BACHELORARBEIT

Beispiele nicht-messbarer Mengen

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.
Michael Kaltenbäck

durch

Felix Parenzan
11771171

Inhaltsverzeichnis

0 Das Maßproblem

Schon in der Antike befassten sich Mathematiker mit Volumina, Flächen und Längen. Eine mathematische Formalisierung dieser naiven Inhaltszuweisungen ließ jedoch lange auf sich warten. Ende des 19. Jahrhunderts kamen erste Definitionen, und 1902 erörterte Hénri Lebesgue in seiner Dissertation die Implikationen eines rigoros definierten Maß-Begriffes. Dabei kam folgende Frage auf. Ist es möglich *alles* zu messen? Er formulierte das sogenannte Maßproblem: Gibt es Funktionen $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$, mit den Eigenschaften

- *Positivität*: $f(A) \geq 0$;
- *Kongruenz*: $f(A) = f(B)$, falls A kongruent zu B ist;
- *Normiertheit*: $f([0,1]^n) = 1$;
- $\sigma-$*Additivität*: Für paarweise disjunkte Mengen $A_i, i \in \mathbb{N}$ gilt $f(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} f(A_i)$.

Lebesgue schaffte es nicht, die Existenz einer derartigen Funktion für alle Teilmengen zu zeigen. Zwei Jahre später brachte Guiseppe Vitali den ersten Beweis für die Existenz einer Menge, der kein Maß zugeordnet werden kann; siehe [Els07, III.3.1 ff.]. Somit war gezeigt, dass das Maßproblem nicht lösbar ist.

Eine axiomatische Definition des Maß-Begriffes ermöglichte auch die Betrachtung von Räumen jenseits der reellen Zahlen, und ebnete damit den Weg für die Maßtheorie, auf der auch die Wahrscheinlichkeitstheorie großteils fußt. In dieser Arbeit wollen wir einige Beispiele nicht-messbarer Mengen auf $\mathbb{R}^n$ behandeln.

1 Einleitung

1.1 Einführende Ergebnisse und Definitionen

Dieser Abschnitt folgt [Els07]. Wir betrachten im Folgenden immer eine Grundmenge Ω und ein Mengensystem $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}(A) := \{B : B \subseteq A\}$ die Potenzmenge von A.

Definition 1.1.1. Das Mengensystem $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *stabil* bezüglich einer Mengenoperation $F : \mathcal{P}(\Omega)^k \to \mathcal{P}(\Omega)$, falls für alle $A \in \mathfrak{A}^k$ immer $F(A) \in \mathfrak{A}$ gilt. $\mathfrak{A}$ heißt *σ-Algebra*, falls

1. $\Omega \in \mathfrak{A}$;
2. $\mathfrak{A}$ ist stabil bezüglich Komplementbildung, also $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$;
3. $\mathfrak{A}$ ist stabil bezüglich abzählbaren Vereinigungen, also $A_i \in \mathfrak{A}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{A}$.

Ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra, so nennt man das Tupel $(\Omega, \mathfrak{A})$ *Messraum.*

Beispiel 1.1.2. Wie leicht ersichtlich ist, ist die bezüglich der Mengeninklusion $\subseteq$ kleinste $\sigma-$Algebra die Menge $\{\emptyset, \Omega\}$ und die größte $\sigma-$Algebra ist $\mathcal{P}(\Omega)$.
Sei $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem. Dann bezeichnen wir mit

$$\sigma(\mathcal{C}) := \bigcap \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A}\ \sigma - \text{Algebra} \ \text{ mit } \mathcal{C} \subseteq \mathfrak{A}\}$$

die von $\mathcal{C}$ erzeugte $\sigma-$Algebra. Sie ist die kleinste $\sigma-$Algebra, die $\mathcal{C}$ enthält.

Definition 1.1.3. Sei $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem mit $\emptyset \in \mathfrak{A}$. Eine Funktion $\mu : \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$[1] heißt *Inhalt* falls

1. $\mu(A) \geq 0$ für $A \in \mathfrak{A}$;
2. $\mu(\emptyset) = 0$;
3. Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ paarweise disjunkte Mengen mit $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{A}$, so gilt $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.

Ist zusätzlich $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra und gilt für paarweise disjunkte Mengen $A_i \in \mathfrak{A}, i \in \mathbb{N}$

$$\mu\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i), \tag{1}$$

so heißt μ *Maß.* Das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ bezeichnet man als Maßraum.

[1]Seien $+\infty, -\infty$ zwei verschiedene Elemente, die nicht in $\mathbb{R}$ liegen, wobei $-\infty < m < +\infty$ für alle $m \in \mathbb{R}$.

Die oben gegebene Definition von Maß und Inhalt gehen auf Hénri Lebesgue zurück, der sich seinerseits von Émile Borel inspirieren ließ. Wir wollen Mengen untersuchen, denen nach obigen Regeln *nicht* in sinnvoller Weise ein Maß bzw. Inhalt[2] zugeordnet werden kann. Diese Mengen heißen *nicht-messbar*. Die Definition von Messbarkeit geht auf Constantin Carathéodory zurück. Er verwendete dafür das *äußere Maß*.

Definition 1.1.4. Eine Mengenfunktion $\eta : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt äußeres Maß falls

1. $\eta(\emptyset) = 0$;
2. η monoton ist, also $A \subseteq B \Rightarrow \eta(A) \leq \eta(B)$;
3. η σ- subadditiv ist, also $A_i \in \mathcal{P}(\Omega), i \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \eta(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta(A_i)$.

Definition 1.1.5 (Carathéory-Messbarkeit)**.** Sei $\eta : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ ein äußeres Maß und $A \subseteq \Omega$. A heißt $\eta-$*messbar*, falls

$$\eta(Q) \geq \eta(Q \cap A) + \eta(Q \cap A^c) \;\text{ für alle } Q \in \mathcal{P}(\Omega). \tag{2}$$

Aufgrund der $\sigma-$Subadditivität gilt in (2) auch $\eta(Q) \leq \eta(Q \cap A) + \eta(Q \cap A^c)$, womit

$$\eta(Q) = \eta(Q \cap A) + \eta(Q \cap A^c).$$

Als nächstes wollen wir einen Satz zitieren, der die Existenz von Maßen garantiert; siehe [Els07, II.4.4].

Satz 1.1.6. *Sei $\eta : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ ein äußeres Maß. Dann ist*

$$\mathfrak{A}_\eta := \{A \subseteq \Omega : A \;\eta - \text{messbar}\}$$

eine σ-Algebra, und $\eta|_{A_\eta}$ ein Maß.

Beispiel 1.1.7. Das wohl wichtigste Maß ist das Lebesgue-Maß λ auf der Grundmenge $\Omega = \mathbb{R}$. Wir wollen im Ansatz die Konstruktion dieses Maßes durchgehen. Zuerst definiert man auf dem Mengensystem $\mathfrak{J} := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ den Inhalt λ durch

$$\lambda((a, b]) := b - a.$$

Mit

$$\eta(A) := \inf\Big\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(J_i) : J_i \in \mathfrak{J}, A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} J_i \Big\} \tag{3}$$

[2]Hier wird der Begriff Maß bzw. Inhalt von A für $\mu(A)$ verwendet.

ist dann ein äußeres Maß definiert. Nach Satz 1.1.6 ist die Menge $\mathfrak{L} := \mathfrak{A}_\eta$ aller Lebesguemessbaren Mengen eine σ-Algebra und $\lambda := \eta|_{\mathfrak{L}}$ ein Maß. Dieses setzt die ursprünglich auf $\mathfrak{J}$ definierte Mengenfunktion fort, stimmt also dort mit ihr überein. Für eine detaillierte Konstruktion verweisen wir interessierte Leser auf [Els07, II.4.6].

Bemerkung 1.1.8. Wir bringen einige wichtige Eigenschaften von Maßfunktionen.

1. Sei $\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ stabil bezüglich Durchschnitten. Es gelte für $A, B \in \mathfrak{R}$, dass immer paarweise disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_n \in \mathfrak{R}$ derart existieren, dass $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n C_i$, und es gelte $\emptyset \in \mathfrak{R}$. Die in (3) gegebene Definition

$$\eta_\mu(A) := \inf\big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(R_i) : R_i \in \mathfrak{R}, A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i\big\}$$

ist für beliebige Inhalte $\mu : \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ ein äußeres Maß. Mithilfe von Satz 1.1.6 lassen sich Inhalte zu Maßen fortsetzen. Ist $\mu : \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\sigma-$additiv, so gilt für $R \in \mathfrak{R}$

$$\eta_\mu(R) = \mu(R).$$

2. Auch Maße sind monoton und subadditiv. Es gilt nämlich für $A, B \in \mathfrak{A}$ mit $A \subseteq B$

$$\mu(A) \leq \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B),$$

da $\mu(B \setminus A) \geq 0$ und $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Weiters lässt sich eine Folge $A_i \in \mathfrak{A}, i \in \mathbb{N}$ von möglicherweise nicht paarweise disjunkten Mengen durch

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, B_i = A_i \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j), \ldots$$

in eine Folge paarweiser disjunkter Mengen mit $B_i \subseteq A_i$ umwandeln, deren Vereinigung gleich bleibt, womit wegen der oben gezeigten Monotonie

$$\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

3. Eine abzählbare Menge A ist eine λ-Nullmenge, also $\lambda(A) = 0$. Dies folgt aus der σ-Additivität und daraus, dass Punktmengen $\{x\}$ Nullmengen sind. In der Tat folgt aus der Monotonie, dass

$$\lambda(\{x\}) \leq \lambda((x - \epsilon, x + \epsilon]) = 2\epsilon$$

für jedes beliebige $\epsilon > 0$ und damit $\lambda(\{x\}) = 0$. Jede abzählbare Menge lässt sich als abzählbare Vereinigung $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{x_i\}$ von Punktmengen schreiben. Aufgrund der

$\sigma-$Additivität erhalten wir

$$\lambda(A) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(\{x_i\}) = 0.$$

4. Ein Maß heißt *endlich*, falls $\mu(\Omega) < \infty$. Aufgrund der Monotonie ist dann das Maß aller anderen messbaren Mengen endlich. Eine schwächere Variante ist die σ-Endlichkeit. Ein Maß heißt *σ-endlich*, falls abzählbar viele Mengen $A_i, i \in \mathbb{N}$ aus $\mathfrak{A}$ existieren, die alle endliches Maß haben, und Ω überdecken, also

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega.$$

5. Sei die Grundmenge Ω ein Hausdorff-Raum versehen mit der Topologie $\mathcal{T}$. Ist Ω mit der von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{T}) =: \mathfrak{B}(\mathcal{T})$ versehen, so heißt ein Maß $\mu : \mathfrak{B}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ Borel-Maß, falls $\mu(K) < +\infty$ für $K \subseteq \Omega$ kompakt. Die Mengen in $\mathfrak{B} := \sigma(\mathcal{T})$ heißen Borel-Mengen. Ein Maß heißt *lokal-endlich*, falls zu jedem $x \in \Omega$ eine Umgebung $U \in \mathcal{T}$ mit $\mu(U) < \infty$ gibt.

6. Sei $(\Omega, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum und sei Ω versehen mit einer $\sigma-$Algebra $\mathfrak{A}$, welche die Borelmengen $\mathfrak{B}(\mathcal{T})$ enthält, und sei $\mu : \mathfrak{B}(\mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ ein Maß darauf. Eine messbare Menge A heißt *regulär von innen*, falls

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\}.$$

Eine messbare Menge A heißt *regulär von außen*, falls

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U \text{ offen}\}.$$

Das Maß μ heißt von innen (außen) regulär, wenn alle Mengen $A \in \mathfrak{A}$ von innen (außen) regulär sind. Es heißt regulär, wenn es von außen und von innen regulär ist. Das Lebesgue-Maß λ ist regulär (siehe [Els07, Korollar II.7.2]).

7. Ist $\mu(\Omega) = 1$, dann nennt man das Maß μ auch *Wahrscheinlichkeitsmaß*.

Die folgende Bemerkung befasst sich mit Maßen auf Produkten von Maßräumen; siehe z.B. [Els07, V.1.5].

Bemerkung 1.1.9. Seien $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i),\ i = 1, 2$ zwei $\sigma-$endliche Maßräume. Auf dem Produktraum $\Omega_1 \times \Omega_2$ lässt sich das Maß auf natürliche Weise erweitern. Es gibt genau ein Maß $\mu_1 \otimes \mu_2$ für die Produkt-σ-Algebra $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$, das

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B) \ \text{ für } A \in \mathfrak{A}_1,\ B \in \mathfrak{A}_2$$

erfüllt. $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ ist dabei die vom kartesischen Produkt $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ erzeugte $\sigma-$Algebra. Insbesondere ist das System

$$\bigcup_{i=1,2} \{\pi_i^{-1}(A) : A \in \mathfrak{A}_i\}$$

ein Erzeuger. Dabei ist π_i die Projektion auf die i-te Koordinate.

1.2 Auswahlaxiom et al.

Dieser Abschnitt folgt [Her06] und [GW18]. Ein großer Teil dieser Arbeit stütz sich auf das Auswahlaxiom, und einige weitere Sätze, die zum Auswahlaxiom äquivalent sind. Es wurde von Ernst Zermelo zum ersten Mal 1904 in [Zer04] formuliert, um den Wohlordnungssatz zu beweisen:

> Jeder Teilmenge M' denke man sich ein beliebiges Element m' zugeordnet, das in M' selbst vorkommt und das „ausgezeichnete Element" genannt werden möge.

