

Kapitel 3

Der Grenzwert

Schon recht bald hat sich in der Mathematik herausgestellt, dass eine rein algebraische Betrachtungsweise der reellen Zahlen nicht immer das geeignete Instrument zur Modellierung der in den Naturwissenschaften auftretenden Phänomene ist. Probleme wie „unendlich oft immer kleiner werdende Größen zusammenzählen“ oder „einer gewissen Zahl immer näher kommen“, lassen sich mit den bisher rein algebraischen Methoden nicht fassen.

Man denke zum Beispiel an die Approximation der Zahl 2π , indem man einem Kreis mit Radius eins regelmäßige n -Ecke einschreibt, von diesen den Umfang berechnet, und dann n immer größer werden lässt. Das führt zu dem Begriff des Grenzwertes einer Folge von Zahlen. Dazu wollen wir das „Einer-Zahl-immer-näher-Kommen“ bzw. Konvergieren mathematisch exaktifizieren:

Eine Folge x_1, x_2, x_3, \dots von reellen Zahlen heißt *konvergent* gegen eine reelle Zahl x , falls es zu jedem beliebig kleinen Abstand $\epsilon > 0$ einen Folgenindex N gibt, sodass ab diesem Index alle Folgenglieder einen Abstand von x kleiner als ϵ haben; sodass also $|x_n - x| < \epsilon$ für alle $n \geq N$.

3.1 Metrische Räume

Wir wollen im Folgenden nicht nur die Konvergenz von Folgen von reellen Zahlen, sondern auch die Konvergenz von Folgen in \mathbb{C} , von Folgen in \mathbb{R}^3 oder auch von Folgen in anderen Mengen studieren. Was \mathbb{R} , \mathbb{C} und \mathbb{R}^3 gemeinsam haben, ist die Möglichkeit anzugeben, wie weit zwei Punkte voneinander entfernt sind. Offenbar benötigt man zur Definition der Konvergenz auch nicht mehr als eben diesen Abstandsbegriff. Das führt zum Konzept eines metrischen Raumes.

3.1.1 Definition. Sei X eine Menge, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^1$ eine Funktion. d heißt eine *Metrik* auf X , und $\langle X, d \rangle$ ein *metrischer Raum*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(M1) Für alle $x, y \in X$ ist $d(x, y) \geq 0$. Dabei gilt $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.

(M2) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.

¹ Wie unmittelbar nach Satz 2.9.3 bemerkt, ist \mathbb{R} ein vollständig angeordneter Körper.

(M3) Sind $x, y, z \in X$, so gilt die *Dreiecksungleichung*:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

3.1.2 Bemerkung. Man kann allgemeiner auch Metriken d betrachten, die $X \times X$ nicht nach \mathbb{R} , sondern nach K abbilden, wobei $\langle K, +, \cdot, P \rangle$ ein archimedisch angeordneter Körper ist. Wir werden darauf im Kapitel 4 zurück kommen.

3.1.3 Beispiel.

(i) Ist $X = \mathbb{R}$ und $d(x, y) = |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$, so sieht man sofort, dass (M1) und (M2) erfüllt sind. (M3) folgt aus der Dreiecksungleichung für den Betrag (siehe Lemma 2.2.12):

$$|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z|, \quad x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

(ii) Ist $X = \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und $d(z, w) = |z - w|$ für $z, w \in \mathbb{C}$, wobei $|\cdot|$ hier der komplexe Betrag ist, so erfüllt d offensichtlich (M2) und $d(z, w) \geq 0$. Schreibt man $z = a + ib$ und $w = c + id$, so gilt $d(z, w) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} = 0$ genau dann, wenn $a - c = 0$ und $b - d = 0$, also $z = w$. Somit ist (M1) erfüllt. (M3) folgt aus der Dreiecksungleichung für den komplexen Betrag ähnlich wie in (3.1).

(iii) Um eine Metrik auf $X := \mathbb{R}^p$ zu definieren, setzen wir

$$d_2(x, y) := \left(\sum_{j=1}^p (x_j - y_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x = (x_1, \dots, x_p), y = (y_1, \dots, y_p) \in X.$$

Man spricht von der *euklidischen Metrik* auf \mathbb{R}^p . Die Gültigkeit von (M1) und (M2) ist aus der Definition offensichtlich. Die Dreiecksungleichung (M3) folgt hingegen aus dem unten folgenden Lemma 3.1.4.

Im Falle $p = 1$, also $X = \mathbb{R}$, gilt $d_2(x, y) = |x - y|$. Damit ist der Abstand zweier Zahlen bzgl. der euklidischen Metrik nichts anderes als der Betrag der Differenz dieser Zahlen.

Die euklidische Metrik auf \mathbb{R}^2 hat eine analoge Interpretation mit Hilfe des Betrages einer komplexen Zahl. Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ haben wir den Betrag definiert als $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Daraus erkennt man, dass die euklidische Metrik auf \mathbb{R}^2 gerade

$$d_2(z, w) = |z - w|, \quad z, w \in \mathbb{C},$$

ist, wobei wir hier die komplexen Zahlen als Elemente der Gaußschen Zahlenebene, also als Elemente von \mathbb{R}^2 interpretieren.

3.1.4 Lemma. Seien $p \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p \in \mathbb{R}$. Dann gilt (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

$$\left(\sum_{i=1}^p a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^p a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^p b_i^2 \right),$$

und (Minkowskische Ungleichung)

$$\left(\sum_{i=1}^p (a_i + b_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^p a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^p b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen $a := (a_1, \dots, a_p)$, $b := (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^p$ und definieren²

$$(a, b) := \sum_{i=1}^p a_i b_i.$$

Für Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}^p$ setzen wir

$$\lambda a + \mu b := (\lambda a_1 + \mu b_1, \dots, \lambda a_p + \mu b_p).$$

Offenbar gilt für $a, b, c \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} (\lambda a + \mu b, c) &= \sum_{i=1}^p (\lambda a_i + \mu b_i) c_i = \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda a_i c_i + \sum_{i=1}^p \mu b_i c_i = \lambda(a, c) + \mu(b, c). \end{aligned}$$

Man spricht von der Linearität von (\cdot, \cdot) in der vorderen Komponente. Wegen $(a, b) = (b, a)$ ist (\cdot, \cdot) auch in der hinteren Komponente linear (vgl. den Begriff des Skalarproduktes auf einem Vektorraum in der Linearen Algebra).

Um die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung zu zeigen, gehen wir von der trivialen Bemerkung aus, dass für jedes p -Tupel $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$

$$(x, x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 \geq 0. \quad (3.2)$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt nun

$$0 \leq (a + tb, a + tb) = (a, a) + 2t(a, b) + t^2(b, b).$$

Ist $(b, b) \neq 0$, so setze man $t = -\frac{(a, b)}{(b, b)}$ in obige Ungleichung ein, und erhält

$$0 \leq (a, a) - \frac{(a, b)^2}{(b, b)}.$$

Daraus folgt unmittelbar die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

Im Falle $(b, b) = 0$ folgt $b = (0, \dots, 0)$, und damit $(a, b) = 0$. Es gilt also auch in diesem Fall die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

² Also ist (\cdot, \cdot) eine Abbildung von $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ nach \mathbb{R} .

Die Minkowskische Ungleichung folgt wegen $(a_i + b_i)^2 = a_i \cdot (a_i + b_i) + b_i(a_i + b_i)$ aus

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^p a_i(a_i + b_i) + \sum_{i=1}^p b_i(a_i + b_i) \leq \left| \sum_{i=1}^p a_i \cdot (a_i + b_i) \right| + \left| \sum_{i=1}^p b_i \cdot (a_i + b_i) \right| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^p a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^p (a_i + b_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^p b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^p (a_i + b_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(\sum_{i=1}^p a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^p b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot \left(\sum_{i=1}^p (a_i + b_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \square \end{aligned}$$

Beispiele von Metriken gibt es noch viele, und sie treten in verschiedensten Zusammenhängen auf.

3.1.5 Beispiel.

(i) Sei noch einmal $X := \mathbb{R}^2$ und setze

$$d_1(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Dann ist d_1 eine Metrik. Die Gültigkeit von (M1) und (M2) ist wieder aus der Definition offensichtlich. Um die Dreiecksungleichung einzusehen, seien $x, y, z \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung für $|\cdot|$

$$\begin{aligned} d_1(x, z) &= |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| \leq (|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|) + (|x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|) \\ &= (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|) + (|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|) = d_1(x, y) + d_1(y, z). \end{aligned}$$

Diese Metrik ist offenbar ungleich der euklidischen Metrik, denn es gilt etwa $d_1((0, 0), (2, 1)) = 3 \neq \sqrt{5} = d_2((0, 0), (2, 1))$.

Anschaulich interpretiert bezeichnet man d_1 manchmal als New York-Metrik. Denn stellt man sich in der Ebene einen Stadtplan mit lauter rechtwinkligen Straßen – wie etwa in New York – vor, dann misst $d_1(x, y)$ gerade die Länge des Fußweges von der Kreuzung x zur Kreuzung y .

Ganz analog definiert man eine Metrik am \mathbb{R}^p

$$d_1(x, y) = \sum_{j=1}^p |x_j - y_j|, \quad x = (x_1, \dots, x_p), y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Der Nachweis von (M1)-(M3) geht genauso wie im oben betrachteten Fall $p = 2$.

(ii) Ist wieder $X = \mathbb{R}^p$, so definiert

$$d_\infty(x, y) := \max_{j=1, \dots, p} |x_j - y_j|, \quad x = (x_1, \dots, x_p), y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p,$$

wieder eine Metrik. (M1) und (M2) sind leicht nachweisbar. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Tatsache, dass für alle nichtnegativen Zahlen

$$\max\{a_1 + b_1, \dots, a_p + b_p\} \leq \max\{a_1, \dots, a_p\} + \max\{b_1, \dots, b_p\}.$$

Auch diese Metrik unterscheidet sich tatsächlich von den schon eingeführten Metriken d_1 und d_2 , da etwa im Falle $p = 2$ gilt, dass $d_\infty((0, 0), (2, 1)) = 2$.

Auf \mathbb{R} stimmen die Metriken d_1, d_2, d_∞ aber alle überein.

(iii) Ist $X = \mathbb{C}^p$, so definiert man für $z = (z_1, \dots, z_p), w = (w_1, \dots, w_p) \in \mathbb{C}^p$

$$d_2(z, w) = \sqrt{\sum_{j=1}^p |z_j - w_j|^2}.$$

Identifiziert man z mit dem Vektor $x \in \mathbb{R}^{2p}$, indem man $x_1 = \operatorname{Re} z_1, x_2 = \operatorname{Im} z_1, \dots, x_{2p-1} = \operatorname{Re} z_p, x_{2p} = \operatorname{Im} z_p$ setzt, und identifiziert man w entsprechend mit dem Vektor $y \in \mathbb{R}^{2p}$, so gilt

$$d_2(z, w) = \sqrt{\sum_{j=1}^p (\operatorname{Re}(z_j - w_j)^2 + \operatorname{Im}(z_j - w_j)^2)} = d_2(x, y).$$

Insbesondere ist auch \mathbb{C}^p versehen mit d_2 ein metrischer Raum.

(iv) Aus theoretischer Sicht bedeutend ist die *diskrete Metrik*, welche auf jeder nichtleeren Menge X folgendermaßen definiert ist:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

3.1.6 Bemerkung. Die oben kennengelernten Metriken d_2, d_1, d_∞ auf dem \mathbb{R}^p sind allesamt von *Normen* erzeugte Metriken. Eine Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^p ist eine Funktion von $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden drei Eigenschaften $x, y \in \mathbb{R}^p, \lambda \in \mathbb{R}$:

(i) $\|x\| \geq 0$, wobei $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dabei gilt $d(x, y) = \|x - y\|_2$, $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$, $d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$, wobei $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^p |x_j|^2}$, $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^p |x_j|$, $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_p|\}$ Normen sind.

3.1.7 Beispiel (*). Betrachte die ganzen Zahlen $X := \mathbb{Z}$ und halte eine Primzahl p fest. Setze

$$d_{(p)}(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{p^{n(p)}}, & \text{falls } x \neq y, x - y = \pm \prod_{q \text{ prim}} q^{n(q)}, \\ 0, & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Dabei ist $\pm \prod_{q \text{ prim}} q^{n(q)}$ die eindeutige Primfaktorzerlegung von $x - y$. Dann ist $d_{(p)}$ eine Metrik auf \mathbb{Z} . Denn (M1) ist nach Definition erfüllt, (M2) ist ebenfalls richtig, denn vertauscht man x und y , so ändert sich bei der Differenz $x - y$ nur das Vorzeichen, nicht jedoch die Primfaktoren und ihre Potenzen. Die Dreiecksungleichung ist wieder schwieriger einzusehen. Wir zeigen, dass in diesem Fall sogar die stärkere Ungleichung

$$d_{(p)}(x, z) \leq \max\{d_{(p)}(x, y), d_{(p)}(y, z)\}, \quad x, y, z \in \mathbb{Z},$$

gilt. Diese Ungleichung impliziert tatsächlich sofort die Dreiecksungleichung, denn für je zwei Zahlen $a, b \geq 0$ ist stets $\max(a, b) \leq a + b$.

Schreibe

$$x - z = \pm \prod_{q \text{ prim}} q^{n_1(q)}, \quad x - y = \pm \prod_{q \text{ prim}} q^{n_2(q)}, \quad y - z = \pm \prod_{q \text{ prim}} q^{n_3(q)},$$

womit

$$d_{(p)}(x, z) = \frac{1}{p^{n_1(p)}}, \quad d_{(p)}(x, y) = \frac{1}{p^{n_2(p)}}, \quad d_{(p)}(y, z) = \frac{1}{p^{n_3(p)}}.$$

Betrachte den Fall, dass $d_{(p)}(x, y) \geq d_{(p)}(y, z)$, also $n_2(p) \leq n_3(p)$. Wegen $n_2(p) \leq n_3(p)$ teilt $p^{n_2(p)}$ sowohl $x - y$ als auch $y - z$, und daher auch $(x - y) + (y - z) = x - z$. Es folgt $n_2(p) \leq n_1(p)$, und somit $d_{(p)}(x, y) \geq d_{(p)}(x, z)$.

Der Fall $d_{(p)}(x, y) \leq d_{(p)}(y, z)$ wird genauso behandelt.

Auf \mathbb{Z} haben wir natürlich auch die euklidische Metrik $d_2(x, y) = |x - y|$, denn \mathbb{Z} ist ja eine Teilmenge von \mathbb{R} . Diese ist verschieden von der Metrik $d_{(p)}$, denn zum Beispiel ist $d_{(p)}(0, p) = \frac{1}{p}$, wogegen $d_2(0, p) = p$.

3.2 Der Grenzwert in metrischen Räumen

Wir kommen nun zurück zu dem am Anfang des Kapitels motivierten Begriff der Konvergenz einer Folge.

3.2.1 Definition. Eine *Folge* in einer Menge X ist aus mathematischer Sicht nichts anderes als eine Funktion

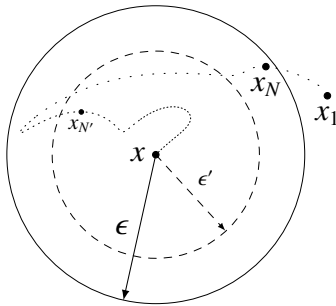
$$y : \mathbb{N} \rightarrow X,$$

wobei der Funktionswert $y(n)$ von y an der Stelle n meist als y_n geschrieben wird. Für die Folge y als solche schreiben wir meist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Folgen werden auch oft als y_1, y_2, y_3, \dots angeschrieben.

3.2.2 Definition. Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X , und x ein Element von X . Dann heißt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergent gegen x* , wenn gilt ³

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \epsilon \text{ für alle } n \geq N. \quad (3.3)$$

In diesem Fall schreibt man $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.



Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, und gibt es ein Element $x \in X$, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, so sagt man die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist *konvergent*. Ist eine Folge nicht konvergent, so sagt man sie ist *divergent*. Man verwendet auch andere Schreibweisen für $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, wie zum Beispiel $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x, n \rightarrow \infty$, oder $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, oder auch nur $x_n \rightarrow x$.

