



Grundbau und Bodenmechanik

## Differentialgleichungen in der Geotechnik

LVA Nr. 221.008

Auflage 2023S

---

Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Dietmar ADAM  
Forschungsbereich für Grundbau, Boden- und Felsmechanik  
Institut für Geotechnik  
Technische Universität Wien  
Karlsplatz 13/220-2  
A-1040 Wien  
E-Mail: dietmar.adam@tuwien.ac.at

Bearbeitung:  
Univ.Ass. Dipl.-Ing. Adrian Brunner BSc  
Univ.Ass. Dipl.-Ing. Manuel Dafert BSc

Diese Unterlagen dienen als begleitendes Studienmaterial zur Lehrveranstaltung „Grundbau und Bodenmechanik“ (LVA Nr. 221.008) an der TU Wien. Ohne schriftliche Genehmigung des Verfassers ist es nicht gestattet, die Studienblätter oder Teile daraus zu vervielfältigen.

Die Studienblätter werden nach bestem Wissen und Gewissen angefertigt. Für den Inhalt wird aber keine Gewähr übernommen. Entsprechende Hinweise auf Fehler nimmt der Verfasser gerne entgegen.



# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Versuche zur Bestimmung der Durchlässigkeit von Böden</b>                            | <b>5</b>  |
| 1.1      | Herleitung der Differentialgleichung . . . . .  | 5         |
| 1.1.1    | Grundlagen und Motivation . . . . .   | 5         |
| 1.1.2    | Laborversuche zur Bestimmung der Durchlässigkeit . . . . .                              | 6         |
| 1.2      | Lösung der Differentialgleichung . . . . .  | 8         |
| 1.3      | Beispiel . . . . .  | 9         |
| <b>2</b> | <b>Brunnenformeln nach Dupuit – Thiem</b>   | <b>11</b> |
| 2.1      | Herleitung der Differentialgleichungen . . . . .  | 11        |
| 2.1.1    | Grundlagen und Motivation . . . . .   | 11        |
| 2.1.2    | Freier Grundwasserspiegel . . . . .   | 12        |
| 2.1.3    | Gespannter Grundwasserspiegel . . . . .   | 14        |
| 2.2      | Lösung der Differentialgleichung . . . . .  | 15        |
| 2.2.1    | Freier Grundwasserspiegel . . . . .   | 15        |
| 2.2.2    | Gespannter Grundwasserspiegel . . . . .   | 16        |
| 2.3      | Beispiel . . . . .  | 16        |
| <b>3</b> | <b>Siloerddruck</b>   | <b>19</b> |
| 3.1      | Herleitung der Differentialgleichung . . . . .  | 19        |
| 3.1.1    | Grundlagen und Motivation . . . . .   | 19        |
| 3.1.2    | Vertikaler Spannungszustand in einer Silofüllung . . . . .                              | 20        |
| 3.2      | Lösung der Differentialgleichung . . . . .  | 22        |
| 3.2.1    | Homogene Lösung . . . . .   | 22        |
| 3.2.2    | Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mittels Variation der Konstanten . . . . . | 23        |
| 3.2.3    | Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mittels Partikulärlösung . . . . .         | 24        |
| 3.2.4    | Varianten der Differentialgleichung . . . . .   | 25        |
| 3.3      | Beispiel 1 . . . . .  | 27        |
| 3.4      | Beispiel 2 . . . . .  | 30        |
| <b>4</b> | <b>Bettungsmodulverfahren</b>   | <b>33</b> |
| 4.1      | Herleitung der Differentialgleichung . . . . .  | 33        |
| 4.1.1    | Grundlagen und Motivation . . . . .   | 33        |
| 4.1.2    | Biegelinie eines elastisch gebetteten Balkens . . . . .                                 | 33        |
| 4.2      | Lösung der Differentialgleichung . . . . .  | 35        |
| 4.2.1    | Homogene Lösung . . . . .   | 35        |
| 4.2.2    | Inhomogene Lösung . . . . .   | 38        |
| 4.3      | Beispiel . . . . .  | 39        |
| <b>5</b> | <b>Allgemeine Wärmeleitung</b>  | <b>41</b> |
| 5.1      | Herleitung der Differentialgleichung . . . . .  | 41        |
| 5.1.1    | Grundlagen und Motivation . . . . .   | 41        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 5.1.2    | Wärmebilanzierung . . . . .                            | 41        |
| 5.2      | Lösung der Differentialgleichung . . . . .             | 45        |
| 5.3      | Beispiel . . . . .                                     | 45        |
| <b>6</b> | <b>Zweidimensionale stationäre Grundwasserströmung</b> | <b>49</b> |
| 6.1      | Herleitung der Differentialgleichung . . . . .         | 49        |
| 6.1.1    | Grundlagen und Motivation . . . . .                    | 49        |
| 6.1.2    | Massenerhaltung . . . . .                              | 49        |
| 6.2      | Lösung der Differentialgleichung . . . . .             | 51        |
| 6.2.1    | Graphisches Verfahren . . . . .                        | 52        |
| 6.2.2    | Finite-Differenzen-Methode . . . . .                   | 54        |
| 6.2.3    | Bestimmung der Sickermenge . . . . .                   | 55        |
| 6.3      | Beispiel . . . . .                                     | 58        |
| <b>7</b> | <b>Eindimensionale Konsolidationstheorie</b>           | <b>59</b> |
| 7.1      | Herleitung der Differentialgleichung . . . . .         | 59        |
| 7.1.1    | Grundlagen und Motivation . . . . .                    | 59        |
| 7.1.2    | Massenerhaltung . . . . .                              | 62        |
| 7.1.3    | Spannungs-Stauchungs-Beziehung . . . . .               | 63        |
| 7.1.4    | Zusammensetzung der Differentialgleichung . . . . .    | 64        |
| 7.2      | Lösung der Differentialgleichung . . . . .             | 65        |
| 7.2.1    | Allgemeine Lösung . . . . .                            | 65        |
| 7.2.2    | Verfestigungs- bzw. Konsolidationsgrad . . . . .       | 73        |
| 7.2.3    | Modellgesetz der Zeitsetzung . . . . .                 | 74        |
| 7.3      | Beispiel . . . . .                                     | 76        |

