Übungen zu Analysis 1, 6. Übung

1. Man betrachte die Folge $\left(\frac{4n^2+n}{4n^2+n-4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ und bestimme ihren Grenzwert x. Weiters bestimme man zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ das kleinst mögliche $N \in \mathbb{N}$ mit
$$\left| x - \frac{4n^2+n}{4n^2+n-4} \right| < \varepsilon$$
für alle $n \geq N$.

2. Geben Sie eine unbeschränkte Folge in $\mathbb{R}$ an, die eine konvergente Teilfolge hat! Weiters geben Sie eine unbeschränkte Folge in $\mathbb{R}$ an, die keine konvergente Teilfolge hat, die aber auch nicht monoton wachsend ist! Schließlich geben Sie eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ an, die nicht konvergent ist, aber eine streng monoton wachsende Teilfolge besitzt.

3. Zeigen Sie, dass für reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a bzw. b konvergieren, die Folgen $\max(a_n, b_n)$ und $\min(a_n, b_n)$ gegen $\max(a, b)$ bzw. $\min(a, b)$ konvergieren.

4. Ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
konvergent? Wenn ja, warum?

5. Sind folgende Folgen konvergent/divergent? Begründen Sie ihre Antwort!

   (i) $((1+\frac{1}{n^2})^{2n-2})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Metrik. Hinweis: Betrachte eins durch die Folge, wende die Bernoullische Ungleichung an und gehe wieder zu den Kehrwerten über!

   (ii) $((1-\frac{3}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Metrik. Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Folge $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, wobei der Grenzwert als Eulersche Zahl e bezeichnet wird; vgl. Buch Seite 86.

6. Sind die Folgen (i) und (ii) konvergent/divergent? Begründen Sie Ihre Antwort!

   (i) $((-1+2\mathrm{i}+\frac{1-\mathrm{i}}{n})^{10}-1)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ versehen mit der Euklidischen Metrik.

   (ii) $(\sqrt{9n^2+2n+1}-\sqrt{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ versehen mit der Euklidischen Metrik.

7. Untersuchen Sie folgende rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert!
$$x_1 = 0 \text{ und } x_{n+1} = \frac{1}{2}(a + x_n^2) \text{ für } n \in \mathbb{N}, \text{ wobei } 0 \leq a \leq 1\,.$$
Hinweis: Überprüfen Sie zuerst auf Monotonie und Beschränktheit. Beweise dafür mittels vollständiger Induktion! Der Grenzwert (falls existent) erfüllt $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a + x_n^2) = \ldots$

8. Sind folgende metrische Räume vollständig oder nicht? Begründen Sie ihre Antwort! Hier ist d_2 die euklidische Metrik.

(i) $\langle \mathbb{C} \setminus \{0\}, d_2 \rangle$.

(ii) $\langle [0,1] \cup [2,3], d_2 \rangle$.

(iii) $\langle \mathbb{Z}, d_2 \rangle$.

9. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel der 5ten Übung weise man nach, dass für jedes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \in D$ die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = z_0 + \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{1}{b^j} \,,$$

eine Cauchy-Folge bildet und infolge konvergent ist. Weiters zeige man, dass für zwei verschiedene $(z_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \in D$ die entsprechenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verschiedene Grenzwerte haben.

Anmerkung: Zusammen mit dem letzten Beispiel der 5ten Übung erkennt man, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n$ eine bijektive Funktion von D auf die Menge aller nicht negativen Elemente von $\mathbb{R}$ abgibt. Für $b = 10$ und für Zahlen ≥ 0 ist das genau die bekannte Dezimaldarstellung der nicht negativen reellen Zahlen.

10. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und sei $\xi \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\limsup_{n\to\infty} x_n < \xi$ genau dann, wenn es ein $q < \xi$ derart gibt, dass $x_n \leq q$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie auch, dass $\limsup_{n\to\infty} x_n > \xi$ genau dann, wenn es ein $q > \xi$ derart gibt, dass $x_n \geq q$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.