



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
Vienna University of Technology

B A C H E L O R A R B E I T

# Der Brouwersche Abbildungsgrad

ausgeführt am

Institut für  
Analysis und Scientific Computing  
TU Wien

betreut von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr. Michael Kaltenbäck

durch

Anna Pölz  
26. November 2018

# Inhaltsverzeichnis

0.1	Zusammenfassung . . . . .	3
0.2	Wichtige Definitionen und Resultate . . . . .	4
<b>1</b>	<b>Definition, Existenz und Eindeutigkeit</b>	<b>9</b>
1.1	Definition und Konstruktion . . . . .	9
1.2	Eigenschaften des Abbildungsgrades . . . . .	18
1.3	Eindeutigkeit des Abbildungsgrades . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Anwendungen der Abbildungsgrades</b>	<b>26</b>
2.1	Der Brouwersche Fixpunktsatz . . . . .	26
2.2	Geometrische Anwendungen . . . . .	27
2.3	Topologische Anwendungen . . . . .	29
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>33</b>

## 0.1 Zusammenfassung

Der Brouwersche Abbildungsgrad ist ein Konzept der nichtlinearen Analysis, das dazu dient, Aussagen über die Existenz von Lösungen nichtlinearer Gleichungen  $f(x) = y$  zu treffen. Er wird über drei Eigenschaften definiert: Normalität, Additivität und Homotopieinvarianz.

Das Ziel der Arbeit ist es, Grundlagen bezüglich des Abbildungsgrades zu erarbeiten und seine wichtigsten Eigenschaften zu beschreiben. Weiters soll seine Nützlichkeit bei zahlreichen Beweisen erkennbar werden.

Im ersten Abschnitt wird der Abbildungsgrad definiert und seine Konstruktion für Funktionen mit verschiedenen Voraussetzungen beschrieben. Weiters wird seine Eindeutigkeit gezeigt und einige Eigenschaften angeführt. Der zweite Abschnitt widmet sich den wichtigsten Anwendungen, wie zum Beispiel dem Brouwerschen Fixpunktsatz oder dem Satz von Borsuk.

## 0.2 Wichtige Definitionen und Resultate

**Definition 0.1.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $\overline{\Omega}$  der Abschluss von  $\Omega$ .

- Die Menge aller stetigen Funktionen  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m$  nennen wir  $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ .
- Die Menge aller stetigen Funktionen  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , für die gilt  $f|_{\Omega} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist  $k$ -mal stetig differenzierbar, nennen wir  $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$  für  $k \geq 1$ .

**Definition 0.2.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) =: C^1(\overline{\Omega})$ . Mit  $J_f(\cdot)$  bezeichnen wir die Jacobi-Matrix von  $f$ . Für  $a \in \Omega$  wird sie wie folgt berechnet.

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

**Definition 0.3.** Die Distanz zwischen einem Punkt  $x$  und einer Menge  $M$  definieren wir als

$$\text{dist}(x, M) = \inf\{d_2(x, m) : m \in M\}.$$

**Definition 0.4.** Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f, g : X \rightarrow Y$  stetige Funktionen. Eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$  ist eine stetige Abbildung

$$H : [0, 1] \times X \rightarrow Y,$$

für die  $H(0, x) = f(x)$  und  $H(1, x) = g(x)$  gilt.

**Definition 0.5.** Eine Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  heißt symmetrisch, wenn gilt  $-\Omega = \Omega$ , wobei  $-\Omega = \{-x : x \in \Omega\}$ .

**Definition 0.6.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene und beschränkte Menge. Wie betrachten Funktionen  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n, f \in C^1(\overline{\Omega})$ . Mit  $S_f(\Omega)$  bezeichnen wir die Menge aller  $x \in \Omega$ , für die  $\det J_f(x) = 0$  gilt.

**Satz 0.7** (Satz von Sard). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^1(\Omega)$ . Dann gilt  $\lambda_n(f(S_f)) = 0$ , wobei  $\lambda$  das Lebesgue-Maß ist.

*Beweis.* Siehe [De85, Kapitel 1, §1, Proposition 1.4]. □

**Definition 0.8.** Sei  $E$  irgendeine Menge. Dann heißt eine Menge  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^E$  bzw.  $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^E$  von Funktionen  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  eine Algebra von Funktionen, falls gilt:

- $\mathcal{A}$  ist ein linearer Teilraum.
- Mit  $f, g \in \mathcal{A}$  ist auch  $f \cdot g \in \mathcal{A}$ .

Eine Algebra  $\mathcal{A}$  auf  $E$  ist punktetrennend, falls es zu je 2 verschiedenen Punkten  $x_1, x_2 \in E$  eine Funktion  $f \in \mathcal{A}$  gibt mit  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Man nennt eine Algebra  $\mathcal{A}$  nirgends verschwindend, falls es zu jedem  $x \in E$  ein  $f \in \mathcal{A}$  gibt, sodass  $f(x) \neq 0$ .

**Satz 0.9** (Satz von Stone-Weierstraß). *Sei  $(K, \mathcal{T})$  ein kompakter topologischer Raum, und sei  $\mathcal{A} \subset C_b(K, \mathbb{R})$  eine punktetrennende, nirgends verschwindende Algebra stetiger Funktionen. Dann ist  $\mathcal{A}$  dicht in  $C_b(K, \mathbb{R})$  bezüglich der Supremumsnorm.*

*Beweis.* Siehe [Ka15, Kapitel 12, Satz 12.15.6] □

*Bemerkung 0.10.* Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Wir zeigen mit Hilfe des Satzes von Stone-Weierstraß, dass  $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$  dicht in  $C_b(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$  ist.

$(\overline{\Omega}, \mathcal{T}_2)$  ist ein kompakter topologischer Raum und  $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \subset C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ .  $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$  ist eine Algebra, da die Menge ein linearer Teilraum ist und die Multiplikation zweier Funktionen aus  $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$  wieder darin enthalten ist.

Wir zeigen, dass  $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$  punktetrennend ist. Seien  $x, y \in \overline{\Omega}$  und gelte  $x \neq y$ . Dann gibt es mindestens eine Koordinate  $i$ , für die gilt  $x_i \neq y_i$ . Die Projektion  $f$  auf die  $i$ -Koordinate ist eine  $C^2$ -Funktion so, dass  $f(x) \neq f(y)$ .

$C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$  ist nirgends verschwindend. Betrachte dafür die konstante 1-Funktion.

**Korollar 0.11.** *Seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und offen. Dann ist  $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  dicht in  $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ .*

*Beweis.* Betrachte  $f = (f_1, \dots, f_n) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $f \in C(\overline{\Omega})$ . Laut Bemerkung 0.10 ist  $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$  dicht in  $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ . Deshalb existiert zu jedem  $f_i$  und für alle  $\epsilon > 0$  ein  $g_i : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g_i \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ , sodass

$$|f_i(x) - g_i(x)| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in \overline{\Omega}.$$

Daraus folgt für  $g = (g_1, \dots, g_n) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dass

$$\|f(x) - g(x)\| < \zeta = \zeta(\epsilon). \quad \text{für alle } x \in \overline{\Omega}.$$

Wir erhalten, dass  $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  dicht in  $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  ist. □

**Satz 0.12** (Fortsetzungssatz von Tietze). *Ein topologischer Raum  $(X, \mathcal{T})$  erfülle  $(T_4)$ . Ist  $A \subset X$  abgeschlossen und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so existiert eine stetige Fortsetzung  $g$  von  $f$  auf  $X$ , also ein stetiges  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g|_A = f$ , wobei  $\sup_{t \in A} |f(t)| = \sup_{t \in X} |g(t)|$  ( $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ).*

*Beweis.* Siehe [Ka15, Kapitel 12, Satz 12.10.3] □

Eine Folgerung aus dem Satz von Tietze lautet:

**Korollar 0.13.** *Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung auf  $\mathbb{R}^n$ .*

*Beweis.*  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{d_2})$  erfüllt  $(T_4)$ . Betrachte  $f = (f_1, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann sind für jedes  $f_i$  die Voraussetzungen aus dem Fortsetzungssatz von Tietze erfüllt. Also existiert zu jedem  $f_i$  ein stetiges  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g_i|_A = f_i$ . Insgesamt erhalten wir, dass  $g = (g_1, \dots, g_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Fortsetzung von  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$  ist.  $\square$

**Satz 0.14** (Hauptsatz über implizite Funktionen). *Sei  $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$  offen, und sei  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $F \in C^1(D)$ . Weiters sei  $(a, b) \in D$ , sodass  $F(a, b) = 0$  und sodass*

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_{n+j}}\right)_{i,j=1}^m \neq 0.$$

(i) *Dann existieren offene Kugeln  $U = U_\delta(a) \subset \mathbb{R}^n$  um  $a$  und  $V = U_\rho(b) \subset \mathbb{R}^m$  um  $b$  mit  $U \times V \subset D$ , sowie eine stetige Funktion  $g : U \rightarrow V$ , sodass*

$$F(x, g(x)) = 0 \text{ für alle } x \in U.$$

(ii) *Die Funktion  $g$  löst die Gleichung  $F(x, y) = 0$ ,  $x \in U$ ,  $y \in V$  vollständig in dem Sinn, dass wenn  $(x, y) \in U \times V$  mit  $F(x, y) = 0$ , immer  $y = g(x)$  gelten muss, insbesondere  $b = g(a)$ .*

(iii)  *$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_{n+j}}\right)_{i,j=1}^m$  für alle  $(u, v) \in U \times V$  invertierbar ist; die Funktion  $g$  ist auf  $U$  stetig differenzierbar und es gilt*

$$dg(x) = -\left(\left(\frac{\partial F_i(x, g(x))}{\partial x_{n+j}}\right)_{i,j=1}^m\right)^{-1} \left(\frac{\partial F_i(x, g(x))}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{m,n}$$

*Beweis.* Siehe [Ka16, Kapitel 14.1, Satz 14.1.4]  $\square$

**Beispiel 0.15.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $p \geq 1$  und  $h : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$  stetig differenzierbar, sodass  $h(t_0, x_0) = 0$  und

$$\det J_{h(t_0, \cdot)}(x_0) \neq 0$$

für  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$ . Die Voraussetzungen des Hauptsatzes über implizite Funktionen sind erfüllt für  $n = 1$  und  $D = \mathbb{R} \times \Omega$ .

Es folgt also, dass ein Intervall  $U := (t_0 - r, t_0 + r)$ , eine Kugel  $V := U_\delta(x_0) \subset \Omega$  und eine stetige Funktion  $g : U \rightarrow V$  existiert, sodass  $g(t_0) = x_0$  und  $(x, g(x))$  die einzige Lösung von  $h(x, y) = 0$  ist mit  $x \in U$  und  $y \in V$ .

**Definition 0.16.** Sei  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  eine Matrix. Sei  $B_{ij}$  die Matrix, die entsteht, wenn man die  $i$ -te Zeile und die  $j$ -te Spalte streicht. Dann sind die Kofaktoren  $\tilde{a}_{ij}$  folgendermaßen gegeben.

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det B_{ij}$$

**Lemma 0.17.** *Sei  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  eine  $n \times n$ -Matrix und  $\tilde{a}_{ij}$  ihre Kofaktoren für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ij} a_{ik} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \det B_{ij} \cdot a_{ik} = \delta_{jk} \det A \text{ für } k, j \in 1, \dots, n.$$

*Beweis.* Für  $j = k$  soll  $\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \det B_{ij} \cdot a_{ij} = \det A$  gelten, was aber nach dem Laplace'schen Entwicklungssatz genau der Entwicklung nach der  $j$ -ten Zeile entspricht. Für  $j \neq k$  gilt

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \det B_{ij} \cdot a_{ik} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1k} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nk} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = 0,$$

da wegen  $j \neq k$  die  $k$ -te Spalte nun doppelt vorkommt.  $\square$

**Proposition 0.18.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^2(\bar{\Omega})$ , und für  $x \in \Omega$  seien  $\tilde{a}_{ij}(x)$  die Kofaktoren der Matrix  $J_f(x)$  mit den Einträgen  $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ . Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{a}_{ji}(x)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

*Beweis.* Sei  $i$  fest. Die Spalte

$$\left( \frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_k}, \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \right)^T$$

wird mit  $\frac{\partial f^*}{\partial x_k}$  bezeichnet. Dann gilt

$$\tilde{a}_{ji}(x) = (-1)^{i+j} \det \left( \frac{\partial f^*}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^*}{\partial x_{j-1}}, \frac{\partial \hat{f}^*}{\partial x_j}, \frac{\partial f^*}{\partial x_{j+1}}, \dots, \frac{\partial f^*}{\partial x_n} \right).$$

Wir beschreiben mit dem Hut jene Spalten, welche weggelassen werden. Wir erhalten weiters

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{a}_{ji}(x)}{\partial x_j} &= (-1)^{i+j} \left( \sum_{k>j} \det \left( \frac{\partial f^*}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \hat{f}^*}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f^*}{\partial x_{k-1}}, \frac{\partial^2 f^*}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial f^*}{\partial x_{k+1}}, \dots, \frac{\partial f^*}{\partial x_n} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k<j} \det \left( \frac{\partial f^*}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^*}{\partial x_{k-1}}, \frac{\partial^2 f^*}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial f^*}{\partial x_{k+1}}, \dots, \frac{\partial \hat{f}^*}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f^*}{\partial x_n} \right) \right). \end{aligned}$$

Sei

$$c_{kj} = \det \left( \frac{\partial^2 f^*}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial f^*}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \hat{f}^*}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial \hat{f}^*}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f^*}{\partial x_n} \right).$$

Da  $f \in C^2(\Omega)$ , gilt nach dem Satz von Schwarz  $c_{kj} = c_{jk}$ . Da sich das Vorzeichen der Determinante ändert, wann immer zwei benachbarte Spalten vertauscht werden, erhalten wir

$$(-1)^{i+j} \frac{\partial \tilde{a}_{ji}(x)}{\partial x_j} = \sum_{k<j} (-1)^{k-1} c_{kj} + \sum_{k>j} (-1)^{k-2} c_{kj} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sigma_{kj} c_{kj}$$

mit  $\sigma_{kj} = 1$  für  $k < j$ ,  $\sigma_{jj} = 0$  und  $\sigma_{kj} = -\sigma_{jk}$  für alle  $j, k$ . Daraus folgt

$$(-1)^i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{a}_{ji}(x)}{\partial x_j} = \sum_{j,k=1}^n (-1)^{k-1+j} \sigma_{kj} c_{kj} = \sum_{k,j=1}^n (-1)^{j-1+k} \sigma_{jk} c_{jk} = - \sum_{j,k=1}^n (-1)^{k-1+j} \sigma_{kj} c_{kj}.$$

Also gilt

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{a}_{ji}(x)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

□

**Proposition 0.19.** Sei  $A$  eine reelle  $n \times n$ -Matrix mit  $\det A \neq 0$ , seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  die negativen Eigenwerte von  $A$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  deren Vielfachheiten. Dann ist  $\mathbb{R}^n$  die direkte Summe  $\mathbb{R}^n = N \oplus M$ , sodass

- (a)  $N$  und  $M$  sind invariant unter  $A$ ,
- (b)  $A|_N$  hat nur die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  und  $A|_M$  hat keine negativen Eigenwerte,
- (c)  $\dim N = \sum_{k=1}^m \alpha_k$ .



