi(\infty))_{n\in\mathbb{N}}$ nach (17) genau die Nullfolgen in $c_0(\mathbb{N})$. Die Auswertungsfunktionale $\iota((y_n)_{n\in\mathbb{N}})$ sind per definitionem von $w^*_{c_0}$ für alle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$ stetig. Der Ausdruck $< (\phi(n) - \phi(\infty))_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} >$ entspricht dem Auswerten des Funktionals $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}) \cong c_0(\mathbb{N})'$ an der Stelle $(\phi(n) - \phi(\infty))_{n\in\mathbb{N}}$; vgl. (18). Daraus folgt die Stetigkeit von
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \phi(\infty) + < (\phi(n) - \phi(\infty))_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} >$ und infolge die von β. Nach *Lemma* 1.5 und dem letzten Lemma ist β ein Homöomorphismus.

$\square$

Folgende Mengen sind dicht in K_1^+ bzw. $K_1^{+,m}$ enthalten.

Satz 2.12 *Die Menge*

$$K_1^{+,f} := \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K_1^+ : \|(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = 1, z_{N+1} = z_{N+2} = \cdots = 0 \text{ für ein } N \in \mathbb{N}\}$$

ist konvex und liegt dicht in K_1^+ und $K_1^{+,m,f} := K_1^{+,f} \cap K_1^{+,m}$ liegt dicht in $K_1^{+,m}$, jeweils bezüglich der w^*-Topologie.

Beweis. Sind $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K_1^{+,f}$ und $\alpha \in [0,1]$, so erhalten wir

$$\|\alpha(y_n)_{n\in\mathbb{N}} + (1-\alpha)(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha y_n + (1-\alpha) z_n| = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} y_n + (1-\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} z_n = 1.$$

Klarerweise verschwinden auch alle bis auf endlich viele Einträge von
$\alpha(y_n)_{n\in\mathbb{N}} + (1-\alpha)(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, womit $K_1^{+,f}$ eine konvexe Teilmenge von $\ell^1(\mathbb{N})$ ist.
Für $f \in (\ell^1(\mathbb{N}), w^*_{c_0'})'$, gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$ mit (siehe *Satz* 3.2 im Anhang)

$$f((z_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n \text{ für alle } (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}).$$

Gilt $Ref(K_1^{+,f}) \subseteq (-\infty, \gamma]$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$ und ist $0 \neq (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K_1^+$, dann folgt

$$\begin{aligned} Ref((z_n)_{n\in\mathbb{N}}) = Re \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n = \lim_{N\to\infty} Re\Big(\frac{1}{\sum_{n=1}^{N} z_n} \sum_{n=1}^{N} x_n z_n\Big) = \\ \lim_{N\to\infty} Ref\Big(\frac{1}{\sum_{n=1}^{N} z_n}(z_1, \ldots, z_N, 0, \ldots)\Big) \leq \gamma, \end{aligned}$$

und daher $K_1^+ \backslash \{0\} \subseteq (Ref)^{-1}(-\infty, \gamma]$. Da der Abschluss der konvexen Menge $K_1^{+,f}$ nach *Korollar* 5.2.6 in [F] mit dem Schnitt aller $K_1^{+,f}$ enthaltenden Halbräume $(Ref)^{-1}(-\infty, \gamma]$, wobei $f \in \ell^1(\mathbb{N})'$, $\gamma \in \mathbb{R}$ laufen, übereinstimmt, erhalten wir

$$K_1^+ \backslash \{0\} \subseteq \bigcap_{\substack{f \in \ell^1(\mathbb{N})', \gamma \in \mathbb{R} \\ K_1^{+,f} \subseteq (Ref)^{-1}(-\infty,\gamma]}} (Ref)^{-1}(-\infty, \gamma] = \overline{K_1^{+,f}}^{w^*}$$

Die Folge $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\ell^1(\mathbb{N})$ mit $e_k := (\delta_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich der w^*-Topologie gegen 0, denn die zugehörigen Funktionale $\psi(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $c_0(\mathbb{N})'$ konvergieren gemäß *Satz*

1.2.3 in [F] genau dann gegen 0, wenn $\iota((x_n)_{n\in\mathbb{N}})(\psi(e_k))$ für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$ gegen 0 konvergiert. Es gilt

$$\iota((x_n)_{n\in\mathbb{N}})(\psi(e_k)) = \iota((x_n)_{n\in\mathbb{N}})((y_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} y_n \delta_{kn}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \delta_{kn} = x_k \overset{k\to\infty}{\to} 0$$

für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$. Somit liegt 0 im w^*-Abschluss von $K_1^+ \backslash \{0\}$ und wir erhalten

$$K_1^+ \subseteq \overline{K_1^+ \backslash \{0\}}^{w^*} \subseteq \overline{K_1^{+,f}}^{w^*} \subseteq K_1^+.$$

