Übungen zu Analysis 1, 1.Übung

Achtung: In der Vorlesung Analysis 1 beginnen die natürlichen Zahlen mit 1, also $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

1. Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen und $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen.

   Mit den aus der Schule bekannten Eigenschaften betrachte man
   $$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ (p, n) \mapsto \frac{p}{n}\,.$$
   Ist diese Funktion injektiv, surjektiv, bijektiv? Was bedeutet $((p, n), (q, m)) \in \ker f$; siehe zehntes EIMA Übungsbeispiel.

   Falls f nicht bijektiv ist: Wie kann man den Definitionsbereich einschränken, dass man eine bijektive Funktion erhält?

2. Sei $\langle G, \cdot, e\rangle$ eine Gruppe (siehe EIMA - Bemerkung 2.5.15). Zeigen Sie, dass für jedes Element $\epsilon \in G$ mit der Eigenschaft, dass $\epsilon \cdot x = x = x \cdot \epsilon$ für alle $x \in G$, die Gleichheit $\epsilon = e$ folgt; also ist das neutrale Element einer Gruppe eindeutig.

   Hinweis: Wenden Sie die vorausgesetzte Gleichung für $x = e$ an!

   Anmerkung: Aus der Schule bekannte Beispiele für Gruppen sind etwa $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$, also die Menge der ganzen Zahlen versehen mit der Addition $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ als Operation und mit dem neutralen Element 0, oder auch $\langle (0, +\infty), \cdot, 1\rangle$, also die Menge aller reellen Zahlen größer als Null mit der Multiplikation $\cdot : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ als Operation und dem neutralen Element 1.

3. Sei $\langle G, \cdot, e\rangle$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass für $x, y, z \in G$ aus $x \cdot y = e = y \cdot z$ jedenfalls $x = z$ folgt, wodurch sich das inverse Element aus der Definition von Gruppe als eindeutig herausstellt. Dieses inverse Element von $x \in G$ wird meist als x^{-1} angeschrieben.

   Hinweis: Werfen Sie einen Blick ins EIMA Skriptum, Beweis von Lemma 2.5.7.

4. Bestimmen Sie die eindeutige Inverse des Elementes $x \in G$ mit der Gruppe $\langle G, \cdot, e\rangle$,

   wenn $\langle G, \cdot, e\rangle = \langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$ (siehe Beispiel 2) und $x = -14$,

   wenn $\langle G, \cdot, e\rangle = \langle (0, +\infty), \cdot, 1\rangle$ (siehe Beispiel 2) und $x = \frac{35}{14}$,

   wenn $\langle G, \cdot, e\rangle = \langle \mathrm{Sym}(M), \circ, \mathrm{id}_M\rangle$ mit $M = \{1, \dots, n\}$ (siehe EIMA - Beispiel 2.5.13) und $x = f$, wobei $f(1) = 2, f(2) = 3, \dots, f(n-1) = n, f(n) = 1$.

5. Sei $M = \{1, \dots, n\}$ für irgendeine natürliche Zahl n. Ist f eine bijektive Funktion von M auf M, so zeige man, dass es eine Zahl k gibt mit
   $$f^{(k)} = \mathrm{id}_M\ .$$
   Wie lässt sich hier die Inverse von f in der Gruppe $\langle \mathrm{Sym}(M), \circ, \mathrm{id}_M\rangle$ ausdrücken?

   Hinweis: Man überlege sich zuerst, dass die Menge aller Abbildungen von M nach M endlich ist. Mit dem Schubfachprinzip schließe man auf $f^{(l)} = f^{(m)}$ für gewisse verschiedene $l, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und daraus auf das, was zu zeigen ist.

6. Sei $M = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $N = \{2, \ldots, 9\}$ und $f : N \to M,\ n \mapsto n + 1$. Wie viele Fortsetzungen von f zu einer Funktion $g : M \to M$ gibt es? Weiters gebe man alle Fortsetzungen von f zu einer Funktion $g : M \to M$ derart an, dass g surjektiv ist.

7. Sei $\langle G, \cdot, e\rangle$ eine Gruppe. Jedem $n \in \mathbb{N}$ sei ein $c(n) \in G$ zugeordnet, womit $c : \mathbb{N} \to G$ eine Funktion darstellt.

   Wir wollen $\prod_{k=1}^{n} c(k)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Sinn geben. Dazu sei $Y := \mathbb{N} \times G$, $g : Y \to Y$ definiert durch $(n, x) \mapsto (n + 1, x \cdot c(n + 1))$ und $y_0 = (1, c(1))$. Nach dem Rekursionssatz aus der EIMA gibt es eine eindeutige Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to Y$ mit $\phi(1) = y_0 = (1, c(1))$ und $\phi(n + 1) = g(\phi(n))$. Nun sei $\prod_{k=1}^{n} c(k)$ definiert als die zweite Komponente von $\phi(n)$. Für $\prod_{k=1}^{n} c(k)$ schreibt man auch $c(1)\cdot\ldots\cdot c(n)$.

   Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die erste Komponente von $\phi(n)$ mit n übereinstimmt, dass $\prod_{k=1}^{n+1} c(k) = \prod_{k=1}^{n} c(k) \cdot c(n + 1)$, und dass $\prod_{k=1}^{n} c(k) \cdot \prod_{k=1}^{m} c(n+k) = \prod_{k=1}^{m+n} c(k)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Dabei ist $\prod_{k=1}^{m} c(n+k) = \prod_{k=1}^{m} d(k)$, wenn man $d(k) := c(n + k),\ k \in \mathbb{N}$ setzt.

   Hinweis: Für ein besseres Verständnis überlegen Sie zuerst, dass $\prod_{k=1}^{1} c(k) = c(1)$ und $\prod_{1}^{2} c(k) = c(1) \cdot c(2)$ gilt.

   Bemerkung: Ist $\langle K, +, \cdot\rangle$ ein Körper (siehe Beispiel 19 der EIMA Übung), und ist $c : \mathbb{N} \to K$ eine Funktion, so ist auch

   $$\sum_{k=1}^{n} c(k) = c(1) + \cdots + c(n)$$

   durch dieses Beispiel wohldefiniert. Man wende dazu das aktuelle Beispiel einfach auf die Gruppe $(K, +, 0)$ an.

8. Man stelle eine Formel für die Funktion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

   $$p(n) := 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

   auf und beweise diese mittels vollständiger Induktion. Entsprechendes mache man mit $p(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

   Hinweis: Setzen Sie unbestimmt $p(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$ an, und ermitteln Sie die unbekannten Koeffizienten durch Einsetzen von $n = 1$, $n = 2$, usw. . Für $p(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ setzen Sie unbestimmt $p(n) = an^2 + bn + c$ an.

9. Man stelle eine Formel für die Funktion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

   $$p(n) := \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)^2 = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n - 1)^2$$

   auf, und beweise diese mittels vollständiger Induktion.

   Hinweis: Setzen Sie unbestimmt $p(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$ an, und ermitteln Sie die unbekannten Koeffizienten durch Einsetzen von $n = 1$, $n = 2$, usw. .

10. Geben Sie eine Funktion an, die $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijektiv auf $\mathbb{N}$ abbildet.