# 1 Definition, Existenz und Eindeutigkeit

## 1.1 Definition und Konstruktion

Der Brouwersche Abbildungsgrad, kurz Abbildungsgrad, ist eine Funktion und wird durch drei Eigenschaften eindeutig bestimmt: Normalität, Additivität und Homotopieinvarianz. Ad hoc ist nicht klar, dass es Funktionen mit diesen Eigenschaften gibt. Wir werden zunächst die Funktion  $\deg_B$  angeben und zeigen, dass sie diese drei Eigenschaften hat. Später werden wir zeigen, dass Funktionen mit diesen drei Eigenschaften eindeutig sind und infolge mit  $\deg_B$  übereinstimmen.

**Definition 1.1.** Sei

$$M = \{(f, \Omega, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen und beschränkt, } f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig, } y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)\}.$$

Eine Funktion

$$\deg: M \rightarrow \mathbb{Z}$$

heißt *Brouwerscher Abbildungsgrad*, falls sie die folgenden drei Eigenschaften erfüllt.

- (d1) Normalität:  $\deg(\text{id}, \Omega, y) = 1$  für  $y \in \Omega$ .
- (d2) Additivität:  $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y) + \deg(f, \Omega_2, y)$ , falls  $\Omega_1, \Omega_2$  disjunkte, offene Teilmengen von  $\Omega$  sind mit  $y \notin f(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ .
- (d3) Homotopieinvarianz:  $\deg(h(t, \cdot), \Omega, y(t))$  ist unabhängig von  $t \in [0, 1]$ , falls  $h: [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  sowie  $y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig sind und  $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$  für alle  $t \in [0, 1]$ .

Wir beginnen mit der Definition von  $\deg_B$  für  $f \in C^1(\bar{\Omega})$  und  $y \notin f(S_f(\Omega))$ .

**Lemma 1.2.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f \in \bar{C}^1(\Omega)$ . Weiters sei  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega \cup S_f)$ . Dann ist  $f^{-1}\{y\}$  endlich.

*Beweis.* Da wir  $y \notin f(S_f(\Omega))$  voraussetzen, gilt  $\det J_f(x) \neq 0$  für alle  $x \in f^{-1}\{y\}$ . Aus dem Umkehrsatz [Ka16, Kapitel 14, Satz 14.2.1] folgt, dass für  $x \in f^{-1}\{y\}$  eine offene Umgebung  $U_x$  von  $x$  existiert, sodass  $f^{-1}\{y\} \cap U_x = \{x\}$ . Zu  $x \in \bar{\Omega} \setminus f^{-1}\{y\}$  gibt es wegen der Stetigkeit ein offenes  $U_x \ni x$  derart, dass  $y \notin f(U_x)$ . Da  $\bar{\Omega}$  kompakt ist, wird es von endlich vielen Mengen  $U_{x_j}$  mit  $j = 1, \dots, m$  überdeckt. Insbesondere ist  $f^{-1}\{y\} = \bigcup_{j=1}^m U_{x_j} \cap f^{-1}\{y\}$  endlich.  $\square$

**Definition 1.3.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f \in \bar{C}^1(\Omega)$ . Weiters sei  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega \cup S_f)$ . Dann definieren wir

$$\deg_B(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \text{sgn}(\det J_f(x)).$$

*Bemerkung 1.4.* Für Proposition 1.5 benötigen wir die Familie  $(\phi_\alpha)_{\alpha>0}$  von Funktionen  $\phi_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\phi_1(x) = \begin{cases} c \cdot \exp\left(\frac{-1}{1-\|x\|^2}\right), & \|x\| < 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit  $c > 0$ , sodass  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_1(x) dx = 1$ , und durch  $\phi_\alpha(x) = \alpha^{-n} \phi_1\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ . Es gilt  $\phi_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\alpha(x) dx = 1$  und  $K_\alpha(0) = \text{supp } \phi_\alpha$ . Hier und im Folgenden steht  $\|\cdot\|$  für die Euklidische Norm.

**Proposition 1.5.** Seien  $\Omega, f$  und  $y$  wie in Definition 1.3. Dann existiert  $\epsilon_0 = \epsilon_0(y, f) > 0$ , sodass

$$\deg_B(f, \Omega, y) = \int_{\Omega} \phi_\epsilon(f(x) - y) \cdot \det J_f(x) dx \quad \text{für alle } 0 < \epsilon < \epsilon_0. \quad (1.1)$$

*Beweis.* Im Falle  $f^{-1}\{y\} = \emptyset$  existiert kein  $x \in \Omega$ , sodass  $f(x) = y$ . Für  $0 < \epsilon < \text{dist}(y, f(\bar{\Omega}))$ , gilt  $\|f(x) - y\| > \epsilon$  und damit  $\frac{\|f(x) - y\|}{\epsilon} > 1$ , was  $\phi_\epsilon(f(x) - y) = 0$  bedeutet.

Aufgrund von Lemma 1.2 wissen wir, dass  $f^{-1}\{y\}$  endlich ist, also  $f^{-1}\{y\} = \{x_1, \dots, x_m\}$ . Da wir  $x \notin S_f(\Omega) = \{x \in \Omega : \det J_f(x) = 0\}$  voraussetzen, können wir aus dem Umkehrsatz [Ka16, Kapitel 14, Satz 14.2.1] folgern, dass disjunkte Kugeln  $U_\alpha(x_i)$  existieren, sodass  $f|_{U_\alpha(x_i)}$  Diffeomorphismen auf offene Umgebungen  $V_i$  von  $y$  sind.

Insbesondere gilt

$$\text{sgn}(\det J_f(x)) = \text{sgn}(\det J_f(x_i)) \quad \text{für } x \in U_\alpha(x_i) \quad \text{und } i = 1, \dots, m.$$

Sei  $r > 0$  so klein, dass  $U_r(y) \subset \bigcap_{i=1}^m V_i$ . Weiters sei  $W_i = U_\alpha(x_i) \cap f^{-1}(U_r(y))$ .

Weil  $f(\bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^m W_i)$  kompakt ist und  $y$  nicht enthält, folgt  $\|f(x) - y\| \geq \beta$  für  $x \in \bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^m W_i$  und hinreichend kleinem  $\beta > 0$ .

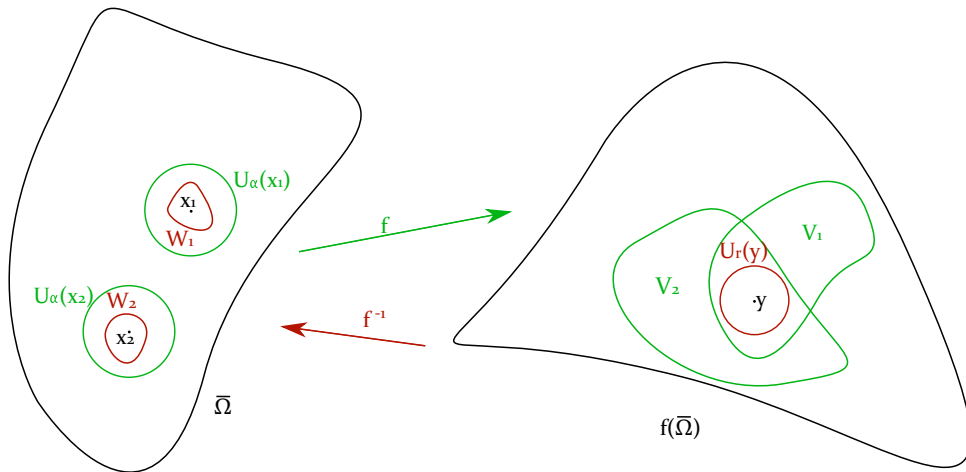


Abbildung 1.1: Veranschaulichung

Wegen  $\phi_\epsilon(x) = 0$  für  $\|x\| > 1$  gilt  $\phi_\epsilon(f(x) - y) = 0$  für alle  $x \in \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^m W_i$  und  $0 < \epsilon < \beta$ . Also gilt

$$\int_{\Omega} \phi_\epsilon(f(x) - y) \det J_f(x) \, dx = \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}(\det J_f(x_i)) \int_{W_i} \phi_\epsilon(f(x) - y) \|\det J_f(x)\| \, dx.$$

Aus  $f(W_i) = U_r(y)$  folgt  $f(W_i) - y = U_r(0)$ . Deshalb und wegen  $\det J_f(x) = \det J_{f-y}(x)$  folgt aus dem Transformationsatz

$$\int_{W_i} \phi_\epsilon(f(x) - y) \|\det J_{f-y}(x)\| \, dx = \int_{U_r(0)} \phi_\epsilon(x) \, dx = 1 \quad \text{für } \epsilon < \epsilon_0 := \min\{\beta, r\}.$$

Insgesamt erhalten wir für  $0 < \epsilon < \epsilon_0$

$$\deg_B(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}(\det J_f(x_i)) = \int_{\Omega} \phi_\epsilon(f(x) - y) \det J_f(x) \, dx. \quad (1.2)$$

□

Nun wollen wir  $\deg_B$  auch für  $y \in f(S_f)$  definieren.

*Bemerkung 1.6.* Seien  $(\phi_\epsilon)_{\epsilon>0}$  wie in Bemerkung 1.4, seien  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$  und seien  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\epsilon > 0$  zunächst beliebig. Betrachte

$$w(x) = \int_0^1 \phi_\epsilon(x - y_1 + t(y_1 - y_2)) \, dt (y_1 - y_2).$$

Um die Divergenz  $\operatorname{div} w(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i(x)}{\partial x_i}$  zu berechnen, sei daran erinnert, dass für konstantes  $v \in \mathbb{R}^n$  und  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{div}(g \cdot v) = v \cdot \nabla g$  gilt, wobei  $\nabla$  der Gradient ist und mit  $v \cdot \nabla g$  das kanonische Skalarprodukt der Vektoren  $v$  und  $\nabla g$  bezeichnet wird. In unserem Fall sei  $v = y_1 - y_2$  und  $g(x) = \int_0^1 \phi_\epsilon(x - y_1 + t(y_1 - y_2)) \, dt$ . Da der Integrand von  $(\operatorname{div} w)(x) = \int_0^1 \nabla \phi_\epsilon(x - y_1 + t(y_1 - y_2)) (y_1 - y_2) \, dt$  mit  $\frac{d}{dt} \phi_\epsilon(x - y_1 + t(y_1 - y_2))$  übereinstimmt, folgt aus dem Fundamentalsatz der Analysis

$$\operatorname{div} w(x) = \phi_\epsilon(x - y_2) - \phi_\epsilon(x - y_1).$$

Sei nun  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  ein weiterer Punkt und  $t \in [0, 1]$ . Wegen

$$\begin{aligned} \|x - y_1 + t(y_1 - y_2)\| &\geq \|x - y_0\| - \|t(y_0 - y_2) + (1-t)(y_0 - y_1)\| \\ &\geq \|x - y_0\| - \max(\|y_0 - y_1\|, \|y_0 - y_2\|) \end{aligned}$$

folgt aus  $\|x - y_0\| > \max(\|y_0 - y_1\|, \|y_0 - y_2\|) + \epsilon$ , dass  $w(x) = 0$ , womit  $\operatorname{supp} w \subseteq K_r(y_0)$  mit  $r = \max(\|y_0 - y_1\|, \|y_0 - y_2\|) + \epsilon$ .

Aus Satz 0.7 wissen wir, dass für beliebige  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $\alpha > 0$  die Menge  $U_\alpha(y_0) \setminus f(S_f)$  überabzählbar ist.

**Satz 1.7.** Sei  $f \in C^2(\bar{\Omega})$ ,  $y_0 \notin f(\partial\Omega)$  und  $\alpha = \text{dist}(y_0, f(\partial\Omega)) (> 0)$ . Für  $y_1, y_2 \in U_\alpha(y_0)$  mit  $y_1, y_2 \notin f(S_f(\Omega))$  gilt

$$\deg_B(f, \Omega, y_1) = \deg_B(f, \Omega, y_2)$$

*Beweis.* Aus Proposition 1.5 wissen wir, dass sich  $\deg_B(f, \Omega, y_i)$  für  $i = 1, 2$  als Integral (1.1) mit hinreichend kleinem  $\epsilon$ , also für alle  $\epsilon$  mit  $0 < \epsilon < \eta$  und  $\eta > 0$ , darstellen lässt.