In einer ähnlicher Weise ergibt sich für die zweite Aussage

$$K_1^{+,m} \backslash \{0\} \subseteq \bigcap_{\substack{f\in\ell^1(\mathbb{N})', \gamma\in\mathbb{R} \\ K_1^{+,m,f} \subseteq (Ref)^{-1}(-\infty,\gamma]}} (Ref)^{-1}(-\infty, \gamma] = \overline{K_1^{+,m,f}}^{w^*}.$$

Die Folge $\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} e_n$ liegt in $K_1^{+,m,f}$. Nach *Lemma* 15.32 in [K] konvergieren die Mittel einer konvergenten Folge gegen denselben Grenzwert. Wir erhalten

$$\iota((x_n)_{n\in\mathbb{N}})(\psi(\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} e_n)) = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} x_n \overset{k\to\infty}{\to} 0$$

für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$ und daher wegen der Abgeschlossenheit von $K_1^{+,m}$

$$K_1^{+,m} \subseteq \overline{K_1^{+,m} \backslash \{0\}}^{w^*} \subseteq \overline{K_1^{+,m,f}}^{w^*} \subseteq K_1^{+,m}.$$

□

Lemma 2.13 *Die Abbildung* $t_k : \ell^1(\mathbb{N}) \to \mathbb{C} : t_k(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^k$ *für* $k \in \mathbb{N}, k > 1$ *und* $t_1(\alpha) = 1$ *ist stetig auf* $K_1^{+,m} := \{\alpha \in K_1^+ : \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots\}$ *versehen mit der soeben eingeführten Topologie auf* K_1^+.

Beweis. Wegen (20) folgt aus der Konvergenz eines Netzes in K_1^+ die Konvergenz in den einzelnen Komponenten. Insbesondere sind die Projektionen $\pi_j : x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto x_j$ stetig. Infolge sind die Funktionen $t_k^N(x) = \sum_{n=1}^{N} x_n^k$ als Zusammensetzung von stetigen Funktionen für alle $N \in \mathbb{N}$ stetig. Wäre für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K_1^{+,m}$ und einem $n \in \mathbb{N}$ eine Komponente $x_n > \frac{1}{n}$, dann folgt aus der Monotonie und Nichtnegativität von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \geq \sum_{k=1}^{n} x_n > n\frac{1}{n} = 1,$$

im Widerspruch zu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq 1$. Also gilt

$$x_n \leq \frac{1}{n} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit erhalten wir für $k > 1$

$$|t_k(x) - t_k^N(x)| = \Big| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k - \sum_{n=1}^{N} x_n^k \Big| = \sum_{n=N+1}^{\infty} x_n^k \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \xrightarrow{N\to\infty} 0 \quad \textit{für alle } x \in K_1^{+,m}.$$

Dies zeigt die gleichmäßige Konvergenz von t_k^N gegen t_k für $N \to \infty$. Als gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Funktionen ist t_k stetig auf $K_1^{+,m}$. Für $t_1 = 1$ ist nichts zu beweisen.

□

Wir wiederholen einige Begriffe aus der Maßtheorie.

Definition 2.14 *Für eine Familie von Messräumen $(\Omega_i, \mathfrak{S}_i)_{i\in I}$ ist auf dem Produktraum $\prod_{i\in I} \Omega_i$ die Produkt-σ-Algebra $\prod_{i\in I} \mathfrak{S}_i$ als die kleinste σ-Algebra, bezüglich der alle Projektionen $\pi_j : \prod_{i\in I} \Omega_i \to \Omega_j$ messbar sind, definiert.*

Damit die Projektionen messbar sind, muss die Produkt-σ-Algebra auf jeden Fall $\pi_i^{-1}(\mathfrak{S}_i)$ für alle $i \in I$ enthalten. Die kleinste Sigmaalgebra, die alle diese Urbilder enthält, ist die von den Urbildern erzeugte Sigmaalgebra. Es gilt also

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{S}_i = \mathfrak{A}_\sigma\Big(\bigcup_{i\in I} \pi^{-1}(\mathfrak{S}_i)\Big).$$

Die endlichen Schnitte von den Urbilder von π_j haben einen besonderen Namen:

Definition 2.15 *Ist $(\Omega_i, \mathfrak{S}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Messräumen, dann nennen wir Z einen Pfeiler, wenn es eine endliche Teilmenge $J \neq \emptyset$ von I gibt, sodass*

$$Z = \prod_{j\in J} A_j \times \prod_{i\in I\setminus J} \Omega_i \ \textit{ mit } A_j \in \mathfrak{S}_j.$$

Nach *Lemma* 10.14 in [K] bildet das System der messbaren Pfeiler einen Semiring auf dem Produktraum $\prod_{i\in I} \Omega_i$. Aus der Maßtheorie ist bekannt, dass sich jedes σ-endliche Maß auf einem Semiring in eindeutiger Weise zu einem Maß, der auf der vom Semiring erzeugten σ-Algebra definiert ist, fortsetzen lässt. Insbesondere ist ein endliches Maß auf dem Produktraum bereits auf dem Mengensystem der Pfeiler eindeutig bestimmt.

Definition 2.16 *Ist $(\Omega_i, \mathfrak{S}_i, \mu_i)_{i\in I}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsräumen, dann bezeichnet $\bigtimes_{i\in I} \mu_i$ das Produktmaß auf dem Produktraum, welches auf den Pfeilern durch*

$$\bigtimes_{i\in I} \mu_i \,(\prod_{j\in J} A_j \times \prod_{i\in I\setminus J} \Omega_i) := \bigtimes_{j\in J} \mu_j \,(\prod_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} \mu_j(A_j) \tag{21}$$

gegeben ist, wobei die rechte Seite das endliche Produktmaß der Maße μ_j, $j \in J$ darstellt. Mit $\mu \times \nu$ bezeichnen wir das übliche Produkt zweier Maße. Gilt $\mu_i = \mu$ für alle $i \in I$, so schreiben wir

$$\mu^I := \bigtimes_{i\in I} \mu.$$

Für $I = \{1, \ldots, N\}$ bzw. $J = \{n \in \mathbb{N} : n > N\}$ schreiben wir

$$\mu^N := \bigtimes_{i\in I} \mu \quad \textit{bzw.} \quad \mu^{n>N} := \bigtimes_{j\in J} \mu.$$

Satz 9.6 in [G] besagt, dass die in (21) definierte Mengenfunktion tatsächlich ein Maß auf dem Mengensystem der Pfeiler ist und rechtfertigt damit unsere Definition des Produktmaßes.

Satz 2.17 *Ist* $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und betrachtet man den Folgenraum* $(\prod_{n\in\mathbb{N}} \Omega, \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{S}, \bigtimes_{n\in\mathbb{N}} \mu)$ *als Produktraum mit dem in Definition 2.8 gegebenen Produktmaß, so gilt für jedes* $N \in \mathbb{N}$

$$\mu^{\mathbb{N}} = \mu^N \times \mu^{n>N}. \tag{22}$$

Beweis. Wegen $\prod_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = (\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N) \times \prod_{n>N} \Omega_n$ und *Satz* 10.3 in [K] stimmt die Produkt-σ-Algebra der beiden σ-Algebren $\prod_{n=1}^N \mathfrak{S}$ und $\prod_{n>N} \mathfrak{S}$ mit $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{S}$ überein. Damit sind die beiden Maße in (22) auf derselben σ-Algebra definiert. Um die Gleichheit nachzuweisen, genügt es, die Gleichheit für jeden Pfeiler nachzuprüfen. Ist $Z = \prod_{j\in J} A_j \times \prod_{i\in\mathbb{N}\setminus J} \Omega$ ein Pfeiler, dann gilt per definitionem

$$\mu^{\mathbb{N}}(Z) = \mu^{\mathbb{N}}(\prod_{j\in J} A_j \times \prod_{i\in\mathbb{N}\setminus J} \Omega) = \prod_{j\in J} \mu(A_j).$$

Andererseits gilt mit der Definition $\left(\prod_{j\in\emptyset} B_j\right) \times C := C$

$$\begin{aligned}
(\mu^N \times \mu^{n>N})(Z) &= \mu^N \times \mu^{n>N}(\prod_{\substack{j\le N\\ j\in J}} A_j \times \prod_{\substack{j\le N\\ j\notin J}} \Omega \times \prod_{\substack{j>N\\ j\in J}} A_j \times \prod_{\substack{j>N\\ j\notin J}} \Omega) \\
&= \mu^N(\prod_{\substack{j\le N\\ j\in J}} A_j \times \prod_{\substack{j\le N\\ j\notin J}} \Omega)\mu^{n>N}(\prod_{\substack{j>N\\ j\in J}} A_j \times \prod_{\substack{j>N\\ j\notin J}} \Omega)) \\
&= \prod_{\substack{j\le N\\ j\in J}} \mu(A_j) \prod_{\substack{j>N\\ j\in J}} \mu(A_j) = \prod_{j\in J} \mu(A_j).
\end{aligned}$$

□

Wir können nun folgenden Operator $B_\alpha : C(W(T)) \to C(W(T))$ definieren.