3.2.3 Bemerkung. Wegen $|d(x, x_n) - 0| = d(x, x_n)$ konvergiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum $\langle X, d \rangle$ genau dann gegen ein $x \in X$, wenn die Folge $(d(x, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} , versehen mit der euklidischen Metrik, gegen 0 konvergiert.

Folgen müssen nicht immer mit dem Index 1 anfangen. Ist k eine feste ganze Zahl, so setzen wir $\mathbb{Z}_{\geq k} := \{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$. Eine Abbildung $x : \mathbb{Z}_{\geq k} \rightarrow X$ nennen wir ebenfalls Folge, wobei ihre Konvergenz in analoger Weise wie in Definition 3.2.2 definiert ist.

3.2.4 Beispiel.

- (i) Sei $\langle X, d \rangle$ ein beliebiger metrischer Raum, und sei $x \in X$. Für die konstante Folge $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x$ gilt $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x$.

Um dies einzusehen, sei ein $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, gegeben. Wir müssen eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ finden, sodass $d(x_j, x) < \epsilon$ für alle $j \geq N$. Wähle $N := 1$, dann gilt

$$d(x_j, x) = d(x, x) = 0 < \epsilon \text{ für alle } j \geq N.$$

Dieses Beispiel ist natürlich in gewissem Sinne trivial, denn die Folgenglieder x_j sind ja schon alle gleich dem Grenzwert x , kommen diesem also natürlich beliebig nahe.

- (ii) Sei $X = \mathbb{R}$ und $d = d_2$ die euklidische Metrik $d_2(x, y) = |x - y|$. Dann gilt $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} = 0$.

Um dies einzusehen, sei ein $\epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, gegeben. Wir müssen eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ finden, sodass $|\frac{1}{j} - 0| = \frac{1}{j} < \epsilon$ gilt, wenn nur $j \geq N$. Dazu benützen wir die Tatsache, dass \mathbb{N} als Teilmenge von \mathbb{R} nicht nach oben beschränkt ist. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\epsilon} < N$. Für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $j \geq N$ gilt dann $\frac{1}{j} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$.

³ Kürzer lässt sich das folgendermaßen schreiben: $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon$.

(iii) Aus dem letzten Beispiel zusammen mit Bemerkung 3.2.3 schließen wir auf $\lim_{j \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{j}) = 1$, da $|(1 + \frac{1}{j}) - 1| = \frac{1}{j} \rightarrow 0$.

(iv) Sei $q \in \mathbb{R}$, $0 \leq q < 1$, und betrachte die Folge $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Um das einzusehen, können wir $q > 0$ voraussetzen, da sonst die betreffende Folge identisch gleich Null ist. Wir verwenden zum Beweis die Bernoullische Ungleichung aus Lemma 2.3.7. Setzt man in der Bernoullischen Ungleichung $x = \frac{1}{q} - 1 > 0$, so gilt

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{q} - 1\right).$$

Da \mathbb{R} archimedisch angeordnet ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit $1 + N(\frac{1}{q} - 1) > \frac{1}{\epsilon}$ und damit auch $(\frac{1}{q})^N > \frac{1}{\epsilon}$, also $q^N < \epsilon$. Es folgt

$$d(0, q^n) = q^n \leq q^N < \epsilon$$

für alle $n \geq N$.

(v) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Setzen wir $q := |z|$, so folgt aus dem vorherigen Beispiel

$$d(0, z^n) = |z^n - 0| = q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Mit Hilfe von Bemerkung 3.2.3 erkennen wir, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$ in \mathbb{C} versehen mit der euklidischen Metrik $d_2(z, w) = |z - w|$.

3.2.5 Beispiel. Es gibt viele Folgen, die nicht konvergieren. Die Folge $z_n := i^n$ in \mathbb{C} , also

$$i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, \dots,$$

zum Beispiel, ist divergent, wobei wir immer, wenn wir nichts anderes explizit angeben, \mathbb{C} mit der euklidischen Metrik versehen.

Um das nachzuprüfen, nehmen wir an, dass $z_n \rightarrow z$ für ein gewisses $z \in \mathbb{C}$. Wählt man $N \in \mathbb{N}$, sodass $|z_n - z| < \frac{1}{2}$ für alle $n \geq N$, und nimmt ein $n \geq N$, welches durch 4 teilbar ist, so folgt der Widerspruch

$$2 = |1 - (-1)| = |z_n - z_{n+2}| \leq |z_n - z| + |z - z_{n+2}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Es gelten folgende, zu (3.3) äquivalente Konvergenzbedingungen.

3.2.6 Lemma. Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum, $x \in X$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus X . Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, also (3.3), genau dann, wenn für gewisse $K \in (0, +\infty)$ und $\alpha \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

$$\forall \epsilon \in (0, \alpha) \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < K \cdot \epsilon \text{ für alle } n \geq N. \quad (3.4)$$

Die Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x ist auch äquivalent zu (3.3) bzw. (3.4), wenn man in diesen Bedingungen $\dots < \epsilon$ bzw. $\dots < K \cdot \epsilon$ durch $\dots \leq \epsilon$ bzw. $\dots \leq K \cdot \epsilon$ ersetzt.

Beweis. Offenbar folgt (3.4) aus (3.3). Gelte umgekehrt (3.4). Für $\epsilon > 0$ gilt $\min\left(\frac{\epsilon}{K}, \frac{\alpha}{2}\right) \in (0, \alpha)$. Nimmt man diese Zahl als ϵ in (3.4), so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$d(x_n, x) < K \cdot \min\left(\frac{\epsilon}{K}, \frac{\alpha}{2}\right) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Also gilt auch (3.3).

Dass aus (3.3) bzw. (3.4) die jeweiligen Bedingungen mit \leq anstatt $<$ folgt, ist klar, da aus $<$ ja immer \leq folgt. Für die Umkehrung wende die Bedingungen mit \leq statt $<$ auf $\frac{\epsilon}{2}$ an. Man erhält dann $\dots \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$ bzw. $\dots \leq K \cdot \frac{\epsilon}{2} < K \cdot \epsilon$. \square

3.2.7 Definition. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Funktion⁴, also $n(1) < n(2) < n(3) < \dots$, so nennt man $(x_{n(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Folgende elementare Sachverhalte sind von großer Bedeutung und werden in Beweisen immer wieder Verwendung finden.

3.2.8 Satz. Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum, und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus X .

- (i) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat höchstens einen Grenzwert.
- (ii) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $x \in X$ genau dann, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq k}}$ gegen $x \in X$ konvergiert. Es kommt also nicht auf endlich viele Folgenglieder an, ob und wogegen eine Folge konvergiert.
- (iii) Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+k} = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-k} = x$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.
- (iv) Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, so konvergiert auch jede Teilfolge $(x_{n(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ gegen x .

Beweis. Wir zeigen zunächst (i). Es gelte $x_n \rightarrow x$ und $x_n \rightarrow y$, wobei $x \neq y$ und damit $d(x, y) > 0$. Wähle $N_1 \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, x) < \frac{d(x, y)}{3}$, $n \geq N_1$, und $N_2 \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, y) < \frac{d(x, y)}{3}$, $n \geq N_2$. Dann folgt für $N := \max\{N_1, N_2\}$ der Widerspruch

$$d(x, y) \leq d(x, x_N) + d(x_N, y) < \frac{d(x, y)}{3} + \frac{d(x, y)}{3} = \frac{2d(x, y)}{3} < d(x, y).$$

Wir zeigen auch noch (iv). Die Verifikation der restlichen Aussagen sei dem Leser überlassen. Sei also $(x_{n(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge der gegen x konvergenten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ist $\epsilon > 0$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, x) < \epsilon$, wenn nur $n \geq N$.

Ist nun $J \in \mathbb{N}$ so groß, dass $n(J) \geq N$ (z.B. $J = N$), so folgt für $j \geq J$ auch $n(j) \geq N$ und somit $d(x_{n(j)}, x) < \epsilon$. Also gilt $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n(j)} = x$. \square

3.2.9 Beispiel.

- (i) Ist $p \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$. Das folgt unmittelbar aus Satz 3.2.8 und der Tatsache, dass diese Folge eine Teilfolge von $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

⁴ Klarerweise ist eine solche Funktion n immer injektiv, und es gilt $n(j) \geq j$.

(ii) Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Betrachte die Folge (die sogenannte *geometrische Reihe*)

$$S_n := \sum_{k=0}^n z^k = 1 + z + z^2 + \dots + z^n.$$

Aus (2.9) folgt

$$1^n - z^n = (1 - z)(1^{n-1} + 1^{n-2}z + \dots + 1z^{n-2} + z^{n-1}) = (1 - z)(1 + z + \dots + z^{n-1}),$$

und wir erhalten

$$S_{n-1} = \frac{1}{1-z} - \frac{z^n}{1-z}. \quad (3.5)$$

Sei nun beliebig $\epsilon > 0$ vorgegeben, und wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $|z|^n < \epsilon$ für alle $n \geq N$; vgl. Beispiel 3.2.4, (iv). Dann folgt

$$\left| S_{n-1} - \frac{1}{1-z} \right| = \frac{|z|^n}{|1-z|} < \frac{\epsilon}{|1-z|} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Mit Lemma 3.2.6 erhalten wir $S_{n-1} \rightarrow \frac{1}{1-z}$, und infolge $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-z}$.

3.2.10 Lemma. Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum und seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen von Elementen von X , sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Dann folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

Beweis. Zunächst wollen wir folgende Ungleichung

$$\left| d(a_1, b_1) - d(a_2, b_2) \right| \leq d(a_1, a_2) + d(b_1, b_2), \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in X, \quad (3.6)$$

beweisen. Aus der Dreiecksungleichung folgt $d(a_1, b_1) - d(a_2, b_1) \leq d(a_1, a_2)$ sowie $d(a_2, b_1) - d(a_1, b_1) \leq d(a_1, a_2)$ und damit $|d(a_1, b_1) - d(a_2, b_1)| \leq d(a_1, a_2)$. Entsprechend gilt $|d(a_2, b_1) - d(a_2, b_2)| \leq d(b_1, b_2)$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| d(a_1, b_1) - d(a_2, b_2) \right| &\leq \left| d(a_1, b_1) - d(a_2, b_1) \right| + \left| d(a_2, b_1) - d(a_2, b_2) \right| \\ &\leq d(a_1, a_2) + d(b_1, b_2). \end{aligned}$$

Sei nun $\epsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$ und $d(y_n, y) < \frac{\epsilon}{2}$, wenn $n \geq N$. Aus (3.6) folgt

$$\left| d(x_n, y_n) - d(x, y) \right| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) < \epsilon$$

für alle $n \geq N$. □

Ein weiterer Begriff, der im Zusammenhang mit Folgen auftritt, ist die Beschränktheit.

3.2.11 Definition. Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum, und sei $Y \subseteq X$. Dann heißt Y *beschränkt*, wenn es eine Zahl $C > 0$ und einen Punkt $x_0 \in X$ gibt, sodass

$$d(x_0, y) \leq C \quad \text{für alle } y \in Y.$$

Eine Funktion $f : E \rightarrow X$ heißt *beschränkt*, wenn die Bildmenge $f(E)$ beschränkt ist. Insbesondere heißt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *beschränkt*, wenn ihre Bildmenge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

Die Menge Y ist also beschränkt, wenn sie ganz in einem gewissen Kreis⁵ liegt.

3.2.12 Bemerkung. $Y \subseteq X$ ist genau dann beschränkt, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Zahl $C_x > 0$ gibt mit $d(x, y) \leq C_x$, $y \in Y$. Denn ist $x \in X$ gegeben, so setze $C_x := d(x, x_0) + C$. Dann gilt für jedes $y \in Y$

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq d(x, x_0) + C = C_x.$$

Mit Hilfe dieser Tatsache sieht man auch, dass $Y \subseteq \mathbb{C}$ ($Y \subseteq \mathbb{R}$) versehen mit der euklidischen Metrik genau dann beschränkt ist, wenn für ein gewisses $C > 0$ gilt, dass

$$|x| = d(x, 0) \leq C \text{ für alle } x \in Y.$$

Im Falle $Y \subseteq \mathbb{R}$ stimmt somit diese Definition von Beschränktheit mit der von Definition 2.2.5 überein.

3.2.13 Proposition. *In einem metrischen Raum ist jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch beschränkt.*

Beweis. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < 1$ für alle $n \geq N$. Setzt man

$$C := 1 + \max\{d(x_1, x), \dots, d(x_{N-1}, x)\},$$

so erhält man $d(x_n, x) \leq C$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. □

Insbesondere gibt es zu jeder konvergenten reell- bzw. komplexwertigen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Konstante $C > 0$, sodass $|x_n| \leq C$, $n \in \mathbb{N}$.

3.2.14 Bemerkung (*). Die Umkehrung von Proposition 3.2.13 ist falsch und zwar in jedem metrischen Raum, der mehr als einen Punkt enthält. In der Tat gilt für $x, y \in X$ mit $x \neq y$, dass die Folge $x, y, x, y, x, y, x, \dots$ zwar beschränkt, aber nicht konvergent ist.

3.2.15 Beispiel. Man betrachte die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Beispiel 3.2.9, (ii), für den Fall $|z| = 1$ aber $z \neq 1$. Wegen (3.5) gilt

$$|S_n| \leq \frac{1 + |z^{n+1}|}{|1 - z|} = \frac{2}{|1 - z|}.$$

Die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist damit beschränkt. Sie ist aber nicht konvergent, denn gemäß den Ergebnissen im nächsten Abschnitt wäre dann auch $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent. Das ist aber nicht der Fall. Man setze z.B. $z = i$ oder $z = -1$.

⁵ Ein Kreis in einem metrischen Raum $\langle X, d \rangle$ ist hier zu verstehen als $\{y \in X : d(x_0, y) \leq C\}$.

3.3 Folgen reeller und komplexer Zahlen

Wir wollen uns hier zunächst mit dem metrischen Raum (\mathbb{R}, d) beschäftigen, und folgendes einfaches, aber sehr nützliches Lemma bringen.

3.3.1 Lemma. Für zwei konvergente Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit den Grenzwerten x bzw. y gilt:

- (i) Ist $c \in \mathbb{R}$ mit $x < c$ ($c < x$), so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n < c$ ($c < x_n$) für alle $n \geq N$.
- (ii) Ist $x < y$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n < y_n$ für alle $n \geq N$.
- (iii) Gilt ab einem gewissen $N \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $x_n \leq y_n$, so folgt $x \leq y$.

Beweis.

- (ii) Setzt man $\epsilon = \frac{y-x}{2}$, so folgt aus der Konvergenz die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$, sodass $|x_n - x| < \frac{y-x}{2}$ und $|y_n - y| < \frac{y-x}{2}$ für $n \geq N$. Somit gilt

$$(y - x) + x_n - y_n = -(y_n - y) - (x - x_n) \leq |y_n - y| + |x - x_n| < (y - x),$$

woraus $x_n < y_n$ für $n \geq N$ folgt.

- (i) Folgt aus (ii), wenn für $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$) die identische Folge $(c)_{n \in \mathbb{N}}$ wählen.
- (iii) Wäre $x > y$, so würde aus (ii) folgen, dass $x_n > y_n$ für alle $n \geq k$ mit einem hinreichend großen $k \in \mathbb{N}$. Das widerspricht der Annahme. \square

Der nächste Satz dient häufig als Werkzeug zur Berechnung von Grenzwerten.

3.3.2 Satz (Einschluss-Satz). Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei reelle Folgen mit

$$x_n \leq a_n \leq y_n \text{ für alle bis auf endlich viele } n \in \mathbb{N}.$$

Existieren zudem die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, und gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

so existiert auch der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und stimmt mit dem gemeinsamen Grenzwert von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ überein.

Beweis. Setze $a := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Zu $\epsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a|, |y_n - a| < \epsilon$ und $x_n \leq a_n \leq y_n$ für $n \geq N$. Für solche n folgt

$$-\epsilon < x_n - a \leq a_n - a \leq y_n - a < \epsilon,$$

und damit $|a_n - a| < \epsilon$. \square

3.3.3 Beispiel. Als einfaches Beispiel betrachte man die Folge $\left(\frac{1}{n^2-3n+3}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Man sieht leicht, dass

$$0 \leq \frac{1}{n^2-3n+3} \leq \frac{1}{n} \quad \text{für } n \geq 3.$$

Also folgt mit Satz 3.3.2, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2-3n+3} = 0$.