Heute wird es meist in folgender Form angegeben.

Axiom 1.2.1 (AC[3]). Für jede Familie $(X_i)_{i\in I}$ von nicht-leeren Mengen ist die Produktmenge $\Pi_{i\in I} X_i$ nicht-leer. Die Elemente $(x_i)_{i\in I}$ des Produktraums sind *Auswahl-Funktionen*, also Funktionen

$$x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i, \text{ wobei } x(i) =: x_i \in X_i \text{ für alle } i \in I.$$

Das Auswahlaxiom ist bisher weder widerlegt noch bewiesen worden. Kurt Gödel zeigte 1938, dass sich in der Zermelo-Fränkel-Axiomatik (siehe [GW18, Kap.11.5.2]) kein Widerspruch ergibt. Jedoch zeigte Paul Cohen 1963, dass auch die Negation von **AC** widerspruchsfrei ist. Obwohl seine Anwendung weit verbreitet ist, gibt es doch Gegner, gerade aufgrund solch paradoxer Folgen wie etwa den Satz von Banach-Tarski, den wir in Abschnitt 2.1 behandeln. Andererseits stützen sich sehr viele wichtige Sätze aus verschiedensten Bereichen auf das Auswahlaxiom, wie etwa in [Her06, Kap.4] verdeutlicht wird.

Es ist wichtig hervorzuheben, dass in einem Axiomen-System *ohne* **AC** gezeigt werden kann, dass alle Mengen Lebesgue-messbar sind; siehe [Her06, 7.2]. Für die reellen Zahlen ist somit **AC** unabdinglich für den Beweis der Existenz nicht-messbarer Mengen.

Es existieren verschiedene Abstufungen des Auswahlaxioms. Wir wollen besonders das *Axiom der abhängigen Auswahl* hervorheben.

Axiom 1.2.2 (DC[4]). Sei (X, ρ) eine Menge X und $\rho \subseteq X^2$ eine Relation auf X mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in X$ ein $y \in X$ derart existiert, dass $x\rho y$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n \rho x_{n+1} \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Dieses folgt aus dem Auswahlaxiom, ist also eine Abschwächung.

Satz 1.2.3. ***AC*** $\Longrightarrow$ ***DC***.

[3] Von Axiom of choice.
[4] Von Axiom of Dependent Choice.

Beweis. Ist (X, ρ) wie in 1.2.2, dann gilt für $x \in X$

$$S_x := \{y : x\rho y\} \neq \emptyset.$$

Wegen **AC** existiert damit ein $(s_x)_{x \in X} \in \Pi_{x \in X} S_x$. Definieren wir induktiv für ein beliebiges x_0 einfach $x_{n+1} = s_{x_n}, n \in \mathbb{N}$, so hat diese Folge nach Konstruktion die gewünschte Eigenschaft. □

Wir wollen zu **AC** äquivalente Sätze betrachten.

Definition 1.2.4. Eine Ordnung $\leq$ auf M ist eine *partielle Ordnung*, falls sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Eine Ordnung $\leq$ auf M ist eine *totale Ordnung*, falls sie eine partielle Ordnung ist, und für $m, n \in M$ entweder $m \leq n$ oder $n \leq m$ gilt. Besitzt zusätzlich jede Teilmenge $A \subseteq M$ ein kleinstes Element besitzt, gibt es also ein $a \in A$ mit $a \leq x$ für alle $x \in A$, so nennt man eine totale Ordnung *Wohlordnung*.
Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf M. Ist für $K \subseteq M$ die eingeschränkte Ordnung $\leq|_{K \times K}$ eine totale Ordnung, so nennt man K eine *Kette*.

Axiom 1.2.5 (WOS). Auf jeder Menge M existiert eine Wohlordnung $\leq$.

Von Georg Cantor noch als Selbstverständlichkeit angesehen, bewies erst Ernst Zermelo mit dem eigens dafür von ihm eingeführten Auswahlaxiom **AC** $\Longrightarrow$ **WOS**. Später stellte sich heraus, dass die zwei Axiome sogar äquivalent sind; siehe [Her06, 1.4].

Satz 1.2.6. ***AC*** $\Longleftrightarrow$ ***WOS****.*

Wir wollen auch das Lemma von Zorn anführen.

Definition 1.2.7 (ZL). Falls in einer Menge M mit einer partielle Ordnung $\leq$ jede Kette nach oben beschränkt ist, so hat M ein maximales Element.

Max Zorn bewies **ZL** mithilfe von **AC**. Die beiden sind in der Tat äquivalent; siehe [Her06, 2.2].

Satz 1.2.8. ***AC*** $\Longleftrightarrow$ ***ZL***

Zur Betrachtung von überabzählbaren Mengen benötigen wir noch den folgenden Satz; einen Beweis findet man zum Beispiel in [GW18, Satz 11.2.1.2].

Satz 1.2.9 (Rekursionssatz)**.** *Sei S eine Menge, $(W, \leq)$ eine Wohlordnung und $\mathcal{F} := \bigcup_{\alpha \in W} S^{W_\alpha}$[5], wobei $W_\alpha := \{\beta \in W : \beta < \alpha\}$. Des weiteren sei $h : \mathcal{F} \to S$ eine Funktion*[6]*. Dann gibt es genau ein $F : W \to S$ mit*

$$F(\alpha) := h(F|_{W_\alpha}).$$

[5] S^{W_α} ist dabei die Menge der Funktionen $f : S \to W_\alpha$.

[6] Ist $W = \mathbb{N}$, so hängt h nur vom letzten Folgeglied ab, also $F(n+1) =: x_{n+1} = f(x_n)$ für ein $f : \mathbb{N} \to S$.

Obiges Resultat garantiert die Möglichkeit, auch für überabzählbare Indexmengen rekursiv Mengen oder Funktionen zu definieren.

Als nächstes bringen wir eine Definition, die vor allem notationsvereinfachend ist. Eine genauere Betrachtung findet sich etwa in [GW18, Kap.11].

Definition 1.2.10. Eine Menge A versehen mit einer Wohlordnung $\leq$ heißt *Ordinalzahl*, falls jedes Element identisch ist mit der Menge aller vorangegangenen Elemente. Jede Teilmenge der Ordinalzahlen M ist durch $\leq := \in$ wohlgeordnet; siehe etwa [GW18, Kap. 11.4.2].
Zwei Mengen A, B heißen *gleichmächtig*, falls eine bijektive Funktion $f : A \to B$ existiert. Jede Menge A ist gleichmächtig mit einer Ordinalzahl. Die kleinste dieser Ordinalzahlen[7] heißt Kardinalität, und wird auch $|A|$ geschrieben.

Lemma 1.2.11. *Sei A eine unendliche Menge und $B \neq \emptyset$ eine Menge mit $|B| \leq |A|$. Des Weiteren sei $C \subseteq \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

(i) $|A^n| = |A|$;

(ii) $|A \times B| = |A|$;

(iii) $|\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(C)| \leq \max\{|C|, \omega\}$, *wobei* $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}$ *die lineare Hülle über* $\mathbb{Q}$ *ist;*

(iv) *Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe und $F \subseteq G$ abzählbar. Dann ist die von F erzeugte Untergruppe abzählbar.*

Beweis. Der Beweis für (i) und (ii) ist etwa in [GW18, Satz 11.4.8.6] zu finden.
Für (iii) unterscheiden wir zwei Fälle. Gilt $|C| < \omega$, also $|C| = k \in \mathbb{N}$, dann ist $|\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(C)| = |\mathbb{Q}^k| = \omega$, wobei die letzte Gleichung aufgrund von (i) gilt. Im Fall $|C| \geq \omega$ gilt

$$\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(C) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} q_i c_i : n \in \mathbb{N}; q_i \in \mathbb{Q}, c_i \in C \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Wir definieren

$$S_n := \left\{ \big((q_i, c_i)\big)_{i \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{Q} \times C)^{\mathbb{N}} : \max\{i \in \mathbb{N} : q_i \neq 0\} = n \right\}.$$

Die Funktion $f : S \to \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(C)$ mit $S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$, definiert durch $f(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q_i c_i$ ist surjektiv, womit $|\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(C)| \leq |S|$. Die Projektion auf die ersten n Koordinaten bildet eine Bijektion von S_n auf $(\mathbb{Q} \times C)^n$. Da C und $\mathbb{Q}$ unendlich sind, ist es auch $\mathbb{Q} \times C$. Wegen (i) und (ii) gilt daher $|S_n| = |(\mathbb{Q} \times C)^n| = |\mathbb{Q} \times C| = |C|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammen gilt

$$|C| = |S_1| \leq |S| = \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \right| \leq \big|\mathbb{N} \times (\mathbb{Q} \times C)\big| \overset{\text{(ii)}}{=} |\mathbb{N} \times C| = |C|.$$

[7] Das Minimum wird bezüglich $\in$ gebildet.

Für (iv) sei F' die von F erzeugte Untergruppe. Es gilt

$$F' = \Big\{ f_1 \cdots f_n : n \in \mathbb{N}; f_k \in F \cup F^{-1} \text{ für } k \in \{1, \dots, n\} \Big\}.$$

Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$P_n = \Big\{ (f_1, \dots, f_n) : f_i \in F \cup F^{-1}, i \in \{1, \dots, n\} \Big\}.$$

Die Funktion $g : P \to F'$ mit $P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ definiert durch $g(p) := f_1 \cdots f_n$ ist surjektiv, womit $|F'| \leq |P|$. Offensichtlich ist P_n nichts anderes als $(F \cup F^{-1})^n$, womit wegen (i) $|P_n| \leq |F \cup F^{-1}| = \omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammen gilt

$$\omega = |F| = |P_1| \leq |P| = \Big| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n \Big| \leq \big| \mathbb{N} \times F \big| \overset{\text{(ii)}}{=} \omega.$$

$\square$

2 Nicht-messbare Mengen

2.1 Das Hausdorff-Paradoxon

Das Hausdorff-Paradoxon wurde 1914 von Felix Hausdorff formuliert, um die Grenzen der Borelschen und Lebesgueschen Maßtheorie aufzuzeigen. Mithilfe von **AC** werden wir eine Zerlegung der Kugeloberfläche in kongruente Teilmengen konstruieren. Wir werden damit zeigen, dass für $n \geq 3$ kein Inhalt in $\mathbb{R}^n$ existieren kann, dessen Definitionsbereich sich auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ erweitern lässt, falls die Einheitskugel positiven Inhalt hat und kongruente Mengen den selben Inhalt haben. Dieses Kapitel folgt [Hau04] und [Sie54].

Definition 2.1.1. Zwei Teilmengen metrischer Räume A, B heißen kongruent, falls eine bijektive und isometrische Abbildung $f : A \to B$ zwischen ihnen existiert.

Wir betrachten auf der n-dimensionalen Kugeloberfläche

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \;:\; \|x\| = 1\}$$

das Oberflächenmaß $\mu_n : \mathfrak{B}(S^n) \to [0, +\infty]$. Diese Mengenfunktion weist den Borel-Teilmengen der Oberfläche $\mathfrak{B}(S^n) = \mathfrak{B} \cap S^n$ ein Maß zu. Die allgemeine Definition des Oberflächenmaßes ist technisch aufwendig, interessierte Lesende verweisen wir dafür auf [Kal18, 15.6]. Für die Kugeloberfläche S^{n-1} ist μ_{n-1} gegeben durch

$$\mu_{n-1}(A) = \int_{A_{\phi_{n-1}}} \cos\theta_1 (\cos\theta_2)^2 \dots (\cos\theta_{n-2})^{n-2} \, d\lambda_{n-1}(s). \tag{4}$$

Dabei ist $\phi_{n-1} : (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2} \to S^{n-1}$ mit

$$\phi_{n-1}(\alpha, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cos\theta_1 \dots \cos\theta_{n-2} \\ \sin\alpha \cos\theta_1 \dots \cos\theta_{n-2} \\ \sin\theta_1 \dots \cos\theta_{n-2} \\ \vdots \\ \sin\theta_{n-3} \cos\theta_{n-2} \\ \sin\theta_{n-2} \end{pmatrix} \tag{5}$$

und $A_{\phi_{n-1}} = \phi^{-1}(A \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 = 0\})$. Durch Einsetzen und Nachrechnen zeigt man folgendes Lemma.

Lemma 2.1.2. *Das Oberflächenmaß μ_{n-1} auf S^{n-1} ist unter orthogonalen Transformationen invariant, also gilt $\mu_{n-1}(T(A)) = \mu_{n-1}(A)$ für alle orthogonalen $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und alle $A \in \mathfrak{B}(S^{n-1})$. Dabei heißt eine Transformation $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$* orthogonal, *falls $QQ^T = I$.*

Definition 2.1.3. Eine orthogonale Matrix $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *Rotation*, falls $\det R = 1$.

Lemma 2.1.4. *Eine orthogonale Transformation $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist isometrisch, also gilt $\|Qx\| = \|x\|$ für die euklidische Norm.*

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|Qx\|^2 = (Qx, Qx) = (QQ^T x, x) = (x, x) = \|x\|^2,$$

wobei $(.,.) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das euklidische Skalarprodukt ist. □

Zunächst zeigen wir, dass es kein Maß geben kann, welches die Eigenschaften von μ_1 gemäß Lemma 2.1.2 hat und auf ganz $\mathcal{P}(S^1)$ definiert ist.