Definition 2.18 *Für* $\alpha \in K_1^+$, $f \in C(W(T))$, $\mu \in W(T)$ *definieren wir*

$$B_\alpha(f)(\mu) := \int_{T^{\mathbb{N}}} f(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \delta_{x_j} + (1 - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j)\mu)\, d\mu^{\mathbb{N}}(x). \tag{23}$$

Wir wenden uns der Wohldefiniertheit dieser Funktion zu. Man kann ganz elementar zeigen, dass das Argument von f für jedes $\mu \in W(T)$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Die Projektionen $\pi_j : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto x_j$ sind definitionsgemäß messbar. Die Abbildung $x_j \mapsto \alpha_j \delta_{x_j}$ ist nach *Lemma* 2.5 stetig. Somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{x_j} + (1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j)\mu$ als Zusammensetzung von messbaren Funktionen messbar und folglich ist

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto f(\sum_{j=1}^N \alpha_j\delta_{x_j} + (1-\sum_{j=1}^N \alpha_j)\mu)$ auch messbar. Mithilfe von (13) zeigt man leicht, dass für $\nu_N := \sum_{j=1}^{N} \alpha_j\delta_{x_j} + (1-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j)\mu$,

$$\lim_{N\to\infty} \nu_N = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\delta_{x_j} + (1-\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j)\mu$$

in $W(T)$ gilt. Aus der Stetigkeit von f folgt $\lim\limits_{N\to\infty} f(\nu_N) = f(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\delta_{x_j} + (1-\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j)\mu)$. Somit ist der Integrand in (23) als Grenzfunktion von messbaren Funktionen messbar. Wegen der Kompaktheit von $W(T)$ ist f beschränkt. Die Integrierbarkeit folgt nun aus

$$\int_{T^{\mathbb{N}}} |f(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\delta_{x_j} + (1-\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j)\mu)|\, d\mu^{\mathbb{N}}(x) \leq \|f\|_\infty \int_{T^{\mathbb{N}}} d\mu^{\mathbb{N}} = \|f\|_\infty < +\infty.$$

An der obigen Ungleichung erkennt man auch, dass $\|B_\alpha(f)\|_\infty$ durch $\|f\|_\infty$ beschränkt ist, wodurch der Operator $B_\alpha : C(W(T)) \to \mathcal{B}(W(T),\mathbb{C})$ beschränkt ist mit $\|B_\alpha\| \leq 1$. Wegen $B_\alpha(\mathbb{1}_{W(T)}) = \mathbb{1}_{W(T)}$ gilt $\|B_\alpha\| = 1$. Dabei ist $\mathcal{B}(W(T),\mathbb{C})$ die Menge aller beschränkten Funktionen auf $W(T)$. Was noch übrig bleibt, ist die Verifizierung der Tatsache, dass $B_\alpha(f)$ stetig ist. Diese ergibt sich aus dem folgenden Satz. Davor bringen wir noch ein Lemma.

Lemma 2.19 *Für $h_1,\ldots,h_r \in C(T)$, $z\in\mathbb{C}$ und $f(\mu) = \exp(z_1\hat{h}_1(\mu)+\cdots+z_r\hat{h}_r(\mu))$ gilt $B_\alpha(f) = \sum\limits_{m\in\mathbb{N}_0^r} \frac{z^m}{m!} B_\alpha(\hat{h}_1^{\,m_1}\cdots\hat{h}_r^{\,m_r})$*

Beweis. Es gilt $f(\mu) = \sum\limits_{m\in\mathbb{N}_0^r} \frac{z^m}{m!}\prod\limits_{k=1}^{r}\hat{h}_k(\mu)^{m_k}$; vgl. *Lemma* 1.15. Nach *Satz* 2.7 ist $\hat{h}_i$ stetig. Setzen wir $c_i = \left\|\hat{h}_i\right\|_\infty$ und $c=(c_1,\ldots,c_r)\in\mathbb{R}^r$, dann konvergiert f wegen

$$\Big|\frac{z^m}{m!}\prod_{k=1}^{r}\hat{h}_k(\mu)^{m_k}\Big| \leq \frac{|(c_1z_1,\ldots,c_rz_r)^m|}{m!}$$