3.3.4 Beispiel.

- (i) Jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist Limes einer Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestehend aus rationalen Zahlen. Um das einzusehen, wähle gemäß Satz 2.8.3 für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $r_n \in \mathbb{Q}$, sodass $x < r_n < x + \frac{1}{n}$. Aus Satz 3.3.2 folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$. Genauso gibt es eine Folge irrationaler Zahlen größer x , die gegen x konvergiert.

*Arbeitet man mit größerer mathematischen Strenge, so muss man obiges Argument folgendermaßen präzisieren: Nach Satz 2.8.3 ist die Menge M_n der $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < x + \frac{1}{n}$ nicht leer. Nun sei ρ einfach eine nach dem *Auswahlaxiom* existierende Funktion von \mathbb{N} nach $\cup_{n \in \mathbb{N}} M_n$, sodass $\rho(n) \in M_n$, und setze $r_n = \rho(n)$.

- (ii) Mit einer etwas feineren Argumentation kann man $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sogar *streng monoton fallend* ($r_{n_1} > r_{n_2}$ wenn $n_1 < n_2$) wählen. Dazu definiert man r_n induktiv so, dass $x < r_n < \min(x + \frac{1}{n}, r_{n-1})$. Genauso kann man eine streng monoton wachsende Folge aus \mathbb{Q} konstruieren, die gegen x konvergiert.

*Lässt man auch hier mehr Strenge walten, so benötigt man zur Existenz der Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ den Rekursionsatz:

Für jedes $y > x$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\mathbb{Q} \cap (x, \min(y, x + \frac{1}{n}))$ nicht leer. Sei $\varrho : \mathbb{N} \times (x, +\infty) \rightarrow \mathbb{Q}$ eine Auswahlfunktion, sodass $\varrho(n, y) \in \mathbb{Q} \cap (x, \min(y, x + \frac{1}{n}))$. Sei $a := (1, r_1) \in \mathbb{N} \times ((x, +\infty) \cap \mathbb{Q}) =: A$ und $g : A \rightarrow A$ definiert durch $g(n, y) = (n+1, \varrho(n, y))$. Nach dem Rekursionsatz gibt es eine Funktion $\phi : \mathbb{N} \rightarrow A$ mit $\phi(1) = a$ und $\phi(n+1) = g(\phi(n))$. Ist für $n \in \mathbb{N}$ nun r_n die zweite Komponente von $\phi(n)$, so hat $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die geforderten Eigenschaften.

- (iii) Sei $F \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und $x := \sup F$. Gemäß der Definition des Supremums gilt $(x - \frac{1}{n}, x] \cap F \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wählt man für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $x_n \in (x - \frac{1}{n}, x] \cap F$, so erhält man eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, in F , die gegen $\sup F$ konvergiert. Man kann ähnlich wie oben $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sogar monoton wachsend wählen.

Entsprechendes gilt für nach unten beschränkte Mengen und deren Infimum.

Im nächsten Satz wollen wir zeigen, dass die algebraischen Operationen und die Betragsfunktion auf \mathbb{R} und \mathbb{C} mit dem Grenzwertbegriff verträglich sind.

3.3.5 Satz (Rechenregeln für Folgen). *Seien $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller oder komplexer Zahlen, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n =: z$, $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n =: w$. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$*

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z|$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{z}_n = \bar{z}$.
(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = z + w$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-z_n) = -z$.

- (iii) Ist $z = 0$, also $z_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, und ist $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge aus \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} , dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot u_n) = 0$.
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot w_n) = z \cdot w$.
- (v) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^k = z^k$.
- (vi) Falls $z \neq 0$ ist, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = \frac{1}{z}$.
- (vii) Ist $z_n \in \mathbb{R}$ und $z_n \geq 0$, so folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{z_n} = \sqrt[k]{z}$.

3.3.6 Bemerkung. Bis auf den letzten Punkt werden wir Satz 3.3.5 für komplexe Folgen beweisen. Fast derselbe Beweis funktioniert für reellwertige Folgen.

Man kann aber die Rechenregeln für reellwertige Folgen auch aus denen für komplexwertige Folgen herleiten, da – wie wir gleich zeigen wollen – eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} genau dann konvergiert, wenn $(x_n + i0)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{C} konvergiert. Dabei gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + i0) = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) + i0$. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reellwertige Folge, welche gegen ein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, so konvergiert $(x_n + i0)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $x + i0$, da ja $|(x_n + i0) - (x + i0)| = |x_n - x| \rightarrow 0$; vgl. Bemerkung 3.2.3. Konvergiert umgekehrt für eine reellwertige Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge $(x_n + i0)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{C} gegen $x + iy \in \mathbb{C}$, so folgt wegen

$$0 \leq \max(|x_n - x|, |0 - y|) \leq |(x_n + i0) - (x + iy)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

gemeinsam mit Satz 3.3.2, dass $x_n \rightarrow x$ und $|y| \rightarrow 0$, also $y = 0$.

Beweis. (Satz 3.3.5)

- (i) Zu $\epsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $|z_n - z| < \epsilon$ für $n \geq N$. Mit der Dreiecksungleichung nach unten erhält man

$$||z_n| - |z|| \leq |z_n - z| < \epsilon, \quad |\bar{z}_n - \bar{z}| = |z_n - z| < \epsilon.$$

Man kann $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z|$ auch als Spezialfall von Lemma 3.2.10 sehen: $|z_n| = d(z_n, 0) \rightarrow d(z, 0) = |z|$.

- (ii) Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle N so, dass $|z_n - z| < \frac{\epsilon}{2}$ und auch $|w_n - w| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Es gilt für solche n

$$|(z_n + w_n) - (z + w)| = |(z_n - z) + (w_n - w)| \leq |z_n - z| + |w_n - w| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Also ist $(z_n + w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und der Grenzwert ist $z + w$. Weiters gilt für N so groß, dass $|z_n - z| < \epsilon$, wenn nur $n \geq N$, auch

$$|(-z_n) - (-z)| = |-(z_n - z)| = |z_n - z| < \epsilon, \quad n \geq N.$$

Also konvergiert $(-z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $-z$.

- (iii) Ist $C > 0$ so, dass $|u_n| \leq C$, $n \in \mathbb{N}$, und ist $\epsilon > 0$, so gibt es wegen $z_n \rightarrow 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|z_n| < \frac{\epsilon}{C}$, $n \geq N$. Es folgt $|z_n \cdot u_n| < \epsilon$ für alle $n \geq N$, also $z_n \cdot u_n \rightarrow 0$.
- (iv) Ist N so groß, dass $|w_n - w| < \epsilon$ für $n \geq N$, so gilt

$$|zw_n - zw| = |z| \cdot |w_n - w| < |z| \cdot \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Gemäß (3.4) folgt daher zunächst $zw_n \rightarrow zw$.

Um $z_n w_n \rightarrow zw$ nachzuweisen, sei daran erinnert, dass gemäß Proposition 3.2.13 konvergente Folgen beschränkt sind. Nach (ii) konvergiert $(z_n - z)$ gegen Null, und mit (iii) daher auch $(z_n - z)w_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Der schon bewiesene Teil von (iv) gibt nun zusammen mit (ii)

$$z_n w_n = (z_n - z)w_n + zw_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 + zw.$$

- (v) Das folgt durch vollständige Induktion nach k aus (iv).
- (vi) Sei nun $z \neq 0$. Wegen (i) und Lemma 3.3.1 folgt aus $z_n \rightarrow z$ für hinreichend großes n , dass $|z_n| > \frac{|z|}{2}$. Es folgt die Abschätzung

$$\left| \frac{1}{z_n} - \frac{1}{z} \right| = \frac{|z - z_n|}{|z| \cdot |z_n|} \leq |z - z_n| \cdot \frac{2}{|z|^2},$$

und damit wird die Differenz $\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}$ für große n beliebig klein.

- (vii) Sei zunächst $z > 0$. Wegen (i) und Lemma 3.3.1 folgt aus $z_n \rightarrow z$ die Existenz von $N \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq N$ sicher $z_n > \frac{z}{2} > 0$ und $|z_n - z| < \epsilon$. Gemäß (2.9) gilt für solche n

$$\begin{aligned} |\sqrt[k]{z_n} - \sqrt[k]{z}| &= \frac{|z_n - z|}{|\sqrt[k]{z}^{k-1} + \sqrt[k]{z}^{k-2} \sqrt[k]{z_n} + \dots + \sqrt[k]{z_n}^{k-2} \sqrt[k]{z} + \sqrt[k]{z_n}^{k-1}|} \\ &\leq \frac{|z_n - z|}{|\sqrt[k]{\frac{z}{2}}^{k-1} + \sqrt[k]{\frac{z}{2}}^{k-2} \sqrt[k]{\frac{z}{2}} + \dots + \sqrt[k]{\frac{z}{2}}^{k-2} \sqrt[k]{\frac{z}{2}} + \sqrt[k]{\frac{z}{2}}^{k-1}|} < \frac{\epsilon}{k \sqrt[k]{\frac{z}{2}}^{k-1}}, \end{aligned}$$

da klarerweise auch $z > \frac{z}{2}$. Gemäß (3.4) folgt $\sqrt[k]{z_n} \rightarrow \sqrt[k]{z}$.

Ist $z = 0$, so sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Ist nun $N \in \mathbb{N}$ so, dass $z_n = |z_n - 0| < \epsilon^k$ für $n \geq N$, dann folgt aus der Monotonie der Wurzelfunktion (vgl. Bemerkung 2.9.7) $|\sqrt[k]{z_n} - 0| = \sqrt[k]{z_n} < \epsilon$. Also $\sqrt[k]{z_n} \rightarrow 0$. \square

3.3.7 Beispiel.

- (i) Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ folgt aus Satz 3.3.5, (vii), dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$. Zusammen mit Satz 3.3.5, (v), erhält man also, dass für alle $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0.$$

- (ii) Um für $x_n = \sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 + 2n}$ den Grenzwert zu berechnen, verwenden wir (2.9) und erhalten

$$\begin{aligned}\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 + 2n} &= \frac{(n^3 + 1) - (n^3 + 2n)}{\sqrt{n^3 + 1} + \sqrt{n^3 + 2n}} \\ &= \frac{1 - 2n}{\sqrt{n^3 + 1} + \sqrt{n^3 + 2n}} = \frac{\frac{1}{n} - 2}{\sqrt{n + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{n + \frac{2}{n}}}.\end{aligned}$$

Wegen

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{n + \frac{2}{n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ergibt Satz 3.3.2, dass der mittlere Ausdruck gegen Null konvergiert. Zusammen mit Satz 3.3.5, (iv), folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

- (iii) Die Folge $x_n = \sqrt[n]{n}$ konvergiert gegen 1. In der Tat gilt für die Folge $a_n := x_n - 1$, dass $a_n \geq 0$ und $(1 + a_n)^n = n$. Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt

$$n = (a_n + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n^k 1^{n-k} \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Damit folgt $a_n^2 \leq \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n} \rightarrow 0$. Gemäß Satz 3.3.5, (vii), gilt $a_n \rightarrow 0$ und daher $x_n \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$.

- (iv) Ist $q > 0$ fest, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[q]{q} = 1$. Betrachte zunächst den Fall $q \geq 1$. Dann gilt für $n \geq q$

$$1 \leq \sqrt[q]{q} \leq \sqrt[q]{n}.$$

Nach Satz 3.3.2 folgt $\sqrt[q]{q} \rightarrow 1$. Im Fall $0 < q < 1$ betrachte $\frac{1}{\sqrt[q]{q}} = \sqrt[q]{\frac{1}{q}}$ und verwende Satz 3.3.5.

- (v) Um für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und $k \in \mathbb{N}$ den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot z^n$ zu berechnen, sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|\sqrt[n]{n^k} \cdot z| < \frac{1+|z|}{2}$ (< 1) für alle $n \geq N$. Diese Wahl ist wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} \cdot |z| = |z|$ zusammen mit Lemma 3.3.1 möglich. Für $n \geq N$ gilt dann

$$0 \leq |n^k \cdot z^n| \leq \left(\frac{1+|z|}{2}\right)^n,$$

und somit $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot z^n = 0$.

3.4 Monotone Folgen

Bisher haben wir zwar gesehen, was aus der Konvergenz einer oder mehrerer Folgen folgt. Das Problem, ob eine gegebene Folge konvergiert oder nicht, haben wir jedoch nicht betrachtet. Die definierende Eigenschaft von \mathbb{R} , vollständig angeordnet zu sein, wird uns in \mathbb{R} die Existenz von Grenzwerten bestimmter Folgen liefern.

3.4.1 Definition. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} heißt *monoton wachsend*, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$$

Sie heißt *monoton fallend*, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$$

Eine Folge heißt *monoton*, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

3.4.2 Satz. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge. Dann konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Entsprechend konvergiert eine monoton fallende und nach unten beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Somit existiert $x := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wir zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Sei $\epsilon > 0$. Wegen $x - \epsilon < x$ kann $x - \epsilon$ keine obere Schranke der Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sein. Es gibt also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_N > x - \epsilon$. Wegen der Monotonie folgt auch $x_n > x - \epsilon$ für alle $n \geq N$. Da stets $x \geq x_n$ gilt, erhält man für $n \geq N$

$$0 \leq x - x_n < \epsilon,$$

und damit $|x_n - x| < \epsilon$.

Für monoton fallende Folgen schließt man in analoger Art und Weise. \square

3.4.3 Beispiel.

- (i) Betrachte die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Gemäß Beispiel 2.8.2 gilt $\inf\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Also folgt aus Satz 3.4.2, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Dieses Konvergenzverhalten haben wir übrigens auch schon in Beispiel 3.2.4, (ii), festgestellt.
- (ii) Die Bedingung in Satz 3.4.2 ist hinreichend für Konvergenz, aber nicht notwendig. Betrachte dazu die Folge $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (iii) Nach dem Rekursionssatz Satz 2.3.3 ist durch $a_1 = \sqrt{2}$ und $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ eine Folge in $[0, +\infty)$ wohldefiniert. Wir behaupten, dass dabei $a_n \leq 2$ und $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was wir mittels vollständiger Induktion zeigen wollen.

Für $n = 1$ gilt offenbar $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$ und $a_1 = \sqrt{2} \leq \sqrt{2 + \sqrt{2}} = a_2$.

Gelte nun $a_n \leq 2$ und $a_n \leq a_{n+1}$. Daraus folgt $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$ und auch $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}$.

Gemäß Satz 3.4.2 konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, welches sicher $a \geq a_1 = \sqrt{2} > 0$ erfüllt. Um a genau zu berechnen, sei bemerkt, dass auch (vgl. Satz 3.3.5)

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + a}.$$

Somit erfüllt a die Gleichung $a^2 - a - 2 = 0$. Also gilt $a = 2$ oder $a = -1$, wobei die zweite Möglichkeit wegen $a > 0$ ausgeschlossen werden kann.

(iv) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Offenbar gilt immer $1 < e_n < f_n$. Wir rechnen mit Hilfe der Version der Bernoullische Ungleichung aus Beispiel 2.3.14

$$\begin{aligned} \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n} \left(\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{n^2 + 2n + 1}\right)^{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\ &> \frac{n+1}{n} \left(1 - (n+1) \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{n} \frac{n}{n+1} = 1. \end{aligned}$$

Ähnlich gilt

$$\begin{aligned} \frac{f_n}{f_{n+1}} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n+1}}\right)^{n+2} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+2} \\ &= \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+2} \\ &> \frac{n}{n+1} \left(1 + (n+2) \frac{1}{n^2 + 2n}\right) = \frac{n}{n+1} \frac{n+1}{n} = 1. \end{aligned}$$

Also ist $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton fallend. Wegen $1 < e_n < f_n \leq f_1 = 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sind diese Folgen auch beschränkt, und somit konvergent, wobei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot e_n = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} e_n.$$

Den gemeinsamen Grenzwert dieser Folgen nennt man die *Eulersche Zahl* e .

