Kapitel 9

Normen und Banachräume

9.1 Normierte Räume

In diesem Kapitel wollen wir eine spezielle Klasse von metrischen Räumen betrachten. Diese Räume stellen eine Schnittstelle zwischen Linearer Algebra und Analysis dar.

9.1.1 Definition. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Eine Abbildung $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ heißt *Norm*, falls sie folgende Eigenschaften hat:

(N1) Für alle $x \in X$ gilt $\|x\| \geq 0$, wobei $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

(N2) Für alle $x \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\in \mathbb{C}$) gilt $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(N3) Sind $x, y \in X$, so gilt die *Dreiecksungleichung*:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

Das Paar $(X, \|\cdot\|)$ heißt dann *normierten Raum*.

Ist X ein normierter Raum, so folgt unmittelbar aus den Eigenschaften einer Norm, dass durch

$$d(x, y) := \|x - y\|, \quad x, y \in X , \tag{9.1}$$

eine Metrik auf X definiert wird. Diese Metrik hat Eigenschaften ganz ähnlich denen, welche die Euklidische Metrik $d_2(x, y) = |x - y|$ auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ hat.

9.1.2 Lemma. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, und seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in X, $x, y \in X$, und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge bzw. λ ein Element im Skalarkörper von X, also in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Gilt $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\lambda_n \to \lambda$ für $n \to \infty$, so folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|, \ \lim_{n\to\infty} x_n + y_n = x + y, \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \lambda x .$$

Entsprechende Aussagen gelten für Netze.

Beweis. Die erste Gleichung folgt aus Lemma 3.2.10 wegen $\|x_n\| = d(x_n, 0) \to d(x, 0) = \|x\|$, und die zweite aus

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \,.$$

Für die dritte sei $\epsilon > 0$ mit ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\epsilon < 1$. Voraussetzungsgemäß gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|\lambda - \lambda_n|, \|x_n - x\| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Es folgt $\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| < 1 + \|x\|$ und damit

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \lambda x\| &\leq \|\lambda_n x_n - \lambda x_n\| + \|\lambda x_n - \lambda x\| \\ &= |\lambda_n - \lambda|\|x_n\| + |\lambda|\|x_n - x\| \\ &\leq (1 + \|x\| + |\lambda|)\epsilon \,. \end{aligned}$$

Also erhalten wir $\lambda_n x_n \to \lambda x$. ❑

9.1.3 Korollar. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter und $\langle Y, d\rangle$ ein metrischer Raum, und seien $f, g : D \to X$ und $\lambda : D \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ stetig, wobei $D \subseteq Y$. Dann sind auch λf und $f + g$ stetige Funktionen von D nach X.*

Beweis. Aus $y_n \to y$ in $\langle Y, d\rangle$ erhalten wir wegen der Stetigkeit $f(y_n) \to f(y)$ und $g(y_n) \to g(y)$ in $(X, \|\cdot\|)$. Wegen Lemma 9.1.2 folgt dann $(f+g)(y_n) = f(y_n)+g(y_n) \to f(y)+g(y) = (f + g)(y)$ und mit Proposition 6.1.4 die Stetigkeit von $f + g$. Entsprechend zeigt man die Stetigkeit von λf. ❑

Für die folgende Definition sei daran erinnert, dass ein metrischer Raum vollständig heißt, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert; vgl. Definition 3.5.5.

9.1.4 Definition. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Ist die von $\|\cdot\|$ erzeugte Metrik vollständig, so heißt $(X, \|\cdot\|)$ *Banachraum*.

9.1.5 Beispiel.

(*i*) Klarerweise ist $(\mathbb{R}, |.|)$ ein Banachraum über $\mathbb{R}$. $(\mathbb{C}, |.|)$ ist auch ein Banachraum, wobei man ihn als Vektorraum über $\mathbb{C}$ und als Vektorraum über $\mathbb{R}$ betrachten kann.

(*ii*) Das Paradebeispiel eines normierten Raums über $\mathbb{R}$ ist $(\mathbb{R}^p, \|.\|_2)$, wobei $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^p |x_j|^2}$. Dabei ist[1] $x = (x_1, \ldots, x_p)^T$. Die erzeugte Metrik ist die wohlbekannte Euklidische Metrik:

$$d_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} |x_j - y_j|^2} \,.$$

Wegen Korollar 3.6.3 ist $(\mathbb{R}^p, \|.\|_2)$ sogar ein Banachraum.

[1] Ab hier wollen wir die Elemente von $\mathbb{R}^p$ als stehende Vektoren betrachten.

(*iii*) Man kann auch den normierten Raum $(\mathbb{C}^p, \|.\|_2)$ über $\mathbb{C}$ mit $\|z\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^p |z_j|^2}$ betrachten, wobei $z = (z_1, \dots, z_p)^T$.

Identifiziert man dabei die j-te Komponente z_j mit dem Paar $(\operatorname{Re} z_j, \operatorname{Im} z_j)$, so sieht man leicht, dass sich $\mathbb{C}^p$ mit $\mathbb{R}^{2p}$ identifizieren lässt. Wegen

$$\sqrt{\sum_{j=1}^p |z_j|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^p |\operatorname{Re} z_j|^2 + \sum_{j=1}^p |\operatorname{Im} z_j|^2}\,,$$

bleiben dabei auch die Normen erhalten, und mit $(\mathbb{R}^{2p}, \|.\|_2)$ ist auch $(\mathbb{C}^p, \|.\|_2)$ ein Banachraum.

(*iv*) Man kann $\mathbb{R}^p$ auch mit den Normen

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^p |x_j|, \quad \|x\|_\infty := \max_{j=1,\dots,p} |x_j|$$

versehen. Die dazugehörigen Metriken sind gerade die wohlbekannten Metriken d_1 und d_∞. Wegen Korollar 3.6.3 sind $(\mathbb{R}^p, \|.\|_1)$ und $(\mathbb{R}^p, \|.\|_\infty)$ ebenfalls Banachräume.

Ehe wir uns mehr Beispiele normierter bzw. Banachräume anschauen, brauchen wir ein kleines Lemma.

9.1.6 Lemma. *Ist $\langle X, d\rangle$ ein vollständiger metrischer Raum und ist Y eine abgeschlossene Teilmenge von X, so ist $\langle Y, d|_{Y\times Y}\rangle$ auch ein vollständiger metrischer Raum.*
Ist umgekehrt $\langle Y, d|_{Y\times Y}\rangle$ vollständig, wobei Y Teilmenge eines metrischen Raumes $\langle X, d\rangle$ ist, so ist Y abgeschlossen in X.

Beweis. Klarerweise ist Y versehen mit der eingeschränkten Metrik selber ein metrischer Raum.
Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y, so konvergiert diese nach Voraussetzung gegen ein $x \in X$. Ist nun Y abgeschlossen und enthält daher alle seine Häufungspunkte, so folgt $x \in Y$.
Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Y, die gegen ein $x \in X$ konvergiert, so ist diese sicherlich eine Cauchy-Folge bzgl. d und somit auch bzgl. $d|_{Y\times Y}$. Ist Y vollständig, so konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. $d|_{Y\times Y}$ und somit auch bzgl. d gegen ein $y \in Y$. Da aber Grenzwerte eindeutig sind, folgt $x = y \in Y$. Also ist Y abgeschlossen. ❑

9.1.7 Bemerkung. Folgende Situation tritt bei der Betrachtung konkreter Räume auf. Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und Y ein linearer Unterraum (Untervektorraum), so kann man $\|.\|$ auf Y einschränken und erhält offenbar wieder einen normierten Raum. Ist dabei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und ist Y als Teilmenge von X abgeschlossen, so muss nach Lemma 9.1.6 auch $(Y, \|\cdot\|)$ ein Banachraum sein.

9.1.8 Lemma. *Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und Y ein linearer Unterraum, so ist der Abschluss $c(Y)$ von Y in X ebenfalls ein linearer Unterraum und somit der kleinste abgeschlossene Teilraum von X, der Y enthält.*

Beweis. Sind $x, y \in c(Y)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), so gibt es Folgen $x_n, y_n \in Y$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Wir wissen, dass dann die Folge $\lambda x_n + \mu y_n \in Y$ gegen $\lambda x + \mu y$ konvergiert und somit diese Linearkombination auch in $c(Y)$ liegt. ❑

9.1.9 Beispiel. Wir wollen uns nun weitere Beispiele von normierten Räumen ansehen.

(*i*) Ist E eine nichtleere Menge und $(Y, \|.\|_Y)$ ein normierter Raum. Wir betrachten den Raum $\mathcal{B}(E, Y)$ aller beschränkten Abbildungen von E nach Y. Dieser Raum wurde schon im ersten Semester betrachtet, wobei aber Y allgemeiner ein metrischer Raum war; vgl. Definition 6.6.3. In unserem Fall ist mit Y auch $\mathcal{B}(E, Y)$ ein Vektorraum über demselben Skalarkörper, wie Y, wobei die Operationen punktweise definiert sind.

Setzen wir für $f \in \mathcal{B}(E, Y)$

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\|_Y : x \in E\},$$

so prüft man leicht nach, dass $\|f\|_\infty$ eine Norm auf $\mathcal{B}(E, Y)$ ist. Die von dieser Norm erzeugte Metrik ist genau die in Definition 6.6.3 eingeführte Metrik

$$\|f - g\|_\infty = d_\infty(f, g) = \sup_{x\in E} \|f(x) - g(x)\|_Y .$$

Im Falle, dass $(Y, \|.\|_Y)$ ein Banachraum ist, folgt aus Satz 6.6.11, dass $(\mathcal{B}(E, Y), d_\infty)$ vollständig und damit $(\mathcal{B}(E, Y), \|.\|_\infty)$ auch ein Banachraum ist.

Für $Y = \mathbb{R}$ oder $Y = \mathbb{C}$ versehen mit $|.|$ haben wir $\|.\|_\infty$ schon in Definition 6.8.1 kennengelernt.

(*ii*) Ist $E = \mathbb{N}$ und $Y = \mathbb{R}$ oder $Y = \mathbb{C}$, so ist $\mathcal{B}(E, Y)$ die Menge aller beschränkten reellen bzw. komplexen Folgen, die man auch als l^∞ bzw. $l^\infty(\mathbb{N})$ bezeichnet. Diese sind Banachräume, da $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ vollständig sind.

(*iii*) Bezeichne c_0 bzw. $c_0(\mathbb{N})$ den Raum aller reellwertigen bzw. komplexwertigen Nullfolgen. Offenbar ist c_0 ein linearer Teilraum von l^∞. Mit Hilfe von Lemma 8.7.1 kann man sogar zeigen, dass c_0 als Teilraum von l^∞ abgeschlossen ist. Also ist auch $(c_0, \|.\|_\infty)$ ein Banachraum.

(*iv*) Mit der Notation aus (i) setzen wir noch zusätzlich voraus, dass $E \subseteq X$, wobei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum ist, und dass $(Y, \|.\|_Y)$ ein Banachraum ist.

Dann kann man die Menge $C_b(E, Y)$ aller $f \in \mathcal{B}(E, Y)$ betrachten, die stetig sind. Diese Menge stellt einen linearen Unterraum von $\mathcal{B}(E, Y)$ dar; siehe Korollar 9.1.3. Somit ist auch $(C_b(E, Y), \|.\|_\infty)$ ein normierter Raum. Man beachte, dass für kompaktes E alle stetigen Funktionen auf E automatisch beschränkt sind, womit in diesem Fall $C_b(E, Y) = C(E, Y)$.

Ist nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen aus $C_b(E, Y)$, die bzgl. d_∞ gegen ein $f \in \mathcal{B}(E, Y)$ konvergiert, so wissen wir aus Korollar 6.6.14, dass auch f stetig ist, also $f \in C_b(E, Y)$. Somit ist $C_b(E, Y)$ sogar eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{B}(E, Y)$.

Insbesondere ist neben $\mathcal{B}(E, Y)$ auch $C_b(E, Y)$ ein Banachraum, wenn nur $(Y, \|.\|_Y)$ ein solcher ist.