mit $\sum\limits_{m\in\mathbb{N}_0^r}\frac{|(c_1z_1,\ldots,c_rz_r)^m|}{m!} = \prod\limits_{k=1}^{r}\exp(c_k|z_k|)$ für alle $z\in\mathbb{C}^r$ absolut als Funktionenreihe in μ und daher auch gleichmäßig. Das heißt, mit $g_A(\mu) = \sum\limits_{m\in A}\frac{z^m}{m!}\prod\limits_{k=1}^{r}\hat{h}_k(\mu)^{m_k}$ gilt $\lim\limits_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N}_0^r)} g_A = f$ in $\big(C(W(T)),\|.\|_\infty\big)$.
Aus der Beschränktheit von B_α folgt

$$B_\alpha(f) = \lim_{A\in\mathcal{E}(\mathbb{N}_0^r)} B_\alpha(g_A) = \sum_{m\in\mathbb{N}_0^r}\frac{z^m}{m!}B_\alpha(\prod_{k=1}^{r}\hat{h}_k^{\,m_k}). \tag{24}$$

□

Satz 2.20 *Es gelten folgende Aussagen.*

- *Für jede Funktionen $f \in C(W(T))$ ist $B_\alpha(f) \in C(W(T))$.*
- *Die Abbildung $\alpha \mapsto B_\alpha$ von $K_1^{+,m}$, versehen mit der Topologie in Lemma 2.13, nach $L_b(C(W(T)))$, versehen mit der starken Operatortopologie, ist stetig.*

Beweis. Wegen $|f(\sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{x_j} + (1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j)\mu)| \leq \|f\|_\infty$ für alle $N \in \mathbb{N}$ erhalten wir mit dem *Satz von Lebesgue* und *Satz* 2.17

$$B_\alpha(f)(\mu) = \lim_{N\to\infty} \int_{T^{\mathbb{N}}} f(\sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{x_j} + (1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j)\mu)\, d\mu^{\mathbb{N}}(x) =$$

$$\lim_{N\to\infty} \int_{T^N \times T^{n>N}} f(\sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{x_j} + (1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j)\mu)\, d(\mu^N \times \mu^{n>N}).$$

Damit schließen wir mit dem *Satz von Fubini* auf

$$B_\alpha(f)(\mu) = \lim_{N\to\infty} \int_{T^N} f(\sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{x_j} + (1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j)\mu)\, d\mu^N(x). \tag{25}$$

Für $h_1, \dots, h_r \in C(T)$, $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$ und $f(\mu) = \exp(z_1 \hat{h}_1(\mu) + \cdots + z_r \hat{h}_r(\mu))$ ergibt sich aus der Linearität der $\hat{h}_i$ bei Konvexkombinationen

$$\begin{aligned} f(\sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{x_j} + (1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j)\mu) &= \exp(\sum_{k=1}^r z_k \hat{h}_k(\sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{x_j} + (1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j)\mu)) \\ &= \exp\Big(\sum_{j=1}^N \alpha_j \sum_{k=1}^r z_k h_k(x_j) + (1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j) \sum_{k=1}^r z_k \hat{h}_k(\mu)\Big) \\ &= \exp\Big((1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j) \sum_{k=1}^r z_k \hat{h}_k(\mu)\Big) \prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^r \exp(\alpha_j z_k h_k(x_j)). \end{aligned}$$

Aus der Beschränktheit von h_k folgt die Integrierbarkeit von $\prod_{k=1}^r \exp(\alpha z_k h_k(.))$ bezüglich μ. Da auch der Ausdruck $\prod_{k=1}^r \exp(|\alpha z_k h_k(.)|)$ bezüglich μ integrierbar ist, folgt mit Bemerkung 1.2 und dem *Satz von Fubini* ($m! = m_1! \cdots m_r!, m \in \mathbb{N}_0^r$)

$$\begin{aligned} \int_T \prod_{k=1}^r \exp(\alpha z_k h_k(x))\, d\mu(x) &= \int_T \prod_{k=1}^r \int_{\mathbb{N}_0} \frac{(\alpha z_k h_k(x))^m}{m!}\, d\zeta(m) d\mu(x) \\ &= \int_T \int_{\mathbb{N}_0} \cdots \int_{\mathbb{N}_0} \prod_{k=1}^r \frac{(\alpha z_k h_k(x))^{m_k}}{m_k!}\, d\zeta(m_1) \dots d\zeta(m_r) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{N}_0^r} \frac{\alpha^{|m|} z^m}{m!} (\int_T h_1^{m_1} \cdots h_r^{m_r}\, d\mu)\, d\zeta(m) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} \frac{\alpha^{|m|} z^m}{m!} (\widehat{h_1^{m_1} \cdots h_r^{m_r}})(\mu) \end{aligned} \tag{26}$$