Wir wollen nun Satz 3.4.2 dazu verwenden, um jeder beschränkten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus \mathbb{R} zwei Zahlen zuzuordnen, die als Verallgemeinerung eines Grenzwertes angesehen werden können. Dazu betrachten wir für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Zahlen

$$y_N := \inf\{x_n : n \geq N\} \quad \text{und} \quad z_N = \sup\{x_n : n \geq N\}.$$

Weil die Mengen $\{x_n : n \geq N\}$ beschränkt sind, sind y_N und z_N in \mathbb{R} wohldefiniert. Aus $\{x_n : n \geq N+1\} \subseteq \{x_n : n \geq N\}$ folgt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$y_N \leq y_{N+1} \leq z_{N+1} \leq z_N,$$

womit $(y_N)_{N \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und $(z_N)_{N \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Wegen der Beschränktheit von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt es ein $C \geq 0$ mit $|x_n| \leq C$ bzw. $-C \leq x_n \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus $-C \leq y_N \leq z_N \leq C$ für alle $N \in \mathbb{N}$ folgt. Gemäß Satz 3.4.2 konvergieren die Folgen $(y_N)_{N \in \mathbb{N}}$ und $(z_N)_{N \in \mathbb{N}}$, womit folgende Definition Sinn macht.

3.4.4 Definition. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge aus \mathbb{R} . Dann heißt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \inf\{x_n : n \geq N\}$$

Limes Inferior und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sup\{x_n : n \geq N\}$$

Limes Superior der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nach Satz 3.4.2 haben wir auch

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{N \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq N} x_n \quad \text{sowie} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{N \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq N} x_n.$$

Zunächst bringen wir ein Resultat über den Limes Inferior bzw. den Limes Superior, welches sich im Folgenden noch als sehr nützlich herausstellen wird.

3.4.5 Lemma. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge aus \mathbb{R} , so gibt es eine Teilfolge $(x_{m(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ konvergiert, und auch eine Teilfolge $(x_{n(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ konvergiert.

Beweis. Sei $N \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$. Wegen

$$\inf\{x_k : k \geq N\} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n < \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \epsilon$$

ist $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \epsilon$ keine untere Schranke von $\{x_k : k \geq N\}$. Also gibt es ein $l(N, \epsilon) \geq N$, sodass

$$\inf\{x_k : k \geq N\} \leq x_{l(N, \epsilon)} < \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \epsilon. \quad (3.7)$$

Wir definieren nun rekursiv eine Teilfolge⁶ $(x_{m(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, indem wir zunächst $m(1) = 1$ setzen. Ist $m(j) \in \mathbb{N}$ definiert, so gilt wegen (3.7) für $m(j+1) := l(m(j)+1, \frac{1}{j+1}) \geq m(j) + 1 > m(j)$

$$\inf\{x_k : k \geq m(j) + 1\} \leq x_{m(j+1)} < \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \frac{1}{j+1}.$$

Für $j \rightarrow \infty$ konvergieren die linke und die rechte Seite dieser Ungleichungskette gegen $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$. Nach dem Einschlusskriterium Satz 3.3.2 folgt die Konvergenz von $(x_{m(j)})_{j \in \mathbb{N}}$ gegen $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Der Beweis für den Limes Superior verläuft entsprechend. \square

⁶ Dass man so verfahren kann, wird durch den Rekursionssatz gewährleistet.

Wir wollen uns noch mit einigen weiteren Eigenschaften des Limes Inferior bzw. Limes Superior beschäftigen.

3.4.6 Fakta.

1. Aus $\inf_{n \geq N} x_n \leq \sup_{n \geq N} x_n$ für jedes $N \in \mathbb{N}$ folgt unmittelbar

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

2. Weiters folgt aus den Rechenregeln für Suprema und Infima sofort, dass $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ sowie $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$ für beschränkte Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \leq b_n$ ab einem Index $N \in \mathbb{N}$.

3. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, so folgt aus Lemma 3.4.5 und Satz 3.2.8, (iv), dass

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n. \quad (3.8)$$

Gilt umgekehrt $y := \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$, sodass $y - \epsilon < \inf_{n \geq N} x_n \leq y$ für alle $N \geq N_1$, und ein $N_2 \in \mathbb{N}$, sodass $y \leq \sup_{n \geq N} x_n < y + \epsilon$ für alle $N \geq N_2$. Für $N \geq \max(N_1, N_2)$ folgt

$$y - \epsilon < \inf_{n \geq N} x_n \leq x_N \leq \sup_{n \geq N} x_n < y + \epsilon,$$

und damit die Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen y ; also gilt (3.8).

4. Aus $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq N} x_n$ zusammen mit Satz 2.8.3 und Lemma 3.3.1 zeigt man, dass $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n < \xi$ genau dann, wenn es ein $q < \xi$ gibt, sodass $x_n \leq q$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$. Entsprechendes gilt für $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n > \xi$.
5. Ähnlich gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n > \xi$ genau dann, wenn es ein $q > \xi$ gibt, sodass $x_n \geq q$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Entsprechendes gilt für $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n < \xi$.

3.4.7 Bemerkung (*). In der Tat ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ jene eindeutige Zahl x , für die gilt: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$, die der Ungleichung $x_n \geq x + \epsilon$ genügen, wogegen für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $x_n \geq x - \epsilon$ gilt. Auch hier gilt entsprechendes für $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$.

3.5 Cauchy-Folgen

Um in allgemeinen metrischen Räumen Folgen auf Konvergenz zu untersuchen, führt man den Begriff der Cauchy-Folge ein.

3.5.1 Definition. Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus X heißt *Cauchy-Folge*, falls

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq N. \quad (3.9)$$

3.5.2 Bemerkung. Da es wegen Satz 2.8.3 zwischen jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ und der Zahl 0 ein $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ mit $0 < \varepsilon < \epsilon$ gibt, erhält man eine zu Definition 3.5.1 äquivalente Definition, wenn man in (3.9) statt $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \dots$ den Ausdruck $\forall \epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0 \dots$ schreibt. Aus demselben Grund lässt sich die Konvergenz einer Folge durch (3.3) charakterisieren, wenn man in eben dieser Gleichung $\forall \epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0 \dots$ anstatt $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \dots$ schreibt.

Ähnlich wie in Proposition 3.2.13 gilt:

3.5.3 Proposition. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Dann ist $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt.

Beweis. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < 1$ für $n, m \geq N$. Setzt man

$$C := 1 + \max\{d(x_1, x_N), \dots, d(x_{N-1}, x_N)\},$$

so gilt $d(x_n, x_N) \leq C$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. □

Aus dem nächsten Resultat erkennt man einen Zusammenhang zum Begriff der Konvergenz.

3.5.4 Proposition. Jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Aus der Definition der Konvergenz folgt die Existenz einer Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$, $n \geq N$. Hier bezeichnet x den Grenzwert der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, der zwar nach Voraussetzung existiert, über den sonst aber nichts bekannt zu sein braucht. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung für $n, m \geq N$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad \square$$

Also ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge. Würde nun umgekehrt jede Cauchy-Folge konvergieren, so könnten wir die Konvergenz einer Folge nachweisen, ohne ihren Grenzwert explizit in der Hand zu haben. Leider ist dies bei vielen metrischen Räumen nicht der Fall.

3.5.5 Definition. Ein metrischer Raum $\langle X, d \rangle$ heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge von Elementen aus X in X einen Grenzwert besitzt.

3.5.6 Beispiel. Die rationalen Zahlen sind nicht vollständig. Dazu betrachte man z.B. eine Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestehend aus rationalen Zahlen wie in Beispiel 3.3.4, die gegen $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ konvergiert.

Diese ist eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} und daher auch in \mathbb{Q} . Sie konvergiert aber nicht in \mathbb{Q} . Denn würde sie das tun, so würde sie in \mathbb{R} einerseits gegen $\sqrt{2}$ und andererseits gegen einen Grenzwert in \mathbb{Q} konvergieren. Das widerspricht der Eindeutigkeit des Grenzwertes in \mathbb{R} .

3.5.7 Lemma. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem metrischen Raum $\langle X, d \rangle$, die eine konvergente Teilfolge hat. Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

Beweis. Sei $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ die konvergente Teilfolge mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n(k)} = x$. Zu $\epsilon > 0$ wähle N_1 so groß, dass $d(x_n, x_m) < \epsilon$ für $n, m \geq N_1$. Wähle N_2 so groß, dass $d(x_{n(k)}, x) < \epsilon$ für $k \geq N_2$. Setze $N := \max\{N_1, N_2\}$. Wählt man nun $k \geq N$, so folgt $n(k) \geq k \geq N$, und man erhält für $n \geq N$

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \quad \square$$

Das wichtigste Beispiel für einen vollständig metrischen Raum sind die reellen Zahlen.

3.5.8 Satz (Cauchysches Konvergenzkriterium). *Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen. Dann existiert eine reelle Zahl x , sodass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert. Also ist \mathbb{R} versehen mit der euklidischen Metrik ein vollständig metrischer Raum.*

Beweis. Gemäß Proposition 3.5.3 ist die Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt. Nach Lemma 3.4.5 hat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Schließlich konvergiert gemäß Lemma 3.5.7 auch die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selbst. \square

3.5.9 Beispiel.

(i) Der metrische Raum $X = [0, 1]$ versehen mit der euklidischen Metrik ist auch vollständig, denn ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X , so ist sie das auch in \mathbb{R} . Wegen Satz 3.5.8 gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ für ein $x \in \mathbb{R}$.

Wegen $0 \leq x_n \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, folgt aus Lemma 3.3.1, (iii), dass auch $x \in X$. Also hat jede Cauchy-Folge in X einen Grenzwert in X .

(ii) Ist dagegen etwa $X = (0, 1]$ versehen mit der euklidischen Metrik, so ist $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X . Sie hat aber in X keinen Grenzwert, denn sonst würde $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ auch in \mathbb{R} gegen diesen Grenzwert $x \in X \subseteq \mathbb{R}$ und andererseits gegen 0 streben. Wegen $0 \notin X$ muss $x \neq 0$ im Widerspruch zu Satz 3.2.8, (i).

3.6 Konvergenz in weiteren metrischen Räumen

Wir betrachten die Menge \mathbb{R}^p ($p \in \mathbb{N}$) und versehen diese mit den drei schon vorgestellten Metriken d_1, d_2, d_∞ . Wie bereits bemerkt, unterscheiden sich diese Metriken voneinander. Der Unterschied ist aber nicht allzu groß. In der Tat werden wir sehen, dass wenn eine Folge bezüglich einer der drei Metriken konvergiert, diese dann auch bezüglich der anderen zwei konvergiert⁷.

Der Grund dafür liegt in der Ungleichungskette

$$\max_{k=1, \dots, p} |x_k| \leq \left(\sum_{k=1}^p |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^p |x_k| \leq p \cdot \max_{k=1, \dots, p} |x_k|. \quad (3.10)$$

Das zweite „ \leq “ sieht man durch quadrieren. Das erste und dritte ist klar.

⁷Es sei aber hier auch darauf hingewiesen, dass es auf ein und derselben Menge Metriken d, \tilde{d} geben kann, sodass eine gewisse Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in dieser Menge bezüglich d konvergiert, aber bezüglich \tilde{d} divergiert.

3.6.1 Proposition. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,p}) \in \mathbb{R}^p$, und $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. Dann impliziert $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ bezüglich einer der Metriken d_1, d_2, d_∞ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ bezüglich der anderen zwei Metriken aus d_1, d_2, d_∞ . Die Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x bezüglich einer und daher aller dieser Metriken ist wiederum äquivalent zur komponentenweisen Konvergenz⁸

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,k} = x_k \quad \text{für alle } k = 1, \dots, p. \quad (3.11)$$

Insbesondere konvergiert eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen gegen ein $z \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn⁹

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re} z \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im} z.$$

Beweis. Aus Ungleichung (3.10) schließen wir auf

$$d_\infty(x_n, x) \leq d_2(x_n, x) \leq d_1(x_n, x) \leq p \cdot d_\infty(x_n, x).$$

Das Einschlusskriterium Satz 3.3.2 liefert nun sofort, dass, wenn eine der Folgen $(d_1(x_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$, $(d_2(x_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(d_\infty(x_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, es dann die beiden anderen Folgen auch sind. Aus Bemerkung 3.2.3 folgt, dass die Konvergenzbegriffe bzgl. der drei Metriken übereinstimmen.

Sei nun $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ bezüglich einer dieser Metriken und daher insbesondere bezüglich d_∞ . Für $k = 1, \dots, p$ gilt

$$0 \leq |x_{n,k} - x_k| \leq \max_{j=1, \dots, p} |x_{n,j} - x_j| = d_\infty(x_n, x).$$

Wieder nach dem Einschlusskriterium Satz 3.3.2 zusammen mit Bemerkung 3.2.3 folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,k} = x_k$.

Sei umgekehrt (3.11) vorausgesetzt und $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle N_1, \dots, N_p , sodass für $k = 1, \dots, p$ folgt $|x_{n,k} - x_k| < \epsilon$, $n \geq N_k$. Setzt man $N := \max\{N_1, \dots, N_p\}$, so folgt

$$d_\infty(x_n, x) = \max_{k=1, \dots, p} |x_{n,k} - x_k| < \epsilon.$$

Also gilt $x_n \rightarrow x$ bezüglich d_∞ . □

3.6.2 Beispiel. Man betrachte die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im \mathbb{R}^3 gegeben durch

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \left((-1)^n, 2 - 3n, \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \right).$$

Wegen $|\frac{1}{n} \cdot (-1)^n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ und $|\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}| \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0$ konvergieren die erste und die dritte Komponente gegen 0. Die zweite konvergiert wegen $\frac{1}{n}(2 - 3n) = \frac{2}{n} - 3$ gegen -3 . Also konvergiert unsere Folge bezüglich d_1, d_2, d_∞ gegen $(0, -3, 0)$.

⁸ Diese Konvergenz versteht sich in \mathbb{R} bezüglich der euklidischen Metrik.

⁹ Vergleiche Bemerkung 3.3.6.

3.6.3 Korollar. Der Raum \mathbb{R}^p versehen mit einer der Metriken d_1, d_2, d_∞ ist vollständig. Insbesondere sind die komplexen Zahlen vollständig.

Beweis. Zunächst sei bemerkt, dass wenn eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten des \mathbb{R}^p eine Cauchy-Folge bezüglich einer der Metriken d_1, d_2, d_∞ ist, so ist sie das wegen

$$d_\infty(x_n, x_m) \leq d_2(x_n, x_m) \leq d_1(x_n, x_m) \leq p \cdot d_\infty(x_n, x_m)$$

auch bezüglich der beiden anderen Metriken.

Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von Punkten des \mathbb{R}^p (bzgl. d_1, d_2, d_∞), wobei $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,p})$. Dann gibt es zu jedem vorgegebenen $\epsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit $d_\infty(x_n, x_m) < \epsilon$ für $n, m \geq N$. Es folgt für jedes $k \in \{1, \dots, p\}$

$$|x_{n,k} - x_{m,k}| \leq d_\infty(x_n, x_m) < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq N,$$

wodurch jede der Folgen $(x_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$, $k = 1, \dots, p$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen ist. Daher existieren $y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{i,k} = y_k, \quad k = 1, \dots, p.$$

Wegen Proposition 3.6.1 folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ mit $y = (y_1, \dots, y_p)$. □

3.6.4 Bemerkung. Die in Satz 3.3.5 hergeleiteten Rechenregeln gelten zum Teil auch in \mathbb{R}^p , wenn \mathbb{R}^p mit der euklidischen Metrik und mit den Verknüpfungen „+“ und „skalares Multiplizieren“ wie aus der Linearen Algebra bekannt versehen wird. Sind also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in \mathbb{R}^p , die gegen x bzw. y konvergieren, und ist $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen ein $\lambda \in \mathbb{R}$ konvergente Folge in \mathbb{R} , so gilt

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n x_n = \lambda x$.

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$ in \mathbb{R} .

