Übungen zu Analysis 1, 10. Übung

1. Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. Sind $A, B \subseteq X$ nichtleer, so ist der Abstand von A und B definiert durch $d(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$. Für $x \in X$, $\emptyset \neq A \subseteq X$ setzt man $d(x, A) := d(\{x\}, A)$.

   Man zeige $z \in c(A) \Leftrightarrow d(z, A) = 0$ sowie nacheinander die Ungleichungen

   $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ für alle $x, y \in X$, $a \in A$,

   $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$ für alle $x, y \in X$,

   $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

2. Zeigen Sie:

   (i) Hat eine gerichtete Menge $(I, \preceq)$ mindestens ein maximales Element, gibt es also ein $j \in I$ mit $j \succeq i$ für alle $i \in I$ (da $\preceq$ nicht antisymmetrisch sein muss, kann es mehrere solche j geben), so konvergiert ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ genau dann, wenn $x_j = x_k$ für alle maximalen $j, k \in I$, und zwar gegen x_j, wobei $j \in I$ ein solches maximales Element ist.

   (ii) Zeigen Sie für ein endliches M, dass $\lim_{A\in\mathcal{E}(M)} \sum_{m\in A} a_m = \sum_{m\in M} a_m$ (Summe rechts im algebraischen Sinne) und damit, dass die unbedingte Konvergenz im Sinne der Vorlesung für endliches M mit der algebraischen Summe übereinstimmt.

3. Weisen Sie folgende Rechenregeln für konvergente Netze nach.

   Für zwei konvergente Netze $(z_i)_{i\in I}$ und $(w_i)_{i\in I}$ über derselben gerichteten Menge $(I, \preceq)$ aus $\mathbb{R}$ oder aus $\mathbb{C}$ gilt

   $$\lim_{i\in I}(z_i + w_i) = (\lim_{i\in I} z_i) + (\lim_{i\in I} w_i), \quad \lim_{i\in I} |z_i| = \left|\lim_{i\in I} z_i\right|.$$

4. Seien $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}$ zwei reellwertige Netze über derselben gerichteten Menge $(I, \preceq)$. Gilt $y_i \geq K$ für alle $i \succeq k$ mit festen $K \in (0, +\infty)$, $k \in I$, so folgere man daraus, dass mit $\lim_{i\in I} x_i = +\infty$ auch $\lim_{i\in I}(x_i \cdot y_i) = +\infty$.

5. Für $c \in \mathbb{R}$ sei $I = (-\infty, c]$ und $\preceq \subseteq I \times I$ definiert durch $s \preceq t \Leftrightarrow s \geq t$. Weiters Sie $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $x \in X$.

   Weisen Sie zunächst nach, dass $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge abgibt! Zeigen Sie dann, dass für eine Folgen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $(-\infty, c]$ der Ausdruck $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann ein Teilnetz von $(f(t))_{t\in I}$ abgibt, wenn $\lim_{n\to\infty} t_n = -\infty$. Schließlich begründe man, warum $\lim_{t\to-\infty} f(t) := \lim_{t\in I} f(t) = x$ zu $\lim_{n\to\infty} f(t_n) = x$ für alle Folgen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $(-\infty, c]$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = -\infty$ äquivalent ist!

6. Man berechne $\lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{x}$ und $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^{\lfloor x\rfloor}$, wobei $\lim_{x\to+\infty}$ für den Grenzwert des jeweiligen Netzes über die gerichtete Menge $I = (c, +\infty)$ mit $s \preceq t \Leftrightarrow s \leq t$ und einem hinreichend großen $c \in \mathbb{R}$ steht. Begründen Sie Ihre Antwort sorgfältig!

   Hinweis: $(1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor})^{\lfloor x\rfloor} \geq (1 + \frac{1}{x})^{\lfloor x\rfloor} \geq (1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor+1})^{\lfloor x\rfloor}$. Sie dürfen auch Beispiel 3.4.3, (iv), verwenden.

7. Berechnen Sie
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$
für reelle Polynome $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0,\ q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ mit $a_n \neq 0, b_m \neq 0$, indem Sie die Fälle $n < m, n > m$ und $n = m$ unterscheiden! Begründen Sie Ihre Antwort!

8. Man bestimme $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ und zeige $\lim_{x\to\xi} \frac{x^k-\xi^k}{x-\xi} = k\xi^{k-1}$ für feste $\xi \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Begründen Sie Ihre Antwort!

9. Betrachten Sie Mengen M, M_1, M_2 mit $M = M_1 \cup M_2$ und $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Zeigen Sie, dass $\sum_{j\in M} a_j$ genau dann unbedingt konvergiert, wenn $\sum_{j\in M_1} a_j$ und $\sum_{j\in M_2} a_j$ beide unbedingt konvergieren. Zeigen Sie auch, dass dann
$$(\sum_{j\in M_1} a_j) + (\sum_{j\in M_2} a_j) = \sum_{j\in M} a_j\,.$$
Hinweis: Es reicht, von der Konvergenz von $\sum_{j\in M} a_j$ auf die von $\sum_{j\in M_1} a_j$ und $\sum_{j\in M_2} a_j$ zu schließen, und von $x_1 = \lim_{A\in\mathcal{E}(M_1)} \sum_{j\in A} a_j$ sowie $x_2 = \lim_{B\in\mathcal{E}(M_2)} \sum_{j\in B} a_j$ auf $x_1 + x_2 = \lim_{C\in\mathcal{E}(M)} \sum_{j\in C} a_j$ zu schließen.

   Anmerkung: Das Ergebnis widerspricht nicht der Tatsache, dass sich Proposition 5.4.8 nicht umkehren lässt, da hier die Menge $I = \{1, 2\}$ als endliche Menge von spezieller Gestalt ist.