# Kapitel 1

## Versuche zur Bestimmung der Durchlässigkeit von Böden

### 1.1 Herleitung der Differentialgleichung

#### 1.1.1 Grundlagen und Motivation

Beim Durchströmen eines granularen Mediums, wie zum Beispiel Boden, wird der durchströmenden Flüssigkeit ein größerer Widerstand entgegengesetzt als bei der Durchströmung eines äquivalenten offenen Querschnitts. Handelt es sich bei der Strömung um eine laminare Grundwasserströmung, so kann die (über den durchströmten Querschnitt gemittelte) Geschwindigkeit dieser Strömung mithilfe des Gesetzes von DARCY berechnet werden [Adam 2019]:

$$v = k_f i \tag{1.1}$$

mit:  $v$  ... Filtergeschwindigkeit [m/s]  
 $k_f$  ... Durchlässigkeitsbeiwert [m/s]  
 $i$  ... hydraulischer Gradient [-]

Der hydraulischen Gradient in Glg. 1.1 gibt dabei die Veränderung der Potentialhöhendifferenz (Differenz der Energiehöhen) zwischen zwei benachbarten, räumlichen Punkten (durchströmte Länge) der Strömung an (vergleiche Abb. 1.1). Im Falle eines linearen Potentialabbaus ist der hydraulische Gradient konstant und kann folgendermaßen berechnet werden:

$$i = \frac{h}{L} \tag{1.2}$$

mit:  $h$  ... Energiehöhendifferenz [m]  
 $L$  ... durchströmte Länge [m]

Während der hydraulische Gradient eine variable Größe darstellt, die von den örtlichen Verhältnissen abhängig ist, handelt es sich beim Durchlässigkeitsbeiwert  $k_f$  um eine konstant angenommene (Boden-)Kenngröße. Der Durchlässigkeitsbeiwert kann entweder durch Feldversuche oder über Laborversuche bestimmt werden, wobei im Allgemeinen folgende Versuchsvariationen Anwendung finden:

