Übungen zu Analysis 1, 8. Übung

1. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Man sagt, dass $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergiert, wenn die Folge $P_N = \prod_{n=1}^{N} z_n$ für $N \to \infty$ konvergiert. In diesem Falle bezeichnet $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ den Grenzwert dieser Folge.

   Man zeige, dass dann im Fall $\prod_{n=1}^{\infty} z_n \neq 0$ immer $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$ gilt.

2. Sei X eine nichtleere Menge und seien d und χ zwei Metriken auf X. d und χ heißen äquivalent, wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ derart gibt, dass

   $$ad(x, y) \leq \chi(x, y) \leq bd(x, y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in X\,.$$

   Zeigen Sie, dass $U^{\chi}_{a\epsilon}(x) \subseteq U_{\epsilon}(x)$ und $U_{\epsilon}(x) \subseteq U^{\chi}_{b\epsilon}(x)$, wobei $U_{\epsilon}(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$ und $U^{\chi}_{\epsilon}(x) = \{y \in X : \chi(x, y) < \epsilon\}$, und dass $x_n \to x$ bezüglich d genau dann, wenn $x_n \to x$ bezüglich χ.

   Anmerkung: d_1, d_2, d_∞ sind äquivalent auf $\mathbb{R}^p$.

3. Bestimmen Sie die Menge aller Häufungspunkte sowie den Abschluss von $U_1(0)$ und von $(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})\cap U_1(0)$ in dem metrischen Raum $\langle\mathbb{C}, d_2\rangle$, wobei $U_1(0)$ die offene Einheitskugel bezüglich d_2 ist.

4. Ist $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ versehen mit d_2 offen und/oder abgeschlossen? Man beantworte dieselbe Frage auch für die Teilmenge $(2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ von $\mathbb{R}^3$ versehen mit d_2.

5. Ist $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ offen und/oder abgeschlossen? Man beantworte dieselbe Frage auch für die Teilmenge $\mathbb{R}^3 \setminus (2\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ von $\mathbb{R}^3$ (versehen mit d_2).

6. Man zeige anhand eines Beispieles in $\mathbb{R}$, dass der Durchschnitt von unendlich vielen offenen Teilmengen nicht mehr offen sein muss.

   Weiters gebe man ein Beispiel einer Teilmenge von $\mathbb{R}$ an, die nur aus isolierten Punkten besteht, aber nicht abgeschlossen ist!

7. Sind folgende Mengen M offen, abgeschlossen, beschränkt? Warum? Man bestimme auch die Menge aller Häufungspunkte von M! Eine Skizze kann gegebenenfalls hilfreich sein!

   (i) $M = \mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$,

   (ii) $M = \{x + y : x, y \in [0, 1]\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$,

   (iii) $M = \{x + y : x \in [0, 1],\ y \in (0, 1)\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$.

8. Sind folgende Mengen M offen, abgeschlossen, beschränkt? Warum? Man bestimme auch die Menge aller Häufungspunkte von M! Eine Skizze kann gegebenenfalls hilfreich sein!

   (i) $M = \{z : -\mathrm{Re}(z) + 1 \in (-1, 3)\}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$,

   (ii) $M = \{x : x^2 - 3x + 2 > 0\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$,

   (iii) $M = \{z : z^2 - z - 2 \neq 0\}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$.

9. Sind folgende Mengen offen, abgeschlossen, beschränkt? Warum? Man bestimme auch die Menge aller Häufungspunkte von M! Eine Skizze kann gegebenenfalls hilfreich sein!

(i) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[n, n+\frac{1}{2}]$ in $(\mathbb{R}, d_2)$

(ii) $\{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}]$ in $(\mathbb{R}, d_2)$

(iii) $M = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 \in [0, 9]\}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$.