Analysis 1: Ausgewählte Musterlösungen

Lösung zu Blatt 9, Aufgabe 3

Sei M die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ versehen mit d_2

$$M = \left\{ \left(\frac{1}{n}, t \right) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0,1], n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Behauptung: (i) Die Menge ist nicht offen.
(ii) Die Menge ist nicht abgeschlossen.
(iii) Die Menge der Häufungspunkte $\mathrm{HP}(M)$ und der Abschluss der Menge $c(M)$ sind gegeben durch

$$\mathrm{HP}(M) = c(M) = \left\{ \left(\frac{1}{n}, t \right) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1], n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ (0,t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1] \right\}.$$

(iv) Der Abschluss ist kompakt.

Beweis: (i) Nach Definition 5.1.4, heißt eine Teilmenge O von einem metrischen Raum $\langle X, d \rangle$ offen, wenn es zu jedem Element $x \in O$ eine ϵ-Kugel mit $U_\epsilon(x) \subseteq O$ gibt. Das heißt, um zu zeigen, dass die Menge nicht offen ist, reicht es ein Element in M zu finden, für das kein $\epsilon > 0$ existiert mit $U_\epsilon(x) \subseteq M$. Dies zeigen wir mittels Widerspruch.

Angenommen M ist offen. Wir wählen nun zum Beispiel den Punkt $x = (1, 1/2) \in M$. Da wir angenommen haben, dass M offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$ sodass $U_\epsilon((1, 1/2)) \subseteq M$. Betrachte $y = (1 + \epsilon/2, 1/2)$. Dann ist $y \in U_\epsilon(x)$, da

$$d(x,y) = \sqrt{(1 + \epsilon/2 - 1)^2 + (1/2 - 1/2)^2} = \epsilon/2 < \epsilon,$$

aber $y \notin M$. Widerspruch! Damit ist M nicht offen.

(iii) Nach Definition 5.1.7. ist x ein Häufungspunkt einer Menge E, wenn die zwei folgenden äquivalenten Aussagen gelten:

$$\begin{aligned} &\Big(\forall \epsilon > 0 \Rightarrow U_\epsilon(x) \cap (E \backslash \{x\}) \neq \emptyset \Big) \\ \Leftrightarrow &\Big(\forall \epsilon > 0 \exists y \in E, x \neq y : d(x,y) < \epsilon \Big). \end{aligned}$$

Bzw. wenn die folgende äquivalente Aussage (nach Lemma 5.1.12) gilt:

$$\Leftrightarrow \exists \text{ eine Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ aus } E \backslash \{x\} \text{ mit } x_n \to x.$$

Wir zeigen die Häufungspunkte in mehreren Schritten. Für die ersten vier Schritte nutzen wir die dritte Äquivalenz. Für den fünften Schritt verwenden wir hingegen die erste Äquivalenz:

(a) $x = (x^1, x^2) \in \{(1/n, t) : t \in (0,1], n \in \mathbb{N}\}$ ist ein Häufungspunkt: Wir betrachten die Folge $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit $x_m = (x^1, \max(x^2 - 1/m, x^2/2)))$. Dann $x_m \in M \backslash \{x\}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\lim_{m \to \infty} x_m = x$.

(b) $x = (x^1, x^2) \in \{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$ ist ein Häufungspunkt: Wir betrachten die Folge $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit $x_m = (x^1, 1/m)$. Dann $x_m \in M \backslash \{x\}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\lim_{m \to \infty} x_m = x$.

(c) $x \in \{(0,t] : t \in (0,1]\}$ ist ein Häufungspunkt: Wir betrachten die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = (1/n, t)$. Dann $x_n \in M\backslash\{x\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = (0,t) = x$.

(d) $x = (0,0)$ ist ein Häufungspunkt: Wir betrachten die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = (1/n, 1/n)$. Dann $x_n \in M\backslash\{x\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(1/n, 1/n) = (0,0)$.