Wir werden eine Funktion  $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$  konstruieren, sodass  $\text{supp } v \subset \Omega$  und für hinreichend kleines  $\epsilon > 0$

$$[\phi_\epsilon(f(x) - y_2) - \phi_\epsilon(f(x) - y_1)]J_f(x) = \text{div } v(x) \quad \text{für } x \in \Omega \quad (1.3)$$

gilt. Dazu verwenden wir die Abbildung  $w$  aus Bemerkung 1.6 mit  $\epsilon < \eta$  und  $\epsilon < \alpha - \max(\|y_0 - y_1\|, \|y_0 - y_2\|)$ . Wir definieren

$$v_j(x) = \sum_{i=1}^n w_i(f(x)) \tilde{a}_{ji}(x) \quad \text{auf } \Omega \quad \text{und} \quad v_j(x) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

wobei die Funktionen  $\tilde{a}_{ji}$  die Kofaktoren bezüglich  $J_f$  sind, siehe Proposition 0.18.

Für  $r = \max(\|y_0 - y_1\|, \|y_0 - y_2\|) + \epsilon$  gilt wegen  $\epsilon < \alpha - \max(\|y_0 - y_1\|, \|y_0 - y_2\|)$  die Ungleichung  $r < \alpha$ . Für  $x \in \partial\Omega$  gilt daher  $f(x) \in \mathbb{R}^n \setminus K_r(y_0)$ . Da  $f$  stetig ist, existiert ein  $\delta > 0$ , sodass  $f(z) \in \mathbb{R}^n \setminus K_r(y_0)$  für alle  $z \in U_\delta(x)$ . Damit gilt für  $z \in U_\delta(x)$  wegen Bemerkung 1.6  $w(f(z)) = 0$ , woraus dann  $\text{supp } w \circ f \subset \Omega$  folgt. Also gilt  $\text{supp } v \subseteq \Omega$  und infolge  $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . Wir erhalten

$$\frac{\partial v_j(x)}{\partial x_j} = \sum_{i,k=1}^n \tilde{a}_{ji}(x) \frac{\partial w_i(f(x))}{\partial z_k} \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n w_i(f(x)) \frac{\partial \tilde{a}_{ji}(x)}{\partial x_j} \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Aus Lemma 0.17 folgt

$$\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ji}(x) \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j} = \delta_{ik} \det J_f(x)$$

und gemeinsam mit Proposition 0.18 erhalten wir

$$\text{div } v(x) = \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial w_i(f(x))}{\partial z_k} \delta_{ik} \det J_f(x) = (\text{div } w)(f(x)) \det J_f(x),$$

wodurch (1.3) nachgewiesen ist. Nun ergibt die Integration über einen Quader  $Q = [-a, a]^n$  mit  $\Omega \subset Q$

$$\begin{aligned} \deg_B(f, \Omega, y_2) - \deg_B(f, \Omega, y_1) &= \int_{\Omega} \text{div } v(x) \, dx = \int_Q \text{div } v(x) \, dx \\ &= \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \, dx_1 \cdots dx_n \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a \underbrace{\int_{-a}^a \frac{\partial v_j}{\partial x_j} dx_j}_{=v_j(a)-v_j(-a)=0} \{dx_1 \dots dx_n\} \setminus \{dx_j\} = 0.$$

Der Ausdruck  $dx_j \{dx_1 \dots dx_n\} \setminus \{dx_j\}$  bedeutet, dass für jedes  $j \in \{1, \dots, n\}$  die  $n$  Integrale so vertauscht werden, dass die Funktion  $\frac{\partial v_j}{\partial x_j}$  zuerst nach  $dx_j$  integriert wird. Da diese erste Integration 0 ergibt, verschwindet der Integrand für die nachfolgenden  $n - 1$  Integrale.  $\square$

**Definition 1.8.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^2(\bar{\Omega})$  und  $y \notin f(\partial\Omega)$ . Dann definieren wir  $\deg_B(f, \Omega, y) = \deg_B(f, \Omega, y_1)$ , wobei  $y_1 \notin f(S_f(\Omega))$ , sodass  $\|y_1 - y\| < \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$  und  $\deg_B(f, \Omega, y_1)$  durch Definition 1.3 gegeben ist.

Wegen Satz 1.7 hängt diese Definition nicht von  $y_1$  ab.

**Lemma 1.9.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^2(\bar{\Omega})$ ,  $y, z \notin f(\partial\Omega)$  und sei  $\|y - z\| < \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$ . Dann gilt

$$\deg_B(f, \Omega, y) = \deg_B(f, \Omega, z).$$

*Beweis.* Gelte  $\|y - z\| < \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$  und damit  $z \in U_{\text{dist}(y, f(\partial\Omega))}(y)$ . Dann gilt  $U_\alpha(z) \subset U_{\text{dist}(y, f(\partial\Omega))}(y)$  mit  $\alpha = \text{dist}(y, f(\partial\Omega)) - \|y - z\|$ . Laut Satz 0.7 existieren  $z_i \in U_\alpha(z)$  mit  $z_i \notin f(S_f(\Omega))$ . Da  $\|y - z_i\| < \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$  erhalten wir mit Definition 1.8

$$\deg_B(f, \Omega, y) = \deg_B(f, \Omega, z_i).$$

Wegen  $\|z - z_i\| < \alpha \leq \text{dist}(z, f(\partial\Omega))$  bekommen wir auch

$$\deg_B(f, \Omega, z_i) = \deg_B(f, \Omega, z).$$

$\square$

Als nächstes werden wir die Definition derart weiterentwickeln, dass wir statt  $f \in C^2(\bar{\Omega})$  nur mehr  $f \in C(\bar{\Omega})$  fordern müssen.

**Proposition 1.10.** Sei  $f \in C^2(\bar{\Omega})$  und  $y \notin f(\partial\Omega)$ . Dann gilt für  $g \in C^2(\bar{\Omega})$  mit  $\max_{x \in \bar{\Omega}} \|g(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$ , dass  $\deg_B(f + tg, \Omega, y) = \deg_B(f, \Omega, y)$  für alle  $t \in [-1, 1]$ .

*Beweis.* Wegen  $\max_{x \in \bar{\Omega}} \|g(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$  gilt für  $(x, t) \in \partial\Omega \times [-1, 1]$

$$\|y - (f + tg)(x)\| \geq \|y - f(x)\| - |t| \|g(x)\| \geq \text{dist}(y, f(\partial\Omega)) - \|g(x)\| > 0$$

und somit  $y \notin (f + tg)(\partial\Omega)$ .

*Schritt 1:* Wir zeigen die Aussage zuerst für  $|t| < \delta$ , wobei  $\delta \in (0, 1]$  hinreichend klein ist.

*Schritt 1.1:* Im Fall  $f^{-1}\{y\} = \emptyset$  gilt für  $|t| \max_x \|g(x)\| < \text{dist}(y, f(\bar{\Omega}))$  sicherlich  $f(x) + tg(x) \neq y$  für  $x \in \bar{\Omega}$ . Deshalb sind beide Grade null.

*Schritt 1.2:* Sei  $f^{-1}\{y\} = \{x_1, \dots, x_m\} \neq \emptyset$  und  $\det J_f(x_i) \neq 0$  für  $i = 1, \dots, m$ ,  $p_t := f + tg$  und  $h(t, x) = p_t(x) - y$  für  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$ .

Dann gilt  $h(0, x_i) = 0$  und  $\det J_{h(0, \cdot)}(x_i) = \det J_f(x_i) \neq 0$ . Aus Beispiel 0.15 folgt, dass ein Intervall  $(-r, r)$ , disjunkte Kugeln  $K_\rho(x_i) \subset \Omega$  und stetige Funktionen  $z_i: (-r, r) \rightarrow U_\rho(x_i)$  existieren, sodass

$$p_t^{-1}\{y\} \cap V = \{z_1(t), \dots, z_m(t)\}$$

mit  $V = \bigcup_{i=1}^m U_\rho(x_i)$ . Wir wählen  $\rho$  auch so klein, dass  $\operatorname{sgn}(\det J_f(x)) = \operatorname{sgn}(\det J_f(x_i))$  für  $x \in K_\rho(x_i)$ .

Weil  $f(\overline{\Omega} \setminus V)$  kompakt ist und  $y$  nicht enthält, folgt  $\|f(x) - y\| \geq \beta$  für  $x \in \overline{\Omega} \setminus V$  und hinreichend kleinem  $\beta > 0$ . Nun wollen wir

$$p_t^{-1}\{y\} = \{z_1(t), \dots, z_m(t)\} \quad \text{für } |t| < \delta_1 := \min\{r, \beta(\max_{x \in \overline{\Omega}} \|g(x)\|)^{-1}\}$$

zeigen:

Für  $x \in p_t^{-1}\{y\}$  gilt  $f(x) + tg(x) = y$  und weiter  $f(x) - y = -tg(x)$ . Es folgt  $\|f(x) - y\| = \|tg(x)\| = |t|\|g(x)\|$  und somit für  $|t| < \beta(\max_{w \in \overline{\Omega}} \|g(w)\|)^{-1}$

$$\|f(x) - y\| < \beta \frac{\|g(x)\|}{\max_{w \in \overline{\Omega}} \|g(w)\|} \leq \beta.$$

Da für  $x \in \overline{\Omega} \setminus V$ ,  $\|f(x) - y\| \geq \beta$  gilt, folgt  $x \in V$ , also  $x \in U_\rho(x_i)$  für ein  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Da  $z_i(t)$  die einzige Lösung von  $h(t, x) = 0$  mit  $x \in U_\rho(x_i)$  ist, folgt  $x = z_i(t)$ .

Wir wissen, dass  $\det J_f(x) \neq 0$  für  $x \in \overline{V}$ , da  $\operatorname{sgn}(\det J_f(x)) = \operatorname{sgn}(\det J_f(x_i))$  auf  $K_\rho(x_i)$ . Da  $\det J_{p_t}(x)$  in  $(t, x) \in [-\delta, \delta] \times \overline{V}$  gleichmäßig stetig ist, finden wir  $\delta \leq \delta_1$  derart, dass

$$|\det J_{p_t}(x) - \det J_f(x)| < \min\{|\det J_f(z)| : z \in \overline{V}\}$$

für  $|t| < \delta$  und  $x \in \overline{V}$ .

Dann folgt  $\operatorname{sgn}(\det J_{p_t}(z_i(t))) = \operatorname{sgn}(\det J_f(z_i(t))) = \operatorname{sgn}(\det J_f(x_i))$  und infolge  $\deg_B(p_t, \Omega, y) = \deg_B(f, \Omega, y)$  für  $|t| < \delta$  laut Definition 1.3.

*Schritt 1.3:* Man nehme schließlich  $y \in f(S_f(\Omega))$  an. Wähle ein  $y_0 \in U_{\alpha/3}(y) \setminus f(S_f(\Omega))$  mit  $\alpha = \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$  und  $\delta_2 > 0$ , sodass nach *Schritt 1.2*

$$\deg_B(p_t, \Omega, y_0) = \deg_B(f, \Omega, y_0) = \deg_B(f, \Omega, y) \quad \text{für } |t| < \delta_2.$$

Sei  $\delta = \min\{\delta_2, \frac{\alpha}{3} \max_{x \in \overline{\Omega}} (\|g(x)\|)^{-1}\}$ . Dann folgt  $\|y_0 - p_t(x)\| > \frac{\alpha}{3}$  für  $x \in \partial\Omega$  und  $|t| < \delta$  und damit  $\|y_0 - y\| < \operatorname{dist}(y_0, p_t(\partial\Omega))$ . Nach Definition 1.8 gilt  $\deg_B(p_t, \Omega, y_0) = \deg_B(p_t, \Omega, y)$ , was zusammen mit obiger Gleichung  $\deg_B(p_t, \Omega, y) = \deg_B(f, \Omega, y)$  impliziert.

*Schritt 2:* Nun zeigen wir die Proposition für  $t \in [-1, 1]$ .

Sei wieder  $p_t = f + tg$ . Wir betrachten  $\deg_B(p_t, \Omega, y)$  für  $t \in [-1, 1]$ . Weil  $p_t = f + sg + (t-s)g = p_s + (t-s)g$ , wissen wir aus dem ersten Beweisteil, dass  $\deg_B(p_t, \Omega, y)$  in einer Umgebung  $U_{\epsilon_s}(s)$  von  $s$  konstant ist. Insbesondere sind  $\{s \in [-1, 1] : \deg_B(p_s, \Omega, y) = \deg_B(p_0, \Omega, y)\}$  und  $\{s \in [-1, 1] : \deg_B(p_s, \Omega, y) \neq \deg_B(p_0, \Omega, y)\}$  offene Teilmengen von  $[-1, 1]$ . Da Intervalle zusammenhängend sind, muss erstere Menge mit  $[-1, 1]$  übereinstimmen, womit  $\deg_B(p_s, \Omega, y) =$

$\deg_B(p_0, \Omega, y)$  für alle  $s \in [-1, 1]$ . □

Mit Hilfe dieses Resultats werden wir in weiterer Folge sehen, dass  $\deg_B$  konstant auf allen  $C^2(\overline{\Omega})$ -Abbildungen ist, die nahe genug an einer stetigen Abbildung sind.