Satz 2.1.5. *Sei $\mathfrak{C} \subseteq \mathcal{P}(S^1)$ eine σ-Algebra und $\nu : \mathfrak{C} \to [0, +\infty]$ ein Maß darauf. Gilt $\nu(S^1) \in (0, +\infty)$ und ist ν unter orthogonalen Transformationen invariant, dann muss $\mathcal{P}(S^1) \setminus \mathfrak{C} \neq \emptyset$ gelten.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{T},\ x \mapsto \exp(i2\pi x),$$

wobei $\mathbb{T} := \{c \in \mathbb{C} : |c| = 1\}$, was gemäß der Identifikation von $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ durch $(x, y) \mapsto x + iy$ genau S^1 entspricht. Für τ gilt bekannterweise[8]

$$\tau(x_1 + x_2) = \tau(x_1) \cdot \tau(x_2). \tag{6}$$

Sei $\delta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine beliebige irrationale Zahl, womit $(n - m)\delta \notin \mathbb{Z}$ für verschiedene $m, n \in \mathbb{Z}$. Also gilt $\tau((n - m)\delta) = \exp(2\pi i(n - m)\delta) \neq 1$ und daher $\tau(n\delta) \neq \tau(m\delta)$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq n$. Wir betrachten für $x \in \mathbb{R}$

$$P_x := \{\tau(x + k\delta) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Zwei Mengen P_x, P_y sind entweder identisch oder disjunkt, da $a \in P_x \cap P_y$ genau dann gilt, wenn für $m, n \in \mathbb{Z} : a = \tau(x + m\delta) = \tau(y + n\delta)$. Aufgrund von (6) folgt $\tau(x) = \tau(y) \cdot \tau((n - m)\delta)$, womit aber $P_x = P_y$. Also bildet $\mathfrak{P} := \{P_x : x \in \mathbb{R}\}$ eine Partition von $\mathbb{T}$. Wir wählen aus jeder Menge $P \in \mathfrak{P}$ genau einen Punkt $z(P)$ aus[9] und setzen

$$A_0 := \{z(P) : P \in \mathfrak{P}\}.$$

[8] Somit ist τ ein Gruppenhomomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, +, 0)$ und $(\mathbb{T}, \cdot, 1)$.
[9] Hier verwenden wir **AC**.

Diese Menge geht durch $T_m : \mathbb{T} \to \mathbb{T},\ exp(i\varphi) \mapsto exp(i(\varphi + 2\pi m\delta))$ mit $m \in \mathbb{Z}$ über in

$$T_m(A_0) =: A_m = \{z(P)\tau(m\delta) : P \in \mathfrak{P}\},$$

wobei $A_m \cap A_n = \emptyset$ für $n \neq m$. In der Tat, gilt $a \in A_m \cap A_n$ genau dann, wenn x, y existieren mit $a = z(P_x)\tau(m\delta) = z(P_y)\tau(n\delta)$. Daraus folgt $a \in P_x, a \in P_y$, also $P_x \cap P_y \neq \emptyset$ und daher $P_x = P_y$. Wir haben aus jeder Menge $P \in \mathfrak{P}$ genau ein Element $z(P)$ herausgenommen. Also muss auch $z(P_x) = z(P_y)$ und infolge $\tau(n\delta) = \tau(m\delta)$ gelten. Das steht aber im Widerspruch zu $n \neq m$. Des Weiteren haben wir

$$\mathbb{T} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k.$$

Die Inklusion $\supseteq$ ist klar nach Konstruktion der A_k. Für die Umkehrung betrachten wir ein $c \in \mathbb{T}$, also $c = \tau(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und unterscheiden zwei Fälle. Im ersten Fall gilt $z(P_x) = c$ und somit $c \in A_0$. Im zweiten Fall gilt $z(P_x) \neq c$. Wegen $c, z(P_x) \in P_x$ gilt $c = z(P_x)\tau(n\delta)$ und somit $c \in A_n$ für ein gewisses $n \in \mathbb{Z}$.

Im Weiteren wollen wir die $A_k, k \in \mathbb{Z}$, als Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ und daher als Teilmengen von S^1 betrachten. In $\mathbb{T}$ entsteht A_k als Bild von A_0 unter T_k. In $\mathbb{R}^2$ lässt sich diese Abbildung mithilfe der eulerschen Formel $exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ durch

$$T_k := \begin{pmatrix} \cos(2\pi k\delta) & -\sin(2\pi k\delta) \\ \sin(2\pi k\delta) & \cos(2\pi k\delta) \end{pmatrix}$$

beschreiben. Wie sich leicht nachrechnen lässt, ist diese Abbildung eine Rotation. Im Fall $A_0 \in \mathfrak{C}$ müsste

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu(A_0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu(A_k) = \nu(S^1) \in (0, +\infty)$$

gelten. Wegen $\nu(A_0) \geq 0$ erhalten wir einen Widerspruch, der sich nur durch $A_0 \notin \mathfrak{C}$ auflösen lässt.

□

Aus Satz 2.1.5 folgt auch für alle höheren Dimension die Existenz nicht-messbarer Mengen.

Korollar 2.1.6. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{C} \subseteq \mathcal{P}(S^n)$ ein Mengensystem und $\nu : \mathfrak{C} \to [0, +\infty]$ ein Maß darauf. Zusätzlich gelte $\nu(S^n) \in (0, +\infty)$ und ν sei unter orthogonalen Transformationen invariant. Dann gilt $\mathcal{P}(S^n) \setminus \mathfrak{C} \neq \emptyset$.

Beweis. Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion nach n. Den Induktionsanfang $n = 1$ haben wir bereits in Satz 2.1.5 gezeigt.

Für $n \in \mathbb{N}$ und jedes Maß ν mit den geforderten Eigenschaften gelte $\mathcal{P}(S^n) \setminus \mathfrak{C}_\nu \neq \emptyset$. Sei nun μ ein Maß auf S^{n+1}, welches die Anforderungen des aktuellen Korollars und $\mathfrak{C} = \mathcal{P}(S^{n+1})$

erfüllt. Sei $\xi : S^{n+1} \setminus \{+e_{n+2}, -e_{n+2}\} \to S^n$ definiert durch

$$\xi((x_1, \dots, x_{n+2})^T) = \frac{1}{\|(x_1, \dots, x_{n+1})^T\|}(x_1, \dots, x_{n+1})^T, \tag{7}$$

wobei e_k der k-te kanonische Basisvektor in $\mathbb{R}^{n+2}$ ist. Wir betrachten $\tilde{\mu} : \mathcal{P}(S^n) \to [0, +\infty]$ definiert durch $\tilde{\mu}(A) := \mu(\xi^{-1}(A))$. Das Urbild ist verträglich mit Schnitten und Vereinigungen. Also ist mit μ auch $\tilde{\mu}$ $\sigma-$additiv. Des Weiteren gilt $\tilde{\mu}(\emptyset) = \mu(\xi^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. Wegen $\nu(S^{n+1}) < +\infty$ sind Singletons $\{s\}, s \in S^{n+1}$, $\mu-$Nullmengen, und es gilt $\tilde{\mu}(S^n) = \mu(\xi^{-1}(S^n)) = \mu(S^{n+1} \setminus \{+e_{n+2}, -e_{n+2}\}) = \mu(S^{n+1}) \in (0, +\infty)$. Wenn wir zeigen können, dass $\tilde{\mu}$ invariant unter orthogonalen Transformationen ist, folgt aus der Induktionsvoraussetzung ein Widerspruch.
Dazu sei $T \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ eine orthogonale Transformation und $A \in \mathcal{P}(S^n)$.Wir definieren $\tilde{T} \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ durch

$$\tilde{T} := \begin{pmatrix} & 0 \\ T & \vdots \\ & 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix},$$

womit $\tilde{T}$ eine orthogonale Transformation auf $\mathbb{R}^{n+2}$ ist. Für $x \in \xi^{-1}(A)$ gilt $a := \xi(x) \in A$, weshalb $\|(x_1, \dots, x_{n+1})^T\| a = (x_1, \dots, x_{n+1})^T$. Damit ist

$$\tilde{T}(x) = \|(x_1, \dots, x_{n+1})^T\| \left(\left[T(a_1, \dots, a_{n+1})^T\right]^T, \frac{x_{n+2}}{\|(x_1, \dots, x_{n+1})^T\|} \right)^T.$$

T ist eine orthogonale Transformation, und daher nach Lemma 2.1.4 isometrisch. Also gilt $\|T(a_1, \dots, a_{n+1})^T\| = \|(a_1, \dots, a_{n+1})^T\| = 1$ und infolge

$$\xi(\tilde{T}(x)) = T(a_1, \dots, a_{n+1})^T = T(a).$$

Da x beliebig war, gilt $\tilde{T}(\xi^{-1}(A)) \subseteq \xi^{-1}(T(A))$. Für $y \in \xi^{-1}(T(A))$ gilt $b := \xi(y) \in T(A)$, womit $b = T(c)$ für ein $c \in A$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} y &= \|(y_1, \dots, y_{n+1})^T\| \left(\left[T(c_1, \dots, c_{n+1})^T\right]^T, \frac{y_{n+2}}{\|(y_1, \dots, y_{n+1})^T\|} \right)^T & (8) \\ &= \tilde{T}\Bigg(\underbrace{\|(y_1, \dots, y_{n+1})^T\| \big(c_1, \dots, c_{n+1}, \frac{y_{n+2}}{\|(y_1, \dots, y_{n+1})^T\|}\big)^T}_{=:d} \Bigg), & (9) \end{aligned}$$

wobei $\xi(d) = (c_1, \dots, c_{n+1})^T = c$. Also gilt auch $\xi^{-1}(T(A)) \subseteq \tilde{T}(\xi^{-1}(A)$. Wir schließen auf

$$\tilde{\mu}(T(A)) = \mu(\xi^{-1}(T(A))) = \mu(\tilde{T}(\xi^{-1}(A))) = \mu(\xi^{-1}(A)) = \tilde{\mu}(A),$$

da μ invariant unter orthogonalen Transformationen ist. □

Definition 2.1.7. Ein Element $a \in \mathbb{C}$ bezeichnet man als *algebraisch*, falls $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ derart existieren, dass a Nullstelle des Polynoms $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ist. Ist a nicht algebraisch, so bezeichnet man a als *transzendent*. Die Menge der algebraischen Zahlen definieren wir als $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{C}$.

Die Existenz von transzendenten Zahlen lässt sich über Kardinalitäten beweisen. Cantor zeigte, dass die algebraischen Zahlen abzählbar sind. Da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, gibt es folglich überabzählbar viele transzendente Zahlen. Bekannte Vertreter der transzendente Zahlen sind e und π. Der folgende Satz aus [GW18, Satz 3.5.4.1] zeigt einige nützliche Eigenschaften algebraischer Zahlen.

Satz 2.1.8. *Sei $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{C}$ die Menge der algebraischen Zahlen. Die Menge $\mathbb{A} \cap \mathbb{R}$ ist ein Körper. Ist $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ein Polynom, wobei $a_i \in \mathbb{A}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so sind die Nullstellen von p ebenfalls algebraisch, also $\{x \in \mathbb{C} : p(x) = 0\} \subseteq \mathbb{A}$.*

Wir verwenden im Folgenden die Schreibweise fg für die Hintereinanderausführung $f \circ g$ von Funktionen f und g.

Lemma 2.1.9. *Seien*

$$\psi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

und

$$\phi = \begin{pmatrix} -\cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit $\theta \in (0, 2\pi)$ derart, dass $\cos\theta$ transzendent ist. Dann gilt

$$\psi^3 = \phi^2 = I, \tag{10}$$

wobei wir mit I die Identitätsabbildung auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnen. Dabei sind ψ, ϕ Rotationen.

Beweis. Wir rechnen nach, dass

$$\phi^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta^2 + \sin\theta^2 & 0 & \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta & 0 & \cos\theta^2 + \sin\theta^2 \end{pmatrix} = I.$$

Entsprechend zeigt man $\psi^3 = I$. Um nachzuweisen, dass die Abbildungen Rotationen sind, berechnen wir zuerst die Determinanten mithilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes:

$$\det(\psi) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1,$$

$$\det(\phi) = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \cos\theta^2 + \sin\theta^2 = 1.$$

Für die Orthogonalität betrachten wir zunächst ϕ. Aus $\phi^T = \phi$ folgt

$$\phi\phi^T = \phi^T\phi = \phi^2 = I.$$

Für ψ gilt

$$\psi\psi^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} + \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Analog zeigt man $\psi^T\psi = I$, womit ϕ und ψ Rotationen sind. □

Mit (10) erhalten wir das folgende Lemma.