und daher

$$\int_{T^N} f(\sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{x_j} + (1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j)\mu)\, d\mu^N(x) \tag{27}$$

$$= \exp\Big((1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j) \sum_{k=1}^r z_k \hat{h}_k(\mu)\Big) \int_{T^N} \prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^r \exp(\alpha_j z_k h_k(x_j))\, d\mu^N(x)$$

$$= \exp\Big((1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j) \sum_{k=1}^r z_k \hat{h}_k(\mu)\Big) \prod_{j=1}^N \int_T \prod_{k=1}^r \exp(\alpha_j z_k h_k(x_j))\, d\mu(x_j)$$

$$= \exp\Big((1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j) \sum_{k=1}^r z_k \hat{h}_k(\mu)\Big) \prod_{j=1}^N \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} \frac{(\alpha_j z)^m}{m!} (\widehat{h_1^{m_1} \cdots h_r^{m_r}})(\mu). \tag{28}$$

Die Potenzreihe in (26) konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}^r$ und ist stetig. Wir haben im ersten Kapitel eine Potenzreihendarstellung des komplexen Logarithmus auf $U_1(1)$ hergeleitet. Mit *Satz* 1.19 erhalten wir für alle w in einer gewissen Umgebung $U_\delta(0)$

$$log\Big(\sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} \frac{(\widehat{h_1^{m_1} \cdots h_r^{m_r}})(\mu)}{m!} w^m\Big) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} b(\mu)_m w^m, \tag{29}$$

wobei die Koeffizienten $b(\mu)_k$ gemäß (7) mit $A_k = \{M \in \mathbb{N}_0^{r \times n} : |e_i^T M| = k_i\}$ und *Satz* 1.13 eindeutig gegeben sind durch $b(\mu)_{(0,\ldots,0)^T} = 0$ und

$$b(\mu)_k = \sum_{n=1}^{|k|} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{M \in A_k \\ Md_j \neq 0 \\ j=1,\ldots,n}} \prod_{j=1}^n \frac{(\widehat{h_1^{m_1} \cdots h_r^{m_r}})(\mu)}{m!}\Big|_{m=Md_j} \quad \textit{für } k \neq (0,\ldots,0)^T. \tag{30}$$

Aus der Stetigkeit von $h_1, \ldots, h_r$ folgt, dass $b(\mu)_k$ stetig in μ ist. Für $z \in U_\delta(0)$ ist wegen $\alpha_j \leq 1$ auch $\alpha_j z \in U_\delta(0)$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wir betrachten für $z \in U_\delta(0)$ den Ausdruck

$$(1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j) \sum_{k=1}^r z_k \hat{h}_k(\mu) + \sum_{j=1}^N \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} b(\mu)_m (\alpha_j z)^m$$

$$= (1 - \sum_{j=1}^N \alpha_j) \sum_{k=1}^r z_k \hat{h}_k(\mu) + \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} b(\mu)_m z^m (\sum_{j=1}^N \alpha_j^{|m|}). \tag{31}$$

Die Koeffizienten $b(\mu)_k$ sind für die kanonischen Basisvektoren $e_j \in \mathbb{C}^r$ gemäß (30) gegeben durch

$$b(\mu)_{e_j} = \hat{h}_j(\mu).$$

Wir definieren t_k wie in *Lemma* 2.13 und setzen $\alpha\big|_N := (\alpha_1, \dots, \alpha_N, 0, \dots)$. Dann stimmt (31) überein mit

$$\begin{aligned}
&(1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j) \sum_{k=1}^{r} z_k \hat{h}_k(\mu) + \sum_{k=1}^{r} z_k \hat{h}_k(\mu)(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j) + \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0^r \\ |m| \neq 1}} b(\mu)_m z^m (\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^{|m|}) \\
&= \sum_{k=1}^{r} z_k \hat{h}_k(\mu) + \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}_0^r \\ |m| \neq 1}} b(\mu)_m z^m (\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^{|m|}) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} b(\mu)_m z^m t_{|m|}(\alpha\big|_N).
\end{aligned}$$

Wegen $\alpha_j \leq 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $|t_k(\alpha\big|_N)| \leq \|\alpha\|_1 \leq 1$ und infolge $|b(\mu)_m z^m t_{|m|}(\alpha\big|_N)| \leq |b(\mu)_m z^m|$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Somit ist $|b(\mu)_m z^m|$ eine konvergente Majorante. Nach dem *Satz von Lebesgue* gilt unter der Beachtung, dass $t_{|m|}$ wegen *Lemma* 2.13 stetig ist,

