Übungen zu Analysis 1, 9. Übung

1. Mit der Notation aus dem zweiten Beispiel der 8ten Übung zeige man: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge bzgl. d genau dann, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge bzgl. χ ist. $\langle X, d\rangle$ ist genau dann vollständig, wenn $\langle X, \chi\rangle$ vollständig ist. Die Menge der Häufungspunkte von E sowie $c(E)$ bzgl. d und χ stimmen überein. Ein $E \subseteq X$ ist offen, abgeschlossen bzw. kompakt bezüglich d genau dann, wenn E offen, abgeschlossen bzw. kompakt bezüglich χ ist.

2. Man bestimme die Häufungspunkte, die Menge der isolierten Punkte, sowie den Abschluss der Menge
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2})$$
als Teilmenge von $\mathbb{R}$ versehen mit der Euklidischen Metrik. Man gebe auch an, ob der Abschluss dieser Menge kompakt ist!

3. Sei M folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ versehen mit d_2
$$M := \{(\frac{1}{n}, t) : t \in (0, 1],\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$
Ist diese Menge offen, ist sie abgeschlossen? Man bestimme alle Häufungspunkte von M und den Abschluss von M. Ist der Abschluss $c(M)$ kompakt? Begründen Sie Ihre Antworten sorgfältig!

4. Man bestimme die Menge aller Häufungspunkte der Folge
$$(n + i + (-1)^n(n - i^n))_{n\in\mathbb{N}}$$
in $\mathbb{C}$ versehen mit der euklidischen Metrik. Weiters bestimme man die Häufungspunkte der Menge
$$\{n + i + (-1)^n(n - i^n) : n \in \mathbb{N}\}$$
als Teilmenge von $\mathbb{C}$.

5. Bestimmen Sie genau die Menge aller Häufungspunkte sowie Limes Superior und Limes Inferior der Folge
$$\left((-1)^{n+1}(\tfrac{1}{n^2} - 2) + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(2 - \tfrac{1}{n^2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
in $\mathbb{R}$.

6. Seien $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum, $K \subseteq X$ kompakt und $O_k \subseteq X$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ offen. Zeigen Sie, dass es im Falle $K \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} O_k$ sogar ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq \bigcup_{k\in\{1,\dots,n\}} O_k$ gibt.

   Hinweis: Wäre die Aussage falsch, so könnte man für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K \setminus \bigcup_{k\in\{1,\dots,n\}} O_k$ finden. Die Kompaktheit ergibt ein $x \in K$, womit $U_\epsilon(x) \subseteq O_m$ für gewisse $m \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$.

7. Sei (X, d) der metrische Raum mit $X = \mathbb{Q}$ und $d(x, y) = |x - y|$. Zeigen Sie, dass $[0, 1]_{\mathbb{Q}} = \{r \in \mathbb{Q} : 0 \le r \le 1\}$ in (X, d) abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt ist.

8. Sind I und J gerichtete Mengen versehen mit Relationen $\preceq_I$ bzw. $\preceq_J$, so zeige man dass $(I \times J, \preceq)$ ebenfalls eine gerichtete Menge ist, wenn man

$$(i_1, j_1) \preceq (i_2, j_2) \ :\Leftrightarrow \ i_1 \preceq_I i_2 \wedge j_1 \preceq_J j_2$$

definiert.

9. Weisen Sie nach, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum $\langle X, d\rangle$ genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn $\lim_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} d(x_m, x_n) = 0$, wobei $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wie in (5.3) auf Seite 140 gerichtet ist.