Lemma 2.1.10. *Sei* $G = \big\{ f_1 \cdots f_n : n \in \mathbb{N}, f_1, \ldots, f_n \in \{\psi, \phi\} \big\}$ *die von* $\{\psi, \phi\}$ *erzeugte Gruppe. Ein* $g \in G \setminus \{I, \phi\}$ *ist von einer der Gestalten*

$$\phi^j \psi^{m_n} \phi \ldots \psi^{m_2} \phi \psi^{m_1} \phi \psi \text{ mit } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ und } (m_1, \ldots, m_n) \in \{1,2\}^n, j \in \{0,1\} \tag{11}$$

$$\phi^j \psi^{m_n} \phi \ldots \psi^{m_2} \phi \psi^{m_1} \phi \psi^2 \text{ mit } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ und } (m_1, \ldots, m_n) \in \{1,2\}^n, j \in \{0,1\} \tag{12}$$

$$\phi^j \psi^{m_n} \phi \ldots \psi^{m_2} \phi \psi^{m_1} \phi \text{ mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } (m_1, \ldots, m_n) \in \{1,2\}^n, j \in \{0,1\} \tag{13}$$

wobei $\psi^{m_n}\phi \ldots \psi^{m_2}\phi\psi^{m_1} = I$ *für* $n = 0$ *und* $\psi^{m_n}\phi \ldots \psi^{m_2}\phi\psi^{m_1} = \psi^{m_1}$ *für* $n = 1$[10].

[10] Wenn man in (13) auch $n = 0$ zulässt, so wäre auch $g = I$ und $g = \phi$ darstellbar.

Lemma 2.1.11. *Sei G wie in Lemma 2.1.10 die von $\{\psi, \phi\}$ erzeugte Gruppe. Dann ist $\phi \neq I$, und auch alle Ausdrücke der Form (11)-(13) sind ungleich I.*

Beweis. Da $\cos\theta$ als transzendent vorausgesetzt wurde, gilt

$$\phi(1,0,0)^T = (-\cos\theta, 0, \sin\theta)^T \neq (1,0,0)^T.$$

Ebenfalls gilt $\psi(1,0,0)^T = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)^T \neq (1,0,0)^T$, womit $\psi \neq I, \phi \neq I$. Da $g \neq I$ zu $g^{-1} \neq I$ äquivalent ist, gilt auch $\psi^2 \neq I$. Einsetzen der Definitionen von ψ, ϕ und Ausrechnen ergibt

$$\psi\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\sin\theta \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \neq I, \psi^2\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\sin\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \neq I. \quad (14)$$

Nach Lemma 2.1.10 hat jede Transformation $g \in G \setminus \{I, \phi\}$ eine der Gestalten (11)-(13). Hat g die Gestalt (11) oder (12) und es gilt $g = I$, so ist $\phi g \phi$ nach (14) von der Gestalt (13), wobei $I = \phi^2 = \phi g \phi$. Können wir zeigen, dass alle Transformationen der Gestalt (13) ungleich I sind, so folgt ein Widerspruch und das Lemma ist bewiesen.

Wir zeigen mit vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, dass $g = \phi^j \psi^{m_n} \phi \ldots \psi^{m_1} \phi$ von der Gestalt (13) ungleich I ist, wobei $(m_1, \ldots, m_n) \in \{1,2\}^n$ sowie $j \in \{0,1\}$. Für $n = 1$ gilt $g \in \{\psi\phi, \psi^2\phi, \phi\psi\phi, \phi\psi^2\phi\}$, wobei wegen der Transzendenz von $\cos\theta$ aus (14),

$$\phi\psi\phi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos\theta^2 + \sin\theta^2 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta & +\frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta \\ +\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \\ +\frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta & +\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta & \cos\theta^2 - \frac{1}{2}\sin\theta^2 \end{pmatrix}$$

und

$$\phi\psi^2\phi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos\theta^2 + \sin\theta^2 & +\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta & +\frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta & -\frac{1}{2} & +\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \\ +\frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta & -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta & \cos\theta^2 - \frac{1}{2}\sin\theta^2 \end{pmatrix}$$

$g \neq I$ folgt.

Angenommen, die Aussage stimmt für alle $k \leq n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Für $n+1$ hat die Transformation die Gestalt $g = \phi^j \psi^{m_{n+1}} \phi \psi^{m_n} \phi \ldots \psi^{m_1} \phi$ mit $(m_1, \ldots, m_n, m_{n+1}) \in \{1,2\}^{n+1}$ sowie $j \in \{0,1\}$.

Im Fall $j = 1$ folgt aus $g = I$

$$I = \psi^3 = \psi^{m_1}\phi^2\psi^{3-m_1} = \psi^{m_1}\phi g\phi\psi^{3-m_1}. \tag{15}$$

Für $n \geq 2$ gilt damit $I = \psi^i\phi \dots \psi^{m_2}\phi$, wobei $i \in \{0,1,2\}$ mit $i \equiv m_{n+1}+m_1 (\mathrm{mod}\ 3)$. Für $i \neq 0$ haben wir $(m_2 \dots, m_n, i) \in \{1,2\}^n$ und für $i = 0$ $(m_2, \dots, m_n) \in \{1,2\}^{n-1}$, wodurch sich in beiden Fällen ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung ergibt. Im Fall $n = 1, j = 1$ gilt $g \in \{\phi\psi\phi\psi\phi, \phi\psi\phi\psi^2\phi, \phi\psi^2\phi\psi^2\phi, \phi\psi^2\phi\psi\phi\}$, womit $\psi^{m_1}\phi g\phi\psi^{3-m_1} \in \{\phi, \psi\phi, \psi^2\phi\}$, von denen oben bereits $\psi^{m_1}\phi g\phi\psi^{3-m_1} \neq I$ gezeigt wurde, was auf einen Widerspruch führt.

Im Fall $j = 0$ zeigen wir durch Induktion nach $l \in \mathbb{N}$, dass für $g = \psi^{m_l}\phi \dots \psi^{m_1}\phi$ mit $(m_1, \dots, m_l) \in \{1,2\}^l$ algebraische Koeffizienten $a_0^g, \dots, a_{l-1}^g, b_0^g, \dots, b_{l-1}^g, c_0^g \dots, c_l^g \in \mathbb{A} \cap \mathbb{R}$ existieren mit

$$g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\ \left(\sum_{i=0}^{l-1} a_i^g(\cos\theta)^i\right) \\ \sin\theta\ \left(\sum_{i=0}^{l-1} b_i^g(\cos\theta)^i\right) \\ \sum_{i=0}^{l} c_i^g(\cos\theta)^i \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbb{A}$ die Menge der algebraischen Zahlen in $\mathbb{C}$ ist. Im Fall $l = 1$ stimmt g mit $\psi\phi$ oder $\psi^2\phi$ überein. Mit (14) erhalten wir $g((0,0,1)^T) = (-\frac{1}{2}\sin\theta, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, \cos\theta)^T$. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ sind die Nullstellen des Polynoms $p(x) = 4x^2 + 3$ und daher algebraisch, womit der Induktionsanfang gezeigt ist. Wir nehmen an, dass für $l \in \mathbb{N}$ $a_0^g, \dots, a_{l-1}^g, b_0^g, \dots, b_{l-1}^g, c_0^g \dots, c_l^g \in \mathbb{A} \cap \mathbb{R}$ existieren mit

$$g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\ \left(\sum_{i=0}^{l-1} a^g(\cos\theta)^i\right) \\ \sin\theta\ \left(\sum_{i=0}^{l-1} b^g(\cos\theta)^i\right) \\ \sum_{i=0}^{l} c^g(\cos\theta)^i \end{pmatrix}.$$

Hierbei gilt $g = \psi^{m_l}\phi \dots \psi^{m_1}\phi$ mit $(m_1, \dots, m_l) \in \{1,2\}^l$. Durch Anwendung von $\psi\phi$ bzw. $\psi^2\phi$ folgt für $(x', y', z')^T = \hat{g}(0,0,1)^T$, mit $\hat{g} = \psi\phi g$ bzw. $\hat{g} = \psi^2\phi g$

$$\begin{aligned}
x' &= \sin\theta\big(\frac{1}{2}\cos\theta(\sum_{i=0}^{l-1} a_i^g(\cos\theta)^i) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(\sum_{i=0}^{l-1} b_i^g(\cos\theta)^i) - \frac{1}{2}(\sum_{i=0}^{l} c_i^g(\cos\theta)^i)\big) \\
&= \sin\theta\ \left(\underbrace{-\frac{1}{2}(c_l^g - a_{l-1}^g)}_{=a_l^{\hat{g}}}(\cos\theta)^l + \sum_{i=0}^{l-1}\underbrace{(-\frac{1}{2}(c_i^g - a_{i-1}^g) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}b_i^g)}_{=a_i^{\hat{g}}}(\cos\theta)^i\right), \\
y' &= \sin\theta\ \big(\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta(\sum_{i=0}^{l-1} a_i^g(\cos\theta)^i) - \frac{1}{2}(\sum_{i=0}^{l-1} b_i^g(\cos\theta)^i) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(\sum_{i=0}^{l} c_i^g(\cos\theta)^i)\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sin\theta \Bigg(\underbrace{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(c_l^g - a_{l-1}^g)\big)}_{=b_l^{\hat{g}}}(\cos\theta)^l + \sum_{i=0}^{l-1} \underbrace{(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(c_i^g - a_{i-1}^g) - \frac{1}{2}b_i^g)}_{=b_i^{\hat{g}}}(\cos\theta)^i \Bigg), \\
z' &= (\sin\theta)^2 \big(\sum_{i=0}^{l-1} a_i^g (\cos\theta)^i \big) + \cos\theta \big(\sum_{i=0}^{l} c_i^g (\cos\theta)^i \big) \\
&= (1 - (\cos\theta)^2) \big(\sum_{i=0}^{l-1} a_i^g (\cos\theta)^i \big) + \cos\theta \big(\sum_{i=0}^{l} c_i^g (\cos\theta)^i \big) \\
&= \underbrace{(c_l^g - a_{l-1}^g)}_{=c_{l+1}^{\hat{g}}}(\cos\theta)^{l+1} + \sum_{i=0}^{l} \underbrace{(c_{i-1}^g + a_i^g - a_{i-2}^g)}_{c_i^{\hat{g}}}(\cos\theta)^i,
\end{aligned}
$$

wobei Koeffizienten mit negativen Indizes als 0 zu verstehen sind. Nach Satz 2.1.8 ist $\mathbb{A} \cap \mathbb{R}$ ein Körper, weshalb $a_0^{\hat{g}}, \dots a_l^{\hat{g}}, b_0^{\hat{g}}, \dots, b_l^{\hat{g}}, c_0^{\hat{g}}, \dots, c_{l+1}^{\hat{g}} \in \mathbb{A}$. Damit ist die Behauptung bewiesen, dass die z-Koordinate von $g(0,0,1)^T$ ein Polynom l-ter Ordnung mit algebraischen Koeffizienten in der Variablen $\cos\theta$ ist. Im Fall $c_1^{\hat{g}} = c_2^{\hat{g}} = \cdots = c_{l+1}^{\hat{g}} = 0$ ist $\hat{g}(0,0,1)^T = (x', y', 0)^T \neq (0,0,1)^T$. Existiert ein $i \in \{1, \dots, l+1\}$ mit $c_i^{\hat{g}} \neq 0$ ist nach Satz 2.1.8 jede Nullstelle des Polynoms $\sum_{i=0}^{l+1} c_i^{\hat{g}}(\cos\theta)^i - 1$ ebenfalls algebraisch. Da $\cos\theta$ als transzendent vorausgesetzt wurde, reduziert sich die z-Komponente von $\hat{g}(0,0,1)^T$ nicht zu 1. Zusammenfassend sind deshalb alle $\psi^{m_l}\phi \dots \psi^{m_1}\phi$ ungleich I, wobei $(m_1, \dots, m_l) \in \{1,2\}^l$ für $l \in \mathbb{N}$. Abschließend folgt damit, dass alle $g \in G$ der Gestalt (13) ungleich I sind. □

Korollar 2.1.12. Sei G die von $\{\psi, \phi\}$ erzeugte Gruppe. Eine Transformation aus $G \setminus \{I, \phi\}$ ist von genau *einer* Gestalt (11)-(13). Die Transformationen I und ϕ sind nicht von der Gestalt (11)-(13).

Beweis. Angenommen, es existiert ein $f \in G$ von der Gestalt (11) mit

$$f = \phi^j \psi^{m_n} \phi \dots \psi^{m_1} \phi \psi = \phi,$$

wobei $(m_1, \dots, m_n) \in \{1,2\}^n$ sowie $j \in \{0,1\}$. Daraus folgt $I = f\phi = \phi^j \psi^{m_n} \phi \dots \psi^{m_1} \phi \psi \phi$, was im Widerspruch zu Lemma 2.1.11 steht, da $f\phi$ von der Gestalt (13) ist. Analog lässt sich zeigen, dass f nicht von der Gestalt (12) oder (13) sein kann. Lemma 2.1.11 besagt, dass I keine Darstellung der Gestalt (11)-(13) besitzt.

Sei $g, f_1, f_2 \in G \setminus \{I, \phi\}$ mit $f_1 = g = f_2$ bzw. $f_1^{-1} f_2 = I$. Hat f_1 die Gestalt (11), also $f_1^{-1} = \psi^2 \phi \psi^{3-m_1} \dots \phi \psi^{3-m_n} \phi^j$, so muss der erste Faktor von f_2 ϕ^j sein. Andernfalls ergibt sich nach Lemma 2.1.11 ein Widerspruch, da sich die Faktoren nicht kürzen können. Dies lässt sich für alle Faktoren wiederholen, womit f_2 dieselbe Gestalt wie f_1 haben muss. Der Beweis für die Gestalten (12) und (13)verläuft analog. □

Lemma 2.1.13. *Sei G die von $\{\psi, \phi\}$ erzeugte Gruppe. Dann existieren paarweise disjunkte Mengen $A, B, C \subseteq G$ derart, dass für $\rho \in G$*

(a) *von ρ und $\phi\rho$ je eine Transformation zu A und eine zu $B \cup C$ gehört;*

(b) *von ρ, $\psi\rho$ und $\psi^2\rho$ je eine Transformation zu A, eine zu B und eine zu C gehört.*

Zusätzlich gilt $A \cup B \cup C = G$.

