Übungen zu Analysis 1, 7. Übung

1. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel der 5ten Übung bzw. vorletzten Beispiel der 6-ten Übung sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ die b-Darstellung einer reellen Zahl $x \geq 0$.

   Eine solche Darstellung heißt periodisch ab dem Index $m \in \mathbb{N}$, wenn es eine natürliche Zahl p derart gibt, dass $z_{m+j} = z_{m+kp+j}$ für $j = 0, \dots, p-1$ und alle $k \in \mathbb{N}$.

   Zeigen Sie, dass die Zahl x genau dann rational ist, wenn ihre b-Darstellung ab einem gewissen Index periodisch ist.

   Hinweis: Beim Dividieren einer natürlichen Zahl durch die natürliche Zahl m liegt der Rest immer in der endlichen Menge $\{0, \dots, m-1\}$.

2. Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, divergent, bestimmt divergent (konvergent gegen $+\infty$ oder $-\infty$)? Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert! Begründen Sie Ihre Antworten!

   (i) $a_n = n(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}})$,

   (ii) $a_n = \frac{\sqrt{n^5+3}}{n^2-2n+6}$,

   (iii) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$.

3. Sind folgende Folgen konvergent/divergent? Begründen Sie Ihre Antworten!

   (i) $(3^{-n}((-1)^n n, 2^n + 3, \frac{2}{n^2+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^3$ versehen mit der euklidischen Metrik.

   (ii) $((\frac{-1}{3n+1}, \frac{1}{3^{n+1}}, (-1)^n \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^3$ versehen mit der euklidischen Metrik.

4. Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, divergent, bestimmt divergent? Berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert!

   (i) $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$,

   (ii) $a_n = (1 + \frac{1}{n^2})^{n^3}$,

   (iii) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$, wobei $a, b \in (0, +\infty)$.

5. Man untersuche ob folgende Reihen absolut konvergieren, und berechne gegebenenfalls ihren Grenzwert:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{2^n}).$$

6. Man untersuche, ob folgende Reihen absolut konvergieren, konvergieren oder divergieren:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)n^{1+(-1)^n}}.$$

7. Man untersuche, ob folgende Reihen absolut konvergieren, konvergieren oder divergieren:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3}}.$$

8. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x^n}{2 + x^{4n}}$$

konvergent und für welche divergent?

9. Für welche $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist die komplexe Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konvergent bzw. absolut konvergent?