# Übungen zu Analysis 1, 11. Übung

1. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ nicht beschränkt und gerichtet durch $z \preceq w \Leftrightarrow |z| \leq |w|$. Zeigen Sie: Netze $(f(z))_{z\in D}$ mit $f : D \to Y$ besitzen Teilfolgen und $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann eine solche, wenn $|z_n| \to +\infty$ für $n \to \infty$.

2. Berechnen Sie
$$\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^n}\Big).$$
Hinweis: Wenden Sie die Überlegungen vor Beispiel 5.4.10 nach einer Indexanpassung an auf $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}_{\geq 2}\times\mathbb{N}_{\geq 2}}\frac{1}{m^n}$.

3. Zeigen Sie, dass $\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} z^n$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}(n+1)z^n$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ unbedingt konvergieren. Zeigen Sie auch, dass dabei
$$\sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}(n+1)z^n = (1-z)^{-2}\,.$$

4. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die definiert ist als $f(x,y) := \max\{x,y\}$. Hierbei ist $\mathbb{R}^2$ versehen mit der euklidischen Metrik. Man zeige, dass $f$ stetig ist.

5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als
$$f(x) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cup\{0\}\,,\\ \frac{1}{n}\,, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}, x = \frac{m}{n} \text{ mit } n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{Z},\ \mathrm{ggT}\{m,n\} = 1\,. \end{cases}$$
Zeige, dass $f$ in jedem irrationalen Punkt stetig ist.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass es zu jeder irrationalen Zahl $x$ und vorgegebenen $\epsilon > 0$ ein Intervall $(x-\delta, x+\delta)$ derart gibt, dass wenn $\frac{p}{q} \in (x-\delta, x+\delta)\cap\mathbb{Q}$ sicher $\frac{1}{|q|} < \epsilon$. Dazu betrachte man eine natürliche Zahl $m \geq 1 + \frac{1}{\epsilon}$ und die Menge $\frac{1}{m!}\mathbb{Z}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ und zeige, dass diese abgeschlossen und infolge ihr Komplement offen ist.

6. Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass $x \mapsto d(x,A)$ eine stetige Abbildung von $X$ nach $\mathbb{R}$ ist. Weiters zeige man, dass in jeder kompakten nichtleere Teilmenge $K \subseteq X$ wenigstens ein $x$ liegt, sodass $d(K,A) = d(x,A)$.

   Schließlich zeige man für nichtleeres, kompaktes $K \subseteq X$ und nichtleeres, abgeschlossenes $A \subseteq X$, dass $A \cap K \neq \emptyset \Leftrightarrow d(A,K) = 0$.

7. Geben Sie ein Beispiel für einen metrischen Raum $\langle X, d\rangle$ und nichtleere und abgeschlossene Teilmengen $A, B$ von $X$, wo $d(A,B) = 0$ und $A \cap B = \emptyset$ zutrifft. Begründungen!

   Hinweis: Betrachten Sie als metrischen Raum die Ebene und als Teilmengen $\mathbb{R}\times\{0\}$ und den Graphen der Funktion $(0,+\infty) \ni x \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$. Skizze!

8. Seien $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ und $\mathbb{R}^m$ versehen mit der euklidischen Metrik.

   Zeigen Sie: Ist $A$ eine $m\times n$-Matrix, so ist die lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax$ (hier betrachte man $x$ als 'stehenden' und nicht als 'liegenden' Vektor) stetig. Man zeige auch, dass $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n, (x,y) \mapsto x+y$ und $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ (skalare Multiplikation) stetig sind.