Beweis. Die Aufteilung lässt sich bewerkstelligen, indem man induktiv nach der Anzahl k der Faktoren ϕ, ψ, ψ^2 in der nach Korollar 2.1.12 eindeutigen Darstellung aus Lemma 2.1.10 vorgeht. Wir definieren $A_1 := \{I\}, B_1 := \{\psi, \phi\}$ und $C_1 := \{\psi^2\}$. Angenommen, wir haben bereits alle Transformationen mit k Faktoren der Bauart ψ, ψ^2 bzw. ϕ auf die Mengen A_k, B_k, C_k verteilt. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir Produkte mit n Faktoren der Bauart ψ, ψ^2 und ϕ mit ϕ_n, für die der erste Faktor ϕ ist, und mit ψ_n Produkte mit n Faktoren der Bauart ψ, ψ^2 und ϕ, für die der erste Faktor ψ oder ψ^2 ist, wobei $\psi_0 = \phi_0 = I$. Zuerst beobachten wir, dass jedes Produkt mit $k+1$ Faktoren der Bauart ψ, ψ^2 und ϕ in der Darstellung von Lemma 2.1.10 von der Form $\phi\psi_k$, $\psi\phi_k$, oder $\psi^2\phi_k$ ist.

Die drei vorkommenden Produkte $\phi\psi_k$, $\psi\phi_k$ und $\psi^2\phi_k$ mit $k+1$ Faktoren verteilen wir nach folgenden Schema:

(i) wenn ψ_k zu A_k, B_k, oder C_k gehört, dann gehört $\phi\psi_k$ zu $B_{k+1}, A_{k+1}, A_{k+1}$;

(ii) wenn ϕ_k zu A_k, B_k, oder C_k gehört, dann gehört $\psi\phi_k$ zu $B_{k+1}, C_{k+1}, A_{k+1}$ und $\psi^2\phi_k$ zu $C_{k+1}, A_{k+1}, B_{k+1}$.

Wir definieren die Mengen

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n, \quad C := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Nach Lemma 2.1.10 und Korollar 2.1.12 ist jede Funktion aus $G \setminus \{I, \phi\}$ von genau einer der Gestalten (11)-(13) mit $k \in \mathbb{N}$ Faktoren, und ist folglich eindeutig einer der Mengen A_k, B_k oder C_k zugeteilt, womit $A \cup B \cup C = G$ und die Mengen nach Konstruktion disjunkt sind.

Wir zeigen schließlich die Gültigkeit von (a) und (b). Angenommen, es gibt ein $\rho \in G$, für das $\rho, \phi\rho \in A$ gilt[11]. Im Fall $\rho = \psi_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ folgt gemäß (i) $\phi\rho \in B_{n+1} \subseteq B$, was im Widerspruch zur Disjunktheit von A und B steht. Für $\rho = \phi\psi_{n-1}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist $\psi_{n-1} = \phi\rho \in A$ nach Annahme, wobei $\psi_0 = I$. Nach (i) gilt $\rho = \phi\psi_{n-1} \in B_n \subseteq B$, was erneut zum Widerspruch führt. Der Beweis für $\rho, \phi\rho \in B$ bzw. $\rho, \phi\rho \in C$ verläuft analog.

[11]Im Folgenden wollen wir außer Acht lassen, dass sich bereits durch bestimmte Konstellationen wie $\rho = \phi_1 = \phi \in A$ Widersprüche ergeben, sondern den Beweis rein über den Widerspruch zur Disjunktheit der Mengen A, B, C führen.

Angenommen, es gibt ein $\rho \in B$ mit $\phi\rho \in C$. Für $\rho = \psi_n$ gilt nach (i) $\phi\rho \in A_{n+1} \subseteq A$, was im Widerspruch zur Disjunktheit von A und C steht. Gilt $\rho = \phi\psi_{n-1} \in B$, wobei $\psi_0 = I$, dann ist $\psi_{n-1} = \phi\rho \in C$ nach Annahme. Nach (i) folgt $\rho = \phi\psi_{n-1} \in A_n \subseteq A$, was erneut auf einen Widerspruch führt. Der Beweis für $\rho \in C$ und $\phi\rho \in B$ verläuft analog, womit (a) bewiesen ist.

Angenommen, es existiert ein $\rho \in G$, für das $\rho, \psi\rho \in A$ gilt. Im Fall $\rho = \phi_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ folgt nach (ii) $\psi\phi_n \in B_{n+1} \subseteq B$, was im Widerspruch zur Disjunktheit der Mengen A, B steht. Für $\rho = \psi_n$ gilt $\rho = \psi\phi_{n-1}$ oder $\rho = \psi^2\phi_{n-1}$, wobei $\phi_0 = I$. Im ersten Fall muss nach (ii) $\phi_{n-1} \in C_{n-1}$ gelten. Erneut nach (ii) erhalten wir $\psi\rho = \psi^2\phi_{n-1} \in B_n \subseteq B$, was im Widerspruch zur Disjunktheit von A und B steht. Im Fall $\rho = \psi^2\phi_{n-1}$ muss nach (ii) $\phi_{n-1} \in B_{n-1}$ gelten, womit $\psi\rho = \phi_{n-1} \in B_{n-1}$, was erneut zu einem Widerspruch führt.

Existiert ein $\rho' \in G$ mit $\psi\rho', \psi^2\rho' \in A$, so führt das eben Gezeigte angewendet auf $\rho = \psi\rho'$ zu einem Widerspruch. Der Beweis für $\rho, \psi\rho \in B$ bzw. C verläuft analog.

Angenommen, es existiert ein $\rho \in G$ mit $\rho, \psi^2\rho \in A$. Für ρ von der Gestalt ϕ_n mit $n \in \mathbb{N}$ gilt $\rho \in A_n$ und nach (ii) $\psi^2\rho \in C_{n+1} \subseteq C$, was im Widerspruch zur Disjunktheit von A, B und C steht. Gilt $\rho = \psi_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist $\psi^2\rho$ von der Gestalt ϕ_{n-1} oder $\psi\phi_{n-1}$, wobei $\phi_0 = I$. Im ersten Fall gilt $\phi_{n-1} = \psi^2\rho \in A$ und daher nach (ii) $\rho = \psi\phi_{n-1} \in B_n \subseteq B$, was im Widerspruch zur Disjunktheit steht. Im Fall $\psi^2\rho = \psi\phi_{n-1}$ ist ϕ_{n-1} entweder in A, B oder C. Für $\phi_{n-1} \in A_{n-1}$ gilt nach (ii) $\rho = \psi^2\phi_{n-1} \in C_n \subseteq C$, womit ein Widerspruch zur Disjunktheit von C und A entsteht. Gilt $\phi_{n-1} \in B_{n-1}$, so ist nach (ii) $\psi^2\rho = \psi\phi_{n-1} \in C_n$, was auf einen Widerspruch zur Annahme $\psi^2\rho \in A$ führt. Für $\phi_{n-1} \in C_{n-1}$ gilt nach (ii) $\rho = \psi^2\phi_{n-1} \in B_n \subseteq B$, was im Widerspruch zu $\rho \in A$ steht. Der Beweis für $\rho, \psi^2\rho \in B$ bzw. C verläuft analog, womit (b) bewiesen ist. □

Die nachfolgende Tabelle stellt die Aufteilung für $n = 1, 2, 3, 4$ dar.

n	1	2	3	4
A_n	I	$\phi\psi, \psi^2\phi, \phi\psi^2$	$\phi\psi\phi$	$\phi\psi\phi\psi, \phi\psi\phi\psi^2, \phi\psi^2\phi\psi, \psi^2\phi\psi^2\phi, \phi\psi^2\phi\psi^2$
B_n	ψ, ϕ		$\psi\phi\psi, \psi\phi\psi^2, \phi\psi^2\phi$	$\psi\phi\psi\phi$
C_n	ψ^2	$\psi\phi$	$\psi^2\phi\psi, \psi^2\phi\psi^2$	$\psi^2\phi\psi\phi, \psi\phi\psi^2\phi$

Lemma 2.1.14. *Seien $A, B, C \subseteq G$ wie in Lemma 2.1.13. Für die drei Mengen A, B und C gilt*

$$\phi A = B \cup C, \quad \psi A = B, \quad \psi^2 A = C,$$

wobei $fH = \{fh : h \in H\}$ für $f \in G, H \subseteq G$.

Beweis. Seien (a), (b), (i) und (ii) wie in Lemma 2.1.13 beziehungsweise seinem Beweis.

Nach (a) gilt $\phi A \subseteq B \cup C$ und $\phi(B \cup C) \subseteq A$. Weil $\rho \mapsto \phi\rho$ eine Bijektion von G nach G ist, folgt $\phi A = B \cup C$.

Für $\psi A = B$ sowie $\psi^2 A = C$ wollen wir $\psi A \subseteq B$, $\psi B \subseteq C$ und $\psi C \subseteq A$ zeigen. Aufgrund der Bijektivität von $\rho \mapsto \psi\rho$ bzw. $\rho \mapsto \psi^2\rho$ folgt dann

$$A = \psi^3 A \subseteq \psi^2 B \subseteq \psi C \subseteq A,$$

womit $\psi A = \psi^3 B = B$ und $\psi^2 A = \psi^3 C = C$.

Für $\psi A \subseteq B$ sei zunächst ρ eine Transformation der Gestalt $\phi_n \in A$, wobei $\phi_0 = I$. Nach (ii) folgt $\psi\phi_n \in B$. Ist $\rho \in A$ von der Gestalt $\psi\phi_{n-1}$, so folgt im Fall $n = 1$, dass $\psi\phi_0 = \psi \in B$. Im Fall $n > 1$ gilt nach (b) $\psi^2\rho \in B \cup C$. Wir nehmen $\psi^2\rho \in B$ und damit $\psi\rho \in C$ an, womit $\phi_{n-1} = \psi^2\rho \in B$ und nach (ii)

$$\rho = \psi\phi_{n-1} \in C$$

gilt, was im Widerspruch zur Annahme $\rho \in A$ steht. Für ρ von der Gestalt $\psi^2\phi_{n-1} \in A$ gilt $n > 1$, da $\psi^2\phi_0 = \psi^2 \in C$. Nach (b) erhalten wir $\phi_{n-1} = \psi\rho \in B \cup C$, wobei aus $\psi\rho \in C$ nach (ii)

$$\rho = \psi^2\psi\rho = \psi^2\phi_{n-1} \in B$$

folgt, was im Widerspruch zur Annahme $\rho \in A$ steht. In jedem Fall gilt $\psi\rho \in B$, womit $\psi A \subseteq B$.

Wir zeigen $\psi B \subseteq C$. Ist $\rho \in B$ von der Gestalt ϕ_n, dann gilt nach (ii) $\psi\phi_n \in C$. Ist $\rho \in B$ von der Gestalt $\psi\phi_{n-1}$, wobei $\phi_0 = I$, dann gilt nach (b) $\psi^2\rho \in A \cup C$. Angenommen, es gilt $\psi^2\rho \in C$ und damit $\psi\rho \in A$. Aus $\phi_{n-1} = \psi^2\rho \in C$ folgt nach (ii) $\rho = \psi\phi_{n-1} \in A$, was im Widerspruch zur Annahme $\rho \in B$ steht. Für $\rho = \psi^2\phi_{n-1} \in B$, wobei $n > 1$ aufgrund von $\psi^2\phi_0 = \psi^2 \in C$, gilt nach (b) $\phi_{n-1} = \psi\rho \in A \cup C$. Die Annahme $\phi_{n-1} = \psi\rho \in A$ führt nach (ii) wegen

$$\rho = \psi^2\phi_{n-1} \in C$$

auf einen Widerspruch zur Annahme $\rho \in B$, womit $\psi B \subseteq C$.

Wir zeigen schließlich $\psi C \subseteq A$. Ist $\rho \in C$ von der Gestalt ϕ_n, dann gilt nach (ii) $\psi\phi_n \in A$. Gilt $\rho = \psi\phi_{n-1} \in C$, wobei $n > 1$ wegen $\psi\phi_0 = \psi \in B$, so gilt nach (b) $\psi\rho \in A \cup B$. Im Fall $\psi^2\rho \in A$ und damit $\psi\rho \in B$ gilt wegen $\phi_{n-1} = \psi^2\rho \in A$ nach (ii) $\rho = \psi\phi_{n-1} \in B$, was im Widerspruch zur Annahme $\rho \in C$ steht. Ist ρ von der Gestalt $\psi^2\phi_{n-1}$, wobei $\phi_0 = I$, dann ist $\phi_{n-1} = \psi\rho \in A \cup B$. Angenommen, es gilt $\psi\rho \in B$. Nach (ii) gilt $\rho = \psi^2\phi_{n-1} \in A$, was im Widerspruch zur Annahme $\rho \in C$ steht, womit $\psi C \subseteq A$.