(v) Ist $Y = \mathbb{R}$ oder $Y = \mathbb{C}$, so schreiben wir für den Banachraum $C_b(E, Y)$ auch $C_b(E)$. Ist E etwa $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, so schreiben wir $C_b[a, b]$ oder auch $C[a, b]$ dafür, da $[a, b]$ ja kompakt ist.

Auf dem Raum $C[a, b]$ können wir auch andere Normen betrachten wie beispielsweise

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\, dt\,. \tag{9.2}$$

Diese Norm unterscheidet sich von $\|.\|_\infty$ wesentlich, denn es gibt bzgl. $\|.\|_1$ Cauchy-Folgen, die bzgl. $\|.\|_\infty$ keine sind. Daraus kann man herleiten, dass bezüglich $\|.\|_1$ der Raum $C[a, b]$ kein Banachraum ist.

(vi) Sind $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ zwei normierte Räume über demselben Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so auch $(X \times Y, \|.\|_{max})$, wobei

$$\|(x, y)\|_{max} = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}\,.$$

In der Tat ist $X \times Y$ ein Vektorraum, und die Axiome, die für eine Norm erfüllt sein müssen, lassen sich auch leicht nachweisen. Die von $\|.\|_{max}$ erzeugte Metrik ist genau jene aus (8.18), wenn man dort $d_X(a, x) = \|x - a\|_X$ und $d_X(b, y) = \|y - b\|_Y$ setzt.

Wie schon in Fakta 8.7.8 festgestellt, ist eine Folge $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X \times Y$ konvergent gegen (x, y) genau dann, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y konvergiert. Man sieht auch sofort, dass $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine eine Cauchy-Folge ist, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide Cauchy-Folgen sind.

Somit erhält man auch, dass $(X \times Y, \|.\|_{max})$ ein Banachraum ist, wenn X und Y beide Banachräume sind.

(vii) Ist im vorherigen Beispiel $X = Y$, so folgt aus Lemma 9.1.2, dass die lineare Abbildung $+ : X \times X \to X$ stetig ist.

9.2 Lineare Abbildungen

9.2.1 Definition. Zwei Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ auf einem linearen Raum X heißen *äquivalent*, falls es Konstanten $\alpha > 0, \beta > 0$ gibt sodass

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1 \quad \text{für alle} \quad x \in X\,.$$

9.2.2 Bemerkung. Wie man leicht sieht, ist die Relation, äquivalent zu sein, auf der Menge aller Normen auf einem gegebenen Vektorraum X eine Äquivalenzrelation.
Betrachtet man die jeweiligen Definitionen, so erkennt man auch, dass äquivalente Normen die gleichen konvergenten Folgen, die gleichen Cauchy-Folgen, die gleichen abgeschlossenen bzw. offenen Mengen, etc. haben.

9.2.3 Beispiel.

(*i*) Sei $X = \mathbb{R}^p$. Die Normen $\|.\|_\infty$, $\|.\|_2$ und $\|.\|_1$ sind äquivalent, denn für $(x_1, \dots, x_p)^T \in X = \mathbb{R}^p$ gilt

$$\max_{i=1,\dots,p} |x_i| \leq (\sum_{i=1}^p |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^p |x_i| \leq p \cdot \max_{i=1,\dots,p} |x_i| .$$

Man kann zeigen, dass auf $\mathbb{R}^p$ alle Normen äquivalent sind. Insbesondere ist $\mathbb{R}^p$ mit jeder Norm vollständig.

(*ii*) Betrachte auf $X = C[0, 1]$ neben der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ noch die Norm aus (9.2). Diese beiden Normen sind nicht äquivalent. Es gilt zwar $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$, aber es gibt kein $\beta > 0$, sodass $\|f\|_\infty \leq \beta\|f\|_1$ gleichzeitig für alle $f \in C[0, 1]$. Um das einzusehen, betrachte

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - n\,t, & \text{falls } t \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0, & \text{falls } t \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Dabei ist $\|f_n\|_\infty = 1$, aber $\|f_n\|_1 \leq \frac{1}{2n}$.

Thematisch verwandt mit der Äquivalenz von Normen ist der Begriff der Beschränktheit einer linearen Abbildung. Man beachte dabei, dass die Definition der Beschränktheit einer linearen Abbildung nicht mit der Definition der Beschränktheit einer Funktion aus Definition 3.2.11 übereinstimmt.

9.2.4 Definition. Seien $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ zwei normierte Räume über demselben Skalarkörper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Für eine lineare Abbildung $A : X \to Y$ sei

$$\|A\| := \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X \setminus \{0\} \right\} \tag{9.3}$$

in dem Sinne, dass $\|A\| = +\infty$, falls obige Menge nach oben unbeschränkt ist; vgl. Definition 2.2.5. Wir nennen A *beschränkt*, falls $\|A\| < +\infty$. In dem Fall heißt $\|A\|$ die *Abbildungsnorm* von A.

9.2.5 Bemerkung. $\|A\| < +\infty$ bedeutet genau, dass $\left\{ \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X \setminus \{0\} \right\}$ beschränkt ist, also dass es ein $C \geq 0$ gibt mit

$$\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leq C \quad \text{für alle} \quad x \in X \setminus \{0\} .$$

Für festes $C \geq 0$ ist das äquivalent zu

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \text{für alle} \quad x \in X , \tag{9.4}$$

da für $x = 0$ diese Ungleichung immer gilt. Somit ist die Menge aller $C \geq 0$, für die (9.4) zutrifft, genau die Menge aller oberen Schranken von

$$\left\{ \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X \setminus \{0\} \right\}.$$

Also ist A genau dann beschränkt, wenn es ein $C \geq 0$ gibt, sodass (9.4) zutrifft, und $\|A\|$ ist dann eben das kleinste derartige $C \geq 0$. Wegen

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X \setminus \{0\} \right\} &= \left\{ \|A\left(\frac{1}{\|x\|_X} x\right)\|_Y : x \in X \setminus \{0\} \right\} \\ &= \{ \|Ax\|_Y : x \in X,\ \|x\|_X = 1 \} \subseteq \{ \|Ax\|_Y : x \in X,\ \|x\|_X \leq 1 \}\end{aligned}$$

und wegen $\|Ax\|_Y \leq \|A\left(\frac{1}{\|x\|_X} x\right)\|_Y$ für jedes $x \in X$ mit $0 < \|x\|_X < 1$ gilt auch

$$\|A\| = \sup\{ \|Ax\|_Y : x \in X,\ \|x\|_X = 1 \} = \sup\{ \|Ax\|_Y : x \in X,\ \|x\|_X \leq 1 \}.$$

Mit Bemerkung 9.2.5 erkennt man unmittelbar, dass zwei Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ auf einem Vektorraum genau dann äquivalent sind, wenn id_X sowohl als Abbildung von $(X, \|.\|_1)$ nach $(X, \|.\|_2)$ als auch als Abbildung von $(X, \|.\|_2)$ nach $(X, \|.\|_1)$ beschränkt ist.

9.2.6 Satz. *Eine lineare Abbildung $A : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist. In dem Fall ist sie sogar gleichmäßig stetig.*

Beweis. Im Fall $A = 0$ ist A offenbar beschränkt und trivialerweise gleichmäßig stetig. Gelte also $A \neq 0$.
Sei A beschränkt. Ist $\epsilon > 0$ und gilt $\|x - y\| \leq \frac{\epsilon}{\|A\|}$, so folgt

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leq \|A\| \cdot \|x - y\| \leq \epsilon.$$

Also ist A gleichmäßig stetig und daher insbesondere stetig.
Ist umgekehrt A stetig, so gibt es wegen der Stetigkeit bei $x = 0$ ein $\delta > 0$ zu $\epsilon = 1$, sodass $\|x\| \leq \delta$ die Ungleichung $\|Ax\| \leq 1$ impliziert. Für jedes $x \in X \setminus \{0\}$ folgt $\left\|\frac{\delta}{\|x\|} x\right\| \leq \delta$ und somit $\left\|A(\frac{\delta}{\|x\|} x)\right\| \leq 1$ bzw. $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{\delta}$. ❑

9.2.7 Satz. *Sind $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ zwei normierte Räume beide zugleich über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so ist die Menge $L_b(X, Y)$ aller beschränkten linearen Abbildungen von X nach Y ein Untervektorraum des Raumes $L(X, Y)$ aller linearen Abbildungen X nach Y. Versehen mit der Abbildungsnorm $\|.\|$ ist $L_b(X, Y)$ ein normierter Raum. Ist $(Y, \|.\|_Y)$ ein Banachraum, so auch $(L_b(X, Y), \|.\|)$.*

Beweis. Offenbar gilt $L_b(X, Y) \subseteq L(X, Y)$. Für $A, B \in L_b(X, Y)$ und für ein beliebiges $x \in X$ erhalten wir

$$\|(A + B)x\|_Y = \|Ax + Bx\|_Y \leq \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y \leq \|A\| \, \|x\|_X + \|B\| \, \|x\|_X = (\|A\| + \|B\|)\|x\|_X.$$

Gemäß Bemerkung 9.2.5 ist dann die lineare Abbildung $A + B$ beschränkt. Da $\|A + B\|$ das kleinste $C \geq 0$ ist, sodass $\|(A + B)x\|_Y \leq C\ \|x\|_X$ für alle $x \in X$, folgt aus dieser Rechnung auch $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$. Für $A \in L_b(X, Y)$ und $\lambda \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ ist

$$\{\ \|\lambda Ax\|_Y : x \in X,\ \|x\|_X \leq 1\ \} = |\lambda| \cdot \{\ \|Ax\|_Y : x \in X,\ \|x\|_X \leq 1\ \}$$

nach oben beschränkt, und ihr Supremum ist genau $|\lambda| \cdot \|A\|$. Somit ist das lineare λA beschränkt mit $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|\, A\|$.

Dass $A \neq 0$ die Ungleichung $\|A\| > 0$ nach sich zieht, folgt sofort aus (9.3). Wir haben somit nachgewiesen, dass $L_b(X, Y)$ ein Unterraum von $L(X, Y)$ und $(L_b(X, Y), \|.\|)$ ein normierter Raum ist.

Um die Vollständigkeit zu zeigen, könnten wir direkt vorgehen. Wir werden uns aber der schon bekannten Tatsache bedienen, dass $C_b(E, Y)$ versehen mit $\|f\|_\infty = \sup_{t\in E} \|f(t)\|_Y$ ein Banachraum ist, wenn E Teilmenge eines metrischen Raumes ist; vgl. Beispiel 9.1.9.

Dazu setze $E = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Für $A \in L_b(X, Y)$ ist $A|_E$ sicherlich eine stetige und beschränkte Funktion, wobei

$$\|A|_E\|_\infty = \sup\{\ \|Ax\|_Y : \|x\|_X \leq 1\ \} = \|A\|\,.$$

Also ist $A \mapsto A|_E$ eine isometrische und daher injektive Abbildung von $L_b(X, Y)$ in $C_b(E, Y)$. Diese Abbildung ist offenbar auch linear. Das Bild dieser Einbettung ist genau die Menge $\mathcal{L}$ aller $f \in C_b(E, Y)$, sodass

$$x \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}),\ \lambda x \in E \Rightarrow f(\lambda x) = \lambda f(x)\,,$$

und

$$x, y, x + y \in E \Rightarrow f(x + y) = f(x) + f(y)\,.$$

In der Tat sieht man mit einem solchen f leicht, dass die Abbildung $A : X \to Y$ definiert durch $A(0) = 0$ und $A(x) := \|x\|_X f(\frac{1}{\|x\|_X} x)$ für $x \neq 0$ die eindeutige beschränkte und lineare Abbildung ist, sodass $A|_E = f$ gilt.