*Bemerkung 1.11.* Sei nun  $f$  stetig und  $y \notin f(\partial\Omega)$ . Aufgrund von Korollar 0.11 existieren Funktionen  $l_1, l_2 \in C^2(\overline{\Omega})$ , sodass  $\max_{x \in \overline{\Omega}} \|f(x) - l_i(x)\| < \frac{1}{4} \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$  für  $i = 1, 2$ . Es folgt

$$\frac{3}{4} \text{dist}(y, f(\partial\Omega)) < \text{dist}(y, l_i(\partial\Omega)) < \frac{5}{4} \text{dist}(y, f(\partial\Omega)).$$

Daraus ergibt sich  $\max_{x \in \overline{\Omega}} \|f(x) - l_i(x)\| < \frac{1}{3} \text{dist}(y, l_1(\partial\Omega))$  für  $i = 1, 2$  und weiter

$$\begin{aligned} \max_{x \in \overline{\Omega}} \|l_2(x) - l_1(x)\| &= \max_{x \in \overline{\Omega}} \|f - l_1 + l_2 - f\| \\ &\leq \max_{x \in \overline{\Omega}} \|f - l_1\| + \max_{x \in \overline{\Omega}} \|f - l_2\| \\ &< \frac{2}{3} \text{dist}(y, l_1(\partial\Omega)) \end{aligned}$$

für  $i = 1, 2$ . Sei  $h(t, x) = l_1(x) + t(l_2(x) - l_1(x))$ . Da die Voraussetzungen für Proposition 1.10 erfüllt sind, folgt, dass  $\deg_B(h(t, \cdot), \Omega, y)$  konstant für  $t \in [-1, 1]$  ist. Für  $t = 0$  erhalten wir  $h(t, \cdot) = l_1$  und für  $t = 1$ ,  $h(t, \cdot) = l_2$ , also  $\deg_B(l_1, \Omega, y) = \deg_B(l_2, \Omega, y)$ .

Wegen Bemerkung 1.11 hängt  $\deg_B(l, \Omega, y)$  in der folgenden Definition nicht von der konkreten Wahl von  $l$  ab.

**Definition 1.12.** Sei  $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ . Dann definieren wir  $\deg_B(f, \Omega, y) := \deg_B(l, \Omega, y)$ , wobei  $l \in C^2(\overline{\Omega})$  mit  $\max_{x \in \overline{\Omega}} \|l(x) - f(x)\| < \frac{1}{4} \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$  und  $\deg_B(l, \Omega, y)$  durch Definition 1.8 gegeben ist.

Schließlich zeigen wir, dass  $\deg_B$  die Eigenschaften (d1)-(d3) erfüllt und deshalb ein Brouwer-scher Abbildungsgrad ist.

**Satz 1.13.** Die Funktion  $\deg_B$  aus Definition 1.12 erfüllt die drei charakterisierenden Eigenschaften (d1)-(d3) des Abbildungsgrades aus Definition 1.1.

*Beweis.*

(d1)  $\deg_B(\text{id}, \Omega, y) = 1$  für  $y \in \Omega$ :

Da  $\text{id}(x) = y$  nur dann gilt, wenn  $x = y$  und  $y \in \Omega$ , folgt

$$\deg_B(\text{id}, \Omega, y) = \sum_{x \in \text{id}^{-1}\{y\}} \text{sgn}(\det J_{\text{id}}(x)) = \text{sgn}(\det J_{\text{id}}(y)) = 1.$$

(d2)  $\deg_B(f, \Omega, y) = \deg_B(f, \Omega_1, y) + \deg_B(f, \Omega_2, y)$ , falls  $\Omega_1, \Omega_2$  disjunkte, offene Teilmengen von  $\Omega$  sind, sodass  $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ :

Wir können oBdA. annehmen, dass  $f \in C^2(\overline{\Omega})$  und  $y \notin f(S_f(\Omega))$ . Sollte das nicht der Fall sein, finden wir laut Korollar 0.11 für jedes  $\epsilon > 0$  eine Funktion  $k \in C^2(\overline{\Omega})$ , sodass  $\max_{x \in \overline{\Omega}} \|f(x) - k(x)\| < \epsilon$ . Wähle

$$\epsilon := \frac{1}{4} \text{dist}(y, f(\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)))$$

Gemeinsam mit der Voraussetzung  $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$  folgt  $y \notin k(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$  und aus Definition 1.12 erhalten wir  $\deg_B(k, \Omega, y) = \deg_B(f, \Omega, y)$  und wegen  $\partial\Omega_j \subseteq \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$  auch  $\deg_B(k, \Omega_j, y) = \deg_B(f, \Omega_j, y)$  für  $j = 1, 2$ .

Nun wählen wir  $y_1 \notin k(S_k(\Omega))$ , sodass  $\|y - y_1\| < \text{dist}(y, k(\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)))$ . Dann gilt laut Definition 1.8  $\deg_B(k, \Omega, y) = \deg_B(k, \Omega, y_1)$  sowie die entsprechenden Gleichheiten für  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ . Insgesamt erhalten wir  $\deg_B(f, \Omega, y) = \deg_B(k, \Omega, y_1)$  und  $\deg_B(f, \Omega_j, y) = \deg_B(k, \Omega_j, y_1)$  mit  $j = 1, 2$  sowie  $k \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $y_1 \notin k(S_k(\Omega))$  und  $y_1 \notin k(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ .

Sei also  $f \in C^1(\overline{\Omega})$  und  $y \notin f(S_f(\Omega))$ . Da wir  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  als disjunkt voraussetzen und  $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$  gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \deg_B(f, \Omega_1 \cup \Omega_2, y) &= \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \text{sgn}(\det J_f(x)) \\ &= \sum_{\substack{x \in f^{-1}\{y\} \\ x \in \Omega_1}} \text{sgn}(\det J_f(x)) + \sum_{\substack{x \in f^{-1}\{y\} \\ x \in \Omega_2}} \text{sgn}(\det J_f(x)) \\ &= \deg_B(f, \Omega_1, y) + \deg_B(f, \Omega_2, y). \end{aligned}$$

- (d3)  $\deg_B(h(t, \cdot), \Omega, y(t))$  ist unabhängig von  $t \in [0, 1]$ , falls  $h: [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  sowie  $y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig sind mit  $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$  für alle  $t \in [0, 1]$ :

Da  $[0, 1] \times \partial\Omega$  kompakt ist, existiert ein  $\epsilon_1 > 0$ , sodass

$$\|h(t, x) - y(t)\| > 12\epsilon_1 \quad \text{für alle } (t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega.$$

Da  $[0, 1] \times \overline{\Omega}$  kompakt ist, sind sowohl  $h$  als auch  $y$  gleichmäßig stetig. Somit gibt es eine Zerlegung  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  von  $[0, 1]$ , die

$$\|h(t_i, x) - h(t_{i+1}, x)\| < \epsilon_1 \quad \text{und} \quad \|y(t_{i+1}) - y(t_i)\| < \epsilon_1 \quad (1.4)$$

für alle  $x \in \overline{\Omega}$  und  $i = 0, \dots, m-1$  erfüllt. Für  $i = 0, \dots, m$  sei  $f_{i,k}: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Folge von  $C^2$ -Funktionen, die für  $k \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen  $h(t_i, \cdot)$  konvergiert. Dann finden wir einen Index  $k_1$ , sodass

$$\|f_{i,k}(x) - h(t_i, x)\| < \epsilon_1 \quad \text{für alle } k \geq k_1, x \in \overline{\Omega}, i = 0, \dots, m.$$

Wegen  $\|h(t_i, x) - y(t_i)\| > 12\epsilon_1$  für  $x \in \partial\Omega$  gilt für  $i = 0, \dots, m$

$$3\epsilon_1 < \frac{1}{4} \text{dist}(y(t_i), h(t_i, \partial\Omega)).$$



Für  $i = 0, \dots, m-1$  gilt

$$\begin{aligned} \|f_{i+1,k} - h(t_i, \cdot)\| &\leq \|f_{i+1,k} - h(t_{i+1}, \cdot)\| + \|h(t_{i+1}, \cdot) - h(t_i, \cdot)\| \\ &< \epsilon_1 + \epsilon_1 \\ &< \frac{1}{4} \text{dist}(y(t_i), h(t_i, \partial\Omega)). \end{aligned}$$

Also wird die Voraussetzung aus Definition 1.12 für stetige Funktionen  $h(t_i, \cdot)$  von  $f_{i,k}$  und von  $f_{i+1,k}$  erfüllt.

Somit gilt

$$\deg_B(f_{i,k}, \Omega, y(t_i)) = \deg_B(h(t_i, \cdot), \Omega, y(t_i)) = \deg_B(f_{i+1,k}, \Omega, y(t_i)). \quad (1.5)$$

Wegen

$$\begin{aligned} 12\epsilon_1 &< \|y(t_i) - h(t_i, \cdot)\| \\ &\leq \|y(t_i) - f_{i+1,k}\| + \underbrace{\|f_{i+1,k} - h(t_{i+1}, \cdot)\|}_{< \epsilon_1} + \underbrace{\|h(t_{i+1}, \cdot) - h(t_i, \cdot)\|}_{< \epsilon_1} \end{aligned}$$

folgt  $\|y(t_i) - f_{i+1,k}\| > 10\epsilon_1$ , also  $\|y(t_{i+1}) - y(t_i)\| < \epsilon_1 < 10\epsilon_1 < \text{dist}(y(t_i), f_{i+1,k}(\partial\Omega))$ . Mithilfe von Lemma 1.9 bekommen wir

$$\deg_B(f_{i+1}, \Omega, y(t_i)) = \deg_B(f_{i+1}, \Omega, y(t_{i+1})).$$

Gemeinsam mit (1.5) erhalten wir  $\deg_B(h(t_i, \cdot), \Omega, y(t_i)) = \deg_B(f_{i+1}, \Omega, y(t_{i+1})) = \deg_B(h(t_{i+1}, \cdot), \Omega, y(t_{i+1}))$  für alle  $i = 0, \dots, m-1$ , also

$$\deg_B(h(0, \cdot), \Omega, y(0)) = \deg_B(h(t_1, \cdot), \Omega, y(t_1)) = \dots = \deg_B(h(1, \cdot), \Omega, y(1)).$$

Da für ein festes  $t \in [0, 1]$  die Zerlegung  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  derart gewählt werden kann, dass  $t = t_j$  für ein  $j \in \{0, \dots, m\}$  ist  $t \mapsto \deg_B(h(t, \cdot), \Omega, y(t))$  konstant auf  $[0, 1]$ . □

Es folgt ein Beispiel für die Berechnung des Abbildungsgrades in  $\mathbb{R}^2$ .

*Beispiel 1.14.* Sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ -y^3 + 3x^2y \end{pmatrix}$$

Wir wollen  $\deg(f, U_2(0), a)$  für  $a = (1, 0)^T$  berechnen. Zunächst gilt

$$\det(J_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{vmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & -3y^2 + 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 + 30x^2y^2 + 3y^4$$

Nun ist das Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned}x^3 - 3xy^2 &= 1 \\ -y^3 + 3x^2y &= 0\end{aligned}$$

Mit Hilfe einer Fallunterscheidung kommt man auf die Lösungen:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} i/2 \\ \sqrt{3}i/2 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} i/2 \\ -\sqrt{3}i/2 \end{pmatrix}$$

und erhält somit

$$\deg(f, U_2(0), a) = \sum_{i=1}^3 \operatorname{sgn}(\det J_f(x_i)) = \operatorname{sgn}(3) + 2 \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{3}{16} + \frac{90}{16} + \frac{27}{16}\right) = 3.$$

## 1.2 Eigenschaften des Abbildungsgrades

Die Eigenschaften (d4)-(d7) folgen unmittelbar aus den Haupteigenschaften (d1)-(d3).

**Definition 1.15.** Eine *Zusammenhangskomponente* ist eine maximal zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes.

**Proposition 1.16.**

(d4) (*Kroneckersches Existenzprinzip*) Aus  $\deg(f, \Omega, y) \neq 0$  folgt die Existenz eines  $x \in \Omega$ , sodass  $f(x) = y$ , d.h.  $f^{-1}\{y\} \neq \emptyset$ .

(d5)  $\deg(\cdot, \Omega, y)$  ist konstant auf

$$\{g \in C(\overline{\Omega}) : \max_{x \in \overline{\Omega}} \|g(x) - f(x)\| < r\}$$

und  $\deg(f, \Omega, \cdot)$  ist konstant auf  $U_r(y) \subset \mathbb{R}^n$ , wobei  $r = \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$ . Weiters ist  $\deg(f, \Omega, \cdot)$  konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ .

(d6) Der Abbildungsgrad hängt nur von den Werten am Rand ab, d.h.  $\deg(g, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, y)$  wenn  $g|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$ .

(d7) Sei  $\Omega_1$  eine offene Teilmenge von  $\Omega$ , wobei  $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$ . Dann gilt  $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y)$ .

*Beweis.*

(d7) Sei  $\Omega_1 := \Omega$  und  $\Omega_2 := \emptyset$ . Wegen (d2) gilt  $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, y) + \deg(f, \emptyset, y)$  und damit  $\deg(f, \emptyset, y) = 0$ . Also folgt aus (d2) mit  $\Omega_2 = \emptyset$ , dass  $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y)$ , wann immer  $\Omega_1$  offene Teilmenge von  $\Omega$  ist und  $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$ .

(d4) Sei  $f^{-1}\{y\} = \emptyset$ , also  $y \notin f(\overline{\Omega}) = f(\overline{\Omega} \setminus \emptyset)$ . Aus (d7) mit  $\Omega_1 = \emptyset$  folgt  $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \emptyset, y) = 0$ .

(d5) Wir zeigen zuerst, dass  $\deg(\cdot, \Omega, y)$  konstant ist auf

$$\{g \in C(\bar{\Omega}) : \max_{x \in \bar{\Omega}} \|g(x) - f(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial\Omega))\}.$$

(d3) besagt, dass  $\deg(h(t, \cdot), \Omega, y)$  konstant ist, wenn  $h$  stetig ist und  $y \notin h(t, \partial\Omega)$ . Für  $g$  aus obiger Menge definieren wir die stetige Funktion  $h(t, x) := tg(x) + (1-t)f(x)$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $y \notin h(t, \partial\Omega)$ . Betrachte für  $x \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned} \|y - h(t, x)\| &= \|y - tg(x) - f(x) + tf(x)\| = \|y - f(x) - t(g(x) - f(x))\| \\ &\geq \|y - f(x)\| - |t|\|g(x) - f(x)\|. \end{aligned}$$

Wegen  $\|y - f(x)\| \geq \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$  und  $\|g(x) - f(x)\| < \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$  folgt

$$\begin{aligned} \|y - f(x)\| - |t|\|g(x) - f(x)\| &> \|y - f(x)\| - |t|\text{dist}(y, f(\partial\Omega)) \\ &\geq \text{dist}(y, f(\partial\Omega)) - |t|\text{dist}(y, f(\partial\Omega)) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Also gilt  $y \notin h(t, \partial\Omega)$  und aus (d3) folgt  $\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, y)$ .