In (iii) steht (\dots) für das Skalarprodukt (3.2). Das folgt aus Proposition 3.6.1, da man die jeweiligen Konvergenzen auf die Komponenten von \mathbb{R}^p zurückführen kann. Eine andere Möglichkeit, diese Behauptungen zu beweisen, besteht darin, den euklidischen Abstand $d_2(x, y)$ zweier Punkte $x, y \in \mathbb{R}^p$ als $\|x - y\|_2$ zu schreiben, wobei $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^p |x_k|^2}$, und im Beweis von Satz 3.3.5 den Betrag durch $\|\cdot\|$ ersetzt. Siehe Bemerkung 3.1.6 sowie Lemma 9.1.2.

Dass es auf ein und derselben Menge zwei Metriken geben kann, sodass die Konvergenz einer Folge bezüglich der einen Metrik nicht die Konvergenz bezüglich der anderen bedingt, zeigt folgendes Beispiel.

3.6.5 Beispiel. Man betrachte \mathbb{R} einerseits versehen mit der Euklidischen Metrik d_2 , also die von $|\cdot|$ induzierte Metrik, und andererseits mit der diskreten Metrik d aus Beispiel 3.1.5, (iv).

Außerdem betrachte man die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$, welche bezüglich d_2 bekannterweise gegen 0 konvergiert. Bezüglich d tut sie das nicht, da immer $d(0, \frac{1}{n}) = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Man zeigt unschwer, dass eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich d genau dann gegen x konvergiert, wenn $x_n = x$ für alle $n \geq N$ mit einem gewissen $N \in \mathbb{N}$.

3.6.6 Beispiel (*). Sei p eine feste Primzahl. Die Folge $(p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist bezüglich der Metrik $d_{(p)}$ auf \mathbb{Z} gegen 0 konvergent, bezüglich der euklidischen Metrik d_2 auf \mathbb{Z} jedoch divergent. Um das einzusehen, sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wählt man $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{p^N} < \epsilon$, so gilt für alle $n \geq N$

$$d_{(p)}(p^n, 0) = \frac{1}{p^n} \leq \frac{1}{p^N} < \epsilon.$$

Angenommen es existiere $x \in \mathbb{Z}$, sodass $p^n \rightarrow x$ bezüglich d_2 . Wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $d_2(p^n, x) < 1$, $n \geq N$. Dann folgt mit der Bernoullischen Ungleichung

$$1 + n(p - 1) \leq p^n = d_2(p^n, 0) \leq d_2(p^n, x) + d_2(x, 0) < 1 + |x| \quad \text{für alle } n \geq N,$$

und weiter, dass $n(p - 1) \leq |x|$ für alle $n \geq N$, was der Tatsache widerspricht, dass \mathbb{R} archimedisch angeordnet ist.

Tatsächlich sind in $\langle \mathbb{Z}, d_2 \rangle$ nur die ab einem Index konstanten Folgen konvergent, da konvergente Folgen auch Cauchy-Folgen sind, und damit insbesondere ab einem gewissen Index der Abstand zweier Folgenglieder kleiner als 1 ist. Zwei verschiedene ganze Zahlen haben aber sicher einen Abstand von mindestens 1.

3.7 Konvergenz gegen unendlich

Die Folge $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, als Folge in \mathbb{R} ist nicht konvergent. Sie ist ja nicht einmal beschränkt. Trotzdem zeigt sie ein doch recht determiniertes Verhalten. Aus dem Bauch heraus würde man sagen, dass sie „gegen unendlich“ strebt. Wir wollen dieses Verhalten von Folgen exaktifizieren.

3.7.1 Definition. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus \mathbb{R} heißt konvergent gegen $+\infty$, falls

$$\forall M > 0 \exists N \in \mathbb{N} : x_n > M \quad \text{für alle } n \geq N. \quad (3.12)$$

Entsprechend sagen wir, dass eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus \mathbb{R} gegen $-\infty$ strebt, wenn

$$\forall M < 0 \exists N \in \mathbb{N} : x_n < M \quad \text{für alle } n \geq N. \quad (3.13)$$

Folgen, die im obigen Sinne gegen $+\infty$ oder $-\infty$ streben, heißen auch *bestimmt divergent*. Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ dafür.

3.7.2 Bemerkung. Unmittelbar aus (3.12) bzw. (3.13) und Lemma 3.3.1, (i), erkennt man, dass sich für eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und ein $x \in \mathbb{R}$ die Konvergenzen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ gegenseitig ausschließen. Genauso kann $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ nicht gleichzeitig stattfinden. Ebenso schließen sich $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ gegenseitig aus.

Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} und $x \in \mathbb{R}$ oder $x = \pm\infty$, so kann man $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ einheitlich folgendermaßen beschreiben:

$$(\forall \xi \in \mathbb{R}, \xi < x \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow x_n > \xi) \wedge \\ (\forall \eta \in \mathbb{R}, \eta > x \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow x_n < \eta).$$

Für die Konvergenzbegriffe aus Definition 3.7.1 gelten ähnliche Regeln wie bei der Konvergenz gegen Zahlen.

3.7.3 Satz. Sind $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in \mathbb{R} , wobei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, so treffen folgende Aussagen zu.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\infty$.

(ii) Ist $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach unten beschränkt, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty.$$

(iii) Ist $y_n \geq C$ für alle $n \geq k$ mit einem $C > 0$ und einem $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = +\infty.$$

(iv) Ist $x_n \leq y_n$ für alle $n \geq k$ mit einem $k \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty.$$

(v) Sind alle bis auf endlich viele, also alle ab einem Index $k \in \mathbb{N}$, y_n positiv (negativ), so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ ($-\infty$) äquivalent zu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = 0$.

(vi) Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend (fallend). Ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, so ist diese Folge konvergent gegen eine reelle Zahl. Ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt, so konvergiert sie gegen $+\infty$ ($-\infty$).

Analoge Aussagen gelten im Fall $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Beweis.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\infty$ folgt unmittelbar aus $x_n > M \Leftrightarrow -x_n < -M$.

(ii) Sei C eine untere Schranke von $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Zu $M > 0$ wähle N so groß, dass $x_n > M - C$ für alle $n \geq N$. Dann folgt für $n \geq \max(N, k)$

$$x_n + y_n > (M - C) + C = M,$$

also $(x_n + y_n) \rightarrow +\infty$.

(iii) Wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $N \geq k$ und $x_n > \frac{M}{C}$ für alle $n \geq N$. Dann folgt für $n \geq N$ auch

$$x_n y_n > \frac{M}{C} \cdot C = M,$$

und infolge $x_n y_n \rightarrow +\infty$.

(iv) Aus $x_n > M$ und $x_n \leq y_n$ folgt sicherlich auch $y_n > M$.

(v) Seien alle y_n mit $n \geq k$ positiv. Wir nehmen zuerst an, dass $\frac{1}{y_n} \rightarrow 0$. Zu vorgegebenem M wähle $N \geq k$ so groß, dass für $n \geq N$ gilt $\frac{1}{y_n} < \frac{1}{M}$. Es folgt $y_n > M$.

Gilt umgekehrt $y_n \rightarrow +\infty$, und ist $\epsilon > 0$, so wähle N so groß, dass für $n \geq N$ gilt $y_n > \frac{1}{\epsilon}$. Daraus folgt $|\frac{1}{y_n}| = \frac{1}{y_n} < \epsilon$. Die Äquivalenz im Falle $y_n < 0$ für $n \geq k$ sieht man genauso.

(vi) Ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, so folgt die Aussage aus Satz 3.4.2. Im Fall der Unbeschränktheit gibt es eben wegen dieser zu jedem $M > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $y_N > M$. Wegen der Monotonie folgt dann auch $y_n > M$ für alle $n \geq N$. \square

3.7.4 Beispiel. Sei $q \in \mathbb{R}$ und betrachte die Folge q^n , $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } q > 1, \\ 1, & \text{falls } q = 1, \\ 0, & \text{falls } -1 < q < 1, \\ \nexists, & \text{falls } q \leq -1. \end{cases}$$

Dabei haben wir den Fall $0 \leq q < 1$ schon in Beispiel 3.2.9 behandelt. Der Fall $q = 1$ ist klar. Für $q > 1$ folgt aus $0 < \frac{1}{q} < 1$, dass $\frac{1}{q^n} \rightarrow 0$. Daraus erhält man mit Satz 3.7.3, dass $q^n \rightarrow +\infty$. Ist $-1 < q < 0$, so beachte $|q^n| = |q|^n \rightarrow 0$. Ist $q \leq -1$, so hat man $q^n \geq 1$ für n gerade und $q^n \leq -1$ für n ungerade. Insbesondere ist der Abstand zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder ≥ 2 , und wir sehen, dass q^n keine Cauchy-Folge und erst recht keine konvergente Folge sein kann. Konvergenz gegen $+\infty$ oder $-\infty$ kann aber auch nicht stattfinden, denn dann müssten ja die Folgenglieder insbesondere ab einem Index alle das gleiche Vorzeichen haben.

3.7.5 Beispiel. Seien p, q aus $\mathbb{R}[x]$, $p, q \neq 0$, also zwei Polynome mit reellen Koeffizienten ungleich dem Nullpolynom. Betrachte die Folge

$$x_n := \frac{p(n)}{q(n)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $q(n) \neq 0$. Da Polynome nur endlich viele Nullstellen haben, ist x_n sicher für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ mit einem gewissen $n_0 \in \mathbb{N}$ definiert. Schreiben wir p und q als $p(x) = a_m x^m + \dots + a_0$ und $q(x) = b_k x^k + \dots + b_0$ mit $a_m, b_k \neq 0$ an, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } m < k, \\ \frac{a_m}{b_k}, & \text{falls } m = k, \\ +\infty, & \text{falls } m > k, \frac{a_m}{b_k} > 0, \\ -\infty, & \text{falls } m > k, \frac{a_m}{b_k} < 0. \end{cases}$$

Um dieses einzusehen, betrachte zuerst den Fall, dass $m \leq k$, und schreibe

$$x_n = \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_0} = \frac{a_m n^{m-k} + a_{m-1} n^{m-1-k} + \dots + a_0 n^{-k}}{b_k + b_{k-1} n^{-1} + \dots + b_0 n^{-k}}.$$

Dann konvergiert der Nenner dieses Bruches gegen $b_k \neq 0$. Ist $m < k$, so konvergiert der Zähler gegen 0, insgesamt also $x_n \rightarrow 0$. Ist $m = k$, so strebt der Zähler gegen a_m und wieder folgt unsere Behauptung.

Ist $m > k$, so schreiben wir x_n als

$$n^{m-k} \frac{a_m + a_{m-1} n^{-1} + \dots + a_0 n^{-m}}{b_k + b_{k-1} n^{-1} + \dots + b_0 n^{-k}}.$$

Also gilt $x_n = n^{m-k} y_n$, wobei $y_n \rightarrow \frac{a_m}{b_k}$. Nach Lemma 3.3.1 hat y_n für hinreichend große Indizes dasselbe Vorzeichen wie $\frac{a_m}{b_k}$. Wegen $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$ folgt aus Satz 3.7.3 das behauptete Konvergenzverhalten für x_n .

3.7.6 Beispiel. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus \mathbb{R} , die nicht nach oben beschränkt ist, es also kein reelles $C > 0$ gibt mit $x_n \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so hat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, die $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n(k)} = +\infty$ erfüllt.

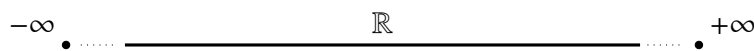
Dazu wählt man $n(1) \in \mathbb{N}$ so, dass $x_{n(1)} \geq 1$, und definiert $n(k+1) \in \mathbb{N}$ rekursiv so, dass $n(k+1) > n(k)$ und $x_{n(k+1)} \geq k+1$. Aus Satz 3.7.3, (iv), folgt dann wegen $x_{n(k)} \geq k$, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n(k)} = +\infty$.

3.8 Konvergenz gegen $\pm\infty$ als metrische Konvergenz*

Am Ende dieses Kapitels wollen wir eine Möglichkeit vorstellen, wie man die eingeführte Konvergenz gegen $\pm\infty$ als herkömmliche Konvergenz in einem metrischen Raum auffassen kann.

Dazu müssen wir $\pm\infty$ als Elemente unseres Raumes anerkennen, denn eine Folge von Elementen eines Raumes X kann gegen ein Element von X konvergieren, aber nicht gegen irgendetwas. Betrachte also die Menge $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, wobei $+\infty$ und $-\infty$ zwei verschiedene formale Elemente sind, die nicht in \mathbb{R} liegen. Wir versehen die Menge $\overline{\mathbb{R}}$ in naheliegender Weise mit der Relation

$$x \leq y \Leftrightarrow (x \leq y \text{ falls } x, y \in \mathbb{R}) \text{ oder } x = -\infty \text{ oder } y = +\infty.$$

Abbildung 3.1: Veranschaulichung von $\overline{\mathbb{R}}$

Diese Relation ist offensichtlicherweise eine Totalordnung, welche die Supremumseigenschaft hat.

3.8.1 Lemma. Die Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$,

$$\phi(x) = \frac{x}{1 + |x|},$$

bildet \mathbb{R} bijektiv und streng monoton wachsend auf das offene Intervall $(-1, 1)$ ab. Für ihre Inverse $\phi^{-1} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\phi^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}.$$

Beweis. Als erstes wollen wir festhalten, dass für $x \in \mathbb{R}$ stets $|\phi(x)| < 1$, also $\phi(x) \in (-1, 1)$ gilt, und dass $\phi(x)$ das gleiche Vorzeichen wie x hat.

Ist $\psi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\psi(y) = \frac{y}{1 - |y|}$, so folgt

$$\phi \circ \psi(y) = \frac{\frac{y}{1 - |y|}}{1 + \frac{|y|}{1 - |y|}} = \frac{y}{(1 - |y|) + |y|} = y,$$

und

$$\psi \circ \phi(x) = \frac{\frac{x}{1 + |x|}}{1 - \frac{|x|}{1 + |x|}} = \frac{x}{(1 + |x|) - |x|} = x.$$

Somit ist nach Satz 1.2.19 die Abbildung ϕ bijektiv, und ψ ist die Inverse von ϕ .

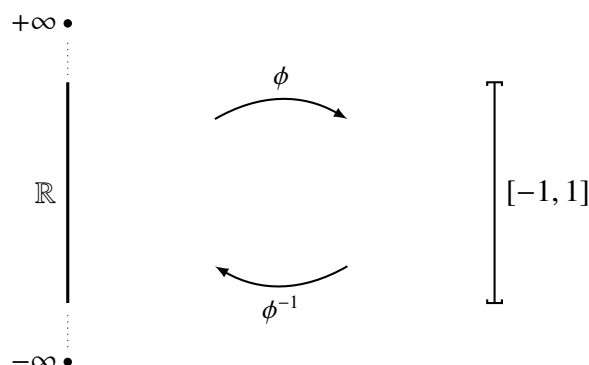
Für die behaupteten Monotonieeigenschaft seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$ oder $\operatorname{sgn}(x_1) = \operatorname{sgn}(x_2)$. Wegen $x_1|x_2| = |x_1|x_2|$ gilt dann

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1(1 + |x_2|) = x_1 + x_1|x_2| < x_2 + x_2|x_1| = x_2(1 + |x_1|) \Leftrightarrow \phi(x_1) < \phi(x_2).$$

Da x und $\phi(x)$ dasselbe Vorzeichen haben, folgt für den verbleibenden Fall $x_1, x_2 \neq 0$, $\operatorname{sgn}(x_1) = -\operatorname{sgn}(x_2)$, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_1 < x_2$, dass sowohl $x_1 < 0 < x_2$ als auch $\phi(x_1) < 0 < \phi(x_2)$. \square

Nun setzen wir ϕ fort zu einer Abbildung von $\overline{\mathbb{R}}$ nach $[-1, 1]$. Diese Fortsetzung, welche wir ebenfalls ϕ nennen wollen, sei definiert durch

$$\phi(x) := \begin{cases} \frac{x}{1 + |x|}, & \text{falls } x \in \mathbb{R}, \\ 1, & \text{falls } x = +\infty, \\ -1, & \text{falls } x = -\infty. \end{cases}$$

Abbildung 3.2: Die Abbildung ϕ

Offensichtlich ist diese Fortsetzung auch bijektiv und streng monoton wachsend, wobei

$$\phi^{-1}(y) := \begin{cases} \frac{y}{1-|y|}, & \text{falls } -1 < y < 1, \\ +\infty, & \text{falls } y = 1, \\ -\infty, & \text{falls } y = -1. \end{cases}$$

Wir definieren nun eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$, indem wir die euklidische Metrik mittels ϕ nach $\overline{\mathbb{R}}$ übertragen.