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} b(\mu)_m z^m t_{|m|}(\alpha\big|_N) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} b(\mu)_m z^m t_{|m|}(\alpha).$$

Wir erhalten wegen (29)

$$\begin{aligned}
\exp\Big(\sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} b(\mu)_m z^m t_{|m|}(\alpha\big|_N)\Big) &= \exp\Big((1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j) \sum_{k=1}^{r} z_k \hat{h}_k(\mu) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} b(\mu)_m (\alpha_j z)^m\Big) \\
&= \exp\Big((1 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j) \sum_{k=1}^{r} z_k \hat{h}_k(\mu)\Big) \prod_{j=1}^{N} \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} \frac{(\alpha_j z)^m}{m!} (\widehat{h_1^{m_1} \cdots h_r^{m_r}})(\mu),
\end{aligned}$$

was mit (28) übereinstimmt. Zusammen mit (25) und der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhalten wir für $N \to \infty$

$$B_\alpha(f)(\mu) = \exp\Big(\sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} b(\mu)_m z^m t_{|m|}(\alpha)\Big).$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Darstellung in *Lemma* 2.19, so erhält man

$$\exp\Big(\sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} b(\mu)_m t_{|m|}(\alpha) z^m\Big) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0^r} \frac{z^m}{m!} B_\alpha(\hat{h}_1^{m_1} \cdots \hat{h}_r^{m_r})(\mu)$$

Die obige Gleichung ist für alle $z \in U_\delta(0)$ gültig. Der Ausdruck auf der linken Seite ist wegen *Satz* 1.19 eine Potenzreihe, deren Koeffizienten wir mit Formel (7) explizit ausrechnen können. Aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten einer Potenzreihendarstellung folgt daher für den Koeffizient mit $m = (1, \dots, 1)^T$

$$\begin{aligned}
&B_\alpha(\hat{h}_1 \cdots \hat{h}_r)(\mu) \\
&= b(\mu)_{(1,\dots,1)^T} t_r(\alpha) + \frac{1}{2!} \sum_{m_1 + m_2 = (1,\dots,1)^T} b(\mu)_{m_1} b(\mu)_{m_2} t_{|m_1|}(\alpha) t_{|m_2|}(\alpha) + \dots
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{r!} \sum_{m_1+\cdots+m_r=(1,\ldots,1)^T} b(\mu)_{m_1} \cdots b(\mu)_{m_r} t_{|m_1|}(\alpha) \cdots t_{|m_r|}(\alpha), \tag{32}$$

wenn man bedenkt, dass die Mengen unter den obigen Summen genau die $A_{(1,\ldots,1)^T}$ aus Formel (7) für $n = 2, \ldots, r$ sind.
Da die $b(\mu)_m$ stetig in μ sind, erhalten wir aus der Darstellung (32) die Stetigkeit von $B_\alpha(\hat{h_1} \cdots \hat{h_r})$ in μ. Aus der Linearität von $B_\alpha(g)$ in g, folgt die Stetigkeit von $B_\alpha(g)$ für alle $g \in P_\infty$; vgl. (15). Somit gilt $B_\alpha(P_\infty) \subseteq C(W(T))$. Als beschränkter Operator ist $B_\alpha : C(W(T)) \to \mathcal{B}(W(T), \mathbb{C})$ stetig. Da P_∞ dicht in $C(W(T))$ liegt und $C(W(T))$ abgeschlossen ist, erhalten wir

$$B_\alpha(C(W(T))) = B_\alpha(\overline{P_\infty}) \subseteq \overline{B_\alpha(P_\infty)} \subseteq \overline{C(W(T))} = C(W(T)).$$

Das zeigt den ersten Punkt dieses Satzes und $B_\alpha \in L_b(C(W(T)))$.
Ein Netz $(T_i)_{i\in I}$ in $L_b(C(W(T)))$ konvergiert bezüglich der starken Operatortopologie genau dann gegen ein T, wenn (siehe *Beispiel* 5.1.10 in [F])

$$\|T_i(f) - T(f)\|_\infty \xrightarrow{i\in I} 0 \textit{ für alle } f \in C(W(T)).$$

Seien $\alpha_i, \alpha \in K_1^{+,m}$ mit $\lim_{i\in I} \alpha_i = \alpha$. Wir müssen $\lim_{i\in I} \|B_{\alpha_i}(f) - B_\alpha(f)\|_\infty = 0$ für alle $f \in C(W(T))$ nachweisen. Seien also $f \in C(W(T))$ und $g_N \in P_\infty$ mit $\lim_{N\to\infty} g_N = f$. Dann gilt wegen der Stetigkeit von B_α, B_{α_i} und der Norm

$$\|B_{\alpha_i}(f) - B_\alpha(f)\|_\infty = \lim_{N\to\infty} \|B_{\alpha_i}(g_N) - B_\alpha(g_N)\|_\infty .$$