Die Menge $\mathcal{L} \subseteq C_b(E, Y)$ ist abgeschlossen, denn aus $f_n \to f$ mit $f_n \in \mathcal{L}$ und $f \in C_b(E, Y)$ folgt $f(x + y) = \lim f_n(x + y) = \lim f_n(x) + \lim f_n(y) = f(x) + f(y)$, falls $x, y, x + y \in E$ und genauso $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, falls $x, \lambda x \in E$, und somit $f \in \mathcal{L}$. Wegen Lemma 9.1.6 ist $(\mathcal{L}, \|.\|_\infty)$, und daher auch $(L_b(X, Y), \|.\|)$, ein Banachraum. ❑

Ähnlich wie im vorhergehenden Beweis die Dreiecksungleichung für die Abbildungsnorm erhalten wir für $A \in L_b(X, Y)$ und $B \in L_b(Y, Z)$

$$\begin{aligned} \|BA\| &= \sup\{\ \|BAx\|_Z : x \in X,\ \|x\|_X \leq 1\ \} \\ &\leq \sup\{\ \|B\| \cdot \|Ax\|_Y : x \in X,\ \|x\|_X \leq 1\ \} = \|B\| \cdot \|A\|\,. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Für die Räume $L_b(X, Y)$ gilt in Analogie zu Lemma 9.1.2 folgendes Resultat.

9.2.8 Lemma. *Seien X, Y, Z normierte Räume, und seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $L_b(X, Y)$, $L_b(Y, Z)$ bzw. X. Weiters seien $A \in L_b(X, Y)$, $B \in L_b(Y, Z)$ und $x \in X$. Gilt $A_n \to A$, $B_n \to B$ und $x_n \to x$ für $n \to \infty$, so folgt*

$$\lim_{n\to\infty} B_n A_n = BA \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} A_n x_n = Ax\,,$$

wobei die erste Folge in $L_b(X, Z)$ bzgl. der Abbildungsnorm und die zweite in Y bzgl. der Norm auf Y konvergiert. Entsprechende Aussagen gelten auch für Netze.

Beweis. Wir zeigen die erste Grenzwerteigenschaft. Zu $\epsilon > 0$ mit ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\epsilon < 1$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\|A_n - A\|, \|B_n - B\| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Es folgt $\|A_n\| \leq \|A_n - A\| + \|A\| < 1 + \|A\|$ und damit

$$\begin{aligned}\|B_n A_n - BA\| &\leq \|B_n A_n - BA_n\| + \|BA_n - BA\| = \|B_n - B\|\,\|A_n\| + \|B\|\,\|A_n - A\| \\ &\leq (1 + \|A\| + \|B\|)\epsilon\,.\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass $B_n A_n \to BA$. ❑

Genauso wie in Korollar 9.1.3 folgt daraus

9.2.9 Korollar. *Seien X, Y, Z normierte Räume und $\langle M, d\rangle$ ein metrischer Raum und $D \subseteq M$. Sind $f : D \to L_b(X, Y)$, $g : D \to L_b(Y, Z)$ und $h : D \to X$ stetig, so auch $gf : D \to L_b(X, Z)$ und $fh : D \to Y$. Dabei sind diese Funktionen definiert durch* [2] *$(gf)(t) := g(t)f(t)$ sowie* [3] *$(fh)(t) := f(t)h(t)$.*

9.2.10 Beispiel.

(*i*) Sei Y ein normierter Raum über $\mathbb{R}$ und $y_0 \in Y$. Dann ist die Abbildung $\lambda \mapsto \lambda y_0$ von $\mathbb{R}$ nach Y linear und beschränkt durch $\|y_0\|$. Entsprechendes gilt für $\mathbb{C}$.

(*ii*) Sei $T : \mathbb{R}^p \to Y$ linear mit einem normierten Raum Y. Ist $\mathbb{R}^p$ mit $\|.\|_\infty$ oder mit einer zu ihr äquivalenten Norm, wie $\|.\|_1$ oder $\|.\|_2$, versehen, so ist T beschränkt und somit stetig. Denn ist $x = (x_1, \ldots, x_p)^T = \sum_{j=1}^p x_j e_j \in \mathbb{R}^p$, wobei e_j der j-te kanonische Basisvektor in $\mathbb{R}^p$ ist, so folgt

$$\|T(x)\| = \|\sum_{j=1}^p x_j T(e_j)\| \leq \sum_{j=1}^p |x_j| \cdot \|T(e_j)\| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^p \|T(e_j)\|\,.$$

Insbesondere gilt $L(\mathbb{R}^p, X) = L_b(\mathbb{R}^p, X)$.

(*iii*) Sei $X = \mathbb{R}^p$ und $Y = \mathbb{R}^q$, beide versehen mit $\|.\|_\infty$. Wegen des vorherigen Beispiels ist jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ beschränkt. Also lässt sich $L_b(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ als Vektorraum mit $\mathbb{R}^{q\times p}$ identifizieren.

[2] Hintereinanderausführung von zuerst $f(t)$ und dann $g(t)$. Im Falle $X = \mathbb{R}^p, Y = \mathbb{R}^q, Z = \mathbb{R}^r$ entspricht das der Multiplikation der Matrizen $g(t)$ und $f(t)$.

[3] Anwenden von $f(t)$ auf $h(t)$. Im Falle $X = \mathbb{R}^p, Y = \mathbb{R}^q$ entspricht das der Multiplikation der Matrix $f(t)$ mit dem Vektor $h(t)$.

(*iv*) Versieht man $X = \mathbb{R}^p$ mit $\|.\|_\infty$ und auch $Y = \mathbb{R}^q$ mit $\|.\|_\infty$, so hat man mit der Abbildungsnorm $\|.\|$ auf $\mathbb{R}^{q\times p} \cong \mathbb{R}^{pq}$ eine weitere Norm. Auch diese ist zu $\|.\|_\infty$ äquivalent. In der Tat ist für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{q\times p}$ und $x \in \mathbb{R}^p$

$$\|Ax\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,q} |\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j| \leq$$

$$\max_{i=1,\ldots,q} p \max_{j=1,\ldots,p} |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty = p \max_{i=1,\ldots,q;\ j=1,\ldots,p} |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty .$$

Also $\|A\| \leq p\|A\|_\infty$. Bezeichnet $\{e_j\}_{j=1,\ldots,p}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^p$, so ist sicherlich auch $(j = 1, \ldots, p)$

$$\|A\| \geq \|Ae_j\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,q} |a_{ij}| ,$$

und daher $\|A\| \geq \|A\|_\infty$.

Allgemeiner kann man $X = \mathbb{R}^p$ und $Y = \mathbb{R}^q$ jeweils mit einer der Normen $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ versehen, wobei die Norm auf $\mathbb{R}^p$ nicht dieselbe wie auf $\mathbb{R}^q$ sein muss. Die daraus resultierenden Abbildungsnormen sind verschieden. Ähnlich wie oben zeigt man aber, dass sie alle zu $\|.\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^{q\times p} \cong \mathbb{R}^{pq}$ und somit auch untereinander äquivalent sind.

(*v*) Sei $X = Y = \mathbb{R}^2$ mit $\|.\|_2$ versehen und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ von der speziellen Form $A = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ mit festen $a, b \in \mathbb{R}$. Um die Abbildungsnorm von A zu berechnen, bemerken wir, dass der erste und zweite Eintrag von

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa - yb \\ xb + ya \end{pmatrix}$$

genau Real- bzw. Imaginärteil von $(a + ib) \cdot (x + iy)$ ist. Wegen $\|\left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)\|_2 = |c + id|$ gilt $\|A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\|_2 = |(a + ib) \cdot (x + iy)| = |a + ib| \cdot |x + iy| = |a + ib| \cdot \|\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\|_2$. Daraus folgt unmittelbar, dass $\|A\| = |a + ib| = \|\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)\|_2$.

(*vi*) Sei $X = Y = C[0, 1]$, und $A : X \to Y$ definiert durch

$$A(f)(x) := \int_0^x f(t)\, dt .$$

Man sieht sofort, dass A linear ist. Außerdem gilt für $f \in C[0, 1]$

$$\|A(f)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |A(f)(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} (x \sup_{t\in[0,x]} |f(t)|) \leq \|f\|_\infty ;$$

also $\|A\| \leq 1$.

9.3 Banachraumwertige Reihen, Funktionen, etc.

Zunächst verallgemeinern wir den Begriff von Zahlenreihen auf Reihen mit Summanden, die in einem normierten Raum liegen.

9.3.1 Definition. Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Raum $(X, \|.\|)$, so heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, falls die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

in X bzgl. der von $\|.\|$ erzeugten Metrik, konvergiert.
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, also falls $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| < +\infty$, vgl. Definition 3.9.12.

9.3.2 Fakta. Nicht nur die Definition lässt sich unmittelbar auf Reihen mit Werten in normierten Räumen übertragen, sondern auch viele der im ersten Semester hergeleiteten Ergebnisse. Im Folgenden seien $(X, \|.\|)$ und $(Y, \|.\|)$ normierte Räume. Für die Beweise der Verallgemeinerungen muss man in allen Fällen nur an geeigneten Stellen $|.|$ durch $\|.\|$ ersetzen:

1. Rechenregeln (siehe Korollar 3.9.3):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$ je nachdem, was der Skalarkörper von X ist, und wobei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ beide als konvergent vorausgesetzt sind. Die zweite Rechenregel etwa folgt mit Lemma 9.1.2 aus

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \right) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \right) + \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k \right).$$

2. Ist $T : X \to Y$ linear und stetig, so folgt für eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$$T(\sum_{k=1}^{\infty} a_k) = T(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k) = \lim_{n\to\infty} T(\sum_{k=1}^{n} a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} T(a_k)\,, \tag{9.6}$$

wobei die Reihe rechts automatisch konvergiert.

Da für ein festes $a \in X$ die Abbildung $\lambda \mapsto \lambda a$ von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ nach X linear und beschränkt ist, gilt insbesondere für jede konvergente $\mathbb{R}$- bzw. $\mathbb{C}$-wertige Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, dass auch $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k a)$ in X konvergiert, wobei der Grenzwert letzterer Reihe mit $(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k)a$ übereinstimmt.

3. Manipulationsregeln wie in Fakta 3.9.4, (1) und (2): Man darf endlich viele Summanden umändern, ohne das Konvergenzverhalten zu ändern. Der Grenzwert ändert sich im Allgemeinen. Außerdem kann man in einer Reihe Klammern setzen.

4. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so folgt
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) = 0$$
in X; vgl. Proposition 3.9.7.

Die Resultate für reell- bzw. komplexwertige Reihen, welche die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) verwenden, lassen sich auf vollständige normierte Räume, also auf Banachräume verallgemeinern. Für einen Banachraum $(X, \|.\|)$ gelten dann folgende Aussagen.

5. Setzt man in die Definition von Cauchy-Folge die Folge der Partialsummen ein, so erhält man analog zu Lemma 3.9.11 das Cauchysche Konvergenzkriterium: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn
$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right\| < \epsilon, \quad \forall m > n \geq N .$$

6. Ist eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so folgt aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium und der Dreiecksungleichung sofort, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auch konvergiert, wobei wegen der Stetigkeit von $\|.\| : X \to \mathbb{R}$
$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| .$$

7. Majorantenkriterium (siehe Lemma 3.9.8): Gilt $\|a_k\| \leq \alpha_k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ und konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut, wobei
$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k . \tag{9.7}$$

8. Quotienten- und Wurzelkriterium wie in Satz 3.10.3.

   In der Tat folgt aus $\sqrt[n]{\|a_n\|} \leq q,\ n \geq N$, für ein $q \in [0, 1)$ und ein $N \in \mathbb{N}$ – das ist zu $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < 1$ äquivalent, dass $\|a_n\| \leq q^n,\ n \geq N$. Also hat $\sum_{n=N}^{\infty} \|a_n\|$ eine konvergente Majorante, und in Folge konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$.

   Ist dagegen $\sqrt[n(k)]{\|a_{n(k)}\|} \geq 1,\ k \in \mathbb{N}$ für eine Teilfolge, so kann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge sein, und somit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergieren.

   Aus $a_n \neq 0,\ \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \leq q,\ n \geq N$, für ein $q \in [0, 1)$ und ein $N \in \mathbb{N}$ – das ist zu $\limsup_{n\to\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} < 1$ äquivalent – folgt $\|a_n\| \leq q^{n-N}\|a_N\|$ für $n \geq N$ und somit $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < 1$.

   Ist dagegen $a_n \neq 0,\ \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \geq 1,\ n \geq N$, für ein $N \in \mathbb{N}$, so kann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $0 < \|a_N\| \leq \|a_{N+1}\| \leq \dots$ keine Nullfolge sein, und somit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergieren.