$\square$

Wir betrachten noch eine Eigenschaft von Rotationen; siehe zum Beispiel [Hav12, Beispiel 12.4.14].

Lemma 2.1.15. *Ist $\rho \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Rotation, dann existiert eine Orthonormalbasis (b_1, b_2, b_3) von $\mathbb{R}^3$ mit*

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

bezüglich dieser Basis, wobei $\varphi \in [0, \pi]$.

Ausgehend von obiger Darstellung lässt sich das folgende Lemma beweisen.

Lemma 2.1.16. *Eine Rotation $F \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus \{I\}$ hat auf S^2 genau zwei Fixpunkte.*

Beweis. Sei $F \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus \{I\}$ eine beliebige Rotation. Nach Lemma 2.1.15 hat F eine Darstellung $F = B\tilde{F}B^T$ mit

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

wobei $\varphi \in (0, \pi]$ und $B = (b_1, b_2, b_3)$ mit einer Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 gemäß Lemma 2.1.15. Der Fall $\varphi = 0$ kann aufgrund von $F \neq I$ ausgeschlossen werden. Wir betrachten die Gleichung

$$(\tilde{F} - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\tilde{F} - I$ hat Rang 2, womit der Lösungsraum U der Gleichung $(F - I)u = B(\tilde{F} - I)B^T u = 0$ ein eindimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist. Ist $u \in U$ ein Erzeuger mit $\|u\| = 1$, also $U = \{\varepsilon u : \varepsilon \in \mathbb{R}\}$, dann sind $\pm u$ die einzigen Vektoren aus $U \cap S^2$. □

Proposition 2.1.17 (Hausdorff-Paradoxon)**.** *Es existieren paarweise disjunkte Mengen $A', B', C', D \subseteq S^2$ mit*

$$S^2 = A' \cup B' \cup C' \cup D,$$

$\phi A' = B' \cup C'$, $\psi A' = B'$, $\psi^2 A' = C'$ und abzählbarem D.

Beweis. Sei G die von $\{\psi, \phi\}$ erzeugte Gruppe. Wie in Lemma 2.1.16 gezeigt, besitzt jede Rotation ungleich I genau zwei Fixpunkte. Wir definieren

$$D := \{x \in S^2 \mid \exists\, g \in G \setminus \{I\} : g(x) = x\}.$$

Da G abzählbar ist und jedes $g \in G \setminus \{I\}$ eine Rotation darstellt, ist D abzählbar. Wir betrachten $P := S^2 \setminus D$. Für einen Punkt $x \in P$ definieren wir $G_x := \{g(x) : g \in G\}$. Weil mit $f(x) = g(x)$ auch $g^{-1}f(x) = x$ gilt, erhalten wir für $x \notin D$, dass $g^{-1}f = I$ bzw. $g = f$. Also ist $G \ni g \mapsto g(x) \in G_x$ für $x \in P$ bijektiv. Zudem gilt $G_x \subseteq P$, da $g \in G$ als Rotation nach Lemma 2.1.4 isometrisch ist, womit zunächst $G_x \subseteq S^2$ folgt. Angenommen, es existiert ein $d \in G_x \cap D$, also $h(d) = d = k(x)$ für $h, k \in G, h \neq I$. Der Fall $k = I$ ist zu verwerfen, da dann $d = x \in D$ folgen würde, wir aber $x \in P$ vorausgesetzt haben. Somit folgt $h^{-1}k^{-1}h \neq I$ und $x = (k^{-1}h^{-1}k)(x)$, was aber im Widerspruch zu $x \in P$ steht.

Das Mengensystem $\mathfrak{G} := \{G_x : x \in P\}$ besteht aus paarweise disjunkten Mengen, da für verschiedene $x, y \in P$ und $z \in G_x \cap G_y$ zwei Rotationen $h, g \in G$ existieren mit $h(x) = z = g(y)$. Insbesondere ist $x = h^{-1}(g(y)) \in G_y$ und somit $G_x = G_y$.

Wir wählen aus jeder Menge $H \in \mathfrak{G}$ genau einen Punkt $p(H)$[12] aus und erhalten die Teilmenge $M := \{p(H) : H \in \mathfrak{G}\}$ von P. Für

$$G(M) := \bigcup_{g \in G} g(M)$$

gilt $P \subseteq G(M)$, da zu $x \in P$ ein $H \in \mathfrak{G}$ mit $x \in G_x = H$ existiert, wodurch $g(x) = p(H)$ für ein $g \in G$ und folglich $x = g^{-1}(p(H)) \in G(M)$ zutrifft. Können wir $D \cap G(M) = \emptyset$ zeigen, so erhalten wir sogar $P = G(M)$. Angenommen, es existiert ein $d \in D \cap G(M)$, so gibt es $g, h \in G$ mit $h \neq I$ und $m \in M$ mit $h(d) = d = g(m)$. Nach Definition von M gibt es ein $x \in P$ und $f \in G$, für das $m = f(x)$ gilt. Zusammen gilt $g(f(x)) = d = h(d) = h(g(f(x)))$, was im Widerspruch zur Bijektivität von $G \ni g \mapsto g(x) \in G_x$ steht.

Seien A, B, C wie in Lemma 2.1.13. Wegen $G = A \cup B \cup C$, lässt sich P als Vereinigung von drei Mengen schreiben:

$$A' := \bigcup_{a \in A} a(M), \quad B' := \bigcup_{b \in B} b(M), \quad C' := \bigcup_{c \in C} c(M).$$

Da das Bild einer Funktion verträglich mit Vereinigungen ist, gilt nach Lemma 2.1.14

$$\phi A' = \bigcup_{a \in A} \phi(a(M)) = \bigcup_{f \in \phi A} f(M) = \bigcup_{f \in B \cup C} f(M) = B' \cup C', \tag{16}$$

$$\psi A' = \bigcup_{a \in A} \psi(a(M)) = \bigcup_{f \in \psi A} f(M) = \bigcup_{f \in B} f(M) = B', \tag{17}$$

$$\psi^2 A' = \bigcup_{a \in A} \psi^2(a(M)) = \bigcup_{f \in \psi^2 A} f(M) = \bigcup_{f \in C} f(M) = C'. \tag{18}$$

Die Mengen A', B' und C' sind Teilmengen von $P = S^2 \setminus D$ und somit alle disjunkt zu D. Für die Disjunktheit untereinander beobachten wir zuerst, dass $G(\{m_1\}) \cap G(\{m_2\}) = \emptyset$ für $m_1, m_2 \in M$ mit $m_1 \neq m_2$, da die Mengen aus $\mathfrak{G}$ paarweise disjunkt sind und wir aus jedem $H \in \mathfrak{G}$ genau ein Element ausgewählt haben. Angenommen, für $x \in A' \cap B'$ existieren $a \in A, b \in B$ und $m_1, m_2 \in M$ mit $a(m_1) = x = b(m_2)$, wodurch $G(\{m_1\}) \cap G(\{m_2\}) \neq \emptyset$.

[12] Hier verwenden wir **AC**.

Es folgt $m_1 = m_2$ und wegen $a \neq b$ (A und B sind disjunkt) auch $m_1 = a^{-1}b(m_1) \in D$, was im Widerspruch zu $M \subseteq P$ steht. Analog argumentiert man die Disjunktheit von A' und C', sowie von B' und C'.

A', B', C' und D haben die gewünschten Eigenschaften, wobei nach Definition von P

$$S^2 = P \cup D = A' \cup B' \cup C' \cup D.$$

□

Das nächste Lemma folgt [Str79].

Lemma 2.1.18. *Ist $N \subseteq S^2$ eine abzählbare Menge, dann existiert eine Rotation $\rho \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\rho^m(N) \cap \rho^n(N) = \emptyset$ für verschiedene $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Beweis. Bezeichnet $\pi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die dritte Koordinate, so ist die Menge $S^2 \cap \pi_3^{-1}(\{0\})$ überabzählbar. Folglich gibt es einen Punkt $v = (v_1, v_2, 0)^T \in S^2 \cap \pi_3^{-1}(\{0\})$, für den weder v noch $-v$ in N liegen. Wir betrachten die Abbildung $\sigma \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$\sigma = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & 0 \\ -v_2 & v_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus $v \in S^2$ folgt $\|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2 = 1$ und damit $\det \sigma = 1$. Durch Einsetzen und Nachrechnen folgt $\sigma^T \sigma = \sigma \sigma^T = I$, womit σ eine Rotation ist. Zudem gilt $\sigma(v) = e_1$, und aus der Injektivität von σ folgt $\{e_1, -e_1\} \cap \sigma(N) = \emptyset$, wobei $e_1 = (1, 0, 0)^T$.

Für $\varphi \in \mathbb{R}$ und

$$\tau_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

gilt $\tau_\varphi(e_1) = e_1$, womit $\{e_1, -e_1\} \cap \tau_\varphi(\sigma(N)) = \emptyset$. Aus den Additionstheoremen für sin und cos folgt $\tau_{\varphi_2}^{-1} = \tau_{-\varphi_2}$ und $\tau_{\varphi_1}\tau_{\varphi_2} = \tau_{\varphi_1+\varphi_2}$. Offenbar ist die Abbildung $\Phi : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\Phi(\theta) = \tau_\theta$ injektiv.

Für ein Tripel $(x, y, n) \in \sigma(N)^2 \times \mathbb{N}$ hat die Gleichung $\tau_\varphi^n(x) = y$ im Fall $x_1 \neq y_1$ keine Lösung φ. Im Fall $x_1 = y_1$ hat die Gleichung höchstens abzählbar viele Lösungen φ. Da es nach Lemma 1.2.11 höchstens abzählbar viele solcher Tripel $(x, y, n) \in \sigma(N)^2 \times \mathbb{N}$ gibt, aber überabzählbare viele Winkel, können wir einen Winkel φ auswählen, der für kein Tripel (x, y, n) die Gleichung $\tau_\varphi^n(x) = y$ erfüllt, womit

$$\sigma(N) \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau_\varphi^n(\sigma(N)) = \emptyset. \tag{19}$$

Für $\rho = \sigma^{-1}\tau_\varphi\sigma$ gilt $\rho^n = \sigma^{-1}\tau_\varphi^n\sigma$ und folglich $\tau_\varphi^n\sigma = \sigma\rho^n$. Aus (19) folgt

$$\emptyset = \sigma(N) \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau_\varphi^n(\sigma(N)) = \sigma\left(N \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \rho^n(N)\right),$$

womit $N \cap \rho^n(N) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher ist $N \cap \rho^{m-n}(N) = \emptyset$ für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$. Aufgrund der Injektivität von ρ^n erhalten wir schließlich

$$\emptyset = \rho^n\left(N \cap \rho^{m-n}(N)\right) = \rho^n(N) \cap \rho^m(N).$$

□

Satz 2.1.19. *Sei $\mathfrak{C} \subseteq \mathcal{P}(S^2)$ und $\nu : \mathfrak{C} \to [0, +\infty]$ ein Inhalt darauf. Gilt dabei $\nu(S^2) \in (0, +\infty)$ und ist ν invariant unter Rotationen, so muss $\mathcal{P}(S^2) \setminus \mathfrak{C} \neq \emptyset$ gelten.*

Beweis. Ist $\nu : \mathcal{P}(S^2) \to [0, +\infty]$ ein unter Rotationen invarianter Inhalt mit $\nu(S^2) \in (0, +\infty)$ und N eine abzählbare Teilmenge von S^2, dann existiert nach Lemma 2.1.18 eine Rotation ρ mit $\rho^m(N) \cap \rho^n(N) = \emptyset$ für verschiedene $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Aufgrund der Monotonie und der Additivität folgt

$$n \cdot \nu(N) = \sum_{i=1}^{n} \nu(\rho^i(N)) \leq \nu(S^2) < +\infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, womit $\nu(N) = 0$.

Sind A', B', C', D und ϕ, ψ wie in Proposition 2.1.17, so erhalten wir $\nu(S^2) = \nu(D) + \nu(S^2 \setminus D) = \nu(S^2 \setminus D)$, da D abzählbar ist. Folglich gilt

$$\nu(S^2) = \begin{cases} \nu(A') + \nu(B' \cup C') & = & \nu(A') + \nu(\phi A') & = & 2\nu(A'), \\ \nu(A') + \nu(B') + \nu(C') & = & \nu(A') + \nu(\psi A') + \nu(\psi^2 A') & = & 3\nu(A'), \end{cases}$$

und somit $2\nu(A') = 3\nu(A') \in (0, +\infty)$, was den Widerspruch $2 = 3$ nach sich zieht. □

Die Erweiterung der Aussage für beliebige Inhalte auf $S^n, n > 3$, erfolgt analog zu Korollar 2.1.6.

Korollar 2.1.20. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sei $\emptyset \in \mathfrak{C} \subseteq \mathcal{P}(S^n)$ ein Mengensystem, und $\nu : \mathfrak{C} \to [0, +\infty]$ ein Inhalt darauf. Gilt $\nu(S^n) \in (0, +\infty)$ und ist ν invariant unter Rotationen, so muss $\mathcal{P}(S^n) \setminus \mathfrak{C} \neq \emptyset$ gelten.

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion. Für $n = 2$ haben wir die Aussage bereits in Satz 2.1.19 bewiesen.

