Übungen zu Analysis 1, 12. Übung

1. Man zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildungen $\mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max\{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto \min\{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}$ stetig sind.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $f(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$, wobei $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ eine (von $(x_1, \dots, x_n)$ abhängige) Bijektion derart ist, dass $x_{\sigma(k)} \leq x_{\sigma(k+1)}$ für $1 \leq k < n$; die Existenz von σ bei gegebenem $(x_1, \dots, x_n)$ zeigt man unschwer durch vollständige Induktion nach n. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

   Hinweis: Wir bezeichnen für $k = 1, \dots, n$ mit $\mathcal{P}_k(\{1, \dots, n\})$ die Menge aller Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ mit genau k Elementen, also

   $$\mathcal{P}_k(\{1, \dots, n\}) := \{A \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}) : \#A = k\},$$

   wobei $\#A$ für die Mächtigkeit der Menge A steht.

   Zeigen Sie $x_{\sigma(k)} = \min\{\max\{x_j : j \in A\} : A \in \mathcal{P}_k(\{1, \dots, n\})\}$ für $k = 1, \dots, n$ unter Umständen mit Hilfe der Tatsache, dass $\{\sigma(A) : A \in \mathcal{P}_k(\{1, \dots, n\})\} = \mathcal{P}_k(\{1, \dots, n\})$.

3. Weisen Sie nach, dass eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$ genau dann

   $$\forall x, y \in I : \; x < y \Rightarrow [x, y] \subseteq I .$$

   erfüllt, wenn I eine der folgenden Formen hat

   $$\emptyset, (a, b), [a, b], (a, b], [a, b), (a, +\infty), (-\infty, a), [a, +\infty), (-\infty, a], \mathbb{R} .$$

   Hinweis: Für die $\Rightarrow$ Richtung unterscheiden Sie, ob I nach oben (unten) beschränkt ist, und ob in diesem Fall die Menge ihr Supremum (Infimum) enthält oder nicht.

4. Zeigen Sie, dass für $(0, 0) \neq (u, v) \in \mathbb{R}^2$ die Abbildungen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $g(\lambda) = \lambda(u, v)$ und $g^{-1} : M \to \mathbb{R}$ mit $M := g(\mathbb{R}) = \{\lambda(u, v) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ beide stetig sind.

   Betrachten Sie anschließend die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0, 0) = 0$ und

   $$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0) .$$

   Zeigen Sie, dass für jeden eindimensionalen Unterraum $M := \{\lambda(u, v) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit $(0, 0) \neq (u, v) \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $f|_M$ stetig ist.

   Hinweis: Es könnte hilfreich sein, zuerst zu zeigen, dass eine Folge $(\lambda_n(u, v))_{n\in\mathbb{N}}$ in D genau dann bzgl. d_2 konvergiert, wenn $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert!

5. Mit der Notation aus dem vorherigen Beispiel zeige man, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nicht stetig ist.

   Hinweis: Suchen Sie spezielle, gegen $(0, 0)$ konvergente Folge aus $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, für welche die Bildfolge nicht gegen $f(0, 0)$ konvergiert!

   Anmerkung: Insbesondere kann es für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vorkommen, dass die Abbildungen $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x, b) \in \mathbb{R}$ sowie $\mathbb{R} \ni y \mapsto f(a, y) \in \mathbb{R}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ stetig sind, aber f selber nicht stetig ist.

6. Gegeben sei ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ mit reellen Koeffizienten und $a_n \neq 0$. Zeigen Sie unter Verwendung des Zwischenwertsatzes:

   Ist n ungerade, so hat p mindestens eine reelle Nullstelle.

   Ist n gerade und $a_0 a_n < 0$, so hat p mindestens zwei verschiedene reelle Nullstellen.

7. Seien $\langle X, d_X \rangle$, $\langle Y, d_Y \rangle$ metrische Räume und gelte $D \subseteq X$. Man zeige, dass eine Funktion $f : D \to Y$ genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn im Fall $0 = \inf\{d_X(s,t) : s, t \in D, s \neq t\}$ auch

$$\lim_{(s,t)\in R} d_y(f(s), f(t)) = 0\,,$$

   wobei $R := \{(s,t) \in D \times D : s \neq t\}$ durch $(s,t) \preceq (u,v) :\Leftrightarrow d_X(s,t) \geq d_X(u,v)$ gerichtet ist.

8. Man betrachte folgende Funktion als Funktion von $\mathbb{C} \setminus N$ nach $\mathbb{C}$ (beide mit der euklidischen Metrik versehen), wobei N die Menge der Nullstellen des Nenners ist.

$$f(z) = \frac{z^3 + 2z^2 - 13z + 10}{z^4 + 5z^3 - z^2 - 5z}\,.$$

   Man zeige, dass $f : \mathbb{C} \setminus N \to \mathbb{C}$ stetig ist. Man bestimme auch die maximale Teilmenge M von $\mathbb{C}$ an, auf die sich f stetig fortsetzen lässt. Begründung!

9. An welchen Punkten ist die folgende Funktion stetig und welche Art von Unstetigkeit liegt an den Unstetigkeitsstellen vor?

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,, & \text{falls } x \in [-1,1]\,, \\ x+1\,, & \text{falls } x < -1\,, \\ x-1\,, & \text{falls } x > 1\,. \end{cases}$$

   Weiters bestimme man, für welche Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

$$g(x) = \begin{cases} (x-a)^2\,, & \text{falls } x < -1\,, \\ 1-x^2\,, & \text{falls } x \in [-1,2]\,, \\ bx^3 + x\,, & \text{falls } x > 2\,. \end{cases}$$