- Versuche mit konstanter Druckhöhe (durchlässigere Böden, wie z. B. Sande; üblicher Durchlässigkeitsbeiwert zwischen  $10^{-2}$  m/s und  $10^{-6}$  m/s)
- Versuche mit fallender Druckhöhe (gering durchlässige Böden, wie z. B.: Schluffe und Tone; üblicher Durchlässigkeitsbeiwerte kleiner  $10^{-6}$  m/s)

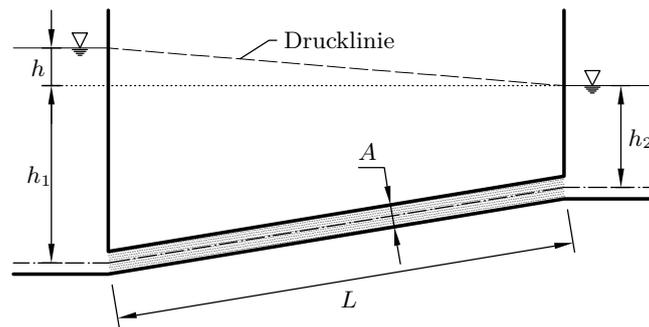


Abb. 1.1: Gedankenmodell zur Bestimmung der Durchlässigkeit nach DARCY

## 1.1.2 Laborversuche zur Bestimmung der Durchlässigkeit

### 1.1.2.1 Versuche mit konstanter Druckhöhe

Bei durchlässigen Böden kann der Durchlässigkeitsbeiwert mithilfe von Versuchen mit konstanter Druckhöhe unter Verwendung des Gesetzes von DARCY bestimmt werden. Bei diesem, in Abb. 1.2 dargestellten Versuch wird die Durchflussmenge  $Q$  gemessen, die während des Versuchs den Versuchskörper (Boden) durchströmt. Der Durchfluss  $q$ , der die Durchflussmenge pro Zeiteinheit darstellt, wird durch das Produkt der Filtergeschwindigkeit und der durchströmten Fläche ausgedrückt und ist bei Versuchen mit konstanter Druckhöhe konstant, womit sich folgende Gleichung ergibt:

$$q = \frac{Q}{t} = vA \quad (1.3)$$

mit:  $q$  ... Durchflussmenge pro Zeiteinheit [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]  
 $Q$  ... während des Versuchs gemessene Durchflussmenge [ $\text{m}^3$ ]  
 $t$  ... Beobachtungszeitraum [s]  
 $A$  ... Querschnitt des Probekörpers [ $\text{m}^2$ ]

Unter Berücksichtigung von Glg. 1.1 und Glg. 1.2 kann Glg. 1.3 somit umgeformt werden:

$$k_f = Q \frac{L}{thA} \quad (1.4)$$

### 1.1.2.2 Versuche mit fallender Druckhöhe

Für gering durchlässige Böden wird der Durchlässigkeitsversuch mit fallender Druckhöhe angewendet, wobei der Versuchsaufbau in Abb. 1.3 dargestellt ist.

Der Versuch mit fallender Druckhöhe lässt sich durch eine Differentialgleichung beschreiben. Für die Herleitung der Differentialgleichung wird die abfließende Wassermenge, welche der Spiegelsenkung im Standrohr entspricht, mit jener Wassermenge, die die Probe durchströmt, gleichgesetzt. Da der hydraulische Gradient und somit die Filtergeschwindigkeit mit sinkender Druckhöhe abnimmt, muss allerdings die Zeitabhängigkeit des Systems berücksichtigt werden (instationärer Zustand).