Für die letzte Aussage stellen wir fest, dass  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  offen ist und damit auch ihre Zusammenhangskomponenten. Wir verwenden die Eigenschaft, dass in  $\mathbb{R}^n$  zusammenhängend äquivalent zu wegzusammenhängend ist; Siehe [Ka15, Kapitel 11, Lemma 11.3.3]. Wenn also  $B$  eine Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  ist und  $y_1, y_2 \in B$ , dann finden wir eine stetige Kurve  $y: [0, 1] \rightarrow B$ , sodass  $y(0) = y_1$  und  $y(1) = y_2$ . Wähle  $h(t, x) = f(x)$ . Dann folgt aus (d3), dass der Abbildungsgrad konstant auf Zusammenhangskomponenten ist.

Dass  $\deg(f, \Omega, \cdot)$  auf  $U_r(y)$  mit  $r = \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$  konstant ist, folgt aus dem soeben Gezeigten, da die Kugel  $U_r(y)$  ganz in einer Zusammenhangskomponente enthalten ist.

(d6) Wir verwenden (d3), setzen  $y(t) \equiv y$  und  $h(t, x) = tf(x) + (1-t)g(x)$ . Für  $x \in \partial\Omega$  gilt  $h(t, x) = tf(x) + (1-t)f(x) = f(x) \neq y$ , also  $y \notin h(t, \partial\Omega)$ .

□

### 1.3 Eindeutigkeit des Abbildungsgrades

Dieses Unterkapitel beschäftigt sich ausschließlich mit dem Beweis der Eindeutigkeit des Brouwerschen Abbildungsgrades.

**Lemma 1.17.** *Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $\det A \neq 0$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen mit  $0 \in \Omega$ . Erfüllt  $\deg$  (d1)-(d3), so gilt*

$$\deg(A, \Omega, 0) = \text{sgn}(\det A).$$

*Beweis.* Sei  $\mathbb{R}^n = N \oplus M$  wie in Proposition 0.19, sodass  $A|_N$  nur die paarweise verschiedenen negative Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  und  $A|_M$  keine negativen Eigenwerte hat.  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  bezeichnen die Vielfachheiten von  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Weiters seien  $\mu_{m+1}, \dots, \mu_p$  mit  $p \leq n$  die positiven Eigenwerte

von  $A$  und  $b_{m+1}, \dots, b_p$  deren Vielfachheiten. 0 ist kein Eigenwert von  $A$ , da  $A$  regulär ist. Es gilt

$$\det(A - \lambda \text{id}) = (-1)^n \prod_{k=1}^m (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k} \prod_{j=m+1}^p (\lambda - \mu_j)^{\beta_j},$$

und infolge

$$\det A = (-1)^\alpha \prod_{k=1}^m |\lambda_k|^{\alpha_k} \prod_{j=m+1}^p \mu_j^{\beta_j} \text{ mit } \alpha = \sum_{k=1}^m \alpha_k,$$

also  $\text{sgn}(\det A) = (-1)^\alpha$ .

Wenn  $A$  keine negativen Eigenwerte hat, gilt  $\det(tA + (1-t)\text{id}) \neq 0$  in  $[0, 1]$ , womit die Voraussetzungen von (d3) wegen  $0 \in \Omega$  erfüllt sind. Aus (d1) und (d3) folgt  $\deg(A, \Omega, 0) = \deg(\text{id}, \Omega, 0) = 1 = \text{sgn}(\det A)$ .

Betrachten wir nun den Fall, dass  $A$  negative Eigenwerte hat, also  $N \neq \{0\}$ . Wegen  $\mathbb{R}^n = N \oplus M$  hat jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  eine eindeutige Darstellung  $x = P_N x + P_M x$  mit  $P_N x \in N$  und  $P_M x \in M$  mit Projektionen  $P_N: \mathbb{R}^n \rightarrow N$  und  $P_M = I - P_N: \mathbb{R}^n \rightarrow M$ .

Wir wollen  $\deg(A, \Omega, 0) = \deg(-P_N + P_M, \Omega, 0)$  zeigen und benötigen dafür die Homotopie  $h_0(t, x) = tAx + (1-t)(-P_N x + P_M x)$ . Um (d3) anwenden zu können, muss gelten, dass

$$h_0(t, x) = tAx + (1-t)(-P_N x + P_M x) \neq 0 \quad \text{für } (t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega. \quad (1.6)$$

Um das einzusehen, beachte, dass  $h(0, x) = 0$  die Gleichung  $P_N x = P_M x \in N \cap M = \{0\}$  und weiter  $x = 0 \notin \partial\Omega$  impliziert.

Als nächstes nehmen wir  $h(t, x) = 0$  mit  $t \neq 0$  an, also

$$tAx + P_M x - P_N x + tP_N x - tP_M x = 0,$$

was wegen  $\mathbb{R}^n = N \oplus M$  äquivalent zu

$$tAP_N x - (1-t)P_N x = 0 \quad \text{und} \quad tAP_M x + (1-t)P_M x = 0$$

beziehungsweise zu

$$AP_N x = \lambda P_N x \in N \quad \text{und} \quad AP_M x = -\lambda P_M x \in M$$

ist, wobei  $\lambda = \frac{1-t}{t} > 0$ . Da  $A|_N$  nur negative und  $A|_M$  nur positive Eigenwerte hat, folgt  $P_N x = P_M x = 0$ , was  $x = 0 \notin \partial\Omega$  ergibt. Da wir  $x \in \partial\Omega$  vorausgesetzt hatten, erhalten wir einen Widerspruch. Also folgt aus (d3)

$$\deg(A, \Omega, 0) = \deg(-P_N + P_M, \Omega, 0). \quad (1.7)$$

*Schritt 1:*

Sei  $\alpha = \dim N$  gerade, also  $\alpha = 2p$  für  $p \geq 1$ . Wir konstruieren eine  $\alpha \times \alpha$ -Matrix  $B$  mit  $B^2 = -I|_N$ . Für  $p = 1$  sei  $B = B_1$ , wobei

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Für allgemeines  $p$  bestehe  $B$  aus  $B_1$ -Blöcke in der Hauptdiagonale, also

$$b_{2j-1,2j} = 1 = b_{2j,2j-1} \text{ für } j = 1, \dots, p, \quad (1.8)$$

und  $b_{jk} = 0$  für alle anderen  $j, k$ .

Wir definieren Homotopien zwischen  $-P_N + P_M$  und  $BP_N + P_M$  und zwischen  $I = P_N + P_M$  und  $BP_N + P_M$  durch

$$\begin{aligned} h_1(t, x) &= tBP_Nx - (1-t)P_Nx + P_Mx, \\ h_2(t, x) &= tBP_Nx + (1-t)P_Nx + P_Mx. \end{aligned}$$

Um (d3) anwenden zu können, muss

$$h_1(t, x) = tBP_Nx - (1-t)P_Nx + P_Mx \neq 0, \quad (t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$$

gelten. Für  $t = 0$  würde  $h_1(0, x) = -P_Nx + P_Mx = 0$  auch  $x = 0 \notin \partial\Omega$  implizieren. Für  $t \neq 0$  folgt aus  $h_1(t, x) = 0$

$$BP_Nx = \frac{1-t}{t}P_Nx \quad \text{und} \quad P_Mx = 0,$$

was im Fall  $x \neq 0$  aber ein Widerspruch dazu ist, dass  $B$  nur komplexwertige Eigenwerte hat. Die Argumentation für  $h_2$  verläuft analog. Aus (d3) und (1.7) folgt  $\deg(A, \Omega, 0) = \deg(I, \Omega, 0) = 1 = (-1)^{2p} = \text{sgn}(\det A)$ .

*Schritt 2.1:*

Sei  $\alpha = \dim N$  ungerade, d.h  $\alpha = 2p + 1$  für  $p \geq 0$ . Wir können  $N$  schreiben als:  $N = N_1 \oplus N_2$  mit  $\dim N_1 = 1$  und  $\dim N_2 = 2p$  mit dazugehörigen Projektionen  $\tilde{Q}_1: N \rightarrow N_1$  und  $\tilde{Q}_2 = I|_N - \tilde{Q}_1: N \rightarrow N_2$ . Dann gilt  $P_N = \tilde{Q}_1P_N + \tilde{Q}_2P_N$ .

Wir wollen zeigen, dass die Homotopie  $h_3(t, x) = -\tilde{Q}_1P_N + tB\tilde{Q}_2P_Nx - (1-t)\tilde{Q}_2P_Nx + P_M$  zwischen  $-\tilde{Q}_1P_N - \tilde{Q}_2P_N + P_M$  und  $-\tilde{Q}_1P_N + B\tilde{Q}_2P_N + P_M$  die Ungleichung  $h_3(t, x) \neq 0$  auf  $[0, 1] \times \partial\Omega$  erfüllt. Hier ist  $B$  wie in (1.8).

Für  $t = 0$  erhalten wir  $h_3(0, x) = -\tilde{Q}_1P_Nx - \tilde{Q}_2P_Nx + P_Mx \neq 0$ , da  $x \in \partial\Omega$  und somit  $P_Nx \neq 0$  oder  $P_Mx \neq 0$ . Angenommen, es existiert  $(t, x) \in (0, 1] \times \partial\Omega$ , sodass  $h_3(t, x) = 0$ . Dann folgt durch wenige Umformungen

$$B(\tilde{Q}_2P_Nx) = \frac{1-t}{t}(\tilde{Q}_2P_Nx) \quad \text{und} \quad P_Mx = 0,$$

was im Falle  $x \neq 0$  ein Widerspruch dazu ist, dass  $B$  nur komplexe Eigenwerte besitzt.

Wir benötigen noch eine Homotopie zwischen  $-\tilde{Q}_1P_N + B\tilde{Q}_2P_N + P_M$  und  $-\tilde{Q}_1P_N + \tilde{Q}_2P_N + P_M$ :

$$h_4(t, x) = -\tilde{Q}_1P_N + t\tilde{Q}_2P_N + (1-t)B\tilde{Q}_2P_N + P_M.$$

Der Beweis, dass  $h_4(t, x) \neq 0$  auf  $[0, 1] \times \partial\Omega$  ist, verläuft analog zu jenem von  $h_3(t, x)$ .

Kennzeichnen wir die Homotopien  $h_0, h_3$  und  $h_4$  in dieser Reihenfolge mit  $\rightarrow$ , so erhalten wir insgesamt

$$A \rightarrow -P_N + P_M \rightarrow -\tilde{Q}_1P_N + B\tilde{Q}_2P_N + P_M \rightarrow -\tilde{Q}_1P_N + \tilde{Q}_2P_N + P_M.$$

Wegen (d3) folgt  $\deg(A, \Omega, 0) = \deg(-Q_1 + Q_2, \Omega, 0)$  mit  $Q_1 = \tilde{Q}_1 P_N$  und  $Q_2 = \tilde{Q}_2 P_N + P_M$ . Dabei sind  $Q_1$  und  $Q_2$  die Projektionen zur Zerlegung  $\mathbb{R}^n = N_1 \oplus (N_2 \oplus M)$ .

*Schritt 2.2:*

Wir wissen bereits  $\deg(A, \Omega, 0) = \deg(-Q_1 + Q_2, \Omega, 0)$  und wollen  $\deg(A, \Omega, 0) = -1 = (-1)^{2p+1} = \text{sgn}(\det A)$  nachweisen. Also bleibt noch  $\deg(-Q_1 + Q_2, \Omega, 0) = -1$  zu zeigen.

Wegen  $\dim N_1 = 1$  gilt  $N_1 = \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}$  für ein  $e \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|e\| = 1$ . Betrachte

$$U = \{\lambda e : \lambda \in (-2, 2)\}, \quad U_1 = \{\lambda e : \lambda \in (-2, 0)\}, \quad U_2 = \{\lambda e : \lambda \in (0, 2)\}$$

und sei  $V \subset N_2 \oplus M$  eine offene Menge mit  $0 \in V$ . Wir definieren eine Abbildung

$$f : U + V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \lambda e + r \mapsto (|\lambda| - 1)e + r.$$

Die Funktion  $h_5(t, \lambda e + r) = t(|\lambda| - 2)e + e + r$  mit  $t \in [0, 1]$ ,  $\lambda e + r \in U + V$  ist eine Homotopie zwischen  $f$  und der Funktion  $g(\lambda e + r) = e + r$ . Wir zeigen  $h_5(t, \lambda e + r) \neq 0$  auf  $[0, 1] \times \partial(U + V)$ . Angenommen  $h_5(t, \lambda e + r) = 0$  für ein Paar  $(t, \lambda e + r) \in [0, 1] \times \partial(U + V)$ . Beachte, dass  $\partial(U + V) = (\partial U + V) \cup (U + \partial V) \cup (\partial U + \partial V)$ . Es folgt

$$t(|\lambda| - 2)e + e = 0 \quad \text{und} \quad r = 0.$$

Wegen  $|\lambda| - 2 = 0$  auf  $\partial U$ , sowie  $0 \notin \partial V$  erhalten wir einen Widerspruch. Also folgt aus (d3)

$$\deg(f, U + V, 0) = \deg(g, U + V, 0). \quad (1.9)$$

Da  $e$  konstant und ungleich 0 ist und damit  $g^{-1}\{0\} = \emptyset$ , folgt aus (d4)  $\deg(g, U + V, 0) = 0$  und wegen (1.9) auch  $\deg(f, U + V, 0) = 0$ .