9.3.3 Beispiel. Für eine nichtleere Menge E sind $\mathcal{B}(E,\mathbb{R})$ und $\mathcal{B}(E,\mathbb{C})$ Banachräume, wenn man sie mit $\|.\|_\infty$ versieht; vgl. Beispiel 9.1.9. Sei nun X einer dieser beiden Räume versehen mit $\|.\|_\infty$. Ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus X, so handelt es sich bei den f_n eben um beschränkte Funktionen von E nach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^\infty f_k$ im Sinne von Definition 9.3.1 ist dann genau die Konvergenz der Reihe im Sinne von Definition 6.8.3, also genau die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Partialsummen. Weiters ist die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^\infty f_k$ im Sinne von Definition 9.3.1 genau die absolute Konvergenz im Sinne von Definition 6.8.3, und das Weierstraß-Kriterium aus Korollar 6.8.4 ist nichts anderes als der Sachverhalt von 6 und 7 für den Raum $X = \mathcal{B}(E,\mathbb{R})$ bzw. $X = \mathcal{B}(E,\mathbb{C})$.

Genauso wie im $\mathbb{R}$-wertige bzw. $\mathbb{C}$-wertigen Fall definieren wir auch hier Summen über beliebige Indexmengen; vgl. Definition 5.4.2. Für eine Menge M bezeichne wieder $\mathcal{E}(M)$ die Menge aller endlichen Teilmengen. Versehen mit $\subseteq$ wird diese Menge zu einer gerichteten Menge.

9.3.4 Definition (*). Sei $(X,\|.\|)$ ein normierter Raum, $M \neq \emptyset$ eine Menge und $a_j \in X$ für jedes $j \in M$. Falls das Netz $(\sum_{j\in A} a_j)_{A\in\mathcal{E}(M)}$ in X bzgl. $\|.\|$ konvergiert, so sagen wir, dass $\sum_{j\in M} a_j$ unbedingt konvergiert und setzen[4]

$$\sum_{j\in M} a_j = \lim_{A\in\mathcal{E}(M)} \sum_{j\in A} a_j\,.$$

Da Grenzwerte mit dem Addieren und dem skalaren Multiplizieren verträglich sind, gilt wie im skalaren Fall, dass $(\lambda,\mu \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}))$

$$\sum_{j\in M}(\lambda a_j + \mu b_j) = \lambda\left(\sum_{j\in M} a_j\right) + \mu\left(\sum_{j\in M} b_j\right)$$

in dem Sinn, dass die linke Seite unbedingt konvergiert, wenn es die rechte tut.

9.3.5 Fakta (*). Für einen Banachraum $(X,\|.\|)$ gelten folgende Aussagen, die wie Fakta 5.4.3, Korollar 5.4.5, Proposition 5.4.8 und Lemma 5.4.9 zu verifizieren sind.

1. Die Summe $\sum_{j\in M}\|a_j\|$ konvergiert unbedingt genau dann, wenn

   $$\sum_{j\in A}\|a_j\| \leq C \ \text{ für alle } \ A \in \mathcal{E}(M)\,,$$

   für ein $C > 0$. In dem Fall konvergiert auch $\sum_{j\in M} a_j$ unbedingt.

2. Konvergiert $\sum_{j\in M} a_j$ unbedingt, so konvergiert auch $\sum_{j\in P} a_j$ für jede beliebige nichtleere Teilmenge $P \subseteq M$.

3. Ist $\tilde{M}$ eine weitere Menge – es kann auch $\tilde{M} = M$ sein – und $\sigma : \tilde{M} \to M$ eine Bijektion, so konvergiert $\sum_{j\in M} a_j$ genau dann unbedingt, wenn $\sum_{j\in\tilde{M}} a_{\sigma(j)}$ es tut.

[4] Die Summe über die leere Indexmenge sei dabei per definitionem Null.

4. Im Falle $M = \mathbb{N}$ folgt aus der unbedingten Konvergenz von $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ im Sinne von Definition 9.3.1 gegen den gleichen Grenzwert.

5. Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, also $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| < +\infty$, so konvergieren $\sum_{j\in\mathbb{N}} \|a_j\|$ sowie $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ unbedingt.

6. Im Allgemeinen gilt das Banachraumwertige Analogon von Satz 5.4.4 nicht; insbesondere zieht die unbedingte Konvergenz von $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ nicht notwendigerweise die unbedingte Konvergenz von $\sum_{j\in\mathbb{N}} \|a_j\|$ nach sich.

7. Falls die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mit Summanden in X absolut konvergiert, so tut das auch $\sum_{k=1}^{\infty} b_{\sigma(k)}$ für jede Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit demselben Grenzwert in X.

8. Zerlegt man M als $M = \dot{\bigcup}_{i\in I} M_i$ mit nichtleerer Indexmenge I und nichtleeren Mengen M_i, $i \in I$, so folgt aus der unbedingten Konvergenz von $\sum_{j\in M} a_j$ auch die von $\sum_{i\in I} \sum_{j\in M_i} a_j$, wobei
$$\sum_{i\in I} \sum_{j\in M_i} a_j = \sum_{j\in M} a_j \,. \tag{9.8}$$
Siehe Proposition 5.4.8.

9. Konvergiert $\sum_{i\in I} \sum_{j\in M_i} \|a_j\|$ unbedingt, also alle $\sum_{j\in M_i} \|a_j\|$ sowie $\sum_{i\in I} \left(\sum_{j\in M_i} \|a_j\|\right)$ konvergieren unbedingt, so konvergiert auch $\sum_{j\in M} \|a_j\|$ sowie $\sum_{j\in M} a_j$ unbedingt, wobei wieder (9.8) gilt; vgl. Lemma 5.4.9.

9.3.6 Beispiel. $\mathbb{R}^{p\times p} \cong L_b(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ trage die Abbildungsnorm, wobei $\mathbb{R}^p$ beide male mit der gleichen Norm $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ oder $\|.\|_\infty$ versehen ist. Für ein $B \in \mathbb{R}^{p\times p}$ mit $\|B\| < 1$ betrachte die sogenannte *von Neumannsche Reihe*
$$S := \sum_{k=0}^{\infty} B^k \,.$$
Hier setzen wir $B^0 := I$. Wegen (9.5) hat man $\|B^k\| \le \|B\|^k$, und daher ist $\sum_{k=0}^{\infty} \|B\|^k$ eine konvergente Majorante, und somit konvergiert $S = \sum_{k=0}^{\infty} B^k$ absolut, wobei mit (9.7)
$$\|S\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|B^k\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|B\|^k = \frac{1}{1 - \|B\|} \,.$$
Die Tatsache, dass $C \mapsto BC$ eine beschränkte lineare Abbildung von $\mathbb{R}^{p\times p}$ nach $\mathbb{R}^{p\times p}$ ist, erlaubt die Anwendung von (9.6), und wir bekommen
$$BS = B \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} B^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} B^{k+1} = \lim_{n\to\infty} (-I + \sum_{k=0}^{n+1} B^k) = -I + S \,,$$
bzw. $I = (I - B)S$. Genauso sieht man $I = S(I - B)$. Also ist $I - B$ invertierbar mit $S = (I - B)^{-1}$.

9.3.7 Korollar. *Ist $T \in \mathbb{R}^{p\times p}$ invertierbar, und ist $S \in \mathbb{R}^{p\times p}$ mit $\|T - S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, so ist auch S invertierbar.*
Insbesondere ist die Menge $GL(p,\mathbb{R})$ aller invertierbaren $p\times p$-Matrizen eine offene Menge, und die Funktion $S \mapsto S^{-1}$ ist stetig auf $GL(p,\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{p\times p}$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\|(T - S)T^{-1}\| < 1$. Gemäß Beispiel 9.3.6 existiert $(I - (T - S)T^{-1})^{-1}$ und

$$\begin{aligned} ST^{-1}(I-(T-S)T^{-1})^{-1} &= (T-(T-S))T^{-1}(I-(T-S)T^{-1})^{-1} \\ &= (I-(T-S)T^{-1})(I-(T-S)T^{-1})^{-1} = I\,. \end{aligned}$$

Also hat S eine Rechtsinverse. Entsprechend ist $(I - T^{-1}(T - S))^{-1}T^{-1}$ eine Linksinverse. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass diese dann übereinstimmen müssen.
Um die Stetigkeit von $S \mapsto S^{-1}$ einzusehen, sei $S_n \to S$, wobei alle Matrizen invertierbar sind. Es folgt

$$\|S_n^{-1} - S^{-1}\| = \|S_n^{-1}(S - S_n)S^{-1}\| \leq \|S_n^{-1}\| \cdot \|S - S_n\| \cdot \|S^{-1}\| \tag{9.9}$$

und daher $\|S_n^{-1}\| \leq \|S^{-1}\| + \|S_n^{-1} - S^{-1}\| \leq \|S^{-1}\| + \|S^{-1}\| \cdot \|S_n^{-1}\| \cdot \|S - S_n\|$. Für hinreichend großes n hat man somit

$$\|S_n^{-1}\| \leq \frac{\|S^{-1}\|}{1 - \|S^{-1}\| \cdot \|S - S_n\|}\,.$$

Also ist $\|S_n^{-1}\|$ beschränkt, und aus (9.9) folgt $S_n^{-1} \to S^{-1}$. ❑

9.3.8 Bemerkung. In Beispiel 9.3.6 und Korollar 9.3.7 haben wir zwar von quadratischen Matrizen gesprochen, aber es gilt derselbe Sachverhalt, wenn die auftretenden Objekte allgemeiner beschränkte lineare Abbildungen eines Banachraumes X in sich – also Elemente von $L_b(X, X)$ sind. Die Beweise sind so gewählt, dass sie auch in diesem allgemeineren Fall funktionieren.

Man kann auch Funktionen mit Werten in normierten Räumen betrachten. Dabei heißt eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von beschränkten Funktionen $f_n : E \to X$ gleichmäßig konvergent gegen f, falls $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in dem normierten Raum $\mathcal{B}(E, X)$[5].

9.3.9 Fakta. Ist $(X, \|.\|)$ sogar ein Banachraum, so gelten folgend Aussagen, die für $X = \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ schon bekannt sind.

1. Mit $(X, \|.\|)$ ist auch $\mathcal{B}(E, X)$ ein Banachraum. Somit ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{B}(E, X)$ genau dann konvergent, wenn diese Folge bzgl. $\|.\|_\infty$ eine Cauchy-Folge ist.
2. Ist E Teilmenge eines metrischen Raumes, so wissen wir schon, dass $C_b(E, X)$ abgeschlossen in $\mathcal{B}(E, X)$ ist, was zur Folge hat, dass die Grenzfunktion f stetig ist, wenn alle f_n es sind; vgl. Korollar 6.6.14.

[5] Dieses Konzept ist schon aus Definition 6.6.5 bekannt, wenn sogar X allgemeiner ein metrischer Raum ist.

3. Weierstraßsches Konvergenzkriterium (siehe Korollar 6.8.4): Ist $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ eine Reihe von X-wertigen beschränkten Funktionen, so folgt aus der absoluten Konvergenz $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty < +\infty$ die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$.

   Die absolute Konvergenz gilt insbesondere, wenn es eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ von nichtnegativen reellen Zahlen mit $\|f_k\|_\infty \leq \alpha_k$ gibt.

   Das Weierstraßsche Konvergenzkriterium ist nichts anderes, als das Majorantenkriterium angewandt auf den Banachraum $\mathcal{B}(E, X)$; siehe (9.7).

4. Für Potenzreihen zeigt man fast genauso wie in Satz 6.8.7 folgenden Sachverhalt.

   Für $a_k \in X,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sei R das Supremum aller $|z|$, sodass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k$ konvergiert. Dabei ist je nach Skalarkörper $z \in \mathbb{R}$ bzw. $z \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k$ in X absolut, wenn $z \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, $|z| < R$. Im Falle $|z| > R$ divergiert sie. Für $|z| \leq r < R$ konvergiert sie gleichmäßig. Somit ist auf $K_r^{\mathbb{R}}(0)$ bzw. $K_r^{\mathbb{C}}(0)$ die Funktion $z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k$ $(\in X)$ stetig und beschränkt, also sie liegt in $C_b(K_r^{\mathbb{R}}(0), X)$ bzw. $C_b(K_r^{\mathbb{C}}(0), X)$. Auf $U_R(0)$ ist sie stetig.