Angenommen, die Aussage stimmt für $n \in \mathbb{N}$. Sei $\nu : \mathcal{P}(S^{n+1}) \to [0, +\infty]$ ein unter Rotationen invarianter Inhalt, für den $\nu(S^{n+1}) \in (0, +\infty)$ gilt. Dann können wir in Analogie zu Korollar 2.1.6 durch

$$\tilde{\nu}(A) := \nu\left(\xi^{-1}(A)\right)$$

einen Inhalt $\tilde{\nu} : \mathcal{P}(S^n) \to [0, +\infty]$ definieren, wobei $\xi : S^{n+1} \setminus \{-e_{n+2}, e_{n+2}\} \to S^n$ wie in (7) durch

$$\xi((x_1, \ldots, x_{n+2})^T) = \frac{1}{\|(x_1, \ldots, x_{n+1})^T\|}(x_1, \ldots, x_{n+1})^T$$

definiert ist. Das Urbild ist verträglich mit Schnitten und Vereinigungen, wodurch mit ν auch $\tilde{\nu}$ additiv ist. Wegen $\xi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ gilt $\tilde{\nu}(\emptyset) = \nu(\emptyset) = 0$. $\nu(S^{n+1}) < +\infty$ impliziert, dass Singletons $\{s\}, s \in S^{n+1}$, $\nu-$Nullmengen sind, weshalb $\tilde{\nu}(S^n) = \nu(\xi^{-1}(S^n)) = \nu(S^{n+1} \setminus \{+e_{n+2}, -e_{n+2}\}) = \nu(S^{n+1}) \in (0, +\infty)$. Wenn wir zeigen können, dass $\tilde{\nu}$ invariant unter orthogonalen Transformationen ist, folgt aus der Induktionsvoraussetzung ein Widerspruch. Dazu sei $T \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ eine orthogonale Transformation und $A \in \mathcal{P}(S^n)$.Wir definieren $\tilde{T} \in \mathbb{R}^{(n+2)\times(n+2)}$ durch

$$\tilde{T} := \begin{pmatrix} & 0 \\ T & \vdots \\ & 0 \\ 0 \ldots 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\tilde{T}$ ist eine orthogonale Transformation auf $\mathbb{R}^{n+2}$ und analog zum Beweis von Korollar 2.1.6 erkennen wir $\xi^{-1}(T(A)) = \tilde{T}(\xi^{-1}(A))$. Im Widerspruch zur Induktionsannahme schließen wir auf

$$\tilde{\nu}(T(A)) = \nu(\xi^{-1}(T(A)) = \nu(\tilde{T}(\xi^{-1}(A))) = \nu(\xi^{-1}(A)) = \tilde{\nu}(A),$$

da ν invariant unter orthogonalen Transformationen ist.

□

Korollar 2.1.21. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ sei $\emptyset \in \mathfrak{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ein Mengensystem und $\nu : \mathfrak{C} \to [0, +\infty]$ ein Inhalt darauf. Gilt $\nu(K_1(0)) \in (0, +\infty)$ und ist ν invariant unter Rotationen, so muss $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \mathfrak{C} \neq \emptyset$ gelten.

Beweis. Wir führen den Beweis mithilfe vollständiger Induktion. Im Fall $n = 3$ seien A', B', C' und D eine Zerlegung der Kugeloberfläche S^2 wie in Proposition 2.1.17. Angenommen, es gibt einen Inhalt $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \to [0, +\infty]$ mit den gewünschten Eigenschaften. Wir definieren eine Funktion $f : S^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ durch

$$f(x) := \{tx : t \in [0, 1]\}.$$

Diese Menge entspricht der Verbindungslinie zwischen einem Punkt der Kugeloberfläche S^2

und dem Ursprung. Wegen $K_1(0) = \bigcup_{s\in S^2} f(s)$ folgt für

$$A'' := \bigcup_{a\in A'} f(a),\ B'' := \bigcup_{b\in B'} f(b),\ C'' := \bigcup_{c\in C'} f(c),\ D'' := \bigcup_{d\in D} f(d)$$

$K_1(0) = A'' \cup B'' \cup C'' \cup D''$. Ist ρ die Rotation aus Lemma 2.1.18 angewandt auf $N = D$, dann gilt $\rho^m(D'') \cap \rho^n(D'') = \{0\}$ für verschiedene $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Da $K_1(0)$ unendlich ist, sind Singletons $\{x\}, x \in K_1(0)$, im Fall $\mathfrak{C} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ ν-Nullmengen. Wir erhalten

$$\sum_{i=1}^{k} \nu(\rho^i(D'')) = \sum_{i=1}^{k} \nu(\rho^i(D'') \setminus \{0\}) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{k} \rho^i(D'') \setminus \{0\}\right) \leq \nu(K_1(0)) < +\infty.$$

ν ist invariant unter Rotationen, womit $k\nu(D'') \leq \nu(K_1(0))$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also ist D'' eine ν-Nullmenge.

Aufgrund der Gleichungen (16)-(18) für A', B' und C' gilt $\phi A'' = B'' \cup C''$, $\psi A'' = B''$ und $\psi^2 A'' = C''$. Daraus erhalten wir wegen der Rotationsinvarianz von ν

$$\nu(K_1(0)) = \nu(A'' \cup B'' \cup C'') = \left\{ \begin{array}{rcl} \nu(A'') + \nu(B'' \cup C'') & = & 2\nu(A'') \\ \nu(A'') + \nu(B'') + \nu(C'') & = & 3\nu(A'') \end{array} \right.,$$

womit A'' aufgrund von $2\nu(A'') = 3\nu(A'') \in (0, +\infty)$ nicht in $\mathfrak{C}$ sein kann. Also muss $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \setminus \mathfrak{C} \neq \emptyset$ gelten.

Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Wir setzen voraus, dass für alle Inhalte $\nu : \mathfrak{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ mit den gewünschten Eigenschaften $\mathfrak{C} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ gilt. Angenommen, es gäbe einen Inhalt $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \to [0, +\infty]$ mit den gewünschten Eigenschaften. Sei die Funktion $g : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ definiert durch

$$g(A) = \left\{ (a_1, \ldots, a_n, x)^T : (a_1, \ldots, a_n)^T \in A; x \in \left[-\sqrt{|1 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2|}, +\sqrt{|1 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2|}\ \right] \right\}.$$

g ist injektiv. Gilt nämlich $g(A) = g(B)$, so existiert für jedes $a = (a_1, \ldots, a_n, x)^T \in g(A)$ ein $b = (b_1, \ldots, b_n, y)^T \in g(B)$ mit $a = b$, womit insbesondere auch $(a_1, \ldots, a_n)^T = (b_1, \ldots, b_n)^T$ und in weiterer Folge $A = B$.

Damit gilt $g(A \cup B) = g(A) \cup g(B)$ und $g(A \cap B) = g(A) \cap g(B)$. Die durch $\tilde{\mu}(A) := \mu(g(A))$ auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ definierte Mengenfunktion ist additiv. Des Weiteren gilt $g(K_1^n(0)) = K_1^{n+1}(0)$, weshalb $\tilde{\mu}(K_1^n(0)) = \mu(K_1^{n+1}(0)) \in (0, +\infty)$. Für eine orthogonale Transformation

$T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ betrachten wir

$$\tilde{T} := \begin{pmatrix} & & 0 \\ & T & \vdots \\ & & 0 \\ 0 \ldots 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Gilt $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $(a_1, \ldots, a_n)^T \in A$ und $x \in \big[-\sqrt{|1 - \sum_{i=1}^n a_i^2|}, +\sqrt{|1 - \sum_{i=1}^n a_i^2|} \,\big]$, so folgt

$$\tilde{T}(g(a_1, \ldots, a_n)^T) = \begin{pmatrix} T(a_1, \ldots, a_n)^T \\ x \end{pmatrix}.$$

Da T nach Lemma 2.1.4 isometrisch ist, gilt

$$[-\sqrt{|1 - \sum_{i=1}^n a_i^2|}, +\sqrt{|1 - \sum_{i=1}^n a_i^2|} \,] = [-\sqrt{|1 - \sum_{i=1}^n b_i^2|}, +\sqrt{|1 - \sum_{i=1}^n b_i^2|} \,],$$

wobei $T(a_1, \ldots, a_n)^T = (b_1, \ldots, b_n)^T$. Zusammen gilt $\tilde{T}(g(A)) = g(T(A))$. Aufgrund der Invarianz unter orthogonalen Transformationen von μ folgt $\tilde{\mu}(T(A)) = \mu(\tilde{T}(g(A))) = \tilde{\mu}(A)$. Insgesamt erfüllt $\tilde{\mu}$ alle Anforderungen, was im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung steht. $\square$

Mit einer geeigneten Zerlegung der Kugeloberfläche enspricht obiges Resultat im $\mathbb{R}^3$ dem berüchtigten Banach-Tarski-Paradoxon, in dem man in ähnlicher Weise die Kugel in fünf Teile zerlegt, und diese zu zwei Kugeln des selben Volumens zusammensetzt. Stefan Banach zeigte in [Ban23], dass für $n = 1, 2$ ein (nicht eindeutiger) rotationsinvarianter Inhalt auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ angegeben werden kann.

2.2 Die Bernstein-Konstruktion

Die Bernstein-Mengen sind eine bekannte Konstruktion von nicht-messbaren Mengen auf $\mathbb{R}$. Felix Bernstein hat diese 1908 zum ersten Mal behandelt. Wir betrachten das Lebesgue-Maß $\lambda : \mathfrak{L} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ gemäß Beispiel 1.1.7. Zuerst definieren wir den Begriff Bernstein-Menge, und zeigen dann ihre Existenz. Dieser Abschnitt folgt [Oxt71, Kap. 5].

Definition 2.2.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge B heißt *Bernstein-Menge*, falls für jede überabzählbare abgeschlossene Teilmenge F von X immer $F \cap B \neq \emptyset$ und $F \cap B^c \neq \emptyset$ gilt.

Der Beweis des folgenden Lemmas ist zum Beispiel in [Oxt71, Lemma 5.1] zu finden.

Lemma 2.2.2. *Eine überabzählbare, abgeschlossene Menge $F \subseteq \mathbb{R}$ hat Kardinalität $|F| = \mathfrak{c}$.*

Lemma 2.2.3. *Es gibt genau $\mathfrak{c}$ überabzählbare abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$.*

Beweis. Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ lässt sich als abzählbare Vereinigung von offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten $\mathfrak{I} := \{(q_1, q_2) : q_1, q_2 \in \mathbb{Q}\}$ schreiben, womit höchstens $|\mathcal{P}(\mathfrak{I})|$ offene Mengen existieren. $\mathfrak{I}$ ist abzählbar, womit $|\mathcal{P}(\mathfrak{I})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$. Das Komplement einer abgeschlossenen Teilmenge ist offen, daher existieren auch maximal $\mathfrak{c}$ viele abgeschlossene Teilmengen. Andererseits gilt $|\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}| = \mathfrak{c}$, und alle diese Mengen sind überabzählbar und abgeschlossen. Somit gibt es genau $\mathfrak{c}$ abgeschlossene überabzählbare Teilmengen. □

Wir wollen die Existenz von Bernstein-Mengen beweisen.

Satz 2.2.4. *Es existiert eine Bernstein-Teilmenge B von $\mathbb{R}$.*

Beweis. Sei α die kleinste Ordinalzahl mit $|\alpha| = \mathfrak{c}$. Wir betrachten die Familie $\mathfrak{F}$ der überabzählbaren abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$, die nach Lemma 2.2.3 die Kardinalität $\mathfrak{c}$ hat. Nach dem Wohlordnungssatz **WOS** lässt sich diese als Familie

$$\mathfrak{F} = \{F_\xi : \xi < \alpha\}$$

schreiben, wobei ξ die Ordinalzahlen $< \alpha$ durchläuft. Wir konstruieren rekursiv zwei Mengen $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$ und $\{y_\xi : \xi < \alpha\}$ von Punkten aus $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften

1. Für $\xi < \zeta < \alpha$ sind $x_\xi, x_\zeta, y_\xi, y_\zeta$ paarweise verschieden.

2. Für $\xi < \alpha$ gilt $x_\xi, y_\xi \in F_\xi$.

Den Anfang bilden ungleiche x_1, y_1 aus der ersten Menge in $\mathfrak{F}$. Angenommen, die Teilmengen $\{x_\xi : \xi < \beta\}$, $\{y_\xi : \xi < \beta\}$ sind für $\beta < \alpha$ bereits definiert. Nach Lemma 2.2.2 gilt $|F_\beta| = \mathfrak{c}$, und somit

$$|\{x_\xi : \xi < \beta\}| \leq |\beta| < |\alpha| = \mathfrak{c} = |F_\beta|.$$

Dasselbe gilt für $\{y_\xi : \xi < \beta\}$. Somit ist

$$F_\beta \setminus (\{x_\xi : \xi < \beta\} \cup \{y_\xi : \xi < \beta\}) \neq \emptyset \tag{20}$$

sogar unendlich. Wir wählen zwei ungleiche Elemente x_β, y_β aus dieser Menge.

Die Menge $B := \{x_\xi : \xi < \alpha\}$ ist eine Bernstein-Menge, da für $F \in \mathfrak{F}$ ein $\xi < \alpha$ existiert mit $F = F_\xi$. Die Behauptung $F \cap B \neq \emptyset$ folgt aus 2., denn nach Konstruktion ist $x_\xi \in F \cap B$. $F \cap B^c \neq \emptyset$ folgt aus $y_\xi \in F_\xi$ und $\{y_\xi : \xi < \beta\} \cap \{x_\xi : \xi < \beta\} = \emptyset$.