3.8.2 Lemma. Die Abbildung $d : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(x, y) := |\phi(x) - \phi(y)|,$$

ist eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$.

Dabei konvergiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ gegen ein $x \in \overline{\mathbb{R}}$ bezüglich d genau dann, wenn die Folge $(\phi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in $[-1, 1]$ gegen $\phi(x) \in [-1, 1]$ bezüglich der euklidischen Metrik d_2 konvergiert.

Beweis. Zunächst sei bemerkt, dass die Abbildung $(a, b) \mapsto |a - b|$ eine Metrik und ϕ injektiv ist. Somit gilt $d(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)| \geq 0$, wobei $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $\phi(x) = \phi(y)$ bzw. genau dann, wenn $x = y$. Offensichtlich gilt auch $d(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)| = |\phi(y) - \phi(x)| = d(y, x)$ und auch

$$d(x, z) = |\phi(x) - \phi(z)| \leq |\phi(x) - \phi(y)| + |\phi(y) - \phi(z)| = d(x, y) + d(y, z).$$

Also ist d eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$; vgl. Definition 3.1.1. Die Aussage über die Konvergenz folgt wegen

$$x_n \rightarrow x \text{ (bzgl. } d) \Leftrightarrow d(x_n, x) = d_2(\phi(x_n)) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \phi(x_n) \rightarrow \phi(x) \text{ (bzgl. } d_2)$$

leicht aus Bemerkung 3.2.3. □

Wir wissen jetzt also, was es bedeutet, dass eine Folge reeller Zahlen in $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ konvergiert. Haben wir unser Modell nun richtig in dem Sinne gebaut, dass dieser Begriff von Konvergenz gegen $\pm\infty$ tatsächlich mit dem eingangs eingeführten Begriff von Konvergenz gegen $\pm\infty$ übereinstimmt?

3.8.3 Proposition. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ im Sinne einer Konvergenz im metrischen Raum $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ genau dann, wenn (3.12) gilt. Analog gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ in $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ genau dann, wenn (3.13) gilt.

Zudem bleibt unser alter Konvergenzbegriff reeller Zahlen in dem Sinne erhalten, dass für ein $x \in \mathbb{R}$ genau dann $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ in $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ gilt, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ in \mathbb{R} bezüglich der euklidischen Metrik d_2 .

Beweis. Gilt $x_n \rightarrow +\infty$ in $(\overline{\mathbb{R}}, d)$, und ist $M > 0$, so gibt es zu $\epsilon := 1 - \phi(M) > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$1 - \phi(x_n) = |\phi(x_n) - 1| = d(x_n, +\infty) < \epsilon = 1 - \phi(M) \text{ für alle } n \geq N.$$

Aus dem Monotonieverhalten von ϕ folgt $x_n > M$ für alle $n \geq N$.

Gilt umgekehrt (3.12), und ist $0 < \epsilon < 1$, so gibt es zu $M := \phi^{-1}(1 - \epsilon) > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n > M$ für $n \geq N$. Daraus folgt

$$d(x_n, +\infty) = |\phi(x_n) - 1| = 1 - \phi(x_n) < 1 - \phi(M) = \epsilon \text{ für alle } n \geq N.$$

Also ist $x_n \rightarrow +\infty$ in $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ äquivalent zu (3.12). Die Behauptung für $x_n \rightarrow -\infty$ sieht man genauso.

Gilt $x_n \rightarrow x$ in \mathbb{R} bezüglich d_2 für ein $x \in \mathbb{R}$, so folgt aus unseren Rechenregeln für Folgen, Satz 3.3.5, dass auch $\phi(x_n) = \frac{x_n}{1+|x_n|} \rightarrow \frac{x}{1+|x|} = \phi(x)$. Aus Lemma 3.8.2 erhalten wir dann $x_n \rightarrow x$ in $(\overline{\mathbb{R}}, d)$.

Gilt umgekehrt $x_n \rightarrow x$ in $(\overline{\mathbb{R}}, d)$, also $\phi(x_n) \rightarrow \phi(x)$ in \mathbb{R} (vgl. Lemma 3.8.2), so schließen wir wegen $\phi(x) \in (-1, 1)$ wieder mit Satz 3.3.5 auf

$$x_n = \phi^{-1}(\phi(x_n)) = \frac{\phi(x_n)}{1 - |\phi(x_n)|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)}{1 - |\phi(x)|} = x$$

in \mathbb{R} bezüglich der euklidischen Metrik d_2 . □

Wir haben nun unser Zahlensystem etwas erweitert, um den Begriff des „Strebens gegen unendlich“ als Konvergenz in metrischen Räumen interpretieren zu können. Dabei sind jedoch unsere algebraischen Operationen $+$ und \cdot verloren gegangen. Gemäß Satz 3.7.3 macht es zwar Sinn, für $x, y \in \mathbb{R}$, $y > 0$,

$$x + (+\infty) = +\infty, \quad -(+\infty) = -\infty, \quad y \cdot (+\infty) = +\infty, \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0, \quad \text{usw.}$$

zu setzen, auf dass die Operationen mit den Grenzwerten verträglich bleiben, $(+\infty) + (-\infty)$ und $0 \cdot (+\infty)$ aber, lassen sich nicht so definieren, dass Grenzwertregeln wie in Satz 3.3.5 gültig sind.

Als einfaches Beispiel betrachte man $x_n = 2n$, $y_n = n$. Offenbar gilt $x_n, y_n \rightarrow +\infty$. Dabei würde das Grenzwertverhalten $x_n - y_n = n \rightarrow +\infty$ auf $(+\infty) - (+\infty) = +\infty$, $y_n - x_n = -n \rightarrow -\infty$ dagegen auf $(+\infty) - (+\infty) = -\infty$ deuten.

3.9 Unendliche Reihen

Wir sind schon einmal einer Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ begegnet, die von der speziellen Gestalt $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ mit gewissen Zahlen a_k war. In Beispiel 3.2.9 haben wir nämlich die Folge $S_n = 1 + z + \dots + z^n$ mit $|z| < 1$ betrachtet. Dort haben wir gezeigt, dass diese Folge gegen den Grenzwert $\frac{1}{1-z}$ konvergiert. Das heißt also, dass für große Werte von n die Summe $\sum_{k=0}^n z^k$ den Wert $\frac{1}{1-z}$ beliebig gut approximiert. Es ist also naheliegend, dafür

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

zu schreiben.

3.9.1 Definition. Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen¹⁰. Wir bezeichnen für $n \in \mathbb{N}$ mit S_n die n -te *Partialsomme*

$$S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

und bezeichnen die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch als *Reihe* mit den Summanden a_k .

Hat die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Grenzwert, so heißen wir die Reihe *konvergent*. In diesem Fall nennen wir ihren Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ die *Summe der Reihe* und schreiben

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Falls der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ nicht existiert, so heißt die Reihe *divergent*.

Sind die a_k alle reell und gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ im Sinne von Definition 3.7.1, so heißt die Reihe *konvergent gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$* , und man schreibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty.$$

Man nennt die Reihe dann auch *bestimmt divergent gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$* .

Um die Notation zu vereinfachen, benützt man die Schreibweise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auch für die Reihe $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selbst, und nennt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent bzw. divergent.

Ausdrücke, wie etwa $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ haben eine sinngemäß analoge Interpretation durch Grenzwerte von Partialsommen.

3.9.2 Bemerkung (*). Eine unendliche Reihe ist per definitionem die Folge ihrer Partialsommen. Somit ist die Theorie der Reihen ein Spezialfall jener der Folgen in \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} . Umgekehrt kann man auch jede Folge reeller oder komplexer Zahlen als Folge der Partialsommen einer Reihe auffassen. Ist nämlich $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ irgendeine Folge, und setzt man

$$a_1 := c_1, \quad a_2 := c_2 - c_1, \quad a_3 := c_3 - c_2, \quad \dots, \quad a_k := c_k - c_{k-1}, \quad \dots,$$

so gilt $c_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

¹⁰ Allgemeiner kann $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auch eine Folge von Elementen eines metrischen Raumes wie etwa der \mathbb{R}^p sein, auf dem man eine Verknüpfung $+$ hat.

Aufgrund der Definition einer unendlichen Reihe als Limes ihrer Partialsummen können wir Aussagen über Folgen sofort auf Reihen übertragen.

3.9.3 Korollar. Sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergent, wobei

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right).$$

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und λ eine feste reelle oder komplexe Zahl, so sind auch $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k$ konvergent, wobei

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k = \overline{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}.$$

Beweis. Für die entsprechenden Partialsummen

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^n b_k, \quad U_n = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k), \quad V_n = \sum_{k=1}^n (\lambda a_k), \quad W_n = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k$$

gilt $S_n + T_n = U_n$, $V_n = \lambda S_n$ und $W_n = \bar{S}_n$. Also folgen die Rechenregeln aus den entsprechenden Regeln für Folgen; vgl. Satz 3.3.5. \square

Für endliche Summen gelten Rechengesetze wie Kommutativität, Distributivität und Assoziativität. Diese Rechengesetze lassen sich aber nicht ohne weiteres auf unendlichen Reihen übertragen; vgl. Beispiel 5.4.1.

3.9.4 Fakta.

1. Man kann in einer Reihe endlich viele Reihenglieder abändern, ohne das Konvergenzverhalten zu stören. In der Tat unterscheidet sich die neue Folge der Partialsummen ab einem gewissen Index von der alten nur um eine additive Konstante. Die Summe der Reihen unterscheidet sich dann auch um diese additive Konstante.

Ähnlich konvergiert für ein $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+m}$, wobei man im Falle $m < 0$ die Summanden $a_{m+1}, \dots, a_{-1}, a_0$ alle Null setzt. In der Tat gilt für $m > 0$ immer $\sum_{k=1}^n a_{k+m} = \sum_{k=1}^{n+m} a_k - (\sum_{k=1}^m a_k)$ und damit für $n \rightarrow \infty$, dass mit der rechten Seite auch die linke konvergiert. Für $m < 0$ gilt $\sum_{k=1}^n a_{k+m} = \sum_{k=1}^{n+m} a_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > -m$.

2. Hat man eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gegeben, so dürfen beliebig Klammern gesetzt werden, ohne das Konvergenzverhalten der Reihe zu verändern. Exakt formuliert bedeutet das, dass für jede streng monoton wachsende Folge $(k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{n=1}^{\infty} A_n,$$

gilt, wobei $A_1 = a_1 + \dots + a_{k(1)}$ und $A_n = a_{k(n-1)+1} + \dots + a_{k(n)}$ für $n \geq 2$.

Dieser Sachverhalt folgt aus der einfachen Beobachtung, dass die Folge der Partialsummen unserer neuen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ genau die Teilfolge $(S_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ der Folge $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen von $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ ist; vgl. Satz 3.2.8, (iv).

Die Umkehrung gilt hier nicht. Es kann nämlich vorkommen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ konvergiert, aber $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht. Man betrachte nur die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ und klammere immer zwei aufeinanderfolgende Summanden ein.

3. Sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen mit reellen Summanden, sodass $a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt für die Partialsummen klarerweise auch $\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus Lemma 3.3.1 erhalten wir dann für die Grenzwerte dieser zwei Folgen von Partialsummen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Ist nun zusätzlich sogar $a_l < b_l$ für zumindest ein $l \in \mathbb{N}$, so folgt $a_l + \delta \leq b_l$ für ein hinreichend kleines $\delta > 0$. Somit gilt für $n \geq l$, dass $\delta + \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k$. Für $n \rightarrow \infty$ folgt wieder aus Lemma 3.3.1, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \delta + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

3.9.5 Beispiel.

- (i) Betrachte die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Wegen $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ gilt

$$S_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergiert also gegen $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$. Reihen, deren Grenzwert sich derartig berechnen lässt, nennt man auch *Teleskopreihen*.

- (ii) Lässt man die ersten drei Terme weg, also ersetzt sie durch 0, dann gilt für die entsprechenden Partialsummen S'_n stets ($n \geq 3$)

$$S'_n = S_n - \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{3}{4} \rightarrow \frac{1}{4}.$$

Somit ist die Reihe $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ebenfalls konvergent. Ihre Summe ist $\frac{1}{4}$.

- (iii) Fasst man immer zwei Summanden der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ zusammen, so erhält man die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$, welche nach Fakta 3.9.4, 2, ebenfalls die Summe 1 hat.

3.9.6 Bemerkung. Aus dem entsprechenden Resultat für Folgen erhält man, dass eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ bestehend aus komplexen Zahlen genau dann konvergiert, wenn die reellen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ beide konvergieren. In diesem Fall gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n \right) + i \left(\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n \right).$$

Folgendes Resultat liefert uns eine einfache notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe. Wie wir in Beispiel 3.9.9 sehen werden, ist diese notwendige Bedingung bei weitem *nicht* hinreichend.

3.9.7 Proposition. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Beweis. Ist $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so folgt für $n \geq 2$

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n.$$

Aus Satz 3.2.8 folgt, dass $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert s , wie $(S_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}}$ konvergiert. Somit erhalten wir $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow s - s = 0$. \square

3.9.8 Lemma. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ und $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

- (i) Die Reihe ist genau dann konvergent, wenn die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen beschränkt ist. In diesem Fall gilt $\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Anderenfalls ist sie bestimmt gegen $+\infty$ divergent.
- (ii) Minorantenkriterium: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine divergente Reihe nichtnegativer reeller Zahlen mit $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.
- (iii) Majorantenkriterium: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe nichtnegativer reeller Zahlen mit $a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, wobei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Beweis. Wegen der Voraussetzung $a_k \geq 0$ ist $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend. Somit folgt (i) aus Satz 3.7.3, (vi). Die behauptete Ungleichung gilt, da im Falle der Konvergenz der monoton wachsenden Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Grenzwert gemäß Satz 3.4.2 nichts anderes als $\sup\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist.

Bezeichnet $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, wobei $b_k \in \mathbb{R}$ und $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist auch diese monoton wachsend.

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent, so folgt aus $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ sicherlich $S_n \geq T_n$. Also kann die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht beschränkt und infolge auch nicht konvergent sein.

Ist dagegen $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, so folgt aus $a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $S_n \leq T_n$. Mit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist daher auch die Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt und wegen (i) auch konvergent. Die behauptete Ungleichung folgt wegen $S_n \leq T_n$ aus Lemma 3.3.1; vgl. auch Fakta 3.9.4, 3. \square

3.9.9 Beispiel. Die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist nicht konvergent. Genauer gesagt ist sie bestimmt divergent gegen $+\infty$. Betrachtet man nämlich die Folge der Partialsummen $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, so ist diese monoton wachsend. Für die Existenz des Limes ist es also notwendig und hinreichend, dass diese Folge beschränkt ist; vgl. Lemma 3.9.8, (i). Im Falle der Konvergenz wäre auch jede Teilfolge beschränkt. Nun gilt jedoch

$$\begin{aligned} S_{2^l} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^l} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^l} = 1 + l \cdot \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

womit $(S_{2^l})_{l \in \mathbb{N}}$ nicht beschränkt ist.

3.9.10 Beispiel. Durch Vergleich mit der harmonischen Reihe ist nach dem Minorantenkriterium die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ für $\alpha < 1$ divergent¹¹.

3.9.11 Lemma (Cauchysches Konvergenzkriterium). *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit reellen oder komplexen Summanden ist genau dann konvergent, wenn*

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \epsilon \text{ für alle } n > m \geq N. \quad (3.14)$$

Beweis. Da \mathbb{R} und \mathbb{C} vollständig metrische Räume sind, ist die Konvergenz der Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ mit der Tatsache gleichbedeutend, dass $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Wegen $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^n a_k$ ist das aber zu (3.14) äquivalent. \square

Wir werden später weitere Konvergenzkriterien kennenlernen. Diesen Abschnitt beenden wir mit einer weiteren wichtigen Begriffsbildung.