Wegen  $f|_U = (|\lambda| - 1)e = 0$  genau dann, wenn  $|\lambda| = 1$ , folgt, dass  $f|_U$  keine Nullstellen in  $\bar{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$  hat, also  $0 \notin f|_U(\bar{U} \setminus (U_1 \cup U_2))$ , was  $0 \notin f(\bar{U} + \bar{V} \setminus [(U_1 \cup U_2) + V])$  impliziert. Also gilt laut (d2)

$$0 = \deg(f, U + V, 0) = \deg(f, U_1 + V, 0) + \deg(f, U_2 + V, 0).$$

Wir untersuchen nun  $f|_{U_1+V}(\lambda e + r) = -(\lambda + 1)e + r$ . Die einzige Nullestelle dieser Funktion ist  $-e + 0 \in U_1 + V$ . Betrachten wir  $-(\lambda + 1)e + r$  auf ganz  $U + V$ , wird klar, dass es keine weiteren Nullstellen gibt. Weiters erkennen wir  $-(\lambda + 1)e + r = -\lambda e - e + r = [(-\text{id}|_U) + \text{id}|_V](\lambda e + r) - e$ . Aus (d7) folgt

$$\deg(f, U_1 + V, 0) = \deg(f|_{U_1+V}, U_1 + V, 0) = \deg([(-\text{id}|_U) + \text{id}|_V] - e, U + V, 0).$$

Nun betrachten wir die Homotopie  $h_6(t, \lambda e + r) = -\lambda e - te + r$  zwischen  $[(-\text{id}|_U) + \text{id}|_V] - e$  und  $[(-\text{id}|_U) + \text{id}|_V]$ . Da  $h_6(t, \lambda e + r) = 0$ ,  $t = -\lambda$  impliziert, aber  $|\lambda| = 2$  auf  $\partial U$ , ist  $h_6(t, \lambda e + r) \neq 0$  auf  $[0, 1] \times \partial(U + V)$ . Aus (d3) folgt

$$\deg([(-\text{id}|_U) + \text{id}|_V] - e, U + V, 0) = \deg([(-\text{id}|_U) + \text{id}|_V], U + V, 0).$$

Wir gehen analog für  $f|_{U_2+V}(\lambda e + r) = (\lambda - 1)e + r$  vor. Da  $e + 0 \in U_2 + V$  die einzige Nullstelle von  $(\lambda - 1)e + r$  auf ganz  $U$  ist und  $(\lambda - 1)e + r = \lambda e - e + r = [(-\text{id}|_U) + \text{id}|_V] - e$ , folgt

zusammen mit (d7)

$$\deg(f, U_2 + V, 0) = \deg(f|_{U_2+V}, U_2 + V, 0) = \deg([(-\text{id}|_U) + \text{id}|_V] - e, U + V, 0).$$

Die Homotopie  $h_7(t, \lambda e + r) = \lambda e - te + r$  zwischen  $[(-\text{id}|_U) + \text{id}|_V] + e$  und  $[(-\text{id}|_U) + \text{id}|_V]$  erfüllt die Voraussetzungen von (d3), da  $|\lambda| = 2$  auf  $\partial U$  und somit  $t \neq \lambda$  beziehungsweise  $h_7(t, \lambda e + r) \neq 0$ . Wir erhalten

$$\deg([(-\text{id}|_U) + \text{id}|_V] - e, U + V, 0) = \deg([\text{id}|_U + \text{id}|_V], U + V, 0).$$

und damit insgesamt

$$\begin{aligned} 0 &= \deg(f, U_1 + V, 0) + \deg(f, U_2 + V, 0) \\ &= \deg([(-\text{id}|_U) + \text{id}|_V], U + V, 0) + \deg([\text{id}|_U + \text{id}|_V], U + V, 0). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Wegen  $[\text{id}|_U + \text{id}|_V] = \text{id}|_{U+V}$  und (d1) gilt  $\deg([\text{id}|_U + \text{id}|_V], U + V, 0) = 1$ . Also folgt gemeinsam mit (1.10)

$$\deg([(-\text{id}|_U) + \text{id}|_V], U + V, 0) = -1.$$

Da  $U$  und  $V$  Nullumgebungen sind, und wir  $0 \in \Omega$  vorausgesetzt haben, existiert eine offene Nullumgebung  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\Omega_1 \subseteq \Omega \cap (U + V)$ . Somit folgt aus (d7)

$$\begin{aligned} \deg([(-\text{id}|_U) + \text{id}|_V], U + V, 0) &= \deg([(-\text{id}|_U) + \text{id}|_V], \Omega_1, 0) \\ &= \deg([(-\text{id}|_U) + \text{id}|_V], \Omega, 0) \\ &= \deg([(-\text{id}|_{N_1}) + \text{id}|_{N_2 \oplus M}], \Omega, 0). \end{aligned}$$

Also erhalten wir schlussendlich

$$\deg(A, \Omega, 0) = \deg(-Q_1 + Q_2, \Omega, 0) = \deg((- \text{id}|_{N_1}) \times \text{id}|_{N_2 \oplus M}, \Omega, 0) = -1 = \text{sgn}(\det A).$$

□

**Satz 1.18.** *Sei*

$$M = \{(f, \Omega, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen und beschränkt, } f \in C(\overline{\Omega}), y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)\}.$$

*Dann existiert höchstens eine Funktion*

$$\deg: M \rightarrow \mathbb{Z}$$

*mit den Eigenschaften (d1)-(d3).*

*Beweis.* Sei  $\deg: M \rightarrow \mathbb{Z}$  eine beliebige Funktion mit den Eigenschaften (d1), (d2) und (d3). Wir zeigen, dass dann  $\deg = \deg_B$  gilt. Der Beweis ist in 2 Schritte aufgeteilt.

*Schritt 1:*

Als erstes betrachten wir  $f \in C^2(\overline{\Omega})$  mit  $y \notin f(\partial\Omega \cup S_f)$ .

Falls  $f^{-1}\{y\} = \emptyset$ :

Wegen (d4) gilt  $\deg(f, \Omega, y) = 0$ . Da  $\deg_B$  auch (d1)-(d7) erfüllt, gilt auch  $\deg_B(f, \Omega, y) = 0$ .

Falls  $f^{-1}\{y\} = \{x_1, \dots, x_m\} \neq \emptyset$ :

Wir definieren die lineare Abbildung  $A_i$  als  $A_i := J_f(x_i)$  für alle  $i = 1, \dots, m$ . Wir wissen aus Lemma 1.17, dass

$$\deg_B(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}(\det J_f(x_i)) = \sum_{i=1}^m \deg(A_i, \Omega, 0).$$

Nun wollen wir zeigen, dass

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg_B(f, \Omega, y). \quad (1.11)$$

Dazu wählen wir disjunkte offene Umgebungen  $U_i$  von  $x_i$ . Wegen  $y \notin f(\bar{\Omega} \setminus (\bigcup_i U_i))$  folgt aus (d7)

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^n \deg(f, U_i, y).$$

Um  $\deg(f, U_i, y)$  zu berechnen, bemerke, dass per Definition der Ableitung auf normierten Räumen sicher

$$f(x) = y + A_i(x - x_i) + \|x - x_i\| \cdot \varepsilon(x - x_i), \quad (1.12)$$

wobei  $\varepsilon$  in 0 stetig ist mit  $\varepsilon(0) = 0$ . Da die Matrizen  $A_i$  für alle  $i$  regulär sind, existieren die Inversen  $A_i^{-1}$ . Aus

$$\|z\| = \|A_i^{-1}A_i z\| \leq \|A_i^{-1}\| \|A_i z\|$$

folgt  $\|A_i z\| \geq \|z\| \cdot c$  auf  $\mathbb{R}^n$  für  $c = \frac{1}{\|A_i^{-1}\|} > 0$ . Betrachte die stetigen Funktionen  $y(t) = ty$  und  $h(t, x) = tf(x) + (1-t)A_i(x - x_i)$ . Für  $t \in [0, 1]$  und hinreichend kleines  $\delta > 0$  folgt aus  $\|x - x_i\| \leq \delta$

$$\begin{aligned} \|h(t, x) - y(t)\| &= \|A_i(x - x_i) + t \cdot \|x - x_i\| \cdot \varepsilon(x - x_i)\| \\ &\geq \|A_i(x - x_i)\| - \|t \cdot \|x - x_i\| \cdot \varepsilon(x - x_i)\| \\ &\geq c\|x - x_i\| - \|x - x_i\| \cdot \varepsilon(x - x_i) > 0. \end{aligned}$$

Deshalb folgt aus (d3) und (1.12), dass  $\deg(f, U_\delta(x_i), y) = \deg(A_i - A_i x_i, U_\delta(x_i), 0)$ . Da auf  $\bar{U}_i \setminus U_\delta(x_i)$ ,  $f(x) \neq y$  gilt, folgt mit (d7)

$$\deg(f, U_i, y) = \deg(f, U_\delta(x_i), y)$$

und somit

$$\deg(f, U_i, y) = \deg(A_i - A_i x_i, U_\delta(x_i), 0). \quad (1.13)$$



Da  $x_i$  die einzige Lösung von  $A_i(x - x_i) = 0$  ist, folgt wieder aus (d7)

$$\deg(A_i - A_i x_i, U_\delta(x_i), 0) = \deg(A_i - A_i x_i, U_r(0), 0) \quad (1.14)$$

mit  $r > 0$ , sodass  $U_r(0) \supset U_\delta(x_i)$  für alle  $i$ . Wählt man  $y(t) \equiv 0$  und  $h(t, x) = t(A_i x - A_i x_i) + (1 - t)A_i x = A_i(x - tx_i)$ , so gilt wegen

$$\|x - tx_i\| \geq \| \|x\| - t\|x_i\| \| = r - t\|x_i\| > 0 \quad \text{für } x \in \partial U_r(0),$$

$h(t, x) \neq 0$  auf  $[0, 1] \times \partial U_r(0)$ . Aus (d3) folgt schließlich

$$\deg(A_i - A_i x_i, U_r(0), 0) = \deg(A_i, U_r(0), 0)$$

und mit (1.13), (1.14) und (d7)

$$\deg(A_i, \Omega, 0) = \deg(A_i, U_r(0), 0) = \deg(f, U_i, y).$$

Somit bekommen wir mit Hilfe von Lemma 1.17 schließlich

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^m \deg(f, U_i, y) = \sum_{i=1}^m \deg(A_i, \Omega, 0) = \sum_{i=1}^m \deg_B(A_i, \Omega, 0) = \deg_B(f, \Omega, y).$$

*Schritt 2:*

Sei nun  $f \in C^2(\overline{\Omega})$  und  $y \notin f(\partial\Omega)$  beliebig.

Dann gilt  $U_\alpha(y) \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$ , wobei  $\alpha = \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$ . Wähle  $h(t, x) = f(x)$  und  $y(t) = ty + (1 - t)y_1$ , wobei  $y_1 \in U_\alpha(y)$  und  $y_1 \notin f(S_f(\Omega))$  ist. Die beiden Funktionen sind stetig. Wegen  $h(t, \partial\Omega) = f(\partial\Omega)$  und  $U_\alpha(y_0) \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$ , sind die Voraussetzungen von (d3) erfüllt. Es folgt

$$\deg(f, \Omega, y_1) = \deg(f, \Omega, y) \quad \text{für alle } y_1 \in U_\alpha(y).$$

Dieselbe Aussage gilt für  $\deg_B$ , womit  $\deg(f, \Omega, y) = \deg_B(f, \Omega, y)$ .

Betrachte schlussendlich  $f \in C(\overline{\Omega})$  und  $y \notin f(\partial\Omega)$ . Dann ist  $\alpha = \text{dist}(y, f(\partial\Omega)) > 0$  und wir finden  $g \in C^2(\overline{\Omega})$ , sodass  $\max_{x \in \overline{\Omega}} \|f(x) - g(x)\| < \alpha$ , siehe Bemerkung 0.10. Die Funktion  $h: [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiert durch  $h(t, x) = (1 - t)f(x) + tg(x)$  ist stetig und mit  $y(t) = y$  gilt

$$\|h(t, x) - y(t)\| \geq \|f(x) - y\| - \max_{w \in \overline{\Omega}} \|f(w) - g(w)\| > 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega.$$

Aus (d3) folgt  $\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, y)$ . Dasselbe gilt für  $\deg_B$ , womit der Satz gezeigt ist. □

## 2 Anwendungen der Abbildungsgrades

Es folgen einige bekannte Sätze, in deren Beweisen der Abbildungsgrad angewendet wird.

### 2.1 Der Brouwersche Fixpunktsatz

**Definition 2.1.** Sei  $X$  ein Raum und  $A \subset X$  ein Teilraum. Eine *Retraktion* ist eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow A$ , für die  $f|_A = \text{id}|_A$  gilt.

**Lemma 2.2.** Sei  $R > 0$  und  $f: K_R(0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow K_R(0)$  stetig. Dann hat  $f$  einen Fixpunkt.