(e) Es gibt keine weiteren Häufungspunkte: Dies zeigen wir mittels Widerspruch. Angenommen es gibt mindestens einen weiteren Häufungspunkt $x = (x^1, x^2)$. Dann erfüllt dieser mindestens eine der fünf folgenden Bedingungen:

$$(x^1 < 0) \quad \text{oder} \quad (x^1 > 1) \quad \text{oder} \quad (x^2 < 0) \quad \text{oder} \quad (x^2 > 1)$$
$$\text{oder } (x^2 \in [0,1] \text{ and } \exists n \in \mathbb{N} : 1/(n+1) < x^1 < 1/n)$$

Falls $(x^1 < 0)$, betrachte $\epsilon = |x^1|/2$. Dann $U_\epsilon(x) \cap M = \emptyset$.
Falls $(x^1 > 1)$, betrachte $\epsilon = |x^1 - 1|/2$. Dann $U_\epsilon(x) \cap M = \emptyset$.
Falls $(x^2 < 0)$, betrachte $\epsilon = |x^2|/2$. Dann $U_\epsilon(x) \cap M = \emptyset$.
Falls $(x^2 > 1)$, betrachte $\epsilon = |x^2 - 1|/2$. Dann $U_\epsilon(x) \cap M = \emptyset$.
Somit muss nur noch der letzte Fall $(x^2 \in [0,1]$ and $\exists n \in \mathbb{N} : 1/(n+1) < x^1 < 1/n)$ untersucht werden. Hier wählen wir $\epsilon = \min(|x^1 - 1/n|, |x^1 - 1/(n+1)|)/2$. In dem Fall gilt für alle $y = (y^1, y^2) \in U_\epsilon(x)$, dass $1/(n+1) < y^1 < 1/n$. Somit $U_\epsilon(x) \cap M = \emptyset$. Damit ist die Annahme falsch, dass es weitere Häufungspunkte gibt. (Alternativ kann analog zu Beispiel 5.1.16 (viii) mittels Folgen gezeigt werden, dass es keine weiteren Häufungspunkte gibt.)

Nach Lemma 5.1.12, gilt $c(M) = \text{HP}(M) \cup M$. Damit folgt hier $c(M) = \text{HP}(M)$.

(ii) Um zu zeigen, dass die Menge nicht abgeschlossen ist, verwenden wir (iii). Wir bemerken, dass eine Menge genau dann abgeschlossen ist, wenn $\text{HP}(M) \subseteq M$ gilt, i.e., jeder Häufungspunkt von M ist schon ein Element in der Menge M. Da nach (iii), zum Beispiel $(1,0) \in \text{HP}(M)$, aber $(1,0) \notin M$, haben wir einen Häufungspunkt gefunden, der nicht in der Menge M ist und somit ist M nicht abgeschlossen.

(iv) Der Abschluss $c(M)$ ist beschränkt, da für $x = (0,0)$ gilt, dass für alle $y \in c(M)$: $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2} \leq \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Des weiteren ist der Abschluss $c(M)$ nach Fakta 5.1.10 (4) schon abgeschlossen. Nach Korollar 5.2.9. ist eine Menge in $\mathbb{R}^p$ $(p \in \mathbb{N})$ und damit auch in $\mathbb{R}^2$ kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Somit ist $c(M)$ kompakt.

Lösung zu Blatt 9, Aufgabe 5

Sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegeben durch

$$x_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n^2} - 2\right) + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Behauptung: Die Menge aller Häufungspunkte der Folge ist $\text{HP}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{-4, 0, 4\}$. Des weiteren ist

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -4 \qquad \text{und} \qquad \limsup_{n\to\infty} = 4.$$

Beweis: Nach Definition 5.2.1 ist x ein Häufungspunkt einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es eine gegen x konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt. Wir können x_n umschreiben zu

$$x_n = \Big((-1)^n + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\Big)\Big(2 - \frac{1}{n^2}\Big).$$