Wir setzen $H(i,N) = \|B_{\alpha_i}(g_N) - B_\alpha(g_N)\|_\infty$, $h(i) = \|B_{\alpha_i}(f) - B_\alpha(f)\|_\infty$ und überprüfen die Voraussetzungen für *Lemma* 8.7.1 in [ANA2] mit $j = N$. Dazu ist zunächst die gleichmäßige Konvergenz von $H(i,N)$ gegen $h(i)$ in i nachzuweisen.
Es gilt

$$\begin{aligned} |H(i,N) - h(i)| &= \left| \|B_{\alpha_i}(g_N) - B_\alpha(g_N)\|_\infty - \|B_{\alpha_i}(f) - B_\alpha(f)\|_\infty \right| \\ &\leq \|B_{\alpha_i}(g_N) - B_\alpha(g_N) - (B_{\alpha_i}(f) - B_\alpha(f))\|_\infty \\ &\leq \|B_{\alpha_i}(g_N - f)\|_\infty + \|B_\alpha(f - g_N)\|_\infty \leq 2\|g_N - f\|_\infty . \end{aligned}$$

Also konvergiert $H(.,N)$ gleichmäßig gegen h. Wegen der Stetigkeit von t_k erkennt man an der Darstellung (32), dass $\lim_{i\in I} H(i,N) = \lim_{i\in I} \|B_{\alpha_i}(g_N) - B_\alpha(g_N)\|_\infty = 0$. Nach *Lemma* 8.7.1 in [ANA2] folgt

$$\lim_{i\in I} \|B_{\alpha_i}(f) - B_\alpha(f)\|_\infty = \lim_{i\in I} h(i) = \lim_{N\to\infty} \lim_{i\in I} H(i,N) = 0.$$

□

3 Anhang

Satz 3.1 *Ist* $f \in (\ell^1(\mathbb{N}), w^*_{c_0'})'$*, dann ist* f *von der Form*

$$f((z_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n$$

mit einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$*.*

Beweis. Ist $f \in (\ell^1(\mathbb{N}), w^*_{c_0'})'$, dann ist mit ψ aus (18) $f \circ \psi^{-1} : c_0(\mathbb{N})' \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional auf $c_0(\mathbb{N})'$, das als Zusammensetzung von stetigen Funktionen stetig ist. Aus *Satz* 5.3.3 in [F] folgt somit

$$f \circ \psi^{-1} \in (c_0(\mathbb{N})', w^*_{c_0'})' = \iota(c_0(\mathbb{N})).$$

Das heißt $f \circ \psi^{-1}$ entspricht einem Auswertungsfunktional, genauer

$$f \circ \psi^{-1}(h) = h((x_n)_{n\in\mathbb{N}}),\ h \in c_0(\mathbb{N})'$$

für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$. Damit erhalten wir

$$f((z_n)_{n\in\mathbb{N}}) = f \circ \psi^{-1} \circ \psi((z_n)_{n\in\mathbb{N}}) = f \circ \psi^{-1}\Big((y_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} y_n z_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n.$$

$\square$

Literatur

[F] Michael Kaltenbäck, Harald Woracek, Martin Blümlinger: *Funktionalanalysis, Vorlesungsskriptum Sommersemester 2016, 11. Auflage.*

[K] Norbert Kusolitsch: *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer Berlin Heidelberg 2014, 2. Auflage.*

[G] Karl Grill: *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie, Vorlesungsskriptum.*

[ANA1] Michael Kaltenbäck: *Analysis 1, Vorlesungsskriptum Wintersemester 2014/2015.*

[ANA2] Michael Kaltenbäck: *Analysis 2, Vorlesungsskriptum Sommersemester 2012.*

[ANA3] Michael Kaltenbäck: *Analysis 3, Vorlesungsskriptum Wintersemester 2015/2016.*

[S1] Roman Schnabl: *Die Algebra der Bernsteinoperatoren, Technische Universität Wien, September 1977.*

[S2] Roman Schnabl: *Die Algebra der Bernsteinoperatoren und symmetrische Funktionen, Technische Universität Wien.*

[KA] Klaus Fritzsche: *Komplexe Analysis von mehreren Veränderlichen, Vorlesungsskriptum Wintersemester 2007/2008, Universität Wuppertal.*