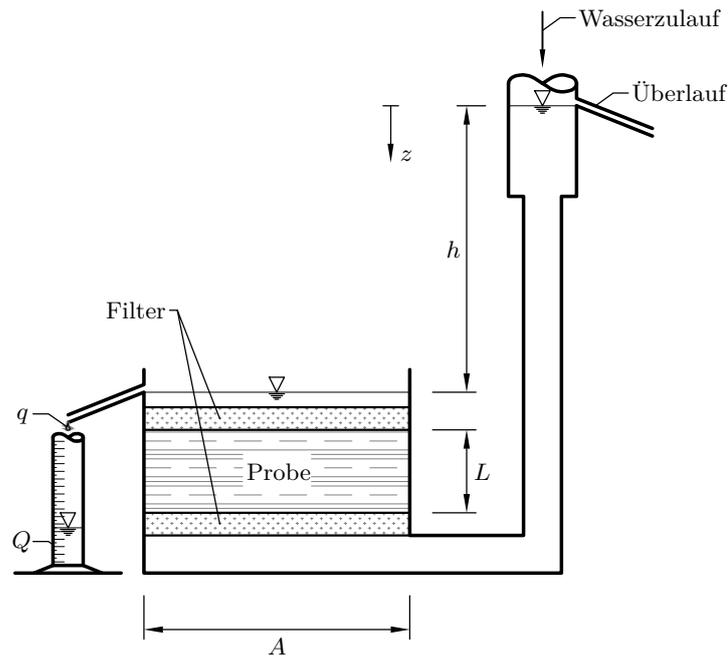


Abb. 1.2: Versuchsaufbau zur Bestimmung des Durchlässigkeitsbeiwerts  $k_f$  mit konstanter Druckhöhe (adaptiert nach [Adam 2019])

Bei konstantem Querschnitt des Standrohrs gilt für die darin abfließende Wassermenge  $q$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ :

$$q = \frac{dQ}{dt} = a \frac{dh}{dt} \quad (1.5)$$

mit:  $q(t)$  ... Durchflussmenge pro Zeiteinheit [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]  
 $Q(t)$  ... Abfließende Wassermenge [ $\text{m}^3$ ]  
 $a$  ... Querschnittsfläche des Standrohrs [ $\text{m}^2$ ]  
 $h(t)$  ... Druckhöhe im Standrohr [m]

Im Bereich des Probekörpers gilt für die durchströmte Wassermenge pro Zeiteinheit die nach  $Q$  umgeformte Glg. 1.4, wobei wiederum die Zeitabhängigkeit berücksichtigt werden muss, die in der fallenden Druckhöhe  $h$  enthalten ist. Das negative Vorzeichen resultiert dabei aus dem Durchfluss entgegen der positiven  $z$ -Koordinate, wie sie in Abb. 1.3 dargestellt ist:

$$q = \frac{dQ}{dt} = -k_f \frac{h}{L} A \quad (1.6)$$

Unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung, bei der die Massenerhaltung der Strömung und die Inkompressibilität des Wassers vorausgesetzt wird, können Glg. 1.5 und Glg. 1.6 gleichgesetzt werden:

$$a \frac{dh}{dt} = -k_f \frac{h}{L} A \quad (1.7)$$

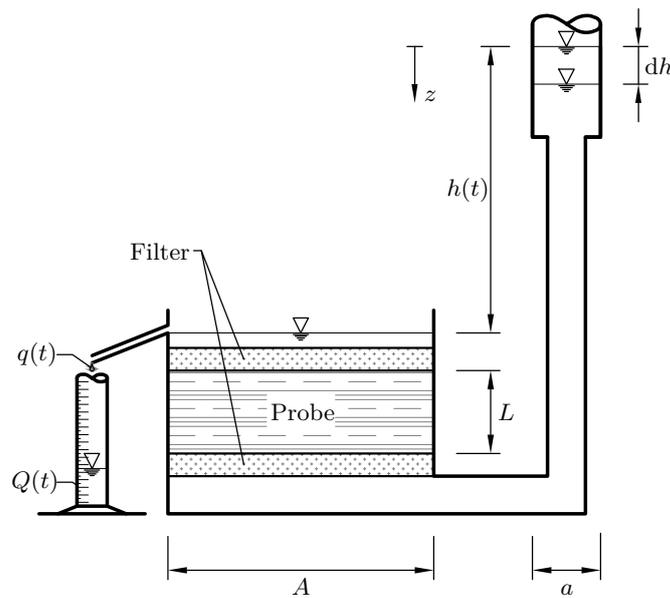


Abb. 1.3: Versuchsaufbau zur Bestimmung des Durchlässigkeitsbeiwerts  $k_f$  mit fallender Druckhöhe (adaptiert nach [Adam 2019])