*Beweis.* Wenn  $f$  einen Fixpunkt am Rand hat, dann sind wir fertig. Wir können also  $x \neq f(x)$  für alle  $x \in \partial U_R(0)$  annehmen. Sei  $h: [0, 1] \times \partial U_R(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert durch  $h(t, x) = x - tf(x)$ . Dann gilt  $h(t, x) \neq 0$  für  $(t, x) \in [0, 1] \times \partial U_R(0)$ . Um das einzusehen, bemerke, dass am Rand  $\|x\| = R$  und  $f(x) \neq x$  gilt, weshalb

$$\|h(t, x)\| \geq \|x\| - t\|f(x)\| = R - t\|f(x)\| \geq (1 - t)R > 0$$

auf  $[0, 1] \times \partial U_R(0)$ . Für  $t = 1$  gilt am Rand  $h(t, x) = x - f(x) \neq 0$ . Aus (d3) und (d1) folgt  $\deg(\text{id} - f, \Omega, 0) = \deg(\text{id}, \Omega, 0) = 1$ . Aus der Eigenschaft (d4), dem Kronckerschen Existenzprinzip, folgt, dass es ein  $x \in U_R(0)$  gibt, für das  $x - f(x) = 0$  beziehungsweise  $f(x) = x$  gilt.  $\square$

**Satz 2.3** (Brouwerscher Fixpunktsatz). Sei  $D \neq \emptyset$  eine konvexe, kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und  $f: D \rightarrow D$  eine stetige Abbildung. Dann hat  $f$  einen Fixpunkt.

*Beweis.* Wähle  $U_R(0)$  so groß, dass  $D \subset U_R(0)$ . Dann existiert eine Retraktion  $p_D: K_R(0) \rightarrow D$  mit  $\|x - p_D(x)\| = \inf\{\|y - x\| : y \in D\}$  für alle  $x \in K_R(0)$ , siehe [WKB15, Kapitel 3, Satz 3.2.3]. Nun wenden wir Lemma 2.2 an und erhalten, dass  $x_0 \in K_R(0)$  existiert mit  $f(p_D(x_0)) = x_0$ . Da  $f$  nach  $D$  hinein abbildet, gilt  $x_0 \in D$  und somit  $p_D(x_0) = x_0$  und schließlich  $f(x_0) = x_0$ .  $\square$

Dieses wichtige Theorem kann unter anderem bei Eigenwertproblemen verwendet werden.

**Proposition 2.4** (Perron-Frobenius). Sei  $A = (a_{ij})$  eine  $n \times n$ -Matrix mit  $a_{ij} \geq 0$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$ . Dann existiert  $\lambda \geq 0$  und  $x \neq 0$  sodass  $x_i \geq 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$  und  $Ax = \lambda x$ , d.h.  $A$  hat einen nicht negativen Eigenvektor zu einem nichtnegativen Eigenwert.

*Beweis.* Sei

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, n \text{ und } \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

Wenn  $Ax = 0$  für ein  $x \in D$ , so folgt die Aussage mit  $\lambda = 0$ . Wenn  $Ax \neq 0$  auf  $D$ , dann gilt wegen der Kompaktheit von  $D$ , dass  $\sum_{i=1}^n (Ax)_i \geq \alpha$  für ein  $\alpha > 0$  und alle  $x \in D$ .

Die Abbildung  $f: x \mapsto Ax / \sum_{i=1}^n (Ax)_i$  ist stetig auf  $D$  und es gilt  $f(D) \subset D$ . Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz hat  $f$  einen Fixpunkt  $x_0 \in D$ , wodurch  $Ax_0 = \lambda x_0$  mit  $\lambda = \sum_{i=1}^n (Ax_0)_i$ .  $\square$

## 2.2 Geometrische Anwendungen

*Bemerkung 2.5.* Aus (d5) folgt für beschränktes und offenes  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $f \in C(\overline{\Omega})$ , dass  $\deg(f, \Omega, y)$  auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  konstant ist. Deshalb wird die Schreibweise  $\deg(f, \Omega, G)$  verwendet für  $\deg(f, \Omega, y)$  mit  $y \in G$ .

**Lemma 2.6.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Seien  $K_j$  die Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ . Dann existieren für  $n = 1$  genau zwei unbeschränkte Komponenten. Für  $n > 1$  existiert genau eine unbeschränkte Komponente.*

*Beweis.* Für  $n = 1$  finden wir, da  $f(\overline{\Omega})$  kompakt ist, ein Intervall  $[a, b]$ , sodass  $f(\overline{\Omega}) \subset [a, b]$ . Also existiert eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente  $K_{\infty_1} \supset (-\infty, a)$  und eine weitere,  $K_{\infty_2} \supset (b, \infty)$ . Jede weitere unbeschränkte Zusammenhangskomponente hat infolge nichtleeren Schnitt mit  $K_{\infty_1}$  oder  $K_{\infty_2}$  und stimmt daher mit  $K_{\infty_1}$  oder  $K_{\infty_2}$  überein.

Für  $n > 1$  finden wir, da  $f(\overline{\Omega})$  kompakt ist, ein hinreichend großes  $\epsilon > 0$ , sodass  $K_\epsilon(0) \supset f(\overline{\Omega})$ .  $\mathbb{R}^n \setminus K_\epsilon(0)$  ist zusammenhängend und unbeschränkt. Das heißt, eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente  $K_\infty$  von  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  enthält bereits  $\mathbb{R}^n \setminus K_\epsilon(0)$  und hat damit nichtleeren Schnitt mit jeder anderen unbeschränkten Zusammenhangskomponente, womit es nur eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente geben kann.  $\square$

**Satz 2.7** (Produkttheorem). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $f \in C(\overline{\Omega})$ ,  $g \in C(\mathbb{R}^n)$  und seien  $D_i$  mit  $i \in I$  die beschränkten Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ . Weiters sei  $y \notin (g \circ f)(\partial\Omega)$ . Dann gilt:*

$$\deg(g \circ f, \Omega, y) = \sum_i \deg(f, \Omega, D_i) \deg(g, D_i, y),$$

wobei nur endlich viele Summanden ungleich 0 sind.

*Beweis.* Siehe [De85, Kapitel 1, §5, Satz 5.1]  $\square$

**Definition 2.8.** Eine stetige Kurve  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *einfach geschlossen*, wenn  $C(a) = C(b)$  und wenn sie auf  $[a, b)$  injektiv ist.

**Satz 2.9** (Jordanscher Kurvensatz). *Jede einfach geschlossene stetige Kurve  $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  teilt  $\mathbb{R}^2$  in zwei Gebiete  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  so auf, dass  $C([a, b]) = \partial\Omega_1 = \partial\Omega_2$  und  $\Omega_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_1}$ .*

Da für eine einfach geschlossene stetige Kurve  $C$ , ihr Bild  $C([a, b])$  homöomorph zum Einheitskreis  $\partial U_1(0)$  ist und da  $U_1(0)$  und  $\mathbb{R}^2 \setminus K_1(0)$  die Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^2 \setminus \partial U_1(0)$  sind, kann das Theorem auch folgendermaßen umgeformt werden: Wenn eine Kurve  $C([a, b]) \subset \mathbb{R}^2$  homöomorph zu  $\partial U_1(0)$  ist, dann hat  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  genau zwei Zusammenhangskomponenten.

**Lemma 2.10.** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  abgeschlossen und seien  $G_i$  die Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^n \setminus K$ , d.h.  $G_i$  sind offene und paarweise disjunkte Mengen, sodass  $\mathbb{R}^n \setminus K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i$ . Dann gilt  $\partial G_i \subseteq K$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Angenommen es existiert ein  $j$ , sodass  $\partial G_j \not\subseteq K$ . Das heißt es gibt ein  $x_0 \in \partial G_j$  mit  $x_0 \notin K$ . Daraus folgt  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i$  und somit existiert ein  $i_0 \in \mathbb{N}$  mit  $x_0 \in G_{i_0}$ . Da  $G_i$  offen und disjunkt sind, und somit getrennt, erhalten wir einen Widerspruch zu  $x_0 \in \partial G_j$ .  $\square$

Der Jordan-Brouwer Zerlegungssatz ist die Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Satz 2.11** (Jordan-Brouwer-Zerlegungssatz). Sei  $n > 1$  und seien  $A_1 \subset \mathbb{R}^n$  und  $A_2 \subset \mathbb{R}^n$  kompakte Mengen, die homöomorph zueinander sind. Dann haben  $\mathbb{R}^n \setminus A_1$  und  $\mathbb{R}^n \setminus A_2$  die gleiche Anzahl an Zusammenhangskomponenten.

*Beweis.* Sei  $h: A_1 \rightarrow A_2$  ein Homöomorphismus und  $\bar{h}$  eine stetige Fortsetzung auf  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $h^{-1}$  die Umkehrabbildung von  $h$  und  $\overline{h^{-1}}$  eine stetige Fortsetzung auf  $\mathbb{R}^n$ . Diese Fortsetzungen existieren laut Korollar 0.13. Weiters seien  $K_j$  die beschränkten Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^n \setminus A_1$  mit  $j \in J$  und wir benennen die unbeschränkte Komponente  $K_\infty$ . Seien  $L_i$  die beschränkten Komponenten von  $\mathbb{R}^n \setminus A_2$  mit  $i \in I$  und die unbeschränkte  $L_\infty$ . Wir definieren  $\tilde{J} := J \cup \{\infty\}$  und  $\tilde{I} := I \cup \{\infty\}$ . Man bemerke, dass  $\partial K_j \subset A_1$  und  $\partial L_i \subset A_2$ ; siehe Lemma 2.10. Also gilt  $h(\partial K_j) \subset A_2$  und  $h^{-1}(\partial L_i) \subset A_1$ .

Sei  $j \in \tilde{J}$  fest. Bezeichne  $G_q$  die beschränkten Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^n \setminus h(\partial K_j)$  mit  $q \in Q$  und  $G_\infty$  die unbeschränkte Komponente davon und sei  $\tilde{Q} := Q \cup \{\infty\}$ . Wegen

$$\bigcup_{i \in \tilde{I}} L_i = \mathbb{R}^n \setminus A_2 \subset \mathbb{R}^n \setminus h(\partial K_j) = \bigcup_{q \in \tilde{Q}} G_q \quad (2.1)$$

gibt es zu jedem  $i \in \tilde{I}$  ein  $q \in \tilde{Q}$ , sodass  $L_i \subset G_q$ . Insbesondere gilt  $L_\infty \subset G_\infty$ , weil jeweils genau eine unbeschränkte Komponente existiert.

Für  $y \in K_j$  folgt aus (d1) und (d6) wegen  $(\overline{h^{-1}} \circ \bar{h})|_{\partial K_j} = (h^{-1} \circ h)|_{\partial K_j}$

$$1 = \deg(h^{-1} \circ h, K_j, y) = \deg(\overline{h^{-1}} \circ \bar{h}, K_j, y).$$

Mit Hilfe des Produkttheorems erhalten wir

$$1 = \deg(\overline{h^{-1}} \circ \bar{h}, K_j, y) = \sum_{q \in \tilde{Q}} \deg(\bar{h}, K_j, G_q) \deg(\overline{h^{-1}}, G_q, y).$$

Sei  $N_q = \{i \in \tilde{I} : L_i \subset G_q\}$ . Wir wollen zeigen: Aus  $y \in K_j \subset \mathbb{R}^n \setminus A_1$  folgt  $y \notin \overline{h^{-1}}(G_q \setminus \bigcup_{i \in N_q} L_i)$ . Wegen (2.1) gilt  $G_q \setminus \bigcup_{i \in N_q} L_i \subset A_2$  für alle  $q \in \tilde{Q}$ . Aus  $y \in K_j$  folgt  $y \notin A_1 = h^{-1}(A_2) = \overline{h^{-1}}(A_2)$  und damit  $y \notin \overline{h^{-1}}(G_q \setminus \bigcup_{i \in N_q} L_i)$ . Also folgt aus (d2)

$$\deg(\overline{h^{-1}}, G_q, y) = \sum_{i \in N_q} \deg(\overline{h^{-1}}, L_i, y).$$

Nach der Definition des Abbildungsgrades  $\deg(\cdot, \cdot, G)$  auf einem Gebiet  $G$ , siehe Bemerkung 2.5, gilt

$$\deg(\bar{h}, K_j, G_q) = \deg(\bar{h}, K_j, L_i) \text{ f\u00fcr alle } i \in N_q.$$

Wegen  $y \in K_j$  erhalten wir

$$1 = \sum_{q \in \tilde{Q}} \sum_{i \in N_q} \deg(\bar{h}, K_j, L_i) \deg(\bar{h}^{-1}, L_i, y) = \sum_{i \in \tilde{I}} \deg(\bar{h}, K_j, L_i) \deg(\bar{h}^{-1}, L_i, K_j). \quad (2.2)$$

Wir wiederholen das gleiche Argument mit festem  $L_i$  anstatt  $K_j$  und  $\bar{h}$  und  $\bar{h}^{-1}$  vertauscht und erhalten

$$1 = \sum_{j \in \tilde{J}} \deg(\bar{h}, K_j, L_i) \deg(\bar{h}^{-1}, L_i, K_j) \text{ f\u00fcr alle } i \in \tilde{I}. \quad (2.3)$$

Hat  $\mathbb{R}^n \setminus A_2$  nun  $|\tilde{I}| < \infty$  viele Zusammenhangskomponenten  $L_i$ , dann bekommt man aus (2.2) und der Summation in (2.3) \u00fcber  $i$

$$|\tilde{I}| = \sum_{i \in \tilde{I}} 1 = \sum_{j \in \tilde{J}} \sum_{i \in \tilde{I}} \deg(\bar{h}, K_j, L_i) \deg(\bar{h}^{-1}, L_i, K_j) = \sum_{j \in \tilde{J}} 1 = |\tilde{J}|.$$

□

## 2.3 Topologische Anwendungen

**Satz 2.12** (Der Satz vom Igel). *Sei  $n$  ungerade und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschr\u00e4nkt mit  $0 \in \Omega$ . Sei  $f: \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  stetig. Dann existiert ein  $x \in \partial\Omega$  und  $\lambda \neq 0$ , sodass  $f(x) = \lambda x$ .*

*Beweis.* Aufgrund von Korollar 0.13 k\u00f6nnen wir annehmen, dass  $f$  auf ganz  $\bar{\Omega}$  stetig ist. Da  $n$  ungerade ist, gilt  $\deg(-\text{id}, \Omega, 0) = -1$ ; siehe Lemma 1.17.