   Schließlich gilt auch

$$\frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \frac{\|a_{k+1}\|}{\|a_k\|}} \leq R = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|a_k\|}} \leq \frac{1}{\liminf_{k\to\infty} \frac{\|a_{k+1}\|}{\|a_k\|}}.$$

5. Mit einem geringfügig angepassten Beweis gilt Korollar 6.8.9 auch für X-wertige Potenzreihen, wobei X ein Banachraum über $\mathbb{C}$ ist. Insbesondere stimmen die Koeffizientenfolgen aus X zweier Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} z^k b_k$ mit Konvergenzradius $R > 0$ bzw. $\tilde{R} > 0$ überein, wenn nur $\sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k b_k$ für $z \in E$, wobei $E \subseteq U_{\min(R,\tilde{R})}(0)$ die Null als Häufungspunkt hat.

Auch die Differentialrechnung lässt sich auf Funktionen mit Werten in normierten Räumen ausdehnen.

9.3.10 Definition. Ist I ein reelles Intervall und $f : I \to X$, so heißt f im Punkt $x \in I$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) := \lim_{t\to x} \frac{1}{t - x}(f(t) - f(x))$$

in X existiert, wobei dieser Grenzwert einseitig zu verstehen ist, wenn x ein Randpunkt von I ist. Ist f bei allen $x \in I$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar. Die Funktion $x \mapsto f'(x)$ (*Ableitung* von f) ist dann eine Abbildung von I nach X. Ist diese stetig, so heißt f stetig differenzierbar. Mit $C^1(I, X)$ wird die Menge aller stetig differenzierbaren X-wertigen Funktionen auf I bezeichnet.
Analog zum skalaren Fall definiert man auch die höheren Ableitungen.

9.3.11 Bemerkung. Im Falle $X = \mathbb{R}^p$ kann man sich $f(I)$ als Kurve vorstellen. Die Ableitung $f'(x)$ ist dann der Anschauung nach nichts anderes, als der *Tangentialvektor* an diese Kurve im Punkt $f(x)$.

Wir wollen uns auch ein Beispiel einer Funktion von einem Intervall in einen unendlich dimensionalen Banachraum anschauen.

9.3.12 Beispiel. Sei $X = C_b(0,1)$ der Banachraum aller reellwertigen, beschränkten und stetigen Funktionen auf dem Intervall $(0,1)$ versehen mit der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$.
Für $t \in \mathbb{R}$ sei $f(t)$ die Funktion $s \mapsto e^t s(1-s)$. Man überzeugt sich leicht, dass $f(t) \in X = C_b(0,1)$. Also

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad X\,, \\ t & \mapsto \quad (s \mapsto e^t s(1-s))\,. \end{cases}$$

Für $x, t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t-x}\,(f(t) - f(x)) - f(x) \right\|_\infty &= \sup_{s\in(0,1)} \left| \frac{1}{t-x}\,(e^t s(1-s) - e^x s(1-s)) - e^x s(1-s) \right| \\ &= \left| \frac{1}{t-x}\,(e^t - e^x) - e^x \right| \cdot \sup_{s\in(0,1)} |s(1-s)| \\ &= \left| \frac{1}{t-x}\,(e^t - e^x) - e^x \right| \cdot \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{t\to x} \frac{1}{t-x}\,(e^t - e^x) = e^x$ konvergiert somit $\frac{1}{t-x}\,(f(t) - f(x))$ in X für $t \to x$ gegen $f(x)$. Also gilt $f'(x) = f(x)$.

9.3.13 Fakta. Ähnlich wie im skalarwertigen Fall zeigt man folgende Regeln.

1. Die Ableitung von konstanten Funktionen ist $0 \in X$.

2. Wegen $f(t) - f(x) = (t-x) \cdot \frac{1}{t-x}(f(t) - f(x)) \to 0 \cdot f'(x) = 0$ für $t \to x$, folgt aus der Ableitbarkeit von f bei x die Stetigkeit von f bei x.

3. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$, $(\alpha f)'(x) = \alpha'(x)f(x) + \alpha(x)f'(x)$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$, $f, g : I \to X$ und $\alpha : I \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$; siehe Satz 7.1.7. Die Gleichheitszeichen sind dabei so zu interpretieren, dass die linke Seite existiert, wenn die rechte Seite existiert und dann die Gleichheit gilt.

4. Ähnlich wie bei den Reihen sieht man, dass für jedes lineare und beschränkte $T : X \to Y$ mit f auch $T \circ f$ bei einem $x \in I$ differenzierbar ist, wobei dann $T(f'(x)) = (Tf)'(x)$.

   Insbesondere gilt für eine auf einem Intervall I definierte, $\mathbb{R}$- bzw. $\mathbb{C}$-wertige und bei x differenzierbare Funktion α und einem $a \in X$, dass auch die Funktion $t \mapsto \alpha(t)a$ von I nach X bei x differenzierbar ist, wobei $(\alpha(.)a)'(x) = \alpha'(x)a$.

5. Kettenregel (Satz 7.1.9): Sei $f : (c,d) \to X$ und $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $\alpha((a,b)) \subseteq (c,d)$. Dann gilt

   $$(f \circ \alpha)'(x) = \alpha'(x) f'(\alpha(x))\,, \tag{9.10}$$

   falls die Ableitungen rechts existieren.

Kann man Produkte von Funktionen bilden, so gelten jeweils auch Produktregeln.

6. Sei I ein reelles Intervall und $f : I \to L_b(X, Y)$, $g : I \to L_b(Y, Z)$. Für $x \in I$ und $t \in I \setminus \{x\}$ gilt

$$\left\| \frac{1}{t-x}(g(t)f(t) - g(x)f(x)) - g'(x)f(x) - g(x)f'(x) \right\| =$$

$$\left\| g(t)\frac{1}{t-x}(f(t) - f(x)) - g(t)f'(x) + g(t)f'(x) - g(x)f'(x) + \right.$$
$$\left. \frac{1}{t-x}(g(t) - g(x))f(x) - g'(x)f(x) \right\| \leq$$

$$\|g(t)\| \cdot \left\| \frac{1}{t-x}(f(t) - f(x)) - f'(x) \right\| + \|g(t) - g(x)\| \cdot \|f'(x)\| +$$
$$\left\| \frac{1}{t-x}(g(t) - g(x)) - g'(x) \right\| \cdot \|f(x)\| .$$

Sind f und g bei x differenzierbar, so sind sie dort auch stetig und daher konvergieren für $t \to x$ alle Summanden gegen Null. Damit ist auch gf bei x differenzierbar, wobei

$$(gf)'(x) = g'(x)f(x) + g(x)f'(x) . \tag{9.11}$$

7. Entsprechend zeigt man $(fh)'(x) = f'(x)h(x) + f(x)h'(x)$, wenn $f : I \to L_b(X, Y)$ und $h : I \to X$, oder auch wenn $f : I \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ und $h : I \to X$.

8. Sind $f, g : I \to \mathbb{R}^p$ in einem Punkt $x \in I$ differenzierbar, so zeigt man ähnlich wie oben aber unter Zuhilfenahme der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, dass die Funktion[6] $t \mapsto (f(t), g(t))$ von I nach $\mathbb{R}$ auch in x differenzierbar ist, wobei $(f, g)'(x) = (f(x), g'(x)) + (f'(x), g(x))$.

9.3.14 Beispiel. Sei $X = C_b(0, 1)$ wieder der Banachraum aller reellwertigen, beschränkten und stetigen Funktionen auf dem Intervall $(0, 1)$ versehen mit der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$. Für $t \in [0, 1]$ sei $f(t)$ die Funktion $s \mapsto \frac{\sqrt{t}}{s+t}$. Man überzeugt sich leicht, dass $f(t) \in X = C_b(0, 1)$. Also

$$f : \begin{cases} [0,1] & \to \quad X , \\ t & \mapsto \quad (s \mapsto \frac{\sqrt{t}}{s+t}) . \end{cases}$$

Klarerweise ist $f(0)$ die Nullfunktion und somit $(t > 0)$

$$\|f(t) - f(0)\|_\infty = \sup_{s \in (0,1)} \frac{\sqrt{t}}{s+t} = \lim_{s \to 0+} \frac{\sqrt{t}}{s+t} = \frac{1}{\sqrt{t}} .$$

Der Grenzwert dieses Ausdruckes für $t \to 0$ ist aber sicherlich nicht 0. Also ist f bei $t = 0$ nicht stetig und daher insbesondere nicht differenzierbar.
Man beachte, dass für feste $s \in (0, 1)$ die Funktion $t \mapsto \frac{\sqrt{t}}{s+t}$ bei $t = 0$ sehr wohl stetig ist.

[6] $(.,.)$ bezeichnet das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^p$.

Viele Resultate, die sich aus dem Mittelwertsatz, Satz 7.2.6, herleiten haben lassen, können nicht unmittelbar auf Funktionen mit Werten in normierten Räumen verallgemeinert werden. Manches lässt sich jedoch mit Hilfe des folgenden Lemmas retten.

9.3.15 Lemma. *Ist $f : [a,b] \to X$ stetig, $f|_{(a,b)}$ differenzierbar und gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f konstant.*

Beweis. Subtrahieren wir von $f(x)$ immer den Wert $f(a)$, so können wir annehmen, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(a) = 0$.
Seien $x, t \in (a,b)$, so folgt aus der Dreiecksungleichung $\|f(x)\| \leq \|f(t) - f(x)\| + \|f(t)\|$ sowie $\|f(t)\| \leq \|f(t) - f(x)\| + \|f(x)\|$. Also gilt

$$-\|f(t) - f(x)\| \leq \|f(t)\| - \|f(x)\| \leq \|f(t) - f(x)\|$$

und daher

$$-\left\| \frac{1}{t-x}(f(t) - f(x)) \right\| \leq \frac{\|f(t)\| - \|f(x)\|}{t-x} \leq \left\| \frac{1}{t-x}(f(t) - f(x)) \right\| .$$

Da $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ stetig ist, konvergieren für $t \to x$ die linke und die rechte Seite laut Voraussetzung gegen 0 und nach dem Einschlusskriterium für Netze somit auch der mittlere Ausdruck.
Also ist $x \mapsto \|f(x)\|$ auf (a,b) differenzierbar mit $\|f(x)\|' = 0$ und klarerweise auf $[a,b]$ stetig. Wegen $\|f(a)\| = 0$ folgt aus dem Mittelwertsatz angewandt auf $\|f(x)\|$, dass $\|f(x)\| = 0$, und somit $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$. ❑

Als Folgerung erhält man z.B. dass zwei ableitbare X-wertige Funktionen übereinstimmen, wenn sie es an einer Stelle tun, und wenn ihre Ableitungen gleich sind.

9.3.16 Definition. Sei $f : [a,b] \to X$ eine beschränkte Funktion. Konvergiert das Netz $(S(f,\mathcal{R}))_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}}$ in X, wobei[7]

$$S(f,\mathcal{R}) = \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R})} (\xi_j - \xi_{j-1}) f(\alpha_j) ,$$

so heißt f Riemann-integrierbar. In diesem Fall schreiben wir

$$\int_a^b f(t)\, dt := \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} S(f,\mathcal{R}) .$$

Der Zugang zu Integralen mit Ober- und Untersummen funktioniert offensichtlich hier nicht.

9.3.17 Fakta. Man kann genauso wie im skalaren Fall folgende Tatsachen für den normierten Raum-wertigen Fall beweisen, indem man in den jeweiligen Beweisen an den richtigen Stellen $|.|$ durch $\|.\|$ ersetzt.

[7] Vergleiche Definition 8.2.1.

1. Rechenregeln (Lemma 8.2.9):
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)\,dx = \lambda \int_a^b f\,dx + \mu \int_a^b g\,dx\,,$$
$$\Big\| \int_a^b f\,dx \Big\| \leq \int_a^{\bar{b}} \|f(x)\|\,dx \leq \|f\|_\infty (b-a)\,. \tag{9.12}$$
wobei $f, g : [a,b] \to X$ Riemann-integrierbar sind, und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ je nachdem, was der Skalarkörper von X ist. Zur Erinnerung: $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} \|f(x)\|$.