Eine Umstellung von Glg. 1.7 liefert die Differentialgleichung für die Beschreibung des Versuchs mit fallender Druckhöhe:

$$a \frac{dh}{dt} + \frac{k_f A}{L} h = 0 \quad (1.8)$$

Es handelt sich dabei um eine *gewöhnliche* (es treten keine partiellen Ableitungen auf), *lineare* (die Funktionsterme  $h$  und  $\frac{dh}{dt}$  sind jeweils linear), *homogene* (es treten keine Störterme auf) Differentialgleichung *1. Ordnung* (es treten höchstens erste Ableitungen auf) mit *konstanten Koeffizienten*.

## 1.2 Lösung der Differentialgleichung

Die Differentialgleichung aus Glg. 1.8 kann folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{k_f A}{La} h \quad (1.9)$$

Diese Differentialgleichung entspricht dem Typ einer sogenannten separierbaren Differentialgleichung:

$$y' = f(x)g(y) \quad (1.10)$$

Im vorliegenden Beispiel der Glg. 1.9 entspricht  $f(x)$  aus Glg. 1.10 einer konstanten Funktion. Differentialgleichungen dieses Typs können mittels Trennung der Variablen gelöst werden [Papula 2015]. Durch passendes Umstellen von Glg. 1.9 ergibt sich:

$$\frac{1}{h} dh = -\frac{k_f A}{La} dt \quad (1.11)$$

Integration auf beiden Seiten führt wiederum zur Lösung der Differentialgleichung:

$$\ln h = -\frac{k_f A}{La} t + C \quad (1.12)$$

Damit anhand der gelösten Differentialgleichung der Durchlässigkeitsbeiwert bestimmt werden kann, ist die Kenntnis von Randbedingungen erforderlich. Beim vorliegenden Versuch werden zu zwei bestimmten Zeitpunkten die jeweiligen Höhen der Wasserpegel im Standrohr abgelesen. Damit ist zu zwei definierten Zeitpunkten die Druckhöhe bekannt, was zwei Randbedingungen entspricht:

$$\begin{aligned} h_1 &= h(t_1) && \dots \text{Druckhöhe zum Zeitpunkt } t_1 \text{ [m]} \\ h_2 &= h(t_2) && \dots \text{Druckhöhe zum Zeitpunkt } t_2 \text{ [m]} \end{aligned}$$

Eine der beiden Randbedingungen kann zur Festlegung der Integrationskonstanten herangezogen werden:

$$C = \ln h_1 + k_f \frac{A}{La} t_1 = \ln h_2 + k_f \frac{A}{La} t_2 \quad (1.13)$$

Einsetzen des so erhaltenen Ausdrucks aus Glg. 1.13 in Glg. 1.12 und Auflösen der Gleichung nach dem Durchlässigkeitsbeiwert ergibt unter Beachtung der Rechenregeln für den Logarithmus:

$$k_f = \ln \left( \frac{h_1}{h_2} \right) \frac{a}{A} \frac{L}{t_2 - t_1} \quad (1.14)$$

## 1.3 Beispiel

Bei einem Versuch mit fallender Druckhöhe sind folgende Parameter gegeben:

$$\begin{aligned} d &= 5 \text{ cm} && \dots \text{Durchmesser des Standrohrs} \\ \rightarrow a &= \frac{d^2 \pi}{4} = 19,6 \text{ cm}^2 && \dots \text{Fläche des Behälters} \\ D &= 10 \text{ cm} && \dots \text{Durchmesser des Standrohrs} \\ \rightarrow A &= \frac{D^2 \pi}{4} = 78,5 \text{ cm}^2 && \dots \text{Fläche des Probekörpers} \\ L &= 10 \text{ cm} && \dots \text{Höhe des Probekörpers} \end{aligned}$$