- 1.Fall:  $\deg(f, \Omega, 0) \neq -1$ :

Aus  $\deg(f, \Omega, 0) \neq \deg(-\text{id}, \Omega, 0)$  folgt wegen (d3), dass  $h(t, x) = (1-t)f(x) - tx$  eine Nullstelle  $(t_0, x_0) \in (0, 1) \times \partial\Omega$  haben muss. Also gilt  $f(x_0) = \frac{t_0}{1-t_0}x_0$ . Wir haben also ein  $x \in \partial\Omega$  gefunden, sodass  $f(x) = \lambda x$  mit  $\lambda = \frac{t_0}{1-t_0}$

- Fall 2:  $\deg(f, \Omega, 0) = -1$ :

Wegen  $\deg(\text{id}, \Omega, 0) = 1$  kann man analog mit (d3) sowie  $h(t, x) = (1-t)f(x) + tx$  argumentieren.

Wir finden also f\u00fcr beliebigen Abbildungsgrad von  $f$  ein  $x \in \partial\Omega$  und  $\lambda \neq 0$ , sodass  $f(x) = \lambda x$ . □

**Lemma 2.13.** *Seien  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  Abbildungen, wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschr\u00e4nkt,  $u, v \in C^1(\Omega)$ . Sei  $v(x) \neq 0$  auf einer Teilmenge  $A \subset \Omega$ . Sei  $h_y(x) = u(x) - v(x)y$  f\u00fcr ein  $y \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt  $0 \notin h_y|_A(S_{h_y|_A})$  f\u00fcr fast alle  $y \in \mathbb{R}^n$ .*

*Beweis.* Gilt für  $x \in A$  die Gleichung  $\frac{u}{v}(x) = y$ , also  $h_y(x) = 0$  für ein  $y \in \mathbb{R}^n$ , dann folgt aus der Quotientenregel  $J_{\frac{u}{v}}(x) = \frac{1}{v(x)}J_{h_y}(x)$ . Also gilt  $\det(J_{\frac{u}{v}}(x)) = 0$  genau dann wenn  $\det(J_{h_y}(x)) = 0$  unter gegebenen Voraussetzungen und somit  $x \in S_{\frac{u}{v}}$ , genau dann wenn  $x \in S_{h_y}$ . Aus dem Satz von Sard, siehe Satz 0.7, folgt, dass für fast alle  $y \in \mathbb{R}^n$  gilt  $y \notin \frac{u}{v}|_A(S_{\frac{u}{v}|_A})$ . Somit ist  $0 \notin h_y|_A(S_{h_y|_A})$  für fast alle  $y \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Satz 2.14** (Der Satz von Borsuk). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und symmetrisch um  $0 \in \Omega$ . Wenn  $f \in C(\overline{\Omega})$  ungerade ist und  $0 \notin f(\partial\Omega)$  gilt, dann ist  $\deg(f, \Omega, 0)$  ungerade, insbesondere  $\deg(f, \Omega, 0) \neq 0$ .*

*Beweis.* Wir können annehmen, dass  $f \in C^2(\overline{\Omega})$  mit  $\det J_f(0) \neq 0$ . Falls das nämlich nicht der Fall ist, finden wir laut Korollar 0.11 eine Funktion  $g_1 \in C^2(\overline{\Omega})$ , sodass  $\max_{x \in \overline{\Omega}} \|f(x) - g_1(x)\| < \frac{1}{8} \text{dist}(0, f(\partial\Omega))$ . Wir definieren die ungerade Funktion  $g_2(x) := \frac{1}{2}(g_1(x) - g_1(-x))$  und wählen ein  $\delta \in \mathbb{R}$  mit  $\max_{x \in \overline{\Omega}} \|\delta x\| < \frac{1}{8} \text{dist}(0, f(\partial\Omega))$ , das nicht Eigenwert von  $J_{g_2}(0)$  ist. Dann ist  $\tilde{f} := g_2 - \delta \cdot \text{id} \in C^2(\overline{\Omega})$  ungerade mit  $\det J_{\tilde{f}}(0) \neq 0$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}(x) - f(x)\| &= \|g_2(x) - \delta \text{id}(x) - f(x)\| \\
&= \left\| \frac{1}{2}(g_1(x) - g_1(-x)) - \delta x - f(x) \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2}(g_1(x) - g_1(-x)) - \delta x - \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \right\| \\
&\leq \frac{1}{2}(\|g_1(x) - f(x)\| + \|g_1(-x) - f(-x)\|) + \|\delta x\| \\
&< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \text{dist}(0, f(\partial\Omega)) + \|\delta x\| \\
&< \frac{1}{8} \text{dist}(0, f(\partial\Omega)) + \frac{1}{8} \text{dist}(0, f(\partial\Omega)) \\
&= \frac{1}{4} \text{dist}(0, f(\partial\Omega)).
\end{aligned}$$

Somit folgt  $\deg(f, \Omega, 0) = \deg(\tilde{f}, \Omega, 0)$  aus (d5).

Sei also  $f \in C^2(\overline{\Omega})$  ungerade und  $\det J_f(0) \neq 0$ . Es reicht zu zeigen, dass es ein ungerades  $g \in C^2(\overline{\Omega})$  gibt, welches hinreichend nahe an  $f$  ist, sodass  $0 \notin g(S_g(\Omega))$ . Da  $g$  ungerade ist, gilt  $g(0) = 0$  und somit

$$\deg(f, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega, 0) = \text{sgn}(\det J_g(0)) + \sum_{0 \neq x \in g^{-1}\{0\}} \text{sgn}(\det J_g(x)), \quad (2.4)$$

$\Omega$  ist symmetrisch um die Null und  $g$  ist ungerade. Also ist  $g(x) = 0$  äquivalent zu  $g(-x) = 0$ , womit die Summe eine gerade ganze Zahl ergibt. Wegen  $\text{sgn}(\det J_g(0)) \neq 0$  werden wir erhalten, dass  $\deg(f, \Omega, 0)$  ungerade und insbesondere ungleich 0 ist.

Wir konstruieren für gegebenes  $\epsilon > 0$  induktiv ungerade Funktionen  $g_1, \dots, g_n \in C^2(\overline{\Omega})$  mit

$$\|f(x) - g_k(x)\| < \epsilon \text{ für } x \in \overline{\Omega}. \quad (2.5)$$

Dabei soll gelten  $0 \notin g_k|_{\Omega_k}(S_{g_k|_{\Omega_k}})$ ,  $k = 1, \dots, n$  wobei

$$\Omega_k := \Omega \setminus (H_1 \cap \dots \cap H_k) = \{x \in \Omega : x_i \neq 0 \text{ für mindestens ein } i \leq k\}$$

und

$$H_k := \{x \in \mathbb{R}^n : x_k = 0\}.$$

Sei  $g_1(x) := f(x) - x_1^3 y_1$  mit  $y_1 \in \mathbb{R}$ , sodass  $\max_{x \in \overline{\Omega}_1} \|f(x) - g_1(x)\| = \max_{x \in \overline{\Omega}_1} \|x_1^3 y_1\| < \epsilon$  und  $0 \notin g_1|_{\Omega_1}(S_{g_1|_{\Omega_1}})$ . Wegen  $f$  und  $x_1^3 \in C^1(\overline{\Omega})$  ist das laut Lemma 2.13 möglich.

Angenommen wir haben  $g_k$  definiert mit (2.5) und  $0 \notin g_k|_{\Omega_k}(S_{g_k|_{\Omega_k}})$ .

Sei  $g_{k+1}(x) := g_k(x) - x_{k+1}^3 y_{k+1}$ . Wieder ist  $y_{k+1}$  so gewählt, dass (2.5) erfüllt ist und  $0 \notin g_{k+1}|_{\Omega \setminus H_{k+1}}(S_{g_{k+1}|_{\Omega \setminus H_{k+1}}})$ .

Für  $x \in \Omega \cap H_{k+1}$  gilt wegen  $x_{k+1} = 0$ ,  $g_{k+1}(x) = g_k(x)$  und  $J_{g_{k+1}}(x) = J_{g_k}(x)$ . Für  $x \in \Omega_k \cap H_{k+1}$  folgt daher aus  $0 = g_{k+1}(x) = g_k(x)$  wegen  $0 \notin g_k|_{\Omega_k}(S_{g_k|_{\Omega_k}})$ , dass  $J_{g_{k+1}}(0) = J_{g_k}(0) \neq 0$ , also  $0 \notin g_{k+1}|_{\Omega_k \cap H_{k+1}}(S_{g_{k+1}|_{\Omega_k \cap H_{k+1}}})$ .

Wegen  $(\Omega_k \cap H_{k+1}) \cup (\Omega \setminus H_{k+1}) = \Omega_{k+1}$  erhalten wir  $0 \notin g_{k+1}|_{\Omega_{k+1}}(S_{g_{k+1}|_{\Omega_{k+1}}})$ .

Für  $g := g_n$  gilt daher wegen  $\Omega \setminus \{0\} = \Omega_n$ ,  $0 \notin g|_{\Omega \setminus \{0\}}(S_{g|_{\Omega \setminus \{0\}}})$  und nach Konstruktion von  $g$  gilt  $J_g(0) = J_f(0) \neq 0$ . Somit erhalten wir  $0 \notin g|_{\Omega}(S_{g|_{\Omega}})$ . Für  $\epsilon > 0$  hinreichend klein folgt aus (d5), dass  $\deg(f, \Omega, 0) = \deg(g, \Omega, 0)$ .  $\square$

Die folgenden Korollare resultieren aus dem Satz von Borsuk.

**Korollar 2.15.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und symmetrisch um  $0 \in \Omega$ . Sei  $f \in C(\overline{\Omega})$ , sodass  $0 \notin f(\partial\Omega)$  und  $f(-x) \neq \lambda f(x)$  auf  $\partial\Omega$  für alle  $\lambda \geq 1$ . Dann ist  $\deg(f, \Omega, 0)$  ungerade.*

*Beweis.* Wir betrachten die ungerade Funktion  $g(x) = f(x) - f(-x)$  und stellen die Homotopie  $h(t, x) = (1-t)f(x) + t(f(x) - f(-x)) = f(x) - tf(-x)$  zwischen  $f$  und  $g$  auf. Wir wollen nun  $h(t, x) \neq 0$  auf  $[0, 1] \times \partial\Omega$  zeigen. Wäre  $h(t, x) = 0$  mit  $x \in \partial\Omega$  und  $t \in [0, 1]$ , so hätten wir

$$f(x) = tf(-x) \quad \text{und damit} \quad f(-x) = \lambda f(x) \quad (2.6)$$

für  $\lambda = \frac{1}{t} \geq 1$ , was ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung ist. Aus dem Satz von Borsuk folgt, dass  $\deg(g, \Omega, 0)$  ungerade ist und wegen (d3) schließlich auch  $\deg(f, \Omega, 0)$ .  $\square$

**Korollar 2.16** (Borsuk-Ulam). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit den Voraussetzungen aus Korollar 2.15,  $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig und  $m < n$ . Dann existiert ein  $x \in \partial\Omega$  sodass  $f(x) = f(-x)$ .*

*Beweis.* Betrachte  $f$  als Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ . Angenommen  $f(x) - f(-x) \neq 0$  auf  $\partial\Omega$ . Die Funktion  $g$  sei eine stetige Fortsetzung von  $f(x) - f(-x)$ ,  $x \in \partial\Omega$  auf  $\overline{\Omega}$ , sodass

$$g: \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \{0\}.$$

Wir überprüfen die Voraussetzungen von Korollar 2.15. Aus der Annahme  $f(x) - f(-x) \neq 0$

auf  $\partial\Omega$  folgt  $0 \notin g(\partial\Omega)$ . Für  $x \in \partial\Omega$  gilt

$$\begin{aligned} g(-x) = \lambda g(x) &\Leftrightarrow (f(-x) - f(x)) = \lambda(f(x) - f(-x)) \\ &\Leftrightarrow 1 = \lambda \frac{(f(x) - f(-x))}{(f(-x) - f(x))} = -\lambda \\ &\Leftrightarrow \lambda = -1. \end{aligned}$$

Also ist auch  $g(-x) \neq \lambda g(x)$  für  $x \in \partial\Omega$  und  $\lambda \geq 1$  erfüllt. Mit Hilfe von Korollar 2.15 erhalten wir  $\deg(g, \Omega, 0) \neq 0$ . Aus (d5) folgt, dass  $\deg(g, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, 0)$  für alle  $y \in U_r(0)$ , wobei  $r = \text{dist}(0, g(\partial\Omega))$ . Nun liefert (d4), dass die  $\mathbb{R}^n$ -Kugel  $U_r(0)$  in  $g(\bar{\Omega}) \subset \mathbb{R}^m \times \{0\}$  enthalten ist, was ein Widerspruch zu  $m < n$  ist.  $\square$



# Literaturverzeichnis

- [AR06] RAVI P. AGARWAL, DONAL O'REGHAN: *Topological Degree Theory and Applications*, Taylor & Francis Group, 2006
- [De85] KLAUS DEIMLING: *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985
- [Gr81] WOLFGANG GROMES: *Ein einfacher Beweis des Satzes von Borsuk*, Seiten 399-400, *Mathematische Zeitschrift* 178, 1981
- [Ka15] MICHAEL KALTENBÄCK: *Fundament Analysis*, Heldermann Verlag, 2015
- [Ka16] MICHAEL KALTENBÄCK: *Analysis 3*, Vorlesungsskript 2016
- [WKB15] HARALD WORACEK, MICHAEL KALTENBÄCK, MARTIN BLÜMLINGER: *Funktional-analysis*, Vorlesungsskript 2015
- [Ze86] EBERHARD ZEIDLER: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I, Fixed-Point Theorems*, Springer-Verlag, 1986