2. Ist $T : X \to Y$ beschränkt und linear, so folgt aus der Stetigkeit von T
$$T(\int f(t)\,dt) = T(\lim_{|\mathcal{R}|\to 0} S(f,\mathcal{R})) = \lim_{|\mathcal{R}|\to 0} S(Tf,\mathcal{R}) = \int Tf(t)\,dt\,. \tag{9.13}$$
Insbesondere gilt für ein Riemann-integrierbares $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ und $x \in X$, dass $\int_a^b (g(t)x)\,dt = (\int_a^b g(t)\,dt)x$.

Setzt man noch voraus, dass $(X, \|.\|)$ ein Banachraum ist, so gelten auch folgende Aussagen, die ganz ähnlich wie im skalaren Fall zu beweisen sind. Um zu zeigen, wie wenig sich die Beweise vom skalaren Fall unterscheiden, ist der Beweis von 3 ausgeführt.

3. Ist $f : [a,b] \to X$ stetig, so ist f Riemann-integrierbar, vgl. Satz 8.3.4.

   Beweis. Genauso wie in Lemma 8.3.3 zeigt man zunächst für eine beschränkte Abbildung $f : [a,b] \to X$ und zwei Riemann-Zerlegungen $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ von $[a,b]$
$$\big\|S(\mathcal{R}_1) - S(\mathcal{R}_2)\big\| \leq 2(b-a)\cdot\rho(\max(|\mathcal{R}_1|, |\mathcal{R}_2|))\,, \tag{9.14}$$
   wobei
$$\rho(\gamma) = \sup\{\, \|f(s) - f(t)\| : s,t \in [a,b],\ |s-t| \leq \gamma\,\},\ \ \gamma > 0\,,$$
   die Oszillation von f bezeichnet. Um das einzusehen, sei $\mathcal{R}$ eine Riemann-Zerlegung, deren Stützstellen die von $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ umfasst. Das bedeutet, dass mit
$$\mathcal{R}_1 = ((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R}_1)}; (\alpha_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R}_1)}),\ \mathcal{R}_2 = ((\zeta_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R}_2)}; (\gamma_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R}_2)})\,,$$
$$\mathcal{R} = ((\eta_k)_{k=0}^{n(\mathcal{R})}; (\beta_k)_{k=1}^{n(\mathcal{R})})\,,$$
   die Beziehung
$$\{\xi_j : j = 0,\dots,n(\mathcal{R}_1)\} \cup \{\zeta_j : j = 0,\dots,n(\mathcal{R}_2)\} \subseteq \{\eta_k : k = 0,\dots,n(\mathcal{R})\}$$
   gilt. Ist $j \in \{1,\dots,n(\mathcal{R}_1)\}$, so gibt es Indizes $k(j-1) < k(j)$, sodass
$$\xi_{j-1} = \eta_{k(j-1)} \underbrace{< \eta_{k(j-1)+1} < \cdots < \eta_{k(j)-1} <}_{k(j)-k(j-1)-1 \text{ viele}} \eta_{k(j)} = \xi_j\,.$$

Wir erhalten wegen $(\xi_j - \xi_{j-1})f(\alpha_j) = \sum_{k=k(j-1)+1}^{k(j)}(\eta_k - \eta_{k-1})f(\alpha_j)$

$$\begin{aligned}\left\|S(\mathcal{R}_1) - S(\mathcal{R})\right\| &= \left\|\sum_{j=1}^{n(\mathcal{R}_1)}\left((\xi_j - \xi_{j-1})f(\alpha_j) - \sum_{k=k(j-1)+1}^{k(j)}(\eta_k - \eta_{k-1})f(\beta_k)\right)\right\| \\ &= \left\|\sum_{j=1}^{n(\mathcal{R}_1)}\sum_{k=k(j-1)+1}^{k(j)}(\eta_k - \eta_{k-1})\big(f(\alpha_j) - f(\beta_k)\big)\right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n(\mathcal{R}_1)}\sum_{k=k(j-1)+1}^{k(j)}(\eta_k - \eta_{k-1}) \cdot \|f(\alpha_j) - f(\beta_k)\| \,.\end{aligned}$$

Bemerkt man, dass $|\alpha_j - \beta_k| \leq (\xi_j - \xi_{j-1}) \leq |\mathcal{R}_1|$ für $k \in \{k(j-1)+1, \dots, k(j)\}$, so folgt

$$\|S(\mathcal{R}_1) - S(\mathcal{R})\| \leq \sum_{k=1}^{n(\mathcal{R}_2)}(\eta_k - \eta_{k-1}) \cdot \rho(|\mathcal{R}_1|) = (b-a) \cdot \rho(|\mathcal{R}_1|)\,.$$

Genauso zeigt man $\|S(\mathcal{R}_2) - S(\mathcal{R})\| \leq (b-a) \cdot \rho(|\mathcal{R}_2|)$. Aus der Dreiecksungleichung und der Monotonie von ρ folgt dann (9.14).

Ist nun $f : [a,b] \to X$ stetig, so ist f wegen Proposition 6.1.13 beschränkt und wegen Satz 6.3.3 sogar gleichmäßig stetig.

Gemäß Lemma 5.3.11 folgt die Konvergenz von $(S(\mathcal{R}))_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}}$ in X, wenn wir zeigen können, dass $(S(\mathcal{R}))_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}}$ in X ein Cauchy-Netz ist.

Dazu sei $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$, sodass $\rho(\delta) \leq \frac{\epsilon}{3(b-a)}$; vgl. Bemerkung 8.3.2. Sind nun $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ Riemann-Zerlegungen von $[a,b]$ mit $|\mathcal{R}_1|, |\mathcal{R}_2| < \delta$, so folgt aus (9.14) sofort

$$\|S(\mathcal{R}_1) - S(\mathcal{R}_2)\| \leq 2(b-a) \cdot \rho(\max(|\mathcal{R}_1|, |\mathcal{R}_2|)) < \epsilon\,,$$

und damit die Tatsache, dass $(S(\mathcal{R}))_{\mathcal{R}\in\mathfrak{R}}$ ein Cauchy-Netz ist. ❑

4. Sei $f : [a,b] \to X$ und $c < d$, $[c,d] \subseteq [a,b]$. Dann ist $f|_{[c,d]}$ über $[c,d]$ Riemann-integrierbar genau dann, wenn $\mathbb{1}_{[c,d]}f$ es über $[a,b]$ ist. Das ist insbesondere der Fall, wenn f über $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist; vgl. Lemma 8.4.1.

5. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 8.4.5) gilt auch für Banachraum-wertige Funktionen:

   Ist $f : [a,b] \to X$ Riemann-integrierbar, und setzt man für $a \leq x \leq b$

   $$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt\,,$$

   so ist F stetig auf $[a,b]$. Ist f in einem Punkt x_0 stetig, so ist F bei x_0 differenzierbar, und es gilt $F'(x_0) = f(x_0)$.

6. Ist $f : [a,b] \to X$ stetig sowie $G : [a,b] \to X$ stetig und stetig differenzierbar auf (a,b), sodass $G'(x) = f(x),\ x \in (a,b)$, so erfüllt $G(x) - \int\limits_a^x f(t)\,dt$ die Voraussetzung von Lemma 9.3.15. Also ist diese Funktion konstant. Infolge gilt

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)\,. \tag{9.15}$$

   Man erhält also wie im skalarwertigen Fall, dass der Integrationsoperator $f \mapsto (x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt)$ den Vektorraum $C([a,b],X)$ bijektiv auf die Hyperebene aller bei a verschwindenden Funktionen in $C^1([a,b],X)$ abbildet.

7. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit endlicher linker Intervallgrenze a, die in I liege. Ist $f : I \to X$ eine Funktion, dann gilt $f \in C^1(I,X)$ genau dann, wenn $f \in C(I,X),\ f|_{I\setminus\{a\}} \in C^1(I \setminus \{a\},X)$ und der X-wertige Grenzwert $\lim_{t\to a+} f'(t)$ existiert; vgl. Korollar 7.2.17. Eine entsprechende Aussage gilt für die rechte Intervallgrenze von I.

   Um das einzusehen, sei $f \in C(I,X),\ f|_{I\setminus\{a\}} \in C^1(I\setminus\{a\},X)$ und existiere $\lim_{t\to a+} f'(t)$. Setzen wir $g(t) = f'(t)$ für $t \in I \setminus \{a\}$, und $g(a) = \lim_{t\to a+} f'(t)$, so gilt klarerweise $g \in C(I,X)$; vgl. Bemerkung 6.4.4. Die X-wertige Funktion $F(x) = f(x) - \int_a^x g(t)\,dt$, ist auf I stetig, hat auf $I \setminus \{a\}$ eine verschwindende Ableitung, und ist somit wegen Lemma 9.3.15 auf jedem Intervall der Form $[a,s]$ mit $s \in I$ konstant. Also ist mit $x \mapsto \int_a^x g(t)\,dt,\ x \in [a,s]$ auch $f(x)$ auf $[a,s]$ stetig differenzierbar; vgl. (5). Die Umkehrung gilt offensichtlich auch.

8. Aus der Kettenregel (9.10) leitet man wie in Lemma 8.4.12 für den skalarwertigen Fall auch für stetig differenzierbares $g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ und stetiges $f : [a,b] \to X$ mit $g([\alpha,\beta]) \subseteq [a,b]$ die Substitutionsregel

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta g'(t)\,f(g(t))\,dt$$

   her. Mit Hilfe der Produktregel aus Fakta 9.3.13, 7, zeigt man für stetig differenzierbare $g : [a,b] \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ und $f : [a,b] \to X$, wie in Lemma 8.4.13, dass folgende Regel der partiellen Integration gilt:

$$\int\limits_a^b gf'\,dx = g(b)f(b) - g(a)f(a) - \int\limits_a^b g'f\,dx\,.$$

   Diese Regel der partiellen Integration gilt auch für $g : [a,b] \to L_b(X,Y)$ und $f : [a,b] \to X$ bzw. für $g : [a,b] \to L_b(Y,Z)$ und $f : [a,b] \to L_b(X,Y)$ mit Banachräumen X,Y,Z.

9. Uneigentliche Riemann-Integrale lassen sich genauso wie im skalaren Fall definieren; siehe Definition 8.6.1.

Insbesondere zeigt man wie in Lemma 8.6.3, dass aus absoluten Konvergenz von $\int_a^b g(x)\,dx$ einer Funktion $g : [a,b) \to X$, also $\int_a^b \|g(x)\|\,dx < +\infty$, die Konvergenz von $\int_a^b g(x)\,dx$, also von $\lim_{\beta\to b-} \int_a^\beta g(x)\,dx$ in X folgt. Ist obendrein $\|g(x)\| \geq \|f(x)\|$ für alle x ab einem $c \in [a,b)$, so ist auch $\int_a^b f(x)\,dx$ absolut konvergent, wobei $f : [a,b) \to X$.

Bei diesem Schluss von absoluter Konvergenz auf die Konvergenz muss man voraussetzen, dass für alle $\beta \in [a,b)$ die Funktionen $g, f, \|g(.)\|, \|f(.)\|$ auf $[a,\beta]$ Riemann-integrierbar sind.

10. Wie im skalaren Fall kann man auch Integral und Grenzübergang vertauschen (siehe Satz 8.7.2):
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b f\,dx\,. \tag{9.16}$$

11. Genauso wie im skalaren Fall gilt für stetige Funktionen $f : [a,b] \times K \to X$ – dabei ist K kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes –, dass $R : K \to X$ definiert durch
$$R(t) = \int_a^b f(s,t)\,ds \tag{9.17}$$
stetig ist; vgl. Korollar 8.7.9.