Während des Versuchs werden folgende Parameter gemessen:

$$\begin{aligned} h_1 &= 10,0 \text{ cm} && \dots \text{Höhe im Standrohr zum Zeitpunkt der ersten Messung} \\ h_2 &= 9,1 \text{ cm} && \dots \text{Höhe im Standrohr zum Zeitpunkt der zweiten Messung} \\ t_2 &= t_1 + 30 \text{ min} && \dots \text{Zeitpunkt der zweiten Messung} \end{aligned}$$

Einsetzen der gegebenen und gemessenen Werte in Glg. 1.14 unter Berücksichtigung der Einheiten ergibt den Durchlässigkeitsbeiwert des untersuchten Bodens:

$$k_f = \ln \left( \frac{h_1}{h_2} \right) \frac{a}{A} \frac{L}{t_2 - t_1} = \ln \left( \frac{0,1}{0,091} \right) \cdot \frac{19,6}{78,5} \cdot \frac{0,1}{1800} = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m/s} \quad (1.15)$$

Der somit berechnete Durchlässigkeitsbeiwert kann nun mit tabellarisch aufbereiteten Werten verglichen werden. Nach Tab. 1.1 handelt es sich bei der Bodenprobe vermutlich um *schluffigen Sand* oder *Feinsand*, welche als *schwach durchlässig* bis *durchlässig* charakterisiert werden kann.

Tab. 1.1: Typische Werte für den Durchlässigkeitsbeiwert  $k_f$  (in Anlehnung an [Kolymbas 2019])

| Bodenart   | $k_f$ [m/s]         | Bereich                  |
|--|---------------------|--------------------------|
| Ton  | $< 10^{-8}$         | sehr schwach durchlässig |
| Schluff, schluffiger Sand                                | $10^{-8} - 10^{-6}$ | schwach durchlässig      |
| Feinsand, Mittelsand                                     | $10^{-6} - 10^{-4}$ | durchlässig              |
| Grobsand, Mittelkies, Feinkies                           | $10^{-4} - 10^{-2}$ | stark durchlässig        |
| Grobkies   | $> 10^{-2}$         | sehr stark durchlässig   |
| Für Steine/Blöcke gilt das Gesetz von DARCY i. A. nicht! |                     |                          |

# Kapitel 2

## Brunnenformeln nach Dupuit – Thiem

### 2.1 Herleitung der Differentialgleichungen

#### 2.1.1 Grundlagen und Motivation

Befindet sich der natürliche Grundwasserspiegel oberhalb der geplanten Aushubsole einer Baugrube, so lässt sich eine Grundwasserabsenkung bzw. eine Grundwasserentspannung beispielsweise durch Brunnen herbeiführen. Dabei handelt es sich um eine geschlossene Wasserhaltung (der Wasserspiegel befindet sich unter der Geländeoberkante).

Durch das punktuelle Abpumpen des Grundwassers entsteht ein Gefälle zwischen dem abgesenkten Grundwasserspiegel und dem unbeeinflussten (natürlichen) Grundwasserspiegel. Die Ausbildung dieses Gefälles durch den sogenannten Absenktrichter ist abhängig von der Durchlässigkeit des Bodens. In gut durchlässigen Böden bilden sich, wie in Abb. 2.1 auf der rechten Seite dargestellt, große, flache Absenktrichter aus, das hydraulische Gefälle  $i$  ist somit vergleichsweise gering. In Böden mit sehr großer Durchlässigkeit kann sich im Extremfall praktisch kein Absenktrichter ausbilden, da nicht mehr Grundwasser abgepumpt werden kann als nachströmt. In gering durchlässigen Böden, wie in Abb. 2.1 auf der linken Seite dargestellt, bilden sich hingegen enge, steile Absenktrichter aus, das hydraulische Gefälle  $i$  ist vergleichsweise groß [Adam 2019].

