Übungen zu Analysis 1, 13. Übung

1. An welchen Punkten ist die folgende Funktion stetig und welche Art von Unstetigkeit liegt an den Unstetigkeitsstellen vor?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1\,, & \text{falls } \; -1 \le x \le 0\,, \\ 1 - x\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

   Weiters bestimme man, für welche Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2\,, & \text{falls } \; x \le 1\,, \\ ax - x^3\,, & \text{falls } \; 1 < x \le 2\,, \\ bx^2\,, & \text{falls } \; x > 2\,. \end{cases}$$

2. Bestimmen Sie für die unten stehenden Funktionenfolgen (f_n) die jeweilige punktweise Grenzfunktion $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Konvergieren die Funktionenfolgen auch gleichmäßig auf D gegen f? Begründungen!

$$\text{a) } f_n(x) = \frac{n}{n^2 + x^2}\,, \quad D = \mathbb{R} \qquad \text{b) } f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}\,, \quad D = [0, \infty)\,.$$

3. Ist die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf E mit Werten in $Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ nur punktweise, gleichmäßig oder absolut als Funktionenreihe konvergent? Dabei ist

   (i) $E = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}, f_n = \frac{\cos nx + \sin nx}{n^2}$.

   (ii) $E = [-1, 1], Y = \mathbb{R}, f_n = (-1)^n \frac{x}{n}$.

   (iii) $E = [0, 1), Y = \mathbb{R}, f_n = x^n$.

4. Sei $E = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $z \in \mathbb{C}$ fest! Betrachte $f_n : E \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiert durch ($\binom{k}{n} = 0$ für $n > k$)

$$f_n(k) = \frac{1}{k^n} \binom{k}{n} z^n\,.$$

   Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ als Funktionenreihe absolut konvergiert! Berechnen Sie die Grenzfunktion $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

   Wenn Sie das Limesvertauschungslemma 6.6.12 auf die Funktionenfolge (mit Folgenindex $N \in \mathbb{N}$) der Partialsummen $s_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$ und die Folge $x_k = k$ anwenden, welche Gleichheit erhalten Sie dann?

5. Geben Sie die Konvergenzradien von $\sum_{n=0} (2 + (-1)^n)^n z^n$, von $\sum_{n=0} n! z^n$ sowie von $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1})^n z^n$ an.

6. Man zeige mit Hilfe der Potenzreihendarstellung von exp, dass $\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$ für beliebiges $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Man berechne daraus $\lim_{x\to-\infty} x^n \exp(x)$, sowie $\lim_{y\to 0+} y (\ln y)^n$.

   Hinweis: Hat eine Potenzreihe $f(z)$ bei Null eine Nullstelle, so ist auch $\frac{f(z)}{z}$ eine Potenzreihe und daher stetig.

7. Bestimmen Sie für die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{z^k}{k^3}$ den Konvergenzradius R. Geben Sie auch an, für welche $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$ die Reihe konvergiert.

   Zeigen Sie schließlich, dass obige Potenzreihe als Funktionenreihe von Funktionen von $K_R^{\mathbb{C}}(0)$ nach $\mathbb{C}$ absolut konvergiert und die Grenzfunktion auf $K_R^{\mathbb{C}}(0)$ stetig ist! Begründung!

8. Man zeige mit Hilfe geeigneter Potenzreihen, dass $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t - t}{t^2} = 0$ und $\lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t^2} = -\frac{1}{2}$. Hier ist t immer so zu verstehen, dass es in $\mathbb{R}$ läuft. Weiters berechne man $\lim_{t\to 0+} t(\cos \frac{1}{t} + 1)$.