□

Satz 2.2.5. *Eine Bernstein-Menge ist nicht-Lebesgue-messbar, also $B \notin \mathfrak{L}$.*

Beweis. Sei C eine beliebige Bernstein-Menge in $\mathbb{R}$. Angenommen, C und in Folge $\mathbb{R} \setminus C$ sind in $\mathfrak{L}$. Aufgrund von $\lambda(\mathbb{R}) = \lambda(C) + \lambda(\mathbb{R} \setminus C)$ muss eines der beiden Maße positiv sein. Angenommen, wir hätten $\lambda(C) > 0$. Nach Bemerkung 1.1.8 ist das Lebesgue-Maß regulär. Also existiert eine kompakte Menge $F \subseteq C$ mit $\lambda(F) > 0$. Da jede überabzählbare abgeschlossene Menge einen nichtleeren Schnitt mit C^c hat, muss F abzählbar sein, was im Widerspruch zu $\lambda(F) > 0$ steht. Für $\lambda(\mathbb{R} \setminus C) > 0$ existiert eine kompakte Menge $F \subseteq \mathbb{R} \setminus C$ mit $\lambda(F) > 0$. Da jede überabzählbare abgeschlossene Menge einen nichtleeren Schnitt mit C hat, muss F erneut abzählbar sein, was im Widerspruch zu $\lambda(F) > 0$ steht. Somit kann C nicht messbar sein, also $C \notin \mathfrak{L}$. □

Korollar 2.2.6. Sei $\eta : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ das in (3) definierte äußere Maß zu λ. Jede Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $\eta(A) > 0$ enthält eine Teilmenge C mit $C \notin \mathfrak{L}$.

Beweis. Sei $B \subseteq \mathbb{R}$ eine Bernstein-Menge. Angenommen, sowohl $A \cap B$ als auch $A \cap B^c$ sind in $\mathfrak{L}$. Aus der Subadditivität des äußeren Maßes η folgt

$$0 < \eta(A) \leq \eta(A \cap B) + \eta(A \cap B^c) = \lambda(A \cap B) + \lambda(A \cap B^c),$$

wobei die letzte Gleichung aufgrund der Messbarkeit gilt. Folglich gilt $\lambda(A \cap B) > 0$ oder $\lambda(A \cap B^c) > 0$. Im Fall $\lambda(A \cap B) > 0$ existiert aufgrund der Regularität von λ eine kompakte Menge $K \subseteq A \cap B$ mit $\lambda(K) > 0$. Da B eine Bernstein-Menge ist, gilt für überabzählbare K sicherlich $K \cap B^c \neq \emptyset$. Also muss K abzählbar sein, was aber im Widerspruch zu $\lambda(K) > 0$ steht. Die Behauptung $\lambda(A \cap B^c) > 0$ führt auf denselben Widerspruch. Also ist eine der Mengen $A \cap B, A \cap B^c$ nicht in $\mathfrak{L}$. □

2.3 Hamel-Basen

Die hier behandelte Konstruktion einer nicht-messbaren Menge stützt sich auf die Existenz einer Hamel-Basis für $\mathbb{R}$. Der Abschnitt folgt [Kha04, Kap.3]. Zu Beginn wollen wir ein Resultat der Maßtheorie hervorheben; siehe [Els07, II.7.6].

Satz 2.3.1 (Satz von Steinhaus I)**.** *Gilt* $A \in \mathfrak{L}$ *und* $\lambda(A) > 0$*, so existiert ein* $\delta > 0$ *mit*

$$U_\delta(0) \subset A - A,$$

wobei $A - B := \{x - y \ : \ x \in A, y \in B\}$.

Eine äquivalente Formulierung ergibt sich durch folgende Betrachtungen. Der Punkt x ist genau dann in $A - A$, wenn es y, z aus A gibt mit $x = y - z$. Dies ist äquivalent zu $y \in A + x$, und damit zu

$$A \cap (A + x) \neq \emptyset.$$

Also können wir obigen Satz auch folgendermaßen formulieren.

Satz 2.3.2 (Satz von Steinhaus II)**.** *Gilt* $A \in \mathfrak{L}$ *und* $\lambda(A) > 0$*, dann existiert ein* $\delta > 0$ *mit*

$$A \cap (A + x) \neq \emptyset \quad \text{für} \quad \text{alle } x \in U_\delta(0).$$

Definition 2.3.3. Eine Teilmenge A eines K-Vektorraumes V heißt *linear unabhängig*, falls für verschiedene $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt, dass für $x_1, \ldots x_n \in K$ genau dann $\sum_{i=1}^n x_i a_i = 0$ gilt, wenn $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Eine Teilmenge B eines K-Vektorraumes V heißt *(Hamel-)Basis* falls B eine maximal linear unabhängige Menge ist, also die Menge durch hinzufügen eines Elements linear abhängig wird. Für eine Basis $B \subseteq V$ gilt $\operatorname{span}_K(B) = V$, wobei span_K die lineare Hülle über K ist.

Mit **ZL** (Lemma von Zorn) lässt sich zeigen, dass für jeden Vektorraum eine Basis existiert. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind ein Unterkörper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Daher kann man $\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ betrachten. Aus der Existenz einer Hamel-Basis für $\mathbb{R}$ lässt sich die Existenz einer nicht messbaren Menge ableiten, wie der folgende Satz illustriert.

Satz 2.3.4. *Es gilt* $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathfrak{L} \neq \emptyset$.

Beweis. Sei $E := \{e_i, i \in I\}$ eine Hamel-Basis von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Wir fixieren einen beliebigen Index $i_0 \in I$. Durch

$$V := \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\{e_i, i \in I \setminus \{i_0\}\})$$

wird eine Hyperebene von $\mathbb{R}$ definiert. Wir nehmen an, dass V Lebesgue-messbar ist, also $V \in \mathfrak{L}$. Da B eine Basis von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist, stimmt die paarweise disjunkte Vereinigung aller $V + qe_{i_0}, q \in \mathbb{Q}$, mit $\mathbb{R}$ überein, also

$$\bigcup \{V + qe_{i_0} : q \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{R}.$$

λ ist translations-invariant, wobei $\lambda(\mathbb{R}) > 0$. Aufgrund der Subadditivität folgt

$$0 < \lambda(\mathbb{R}) = \lambda(\bigcup \{V + qe_{i_0} : q \in \mathbb{Q}\}) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(V + qe_{i_0}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(V),$$

womit $\lambda(V) > 0$. Andererseits gilt für jedes $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$$V \cap (V + qe_{i_0}) = \emptyset.$$

Da dies für beliebig kleine $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt, erhalten wir einen Widerspruch zu Satz 2.3.2. Also gilt $V \notin \mathfrak{L}$. $\square$

Ist eine Hamel-Basis eine nicht-messbare Teilmenge? Man kann zeigen, dass dies nicht immer der Fall ist. Es gibt verschiedene Konstruktionen einer Basis von $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$, von denen manche nicht-messbar sind.

Bemerkung 2.3.5. Sei B eine messbare Hamel-Basis von $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$. Aufgrund der geforderten linearen Unabhängigkeit enthält B sicher nicht 0. Angenommen, es gilt $\lambda(B) > 0$. Nach Satz 2.3.1 existiert ein $\delta > 0$ mit $(-\delta, \delta) = U_\delta(0) \subseteq B - B$. Für $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x \in [-N, N]$. Ist $K \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $K\delta > N$, so ist $x \in (-K\delta, K\delta)$ bzw. $\frac{x}{K} \in (-\delta, \delta)$, womit auch $\frac{x}{K+1} \in (-\delta, \delta)$. In Folge existieren $a, b, c, d \in B$ mit $K(a-b) = x = (K+1)(c-d)$, was der linearen Unabhängigkeit von B widerspricht.

Abschließend wollen wir noch die Konstruktion einer nicht-messbaren Hamel-Basis demonstrieren.

Satz 2.3.6. *Es existiert eine Hamel-Basis H in $\mathbb{R}$, die auch eine Bernstein-Menge und somit nicht-messbar ist.*

Beweis. Sei wieder α die kleinste Ordinalzahl mit $|\alpha| = \mathfrak{c}$. Wie in Lemma 2.2.3 gezeigt, hat die Menge aller abgeschlossen überabzählbaren Teilmengen $\mathfrak{F}$ von $\mathbb{R}$ Kardinalität $\mathfrak{c}$. Somit können wir $\mathfrak{F}$ als wohlgeordnete Familie $\{F_\xi : \xi < \alpha\}$ schreiben[13]. Wir wollen rekursiv die Menge $\{e_\xi : \xi < \alpha\}$ von linear unabhängigen Elementen aus $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ definieren, welche $e_\xi \in F_\xi$ für $\xi < \alpha$ erfüllt.

[13]Hier geht **WOS** ein.

Das erste Element e_1 sei beliebig aus $F_1 \backslash \mathbb{Q}$ gewählt. Angenommen, wir haben $\{e_\xi : \xi < \beta\}$ für $\beta < \alpha$ bereits definiert. Für

$$T_\beta := \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\{e_\xi : \xi < \beta\})$$

gilt nach Lemma 1.2.11

$$|T_\beta| \leq \max\{|\beta|, \omega\} < \mathfrak{c} = |F_\beta|,$$

womit $F_\beta \setminus T_\beta \neq \emptyset$. Wir wählen ein Element $e_\beta \in F_\beta \setminus T_\beta$.

Die so definierte Menge ist linear unabhängig. Sind nämlich $e_1, \ldots e_n \in \{e_\xi : \xi < \alpha\}$ in bezüglich $<$ aufsteigender Reihenfolge nummeriert und gilt $\sum_{i=1}^n e_i x_i = 0$ für gewisse $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$ mit $x_n \neq 0$, so folgt

$$-\sum_{i=1}^{n-1} e_i \frac{x_i}{x_n} = e_n,$$

was aber im Widerspruch dazu steht, dass wir $e_n \in F_{\xi_n} \setminus T_{\xi_n}$ gewählt haben.

Wir setzen $\{e_\xi : \xi < \alpha\}$ zu einer Hamel-Basis H fort und wollen zeigen, dass H eine Bernstein-Menge ist. Nach Konstruktion gilt $e_\zeta \in F_\zeta \cap H$ für $\zeta < \alpha$. Wir nehmen an, dass $F_\zeta \cap H^c = \emptyset$ beziehungsweise $F_\zeta \subseteq H$ für ein $\zeta < \alpha$ gilt. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von H erhalten wir für $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$(h + H) \cap H = \emptyset.$$

Existiert für $h = \sum_{i=1}^n q_i h_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nämlich ein $g \in (h + H) \cap H$, so existieren $f_1, f_2 \in H$ mit

$$f_2 = \sum_{i=1}^n q_i h_i + f_1,$$

was die lineare Unabhängigkeit von H verletzt. Wegen $F_\zeta \subseteq H$ gilt auch $(h + F_\zeta) \cap H = \emptyset$. Die Translation um h ist aber ein Homöomorphismus. Unter einer bijektiven Funktion ist das Bild einer überabzählbaren Menge überabzählbar, womit $h + F_\zeta \in \mathfrak{F}$. Das steht im Widerspruch zu $F \cap H \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathfrak{F}$. Also ist H eine Bernstein-Menge und folglich nicht messbar. $\square$

Literatur

[Ban23] BANACH, Stefan: Sur le problème de la mesure. In: *Fundamenta Mathematicae* 4 (1923), S. 7–33

[Els07] ELSTRODT, Jürgen: *Maß-und Integrationstheorie*. Fünfte, korrigierte Auflage. Berlin, Heidelberg : Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007 (Springer-Lehrbuch)

[GW18] GOLDSTERN, Martin ; WINKLER, Reinhard: *Algebra*. Skriptum, 2018

[Hau04] HAUSDORFF, Felix: Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen. In: *Mathematische Annalen* 75 (1904), S. 428–433

[Hav12] HAVLICEK, Hans: *Lineare Algebra für technische Mathematiker*. 3., korr. u. erw. Aufl.. Lemgo : Heldermann, 2012 (Berliner Studienreihe zur Mathematik). – ISBN 3885381168

[Her06] HERRLICH, Horst: *Axiom of choice*. Berlin [u.a.] : Springer, 2006 (Lecture notes in mathematics)

[Kal18] KALTENBÄCK, Michael: *Analysis 3*. Skriptum, 2018

[Kha04] KHARAZISHVILI, Aleksandr B.: *Nonmeasurable sets and functions*. 1. Amsterdam [u.a.] : Elsevier, 2004

[Oxt71] OXTOBY, John C.: *Measure and category : a survey of the analogies between topological and measure spaces*. New York [u.a.] : Springer, 1971

[Sie54] SIERPIŃSKI, Wacław: *On the congruence of sets and their equivalence by finite decomposition*. Lucknow : The Lucknow Univ., 1954 (Lucknow University studies ; 20)

[Str79] STROMBER, Karl: The Banach-Tarski Paradox. In: *The American Mathematical Monthly* 86 (1979), March, Nr. 4, S. 151 –161

[Zer04] ZERMELO, Ernst: Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. In: *Mathematische Annalen* 59 (1904), Nr. 4, S. 514–516