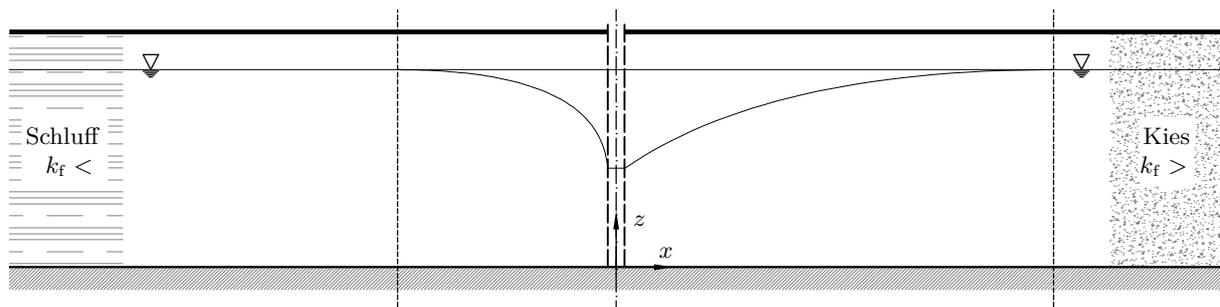


Abb. 2.1: Ausbildung des Absenktrichters bei gering durchlässigem Boden (links) und gut durchlässigem Boden (rechts)

Die Brunnenformeln von DUPUIT (1863) und THIEM (1870) beschreiben die Bewegung und Menge des zulaufenden Wassers unter Berücksichtigung einiger Voraussetzungen und Vereinfachungen [Adam 2019]:

- Die Sohle des Grundwasserleiters ist eben und waagrecht.
- Der Grundwasserleiter ist zweidimensional, homogen, isotrop, unendlich ausgedehnt und vollkommen wassergesättigt.

- Die Strömung im Grundwasserleiter ist laminar, d. h. jedes Wasserteilchen folgt einer geraden oder gekrümmten Stromlinie, die sich nicht mit anderen überschneidet. Das Gesetz von Darcy ist folglich gültig.
- Das Korngerüst ist starr und bleibt unverschieblich unter dem Einfluss der Strömung.
- Die Porenentwässerung erfolgt ohne Verzögerung gleichzeitig mit der Absenkung.
- Unter dem Einfluss eines hydraulischen Gefälles bildet sich eine stationäre Strömung aus. Diese Strömung ist weiterhin laminar.
- Beim Pumpbetrieb sind die Absenkungen des Grundwasserspiegels klein gegenüber der Höhe des Grundwasserleiters.
- Der Pumpbrunnen ist ein vollkommener Brunnen, d. h. er durchdringt den gesamten Leiter und entnimmt Wasser über die gesamte Leitemächtigkeit. Das Wasser strömt also horizontal zum Brunnen, die Eintrittsgeschwindigkeit ist über die gesamte Filterhöhe konstant.
- Das Grundwasser fließt dem Brunnen bei einer konstanten Wasserentnahme von allen Seiten zu. Es bildet sich nach einer gewissen Pumpzeit ein quasi-stationärer Beharrungszustand mit parabelförmigem Absenktrichter aus.

Bei einem vollkommenen Brunnen erstreckt sich die Filterstrecke über die gesamte Höhe des Aquifers, wie dies beispielsweise in Abb. 2.1 und Abb. 2.2 dargestellt ist. Dies ist auch eine wichtige Voraussetzung, um die Näherung des waagrechten Zustroms zum Brunnen zu wahren. Wie in Abb. 2.2 dargestellt entspricht dies allerdings nicht der Wirklichkeit. Durch die Neigung der Grundwasseroberfläche bilden sich gekrümmte Potentiallinien (Kurven gleichen Potentials), wodurch auch ein senkrechter Zustrom zum Brunnen entsteht. Zusätzlich ist die horizontale Geschwindigkeit genau genommen nicht konstant über die Höhe.