Ebenfalls kann man für Banachraum-wertige Funktionen $f : [a,b] \times [c,d] \to X$ die Integrationsreihenfolge vertauschen (siehe Satz 8.7.10):
$$\int_a^b \left(\int_c^d f(s,t)\,dt\right) ds = \int_c^d \left(\int_a^b f(s,t)\,ds\right) dt\,.$$

Schließlich kann man Integral und Ableitung vertauschen (siehe Korollar 8.7.12), daher
$$\frac{d}{ds}\int_c^d f(s,t)\,dt = \int_c^d \frac{d}{ds} f(s,t)\,dt\,, \tag{9.18}$$
wenn $f(s,t)$ und $\frac{d}{ds}f(s,t)$ beide auf $[a,b] \times [c,d]$ stetig sind und Werte in X haben.

12. Man kann nun auch die Rechnung aus Proposition 8.8.2 nochmals für $f : I \to X$ durchführen, um für eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion die Taylorsche Entwicklung
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (x-y)^k \frac{1}{k!} f^{(k)}(y) + \int_y^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\,. \tag{9.19}$$
zu erhalten. Nur eine Abschätzung des Restgliedes mit Hilfe von $f^{(n+1)}$ ausgewertet an einer gewissen Stelle zwischen x und y wie im $\mathbb{R}$-wertigen Fall hat man nicht, da diese ja den Mittelwertsatz der Differentialrechnung bzw. Integralrechnung verwendet.

9.3.18 Bemerkung. Alle oben erwähnten Konzepte (Reihen, gleichmäßig konvergente Funktionen, Ableitung, Integral) hängen nicht von der Norm auf X ab, solange diese zur ursprünglich auf X gegebenen Norm äquivalent ist, denn Grenzwerte und deren Existenz in X bleiben unverändert, wenn man zu einer äquivalenten Norm wechselt.

9.3.19 Bemerkung. Ist $X = \mathbb{R}^d$, so wissen wir, dass die Konvergenz eines Netz zur komponentenweisen Konvergenz äquivalent ist, wobei die Komponenten des Grenzwertes genau die Grenzwerte der Komponentennetze sind. Somit erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} a_{k,1} \\ \vdots \\ a_{k,d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,1} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,d} \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} f_1(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} f_d(t) \end{pmatrix},$$

$$\int_a^b \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}(t)\, dt = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)\, dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_d(t)\, dt \end{pmatrix},$$

in dem Sinne, dass die linken Seiten genau dann existieren, wenn die rechten es tun.

Als Anwendung für obige eher abstrakt wirkende Konzepte wollen wir die *Exponentialfunktion*, die einer $p \times p$-Matrix wieder eine $p \times p$-Matrix zuweist, betrachten.

9.3.20 Beispiel. Sei $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Man betrachte die $\mathbb{R}^{p \times p}$-wertige Potenzreihe ($t \in \mathbb{R}$)

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{1}{n!} A^n . \tag{9.20}$$

Hier trägt $\mathbb{R}^{p \times p} \cong L_b(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ die Abbildungsnorm, wobei $\mathbb{R}^p$ beide male mit der gleichen Norm $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ oder $\|.\|_\infty$ versehen ist. Wegen

$$\|t^n \frac{1}{n!} A^n\| \leq \frac{(|t|\, \|A\|)^n}{n!}$$

folgt nach dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz von e^{tA} für alle $t \in \mathbb{R}$, da ja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|t|\, \|A\|)^n}{n!} \quad (= e^{|t|\, \|A\|})$$

konvergiert. Somit ist der Konvergenzradius R von (9.20) gleich $+\infty$. Als Grenzfunktion einer Potenzreihe ist $t \mapsto e^{tA}$ eine stetige Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^{p \times p}$.
Wegen der Beschränktheit der Abbildungen $B \mapsto AB$, $B \mapsto BA$ als Abbildungen von $\mathbb{R}^{p \times p}$ nach $\mathbb{R}^{p \times p}$ gilt wegen (9.6)

$$Ae^{tA} = A\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{1}{n!} A^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{1}{n!} A^{n+1} = e^{tA} A . \tag{9.21}$$

Sei $x \in \mathbb{R}$. Da die Potenzreihe für auf $[-|x|, |x|]$ gleichmäßig konvergiert, kann man im Folgenden wegen (9.16) Integration und Grenzwert vertauschen.

$$\int_0^x e^{tA}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{1}{n!} t^n A^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} A^n .$$

Wegen (9.13) und (9.6) gilt somit

$$\int_0^x A e^{tA}\, dt = A \int_0^x e^{tA}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} A^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n A^n = e^{xA} - I .$$

Aus dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung folgt daher $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A$. Übrigens konvergiert e^{tA} auch für alle $t \in \mathbb{R}$, wenn man $\mathbb{R}^{p \times p}$ mit einer anderen Norm versieht, da diese alle äquivalent sind. Wir haben oben aber die Tatsache $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ verwendet, welche i.A. nur von der Abbildungsnorm erfüllt wird.

9.3.21 Beispiel. Sei nun R eine weitere beliebige $p \times p$-Matrix. Dann sieht man mit Hilfe der Produktregel wie in (9.11), dass die Funktion $f(t) = e^{tA} R$ eine Lösung des Randwertproblems

$$f'(t) = A f(t),\ f(0) = R \tag{9.22}$$

ist. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{p \times p}$ eine weitere auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Lösung dieses Problems, so folgt aus der Produktregel für $\mathbb{R}^{p \times p} \cong L_b(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$-wertige Funktionen (9.11)

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA} f(t)) = -e^{-tA} A f(t) + e^{-tA} f'(t) = -e^{-tA} A f(t) + e^{-tA} A f(t) = 0 ,$$

und daher $e^{-tA} f(t) = e^{-0A} f(0) = R$. Da insbesondere e^{tA} eine Lösung von (9.22) mit $R = I$ ist, erhalten wir $e^{-tA} e^{tA} = I$ und infolge $e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}$.
Für unsere zunächst beliebige Lösung folgt daher auch $f(t) = e^{tA} R$. Also ist $e^{tA} R$ die einzige Lösung von (9.22).
Mit dieser Tatsache lässt sich nun auch die Frage behandeln, ob für die Exponentialfunktion wie im skalaren Fall gilt, dass $e^{A+B} = e^A e^B$. Im Allgemeinen ist das nämlich nicht richtig. Sollten aber A und B kommutieren ($AB = BA$), so gilt wegen (9.6)

$$e^{tA} B = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \right) B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (A^n B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (B A^n) = B e^{tA} ,$$

und daher

$$\frac{d}{dt}(e^{tA} e^{tB}) = A e^{tA} e^{tB} + e^{tA} B e^{tB} = (A + B) e^{tA} e^{tB} .$$

Somit ist $e^{tA} e^{tB}$ eine Lösung von (9.22) mit A ersetzt durch $A + B$ und R ersetzt durch I. Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$.

Betrachtet man die Abbildung $A \mapsto e^A$, so gilt folgende Aussage.

9.3.22 Proposition (*). *Für jede $p \times p$-Matrix $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ konvergiert die Reihe ($A^0 := I$)*

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k .$$

absolut im Banachraum $\mathbb{R}^{p\times p}$ versehen mit der Abbildungsnorm, wobei $\|e^A\| \le e^{\|A\|}$ und zwar gleichmäßig auf jeder Menge der Form

$$E_r = \{A \in \mathbb{R}^{p\times p} : \|A\| \le r\}$$

für jedes beliebige $0 < r < +\infty$.
Die Abbildung $A \mapsto e^A$ als Abbildung von $\mathbb{R}^{p\times p}$ nach $\mathbb{R}^{p\times p}$ ist stetig.

Beweis. Wegen (9.5) gilt $\|A^k\| \le \|A\|^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$ eine konvergente Majorante und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ konvergiert absolut, wobei $\|e^A\| \le e^{\|A\|}$; siehe (9.7).
Wegen der Beschränktheit der Abbildungen $B \mapsto AB,\ B \mapsto BA$ als Abbildungen von $\mathbb{R}^{p\times p}$ nach $\mathbb{R}^{p\times p}$ folgt aus (9.6)

$$Ae^A = A\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^{k+1} = e^A A .$$

Nun betrachte für ein $r > 0$ die Teilmenge

$$E_r = \{A \in \mathbb{R}^{p\times p} : \|A\| \le r\}$$

von $\mathbb{R}^{p\times p}$. Für $A \in E_r$ gilt $\left\|\frac{1}{k!} A^k\right\| \le \frac{r^k}{k!}$, und daher können wir das Weierstraßsche Konvergenzkriterium anwenden. Insbesondere konvergiert dann $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf E_r gegen die Funktion $A \mapsto e^A$.
Nach Korollar 9.2.9 ist $A \mapsto A^k$ stetig auf E_r für alle $k \in \mathbb{N}$, und nach Korollar 9.1.3 ist auch $A \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$ stetig auf E_r.
Da die Grenzfunktion von einer Folge stetiger Funktionen bei gleichmäßiger Konvergenz wieder stetig ist, folgt die Stetigkeit von $A \mapsto e^A$ auf E_r. Weil die Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, gilt diese Schließlich auf ganz $\mathbb{R}^{p\times p}$. ❑

9.3.23 Bemerkung. Ganz ähnlich wie in Bemerkung 9.3.8 gelten auch Beispiel 9.3.20 und die Aussagen von Proposition 9.3.22 und Beispiel 9.3.21 für den Fall, dass $A \in L_b(X, X)$ mit einem beliebigen Banachraum X. Die Beweise sind im wesentlichen dieselben.

9.4 Übungsaufgaben

9.1 Man beweise die *Höldersche Ungleichung* mit Hilfe von Beispiel 7.21:
Sei $p \in \mathbb{R},\ p > 1$ und sei $q = \frac{p}{p-1}$. Weiters seien $a_j, b_j \in [0, +\infty),\ j = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q\right)^{\frac{1}{q}} .$$

Hinweis: Man beweise Die Ungleichung zuerst unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass $b_j > 0,\ j = 1, \dots, n$. Dazu wende man das erwähntes Beispiel auf die Funktion x^p und $I = [0, +\infty)$ an, und setze $\mu_j = b_j^q$ sowie $x_j = \frac{a_j}{b_j^{q-1}}$.

9.2 Für $p \geq 1$ sei $\|.\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\|(x_j)_{j=1}^n\|_p := \sqrt[p]{\sum_{j=1}^n |x_j|^p}\,.$$

Man zeige, dass $\|.\|_p$ eine Norm ist.

Hinweis: Es gilt $\sum_j |x_j + y_j|^p \leq \sum_j |x_j||x_j + y_j|^{p-1} + \sum_j |y_j||x_j + y_j|^{p-1}$. Nun wende man die Höldersche Ungleichung an, ...

9.3 Man zeige, dass alle Normen $\|.\|_p,\ p \in [1, \infty]$ auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Man zeige insbesondere, dass $(1 \leq p < q < \infty)$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n\|x\|_\infty\,.$$

Hinweis: Man verwende, dass aus $0 < p < q$ und $\lambda \in [0, 1]$ folgt, dass $\lambda^q \leq \lambda^p$.

9.4 Man betrachte den Banachraum $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ aller beschränkten, komplexwertigen Folgen versehen mit der Norm $\|.\|_\infty$; also $\|(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n|$.

Zeigen Sie, dass die Menge $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ aller komplexwertigen Nullfolgen ein abgeschlossener Unterraum von $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ist.

Weiters bestimme man den Abschluss $c(F)$ von F in dem Banachraum $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, wobei

$$F = \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C}) : \exists N \in \mathbb{N},\ z_n = 0 \ \text{ für alle } \ n \geq N\}\,.$$

Anmerkung: Wegen $F \neq c(F)$ ist das ein Teilraum eines Banachraumes, der nicht abgeschlossen ist.

9.5 Seien $A_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $A_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ in Matrixdarstellung gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Ausgangsräume der Abbildungen mit $\|.\|_\infty$ und die Zielräume mit $\|.\|_1$ versehen sind. Berechnen Sie die Abbildungsnormen von A_1, A_2, A_3

9.6 Sei $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix im $\mathbb{R}^{n\times n}$. Man berechne $\|D\|_2, \|D\|_\infty$, wenn man D als Element vom $\mathbb{R}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachtet.

Weiters berechne man die Abbildungsnorm von D als Element von $L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, wenn man $\mathbb{R}^n$ vorne und hinten mit der $\|.\|_2$-Norm versieht.