3.9.12 Definition. Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe der Beträge $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

3.9.13 Lemma. *Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.*

Beweis. Laut Voraussetzung und gemäß Lemma 3.9.11 gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\sum_{k=m+1}^n |a_k| = \left| \sum_{k=m+1}^n |a_k| \right| < \epsilon$ für alle $n > m \geq N$. Daraus und aus der Dreiecksungleichung erhält man

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \epsilon.$$

Wieder wegen Lemma 3.9.11 konvergiert damit die Reihe. \square

¹¹ Bemerke, dass wir k^α erst für rationales α definiert haben.

Die Umkehrung von Lemma 3.9.13 gilt im Allgemeinen nicht.

3.9.14 Beispiel. Die *alternierende harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ ist konvergent, wie man aus dem Leibnizschen Konvergenzkriterium, Korollar 3.10.7, weiter unten erkennt. Die Reihe der Beträge $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist gemäß Beispiel 3.9.9 aber divergent.

3.10 Konvergenzkriterien

Wir wollen das Majorantenkriterium ausnützen, um durch Vergleich mit der geometrischen Reihe zwei oft einsetzbare, hinreichende Bedingungen für die absolute Konvergenz einer Reihe herzuleiten.

3.10.1 Satz (Wurzelkriterium). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit reellen oder komplexen Summanden.

- Gibt es eine feste Zahl $q \in [0, 1)$ und ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \text{ für alle } n \geq N, \quad (3.15)$$

oder gilt die äquivalente Bedingung, dass $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

- Gibt es dagegen eine Teilfolge¹² $(a_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|} \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Diese Teilfolgenbedingung ist sicher dann erfüllt, wenn $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben nicht beschränkt ist oder wenn $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$.

Beweis. Dass (3.15) zur Beschränktheit von $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n \in \mathbb{N}}$ samt $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ äquivalent ist, haben wir in Fakta 3.4.6, 4, bemerkt.

Aus $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ folgt $|a_n| \leq q^n$ für alle $n \geq N$. Da die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} q^n$ konvergiert, zeigt das Majorantenkriterium aus Lemma 3.9.8, dass auch $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$, und damit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Ist $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben nicht beschränkt, so haben wir in Beispiel 3.7.6 eine Teilfolge konstruiert, die $\sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|} \geq k$, $k \in \mathbb{N}$, erfüllt. Ist $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt und gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so folgt aus Fakta 3.4.6, 5, und Lemma 3.3.1, (i), dass $\sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|} > 1$, $k \in \mathbb{N}$, für eine gewisse Teilfolge von $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n \in \mathbb{N}}$.

Gibt es eine Teilfolge $(a_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|} \geq 1$, so folgt $|a_{n(k)}| \geq 1$. Also kann $(a_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ und damit auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge sein. Wegen Proposition 3.9.7 ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. \square

3.10.2 Beispiel.

- (i) Betrachte die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$. Die Folge der n -ten Wurzeln

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}} = \frac{1}{3+(-1)^n}$$

¹² Diese Bedingung ist äquivalent dazu, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$; vgl. Lemma 2.3.18.

hat zwar keinen Grenzwert, aber ihre Glieder sind alle $\leq \frac{1}{2}$. Somit kann man Satz 3.10.1 anwenden. Der Grenzwert der Reihe lässt sich mit Hilfe der hergeleiteten Regeln für Reihen berechnen:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2k-1}} + \frac{1}{4^{2k}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2k}} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16^k} = 2 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 \right) + \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{16}} - 1 \right). \end{aligned}$$

(ii) Wie wir in Beispiel 3.10.8 sehen werden, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ für rationales $\alpha > 1$ absolut konvergent. Das Wurzelkriterium können wir wegen (vgl. Satz 3.3.5 und Beispiel 3.3.7)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n^{-\alpha}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(\sqrt[n]{n})^{-\alpha}}_{< 1} = 1$$

weder dazu verwenden, um auf absolute Konvergenz noch auf Divergenz zu schließen.

3.10.3 Satz (Quotientenkriterium). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit reellen oder komplexen Summanden.

→ Gibt es eine feste Zahl $q \in [0, 1)$ und ein $N \in \mathbb{N}$, sodass¹³

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q \quad \text{für alle } n \geq N, \quad (3.16)$$

oder gilt die äquivalente Bedingung, dass $(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq N}}$ für ein gewissen $N \in \mathbb{N}$ beschränkt ist mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

→ Gibt es dagegen einen Index $N \in \mathbb{N}$, sodass $a_n \neq 0$ und $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ für $n \geq N$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis. Dass (3.16) zur Beschränktheit von $(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|})_{n \in \mathbb{Z}_{\geq N}}$ samt der Bedingung $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ äquivalent ist, folgt unmittelbar aus Fakta 3.4.6, 4.

Unter dieser Voraussetzung gilt $|a_{n+1}| \leq q |a_n|$ für alle $n \geq N$. Durch vollständige Induktion erhalten wir

$$|a_n| \leq q^n \frac{|a_N|}{q^N} \quad \text{für alle } n \geq N,$$

woraus $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{q^N}}$ für $n \geq N$ folgt. Da der zweite Faktor mit $n \rightarrow \infty$ gegen 1 strebt, gilt gemäß Lemma 3.3.1, (i),

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1+q}{2} \quad \text{für alle } n \geq N'$$

¹³ Dies beinhaltet die Bedingung $a_n \neq 0$ für $n \geq N$.

mit einem $N' \geq N$. Also können wir das Wurzelkriterium anwenden und erhalten die absolute Konvergenz.

Aus $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ für $n \geq N$ folgt dagegen $|a_{n+1}| \geq |a_n| \geq \dots \geq |a_N| > 0$. Also kann $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge und infolge die Reihe nicht konvergent sein; vgl. Proposition 3.9.7. \square

3.10.4 Beispiel.

- (i) Betrachte die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, wobei $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ die Zahl n -faktorielle bezeichnet und $z \in \mathbb{C}$ beliebig ist. Diese Reihe ist konvergent, denn es gilt

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)} \cdot |z| = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0.$$

Insbesondere ist auch der Limes Superior der linken Seite gleich Null und damit kleiner 1.

- (ii) Bezeichne mit $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler der natürlichen Zahl n . Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n$, wobei $x > 0$ ist. Wegen $\tau(n) \leq n$ gilt

$$\sqrt[n]{\tau(n)x^n} = x \cdot \sqrt[n]{\tau(n)} \leq x \cdot \sqrt[n]{n} \rightarrow x.$$

Ist also $x < 1$, so ist die Reihe konvergent. Für $x \geq 1$ ist sie sicher divergent, denn dann bilden die Summanden keine Nullfolge.

Im Beweis von Satz 3.10.3 haben wir das Wurzelkriterium verwendet, um das Quotientenkriterium herzuleiten. Also ist ersteres stärker, wenn auch nicht immer am praktikabelsten. Das eben betrachtete Beispiel – genauso wie Beispiel 3.10.2 – ist gerade eines, wo uns das Wurzelkriterium zum Ziel führt, das Quotientenkriterium aber versagen würde. Denn ist $n > 2$ eine Primzahl, so gilt $\tau(n) = 2$. Weiters ist n sicher ungerade, und damit kann $n+1$ keine Primzahl sein. Also gilt $\tau(n+1) \geq 3$. Wir erhalten damit

$$\frac{\tau(n+1)x^{n+1}}{\tau(n)x^n} \geq \frac{3}{2} \cdot x.$$

Für $x \geq \frac{2}{3}$ ist daher der Quotient ≥ 1 . Da es unendlich viele Primzahlen gibt, können wir somit das Quotientenkriterium nicht anwenden.

Die nächsten Kriterien basieren auf folgendem, auch später verwendeten Lemma.

3.10.5 Lemma. Seien a_1, \dots, a_m und b_1, \dots, b_m komplexe oder reelle Zahlen, so gilt

$$\sum_{n=1}^m a_n b_n = a_m \cdot \beta_m - \sum_{n=1}^{m-1} (a_{n+1} - a_n) \cdot \beta_n,$$

wobei die β_n die Partialsummen $\sum_{j=1}^n b_j = \beta_n$ bezeichnen.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{m-1} (a_{n+1} - a_n) \cdot \beta_n &= \sum_{n=1}^{m-1} a_{n+1} \cdot \beta_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \cdot \beta_n = \sum_{n=2}^m a_n \cdot \beta_{n-1} - \sum_{n=1}^{m-1} a_n \cdot \beta_n \\
 &= a_m \cdot \beta_{m-1} - \sum_{n=2}^{m-1} a_n \cdot (\beta_n - \beta_{n-1}) - a_1 \cdot \beta_1 \\
 &= a_m \cdot \beta_m - a_m b_m - \sum_{n=2}^{m-1} a_n b_n - a_1 b_1 = a_m \cdot \beta_m - \sum_{n=1}^m a_n b_n. \quad \square
 \end{aligned}$$

3.10.6 Satz (Dirichletsches Kriterium). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge reeller Zahlen und sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Gilt für eine Zahl $C > 0$

$$\left| \sum_{j=1}^n b_j \right| \leq C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergent.

Beweis. Sei N so groß, dass $|a_n| < \epsilon$ für $n \geq N$. Dann folgt für $n > m \geq N$ aus Lemma 3.10.5 und der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k b_k \right| \leq \left| a_n \left(\sum_{j=m+1}^n b_j \right) \right| + \sum_{k=m+1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \cdot \left| \sum_{j=m+1}^k b_j \right|.$$

Wegen $|\sum_{j=m+1}^k b_j| \leq |\sum_{j=1}^m b_j| + |\sum_{j=1}^k b_j| \leq 2C$ schätzen wir diesen Ausdruck weiter nach oben durch

$$2C |a_n| + 2C \sum_{k=m+1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k|$$

ab. Voraussetzungsgemäß haben die Ausdrücke der Form $(a_{k+1} - a_k)$ immer das gleiche Vorzeichen, womit

$$\begin{aligned}
 2C \left(|a_n| + \sum_{k=m+1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \right) &= 2C \left(|a_n| + \left| \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \right| \right) \\
 &\leq 2C (|a_n| + |a_n| + |a_{m+1}|) \leq 2C \cdot 3\epsilon.
 \end{aligned}$$

Nach dem Cauchyschen Kriterium, Lemma 3.9.11, ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergent. \square

3.10.7 Korollar (Leibniz Kriterium). Sei $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ eine alternierende Reihe, also $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Beweis. Setze im Dirichletschen Kriterium $b_n = (-1)^n$. \square

3.10.8 Beispiel. Für $\alpha > 1$ ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergent¹⁴. Wegen $\frac{m+1}{m} \rightarrow 1$ kann man $m \in \mathbb{N}$ so wählen, dass $\frac{m+1}{m} \leq \alpha$. Nach dem Majorantenkriterium genügt es, die Behauptung für den Exponenten $\frac{m+1}{m}$ zu zeigen.

Betrachte die nach dem Leibnizschen Kriterium konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^{\frac{1}{m}}}$. Fassen wir immer je zwei Summanden zusammen, so konvergiert nach Fakta 3.9.4, 2, auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k-1)^{\frac{1}{m}}} - \frac{1}{(2k)^{\frac{1}{m}}} \right).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2k-1)^{\frac{1}{m}}} - \frac{1}{(2k)^{\frac{1}{m}}} = \frac{(2k)^{\frac{1}{m}} - (2k-1)^{\frac{1}{m}}}{(2k-1)^{\frac{1}{m}}(2k)^{\frac{1}{m}}} \\ &= \frac{1}{(2k-1)^{\frac{1}{m}}(2k)^{\frac{1}{m}}} \cdot \frac{(2k) - (2k-1)}{(2k)^{\frac{m-1}{m}} + (2k)^{\frac{m-2}{m}}(2k-1)^{\frac{1}{m}} + \dots + (2k-1)^{\frac{m-1}{m}}} \\ &\geq \frac{1}{(2k)^{\frac{2}{m}} m (2k)^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{1}{m 2^{\frac{m+1}{m}}} \cdot \frac{1}{k^{\frac{m+1}{m}}}. \end{aligned}$$

Nach dem Majorantenkriterium folgt somit, dass auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{m+1}{m}}}$ konvergiert.

3.10.9 Korollar (Abelsches Kriterium*). Sei die reell- oder komplexwertige Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, und sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone und beschränkte Folge aus \mathbb{R} . Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konvergent.

Beweis. Gemäß Satz 3.4.2 konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein a . Für $n \rightarrow \infty$ existiert in

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (a_k - a) b_k + a \sum_{k=1}^n b_k$$

für jeden der beiden Summanden auf der rechten Seite der Grenzwert, denn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a) b_k$ konvergiert nach dem Dirichletschen Kriterium und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ nach Voraussetzung. \square

3.10.10 Satz (Kriterium von Raabe*). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Gibt es eine Zahl $\beta > 1$, sodass ab einem Index K immer $a_k \neq 0$, und

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq 1 - \frac{\beta}{k} \quad \text{für alle } k \geq K,$$

so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Ist ab einem gewissen Index K jedoch $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1 - \frac{1}{k}$, so ist sie nicht absolut konvergent, also höchstens bedingt konvergent.

¹⁴ Bemerke, dass wir k^α erst für rationales α definiert haben.

Beweis. Für $k \geq K$ gilt wegen unserer Voraussetzung $k|a_{k+1}| \leq k|a_k| - \beta|a_k|$ und daher

$$(\beta - 1)|a_k| \leq (k - 1)|a_k| - k|a_{k+1}|. \quad (3.17)$$

Wegen $\beta > 1$ ist $(k - 1)|a_k| > k|a_{k+1}| > 0$. Somit ist die Folge $((k - 1)|a_k|)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}}$ monoton und beschränkt, und daher konvergent. Daraus ergibt sich die Konvergenz der Folge

$$\sum_{k=2}^n ((k - 1)|a_k| - k|a_{k+1}|) = |a_2| - n|a_{n+1}|$$

für $n \rightarrow \infty$. Wegen (3.17) und dem Majorantenkriterium konvergiert dann auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Gilt nun $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1 - \frac{1}{k}$ für $k \geq K (> 1)$, so folgt $k|a_{k+1}| \geq (k - 1)|a_k| \geq (K - 1)|a_K| := \alpha > 0$. Also ist $|a_{k+1}| \geq \frac{\alpha}{k}$, und nach dem Minorantenkriterium kann $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ nicht konvergieren. \square

Wir wollen noch anmerken, dass man die Konvergenz von $(\frac{1}{n^\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ für $\alpha \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, mit dem Kriterium von Raabe und der Bernoullischen Ungleichung zeigen kann.

3.11 Übungsaufgaben

3.1 Welche der folgenden Paare sind metrische Räume, und warum oder warum nicht?

(i) $\langle \mathbb{C}^n, d \rangle$, wobei (vgl. (2.16))

$$d((z_j)_{j=1}^n, (w_j)_{j=1}^n) = \sum_{j=1}^n |z_j - w_j|, \quad (z_j)_{j=1}^n, (w_j)_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n.$$

(ii) $\langle \mathbb{R}^+, d \rangle$, wobei $d(x, y) = xy$.

(iii) $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, d \rangle$, wobei $d(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$, $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.2 Welche der folgenden Paare sind metrische Räume, und warum oder warum nicht?

(i) $\langle X, d \rangle$, wobei X eine nichtleere Menge ist, und $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

(ii) $\langle X, d \rangle$, wobei X eine nichtleere Menge ist, und $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $d(x, y) = 0$ für alle $x, y \in X$.

3.3 Sind folgende Folgen konvergent/divergent? Begründen Sie ihre Antwort!

(i) $(2 + (-1)^n \frac{3}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} , versehen mit der euklidischen Metrik.

(ii) $(-1)^n + \frac{1}{n^6})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} , versehen mit der euklidischen Metrik.

3.4 Sind folgende Folgen konvergent/divergent? Begründen Sie ihre Antwort!

(i) $(3 + (-1)^n \frac{4}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} versehen mit der euklidischen Metrik.

