Übungen zu Analysis 2, 1. Übung

1. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, +\infty]$. Weiters sei $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < R$. Zeigen Sie, dass es eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n$ mit Konvergenzradius $\geq R - |w|$ derart gibt, dass
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-w)^n$$
für alle $z \in U_{R-|w|}(w)$.

   Hinweis: Für $z \in U_{R-|w|}(w)$ fest betrachten Sie
$$\sum_{(n,k)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2} a_n \binom{n}{k} (z-w)^k w^{n-k} .$$
   Zeigen Sie, dass $\sum_n \sum_{(m,k)\in\{n\}\times\mathbb{N}} |a_m \binom{m}{k} (z-w)^k w^{m-k}|$ unbedingt konvergiert und wenden Sie Lemma 5.4.9 und dann Proposition 5.4.8 an!

   Anmerkung: Dieses Beispiel zeigt, dass Grenzfunktionen von Potenzreihen analytisch sind; vgl. Bemerkung 6.8.11.

2. Man rechne nach, dass $\sin s - \sin t = 2\cos(\frac{s+t}{2})\sin(\frac{s-t}{2})$. Weiters verwende man diese Tatsache um zu zeigen, dass $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ streng monoton wachsend und bijektiv ist. Man zeichne eine Skizze der Umkehrfunktion $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (Arcussinus).

3. Für $z \in \mathbb{C}$ seien $\cosh z := \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}$ und $\sinh z := \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2}$. Man gebe die Potenzreihendarstellung dieser Funktionen und ihren Konvergenzradius an.

   Weiters bestimme man $\cosh'(x)$ und $\sinh'(x)$ für $x \in \mathbb{R}$!

   Schließlich stelle man $\cosh z$ mit Hilfe der cos Funktion, $\sinh z$ mit Hilfe der sin Funktion dar ($z \in \mathbb{C}$) und bestimme man die $z \in \mathbb{C}$ derart, dass $\cosh z = 0$ bzw. dass $\sinh z = 0$.

4. Man zeige, dass $\sinh|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, dass $\sinh|_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, und dass die Inverse $\operatorname{areasinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ übereinstimmt und stetig ist.

   Hinweis: Für die strenge Monotonie könnte es hilfreich sein, zunächst zu zeigen, dass $s < t$ immer $s - \frac{1}{s} < t - \frac{1}{t}$ nach sich zieht. Um $\operatorname{areasinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ zu zeigen, setzen Sie unbestimmt $\sinh t = x$ und lösen sie diese Gleichung.

   Anmerkung: $\cosh|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat nicht diese Eigenschaft. Schränkt man diese Funktion auf $[0, +\infty)$ ein, dann gilt aber schon, dass $\cosh|_{[0,+\infty)} : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ streng monoton wachsend und bijektiv ist. Ihre Inverse ist gegeben durch $\operatorname{areacosh}(x) := \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

5. Man bestimme alle sechsten Wurzeln von 1 in $\mathbb{C}$ auf zwei Arten: In Polarkoordinaten und in der Real- und Imaginärteil Schreibweise.

   Man berechne damit $\cos(\frac{\pi}{3})$, $\sin(\frac{\pi}{3})$.

6. Man betrachte für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} + \frac{1}{x^2}\,,$$

und zeige, dass diese Funktion auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ wohldefiniert und stetig ist.

Hinweis: Für die Stetigkeit betrachte man zunächst $x \in [-K, K]$ für ein $K \in \mathbb{N}$ und schreibe $f(x) = \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} + \sum_{k=-K}^{K} \frac{1}{(x-k)^2}$. Man zeige, dass man auf die beiden Reihen das Weierstraß Kriterium anwenden kann.

7. Sei $f(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, die Funktion aus dem vorherigen Beispiel. Man betrachte für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$g(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} - f(x)\,,$$

und zeige, dass diese Funktion auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ wohldefiniert und stetig ist. Weiters zeige man, dass g eine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ hat. Bezeichnen wir diese Fortsetzung ebenfalls mit g, so zeige man, dass $g(x) = g(x+1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, also dass g 1-periodisch ist.

Schließlich zeige man, dass g folgende Gleichung erfüllt:

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4g(x)\,,$$

und leite daraus ab, dass $g(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ bzw. $f(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Hinweis zu $g = 0$: Wende diese Funktionalgleichung auf x_{max} an, wobei x_{max} eine Maximalstelle von $|g|$ ist, dh. $|g(x_{max})| = \max_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$. Warum existiert dieses Maximum?

8. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) = at$ für $t < 2$ und durch $f(t) = b + t^{\frac{3}{2}}$ für $t \geq 2$.

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist! Bestimmen Sie für diese Wahl von a, b auch $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und geben Sie an, ob f' stetig ist (also ob f stetig differenzierbar ist) bzw. auf $\mathbb{R}$ noch einmal differenzierbar ist.

9. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x} + 1)$ für $x > 0$ und durch $f(x) = ax + b$ für $x \leq 0$.

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist! Bestimmen Sie für diese Wahl von a, b auch $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und geben Sie an, ob f' stetig ist bzw. auf $\mathbb{R}$ sogar noch einmal differenzierbar ist.