9.7 Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel berechne man die Abbildungsnorm von D als Element von $L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, wenn man $\mathbb{R}^n$ vorne und hinten mit der $\|.\|_\infty$-Norm versieht.

9.8 Sei $\mathbb{R}^n$ versehen mit $\|.\|_1$. Man betrachte $L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ den Raum aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$, also den Dualraum von $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Abbildungsnorm $\|.\|$. Bekanntlich ist $L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ isomorph zu $\mathbb{R}^n$, indem man ein $A \in L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ in Matrixform $(a_1, \dots, a_n)$ angibt. Man zeige, dass dann $\|.\|$ mit der $\|.\|_\infty$-Norm übereinstimmt.

9.9 Sei $\mathbb{R}^n$ versehen mit $\|.\|_\infty$. Man betrachte $L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ den Raum aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$, also den Dualraum von $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Abbildungsnorm $\|.\|$. Bekanntlich ist $L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ isomorph zu $\mathbb{R}^n$, indem man ein $A \in L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ in Matrixform $(a_1, \dots, a_n)$ angibt. Man zeige, dass dann $\|.\|$ mit der $\|.\|_1$-Norm übereinstimmt.

9.10 Mit welcher Norm stimmt die Abbildungsnorm auf $L_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ überein, wenn man $\mathbb{R}^n$ mit $\|.\|_2$ versieht. Warum?

9.11 Man betrachte den Banachraum $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ aller beschränkten, komplexwertigen Folgen versehen mit der Norm $\|.\|_\infty$; also $\|(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n|$. $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ sei der Banachraum aller komplexwertigen Nullfolgen.

Weiters sei $A : \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ definiert durch

$$A((z_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\frac{1}{n} z_n)_{n\in\mathbb{N}} .$$

Man zeige, dass A tatsächlich nach $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ hinein abbildet, und dass A linear, beschränkt, injektiv, aber nicht surjektiv ist.

9.12 Seien $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ normierte Räume und $(L_b(X, Y), \|.\|)$ der Raum aller beschränkten linearen Abbildungen von X nach Y. Weiters sei $x \in X$ fest. Zeigen Sie, dass die Abbildung $A \mapsto Ax$ als Abbildung von $L_b(X, Y)$ nach Y beschränkt und linear ist.

Ist weiters E eine nichtleere Menge und $t \in E$, so zeige man auch, dass die Abbildung

$$\mathcal{B}(E, Y) \to Y, \quad f \mapsto f(t) ,$$

beschränkt und linear ist. Bestimmen Sie die Abbildungsnorm dieser Abbildung!

9.13 Sei M eine Menge und $\mathcal{B}(M, \mathbb{R})$ der Banachraum aller beschränkten, reellwertigen Funktionen auf M versehen mit der Norm $\|.\|_\infty$.

Seien $t_1, \dots, t_n \in I$. Man zeige, dass die Abbildung $T : \mathcal{B}(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$T(f) = \begin{pmatrix} f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{pmatrix}$$

linear und beschränkt ist.

9.14 Man betrachte die Menge $C_b[a, b]$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a, b]$ und versehe diese mit

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\, dt .$$

Zeigen Sie, dass $\|.\|_1$ eine Norm ist, und dass $(C_b[a, b], \|.\|_1)$ kein Banachraum ist, indem Sie eine Cauchy-Folge angeben, die nicht konvergiert.

Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a = -1, b = 1$. Approximieren Sie $\operatorname{sgn}(x)$ (diese liegt nicht in $C_b[a, b]$) geeignet durch eine Folge stetiger Funktionen.

9.15 Sei $C_b[0,1]$ die Menge aller stetigen und komplexwertigen Funktionen auf $[0,1]$ versehen mit der Supremumsnorm. Weiters sei $h : [-1,1] \to C_b[0,1]$ definiert durch
$$h(t) = (s \mapsto \frac{s}{s+2+t}).$$
Zeigen Sie, dass h stetig ist, indem Sie $\|h(t_1) - h(t_2)\|_\infty$ abschätzen. Berechnen Sie auch
$$\int_{-1}^{1} h(t)\, dt\,.$$
Hinweis: Verwenden Sie (9.13) mit $T_s : C_b[0,1] \to \mathbb{C},\ T(f) = f(s)$ für jedes feste $s \in [0,1]$.

9.16 Sei $X = C_b[0,1]$ der Banachraum aller komplexwertigen und stetigen Funktionen auf $[0,1]$ versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{s\in[0,1]} |f(s)|$. Weiters Bezeichne $C_b([-1,1], X)$ den Banachraum aller X-wertigen Funktionen auf $[-1,1]$ versehen mit der Supremumsnorm $\|g\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} \|g(t)\|_\infty$. Schließlich sei $C_b([-1,1]\times[0,1], \mathbb{C})$ der Banachraum aller komplexwertigen und stetigen Funktionen auf $[-1,1]\times[0,1]$ ($\subseteq \mathbb{R}^2$) versehen mit der Supremumsnorm $\|h\|_\infty = \sup_{(t,s)\in[-1,1]\times[0,1]} |f(s)|$.

Zeigen Sie, dass $\Psi : g \mapsto \Psi(g)$, wobei $\Psi(g) : [-1,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ definiert ist durch $\Psi(g)(t,s) = (g(t))(s)$, eine wohldefinierte, lineare Bijektion von $C_b([-1,1], X)$ auf $C_b([-1,1]\times[0,1], \mathbb{C})$ ist. Zeigen Sie auch, dass $\|\Psi(g)\|_\infty = \|g\|_\infty$, also dass Ψ *isometrisch* ist.

Hinweis: Für die Surjektivität von Ψ könnte Satz 6.3.3 hilfreich sein.

9.17 Seien $T, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und sei T invertierbar. Man zeige, dass $T^{-1}e^A T = e^{T^{-1}AT}$. Weiters berechne man e^A, wenn A eine Diagonalmatrix ist und wenn
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9.18 Sei $F : [1,2] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch
$$F(t) = \begin{pmatrix} t^3 + 5 \\ \sin t + \frac{t^2}{t+1} \\ t \exp(3t) \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie $\int_1^2 F(t)\, dt$ und F'.

9.19 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar, sodass $f'(s) \neq 0$ für alle $s \in [a,b]$. Für $s \in [a,b]$ bezeichnen wir dann mit $\mathfrak{t}(s)$ den normierten Tangentialvektor $\frac{1}{\|f'(s)\|_2} f'(s)$ im Punkt $f(s)$.

Zeigen Sie, dass für ein zweimal differenzierbares $f : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ die Funktion $s \mapsto \mathfrak{t}(s)$ einmal differenzierbar ist, und dass für jedes $s \in [a,b]$ die Ableitung $\mathfrak{t}'(s)$ normal auf $\mathfrak{t}(s)$ steht, also ihr Skalarprodukt 0 ergibt.

Hinweis: Produktregel für das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^p$.

9.20 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ mindestens dreimal differenzierbar mit $\|f'(s)\|_2 = 1$ und $\mathfrak{t}'(s) \neq 0$ für alle $s \in [a,b]$, wobei $\mathfrak{t}(s) = f'(s)$. Wir setzen $\kappa(s) := \|\mathfrak{t}'(s)\|_2$ (*Krümmung*), $\mathfrak{n}(s) := \frac{1}{\kappa(s)} \mathfrak{t}'(s)$ (*Hauptnormaleneinheitsvektor*) und $\mathfrak{b}(s) := \mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s)$ (*Binormaleneinheitsvektor*). Hier steht $\times$ für das *Kreuzprodukt* von $\mathfrak{t}(s)$ und $\mathfrak{n}(s)$.

Zeigen Sie:

(i) Die Vektoren $\mathfrak{t}(s), \mathfrak{n}(s), \mathfrak{b}(s)$ (*begleitendes Dreibein*) stellen für jedes $s \in [a, b]$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ dar.

(ii) $\mathfrak{b}'(s)$ steht normal auf $\mathfrak{t}(s)$ und $\mathfrak{b}(s)$, ist also kollinear mit $\mathfrak{n}(s)$. Der Skalar $\tau(s) \in \mathbb{R}$, sodass $\mathfrak{b}'(s) = -\tau(s)\mathfrak{n}(s)$, heißt *Windung* bzw. *Torsion*.

(iii) $\mathfrak{n}'(s)$ steht normal auf $\mathfrak{n}(s)$.

(iv) Es gelten die *Frenetschen Formeln*: $\mathfrak{t}'(s) = \kappa(s)\mathfrak{n}(s)$, $\mathfrak{b}'(s) = -\tau(s)\mathfrak{n}(s)$, $\mathfrak{n}'(s) = -\kappa(s)\mathfrak{t}(s) + \tau(s)\mathfrak{b}$.

Hinweis: Produktregel für das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

9.21 Für $p \geq 1$ sei $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ die Menge aller komplexwertigen Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die $\sum_{n=1}^\infty |z_n|^p < +\infty$ erfüllen. Man zeige, dass $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ mit der gliedweisen Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum ist, und dass $\|(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p := \sqrt[p]{\sum_{n=1}^\infty |z_n|^p}$ eine Norm auf $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ist.

Anmerkung: $(\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \|.\|_p)$ ist sogar ein Banachraum.

Ist nämlich $((z_n^k)_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, so ist für ein festes $j \in \mathbb{N}$ wegen $|z_j^k - z_j^k| \leq \|(z_n^k)_{n\in\mathbb{N}} - (z_n^l)_{n\in\mathbb{N}}\|_p$ auch jede Komponentenfolgen $(z_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge und somit konvergent gegen ein $z_j \in \mathbb{C}$ konvergiert.

Es bleibt $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ und $\|(z_n^k)_{n\in\mathbb{N}} - (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p \to 0$ zu zeigen. Dazu sei $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ beliebig und k_0, sodass $k, l \geq k_0 \Rightarrow \|(z_n^k)_{n\in\mathbb{N}} - (z_n^l)_{n\in\mathbb{N}}\|_p \leq \epsilon$. Wegen

$$\sqrt[p]{\sum_{n=1}^N |z_n^k - z_n^l|^p} \leq \|(z_n^k)_{n\in\mathbb{N}} - (z_n^l)_{n\in\mathbb{N}}\|_p \leq \epsilon$$

folgt für $l \to \infty$, dass mit beliebigen $N \in \mathbb{N}$, $\sqrt[p]{\sum_{n=1}^N |z_n^k - z_n|^p} \leq \epsilon$ und wegen der Dreiecksungleichung $\sqrt[p]{\sum_{n=1}^N |z_n|^p} \leq \epsilon + \|(z_n^k)_{n\in\mathbb{N}}\|_p$.

Mit $N \to \infty$ folgt aus letzterer Tatsache, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$, und aus der vorletzten Ungleichung $\|(z_n^k)_{n\in\mathbb{N}} - (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p \leq \epsilon$ und zwar für alle $k \geq k_0$.

9.22 Man betrachte den normierten Raum $(\mathbb{R}^{p\times p}, \|.\|_\infty)$, und zeige, dass die Funktionen $A \mapsto \operatorname{spur}(A)$ $(= \sum_{i=1}^p a_{ii})$, $A \mapsto \det(A)$ stetig auf $\mathbb{R}^{p\times p}$ sind, und die Funktion $A \mapsto A^{-1}$ stetig auf $GL(p, \mathbb{R})$ $(\subseteq \mathbb{R}^{p\times p})$ ist.

Weiters sei $y \in \mathbb{R}^p$ fest und man betrachte die Funktion von $GL(p, \mathbb{R})$ (alle invertierbaren $p \times p$-Matrizen) nach $\mathbb{R}^p$, die jedem $A \in GL(p, \mathbb{R})$ die Lösung x der Gleichung $Ax = y$ zuweist. Man zeige, dass diese Funktion auch stetig ist.

9.23 Sei $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge in einem normierten Raum $(X, \|.\|)$, die für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert $w \in X$ konvergiert. Man zeige, dass dann auch die Folge

$$\frac{w_1 + \cdots + w_n}{n}$$

gegen w konvergiert.

Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie in Beispiel 3.14 vor und verwenden Sie die Dreiecksungleichung.