(ii) $((-1)^n + \frac{1}{n^4})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} versehen mit der euklidischen Metrik.

3.5 Sind folgende Folgen konvergent/divergent? Begründen Sie ihre Antwort!

(i) $(\frac{1}{n + \frac{1}{n^2}})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} versehen mit der euklidischen Metrik.

(ii) $(\frac{(-1)^n}{3n+1} + \frac{i}{3^{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{C} versehen mit der euklidischen Metrik.

3.6 Sind folgende Folgen konvergent/divergent? Begründen Sie ihre Antwort!

(i) $((\frac{1}{2} + i\frac{1}{2})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{C} , versehen mit der euklidischen Metrik.

(ii) $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} , versehen mit der euklidischen Metrik, wobei $S_n = \sum_{j=1}^n (\frac{1}{j(j+1)})$.

Beachte: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

3.7 Man betrachte die Folge $(\frac{4n^2+n}{4n^2+n-4})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} und bestimme ihren Grenzwert x . Weiters bestimme man zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ das kleinst mögliche $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| x - \frac{4n^2 + n}{4n^2 + n - 4} \right| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ gilt.

3.8 Man betrachte die Folge $(\frac{2n^2+4n}{2n^2+4n-3})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} . Man bestimme ihren Grenzwert x . Weiters bestimme man zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ das kleinst mögliche $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left| x - \frac{2n^2 + 4n}{2n^2 + 4n - 3} \right| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ gilt.

3.9 Man betrachte die Folge $(\frac{1}{n} + i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{C} . Geben Sie ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(\frac{1}{n(k)} + i^{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(\frac{1}{n} + i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, sodass

$$d_2(1, \frac{1}{n(k)} + i^{n(k)}) \geq \varepsilon,$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

3.10 Geben Sie eine unbeschränkte Folge in \mathbb{R} an, die eine konvergente Teilfolge hat! Weiters geben Sie eine unbeschränkte Folge in \mathbb{R} an, die keine konvergente Teilfolge hat, die aber auch nicht monoton wachsend ist! Schließlich geben Sie eine beschränkte Folge in \mathbb{R} an, die nicht konvergent ist, aber eine streng monoton wachsende Teilfolge besitzt.

3.11 Sei $M \neq \emptyset$ versehen mit der diskreten Metrik d ; vgl. Beispiel 3.1.5, (iv). Zeigen Sie, dass eine Folge in M genau dann konvergiert, wenn sie ab einem gewissen Index konstant ist.

3.12 Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann gegen ein x konvergiert, wenn $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(x_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ beide gegen x konvergieren.

Anmerkung: Hat man zwei Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die beide gegen denselben Grenzwert x konvergieren, so zeigt dieses Beispiel, dass die gemischte Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch gegen x konvergiert, wobei $c_{2k} = a_k$, $k \in \mathbb{N}$ und $c_{2k-1} = b_k$, $k \in \mathbb{N}$.

3.13 Ist die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

konvergent? Wenn ja, warum?

3.14 Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiere. Man beweise, dass dann die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$b_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j$$

ebenfalls gegen a konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $b_n - a = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j$ gegen Null geht.

3.15 Zeigen Sie, dass für reelle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a bzw. b konvergieren, die Folgen $\max(a_n, b_n)$ und $\min(a_n, b_n)$ gegen $\max(a, b)$ bzw. $\min(a, b)$ konvergieren.

3.16 Sind folgende Folgen konvergent/divergent? Begründen Sie ihre Antwort!

(i) $((-1 + 2i + \frac{1-i}{n})^{10} - 1)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{C} versehen mit der euklidischen Metrik.

(ii) $(\sqrt{9n^2 + 2n + 1} - \sqrt{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} versehen mit der euklidischen Metrik.

3.17 Sind folgende Folgen konvergent/divergent? Begründen Sie ihre Antwort!

(i) $((1 - \frac{1}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} versehen mit der euklidischen Metrik. Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Folge $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, wobei der Grenzwert als Eulersche Zahl e bezeichnet wird; vgl. Beispiel 3.4.3.

(ii) $((1 - \frac{1}{2n})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} versehen mit der euklidischen Metrik. Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Folge $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, wobei der Grenzwert als Eulersche Zahl e bezeichnet wird; vgl. Beispiel 3.4.3.

3.18 Sind folgende Folgen konvergent/divergent? Begründen Sie ihre Antwort!

(i) $((1 + \frac{1}{n^2})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} versehen mit der euklidischen Metrik. Hinweis: Betrachte eins durch die Folge, wende die Bernoullische Ungleichung an und gehe wieder zu den Kehrwerten über!

(ii) $(1 + \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} versehen mit der diskreten Metrik aus Beispiel 3.1.5, (iv).

3.19 Sind folgende Folgen konvergent/divergent? Begründen Sie ihre Antwort!

(i) $((1 + \frac{1}{n^2})^{2n-2})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} versehen mit der euklidischen Metrik. Hinweis: Betrachte eins durch die Folge, wende die Bernoullische Ungleichung an und gehe wieder zu den Kehrwerten über!

(ii) $((1 - \frac{3}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} versehen mit der euklidischen Metrik. Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Folge $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, wobei der Grenzwert als Eulersche Zahl e bezeichnet wird; vgl. Beispiel 3.4.3.

3.20 Sind folgende Folgen konvergent/divergent? Begründen Sie ihre Antwort!

(i) $(\sqrt{16n^2 + 2n + 1} - \sqrt{4n})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} versehen mit der euklidischen Metrik.

(ii) $((3 + 4i + \frac{1-i}{2n})^7 - 1)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{C} versehen mit der euklidischen Metrik.

3.21 Sind folgende Folgen konvergent/divergent? Begründen Sie ihre Antwort!

(i) $(3^{-n}((-1)^n n, 2^n + 3, \frac{2}{n^2+1}))_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^3 versehen mit der euklidischen Metrik.

(ii) $((\frac{-1}{3n+1}, \frac{1}{3n+1}, (-1)^n \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^3 versehen mit der euklidischen Metrik.

3.22 Untersuchen Sie folgende rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert!

$$x_1 = 0 \text{ und } x_{n+1} = \frac{1}{2}(a + x_n^2) \text{ für } n \in \mathbb{N}, \text{ wobei } 0 \leq a \leq 1.$$

Hinweis: Überprüfen Sie zuerst auf Monotonie und Beschränktheit. Beweise dafür mittels vollständiger Induktion! Der Grenzwert (falls existent) erfüllt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(a + x_n^2) = \dots$

3.23 Sind folgende metrische Räume vollständig oder nicht? Begründen Sie ihre Antwort! Hier ist d_2 die euklidische Metrik.

(i) $\langle \mathbb{C} \setminus \{0\}, d_2 \rangle$.

(ii) $\langle [0, 1] \cup [2, 3], d_2 \rangle$.

(iii) $\langle \mathbb{Z}, d_2 \rangle$.

3.24 Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, die gegen eine positive reelle Zahl c konvergiert. Wohin konvergiert $(c_n)^{\frac{1}{n}}$? Warum?

Hinweis: Ist $b < c < d$ für positive b, d , so erfüllt c_n ab einem Index $b < c_n < d$.

3.25 Als Intervallschachtelung in \mathbb{R} wird eine Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ bezeichnet, wobei $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n < b_n$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

Man zeige, dass unter diesen Voraussetzungen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert konvergieren.

Weiters zeige man für feste $0 < a < b$: Die rekursiv definierten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_1 = a$, $b_1 = b$ und

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n},$$

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

bilden eine Intervallschachtelung, welche gegen das geometrische Mittel \sqrt{ab} von a und b konvergiert.

Hinweis: $a_n b_n = ab$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.26 Zifferndarstellung reeller Zahlen:

Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Wir betrachten Folgen $(z_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ bestehend aus ganzen Zahlen, sodass $z_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ für $n \geq 1$. Weiters fordern wir, dass die Folge nicht ab einem gewissen Index aus lauter Zahlen $b-1$ besteht, also $\forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : z_n \neq b-1$. Die Menge aller solchen Folgen bezeichnen wir mit D .

Man zeige: Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \in D$, sodass die durch

$$a_n = z_0 + \sum_{j=1}^n z_j \frac{1}{b^j},$$

definierte Folge rationaler Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.

Hinweis: Für $x \geq 0$ setze $z_0 = \lfloor x \rfloor$ (größte ganze Zahl $\leq x$). Dann definiere z_n rekursiv, sodass $a_n \leq x$ und dass der Abstand von x zu a_n möglichst klein wird. Dieser Abstand ist dann $\leq b^{-n}$.

Bemerkung: Für $b = 10$ erhält man die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl, wenn $x \geq 0$.

- 3.27 Mit der Notation aus dem obigen Beispiel weise man nach, dass für jedes $(z_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \in D$ die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = z_0 + \sum_{j=1}^n z_j \frac{1}{b^j},$$

eine Cauchy-Folge ist. Weiters zeige man, dass zu zwei verschiedenen $(z_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \in D$ für die entsprechenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Bemerkung: Zusammen mit dem obigen Beispiel sieht man, dass es über diese Folgen eine bijektive Beziehung zwischen D und \mathbb{R} gibt. Für $b = 10$ und für Zahlen ≥ 0 ist das genau die bekannte Dezimaldarstellung der reellen Zahlen.

- 3.28 Mit der Notation aus den beiden vorherigen Beispielen, sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ die b -Darstellung einer reellen Zahl x .

Eine solche Darstellung heißt periodisch ab dem Index $m \in \mathbb{N}$, wenn es eine natürliche Zahl p gibt, sodass $z_{m+j} = z_{m+kp+j}$ für $j = 0, \dots, p-1$ und allen $k \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass die Zahl x genau dann rational ist, wenn ihre Dezimaldarstellung ab einem gewissen Index periodisch ist.

Hinweis: Beim Dividieren einer natürlichen Zahl durch die natürliche Zahl m ist der Rest immer in der endlichen Menge $\{0, \dots, m-1\}$.

- 3.29 Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge und sei $\xi \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n < \xi$ genau dann, wenn es ein $q < \xi$ gibt, sodass $x_n \leq q$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie auch, dass $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n > \xi$ genau dann, wenn es ein $q > \xi$ gibt, sodass $x_n \geq q$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$; vgl. Fakta 3.4.6.

- 3.30 Weisen Sie den in Bemerkung 3.4.7 erwähnten Sachverhalt nach.

- 3.31 Man betrachte die Menge $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, wobei ∞ ein nicht in \mathbb{C} enthaltenes Element ist. Man sagt, dass eine komplexe Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ∞ konvergiert (in Zeichen $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ oder $z_n \rightarrow \infty$), falls

$$\forall M \in \mathbb{R}, M > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |z_n| > M \text{ für alle } n \geq N.$$

Man zeige, dass $z_n \rightarrow \infty$ genau dann, wenn $|z_n| \rightarrow +\infty$ im Sinne der Vorlesung.

Weiters zeige man: Sind $p(z)$ und $q(z)$ zwei Polynome mit komplexen Koeffizienten, sodass p einen höheren Grad als q hat, dann konvergiert die komplexe Folge $(\frac{p(n)}{q(n)})$ gegen ∞ im obigen Sinne.

Bemerkung: Ist k der Grad von q und $b_k \neq 0$ der Führungskoeffizient von q , so gilt $n^{-k}q(n) \rightarrow b_k$ und daher $|n^{-k}q(n)| \rightarrow |b_k| > 0$. Somit ist $q(n)$ sicher nicht Null, wenn nur $n \geq K$ für ein $K \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge $(\frac{p(n)}{q(n)})$ ab $n = K$ wohldefiniert.

3.32 Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} und $x \in \mathbb{R}$ oder $x = \pm\infty$, so zeige man, dass $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ genau dann, wenn

$$(\forall \xi \in \mathbb{R}, \xi < x \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow x_n > \xi) \wedge \\ (\forall \eta \in \mathbb{R}, \eta > x \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow x_n < \eta).$$

3.33 Ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, divergent, bestimmt divergent? Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert!

(i) $a_n = n(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}})$,

(ii) $a_n = \frac{\sqrt{n^5+3}}{n^2-2n+6}$,

(iii) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$.

3.34 Ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, divergent, bestimmt divergent? Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert!

(i) $a_n = (-1)^n(n - \sqrt{n^2 + 1})$,

(ii) $a_n = \frac{\sqrt[3]{2n^7+7n^3+1}}{3n^2-1}$,

(iii) $a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$.

3.35 Ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, divergent, bestimmt divergent? Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert!

(i) $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$,

(ii) $a_n = (1 + \frac{1}{n^2})^{n^3}$,

(iii) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}^+$.

3.36 Man zeige, dass man auch für eine nicht notwendigerweise beschränkte reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Ausdrücke $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ sinnvoll definieren kann, wenn man das Infimum (Supremum) einer nicht nach unten (nicht nach oben) beschränkten Menge als $-\infty$ ($+\infty$) definiert. Geben Sie an, wie?

Falls $\inf_{n \geq N} x_n \in \mathbb{R}$ ($\sup_{n \geq N} x_n \in \mathbb{R}$) für alle $N \in \mathbb{N}$, stimmt dann auch $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{n \geq N} x_n$ bzw. $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq N} x_n$?

Schließlich zeige man, dass auch hier $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann gegen ein $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ konvergiert, wenn $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = x = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$.

3.37 Man untersuche ob folgende Reihen absolut konvergieren, und berechnen gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{2^n} \right).$$

3.38 Man untersuche ob folgende Reihen absolut konvergieren, konvergieren oder divergieren:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^3 + n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)n^{1+(-1)^n}}.$$

3.39 Man untersuche ob folgende Reihen absolut konvergieren, konvergieren oder divergieren:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[n]{n^3}}.$$

3.40 Man untersuche ob folgende Reihen konvergieren oder divergieren:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2 + 1} \right)^{n^3}.$$

3.41 Man untersuche ob folgende Reihe konvergiert oder divergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right).$$

Hinweis: Suchen Sie mit Hilfe von $(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ eine konvergente Majorante.

3.42 Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x^n}{2 + x^{4n}}$$

konvergent und für welche divergent?

3.43 Für welche $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist die komplexe Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konvergent bzw. absolut konvergent?

3.44 Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $a_1 = 3$ und $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{2}$. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert!

3.45 Man zeige die Cauchy-Schwarzsche und die Minkowskische Ungleichung für komplexe Zahlen:
Für $z_1, \dots, z_p, w_1, \dots, w_p \in \mathbb{C}$ gilt

$$\left| \sum_{j=1}^p z_j \overline{w_j} \right| \leq \sum_{j=1}^p |z_j w_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^p |z_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^p |w_j|^2},$$

$$\sqrt{\sum_{j=1}^p |z_j + w_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^p |z_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^p |w_j|^2}.$$

Hinweis: Führen Sie diese Ungleichungen auf die schon bekannten reellen Versionen dieser Ungleichungen zurück.

- 3.46 Seien $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen von komplexen Zahlen, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^2$ konvergieren.

Man zeige, dass dann $\sum_{n=1}^{\infty} z_n w_n$ absolut konvergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^2$ konvergiert, und dass

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n w_n \right|^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^2 \right)$$

und dass

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n + w_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bezeichne nun $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ die Menge aller Folgen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$ konvergiert, dann zeige man unter Verwendung obiger Ungleichung, dass $(\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}), d)$ ein metrischer Raum ist, wobei $d((z_n), (w_n)) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |z_n - w_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

- 3.47 Man zeige, dass $(\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}), d)$ ein vollständig metrischer Raum ist!

Hinweis: Ist $((z_n^k)_{n \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so auch $(z_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Warum?. Man zeige für $z_n := \lim_{k \rightarrow \infty} z_n^k$ die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ liegt und dass $\lim_{k \rightarrow \infty} (z_n^k)_{n \in \mathbb{N}} = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzgl. d .

- 3.48 Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Man sagt, dass $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergiert, wenn die Folge $P_N = \prod_{n=1}^N z_n$ für $N \rightarrow \infty$ konvergiert. In diesem Falle bezeichnet $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ den Grenzwert dieser Folge.

Man zeige, dass dann im Fall $\prod_{n=1}^{\infty} z_n \neq 0$ immer $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$.