Die Analyse des ersten Faktors von (x_n) können wir in folgende vier Fälle aufteilen:
1. Für $n = 4m$ mit $m \in \mathbb{N}$: $(-1)^n + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 1 + 1 = 2$
2. Für $n = 4m - 3$ mit $m \in \mathbb{N}$: $(-1)^n + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = -1 + 1 = 0$
3. Für $n = 4m - 2$ mit $m \in \mathbb{N}$: $(-1)^n + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 1 - 1 = 0$
4. Für $n = 4m - 1$ mit $m \in \mathbb{N}$: $(-1)^n + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = -1 - 1 = -2$

Damit gilt für die erste (zweite, dritte, vierte) Teilfolge $n_1(k) = 4k$ ($n_2(k) = 4k - 3$, $n_3(k) = 4k - 2$, $n_4(k) = 4k - 1$) wobei $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_1(k)} = \lim_{k\to\infty} 2\Big(2 - \frac{1}{(4k)^2}\Big) = 4, \qquad \lim_{k\to\infty} x_{n_2(k)} = \lim_{k\to\infty} 0\Big(2 - \frac{1}{(4k-3)^2}\Big) = 0,$$
$$\lim_{k\to\infty} x_{n_3(k)} = \lim_{k\to\infty} 0\Big(2 - \frac{1}{(4k-2)^2}\Big) = 0 \qquad \lim_{k\to\infty} x_{n_4(k)} = \lim_{k\to\infty} (-2)\Big(2 - \frac{1}{(4k-1)^2}\Big) = -4.$$

Wir behaupten, dass es keine weiteren Häufungspunkte gibt. Dies zeigen wir mittels Widerspruch.

Angenommen es gäbe einen weiteren Häufungspunkt x, dann finden wir eine weitere Teilfolge $x_{n_5(k)}$, die zu diesem konvergiert. Analog zu Beispiel 5.2.4, setzen wir

$$J_1 = \{j \in \mathbb{N} : n_5(j) = 4k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}, \qquad J_2 = \{j \in \mathbb{N} : n_5(j) = 4k - 3 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}$$
$$J_3 = \{j \in \mathbb{N} : n_5(j) = 4k - 2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\} \quad J_4 = \{j \in \mathbb{N} : n_5(j) = 4k - 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}.$$

Dann gilt $J_1 \dot\cup J_2 \dot\cup J_3 \dot\cup J_4 = \mathbb{N}$. Somit ist mindestens eine der Mengen unendlich. Den Index dieser Menge (im Falle es sind mehrere können wir einen beliebigen dieser wählen) bezeichnen wir im Folgenden mit i^* (d.h. J_{i^*} ist unendlich). Dann existiert eine streng monotone Bijektion $j : \mathbb{N} \to J_{i^*}$ (siehe Lemma 2.3.18) und die Folge $(x_{n_5(j(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(x_{n_5(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ und konvergiert ebenfalls gegen x. Gleichzeitig ist nach Konstruktion der Mengen J_i ($i = 1, 2, 3, 4$) die Folge $(x_{n_5(j(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_{n_{i^*}(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei i^* eben dieser Index ist, für den die Menge J_{i^*} unendlich ist. Da $(x_{n_{i^*}(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen einen der Punkte aus der Menge $\{-4, 0, 4\}$ konvergiert, konvergiert die Teilfolge $(x_{n_5(j(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ auch gegen diesen. Damit gilt $x \in \{-4, 0, 4\}$ und es gibt keine weiteren Häufungspunkte neben $\{-4, 0, 4\}$.

Nach Proposition 5.2.3, ist der größte Häufungspunkt einer beschränkten Folge gerade der Limes superior und analog der kleinste Häufungspunkt einer Folge der Limes inferior. Daraus folgt, direkt, dass $\liminf_{n\to\infty} x_n = -4$ und $\limsup_{n\to\infty} = 4$.