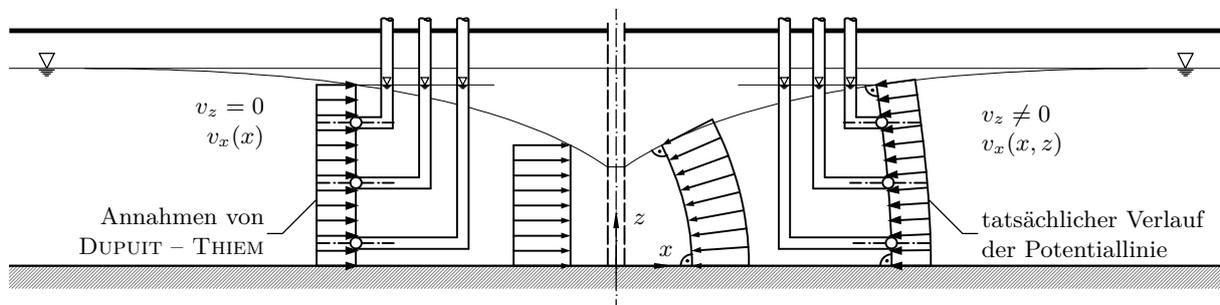


Abb. 2.2: Potentialverteilung und Geschwindigkeiten nach den Annahmen von DUPUIT und THIEM (links) und nach dem tatsächlichen Verlauf (rechts)

Trotz der idealisierten Voraussetzungen stellen die Brunnenformeln nach DUPUIT und THIEM elementare Gleichungen der Geotechnik und Hydrologie dar, da sie für die Praxis im Allgemeinen eine gute Näherung darstellen. Im Folgenden werden die Brunnenformeln für den Fall eines freien Grundwasserspiegels und eines gespannten Grundwasserspiegels hergeleitet.

### 2.1.2 Freier Grundwasserspiegel

Abb. 2.3 zeigt die vorliegende Situation bei Absenkung des freien Grundwasserspiegels.

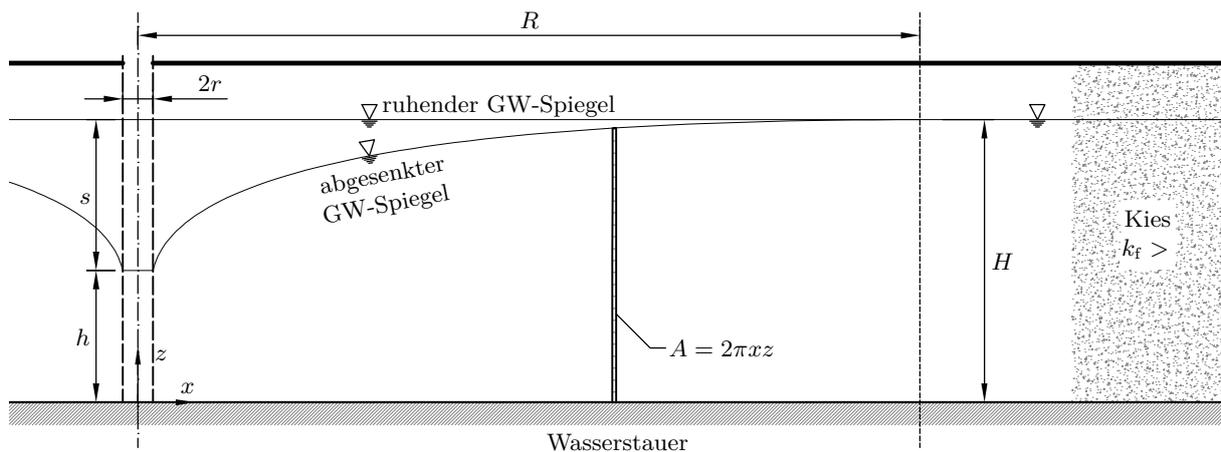


Abb. 2.3: Verlauf des Grundwasserspiegels in der Umgebung eines vollkommenen Brunnens bei freien Grundwasserverhältnissen

Im Falle eines freien Grundwasserspiegels beträgt die zum Brunnen rotationssymmetrisch durchströmte zylinderförmige Fläche im Abstand  $x$  von der Brunnenachse:

$$A = 2\pi x z \quad (2.1)$$

mit:  $A(x)$  ... durchströmte Fläche [m<sup>2</sup>]  
 $x$  ... Radius der betrachteten Stelle [m]  
 $z(x)$  ... Höhe des Grundwassers an der betrachteten Stelle [m]

Durch die Annahme eines stationären Zustandes ist der Wasserandrang zum Brunnen über die Zeit konstant:

$$Q = vA = \text{const.} \quad (2.2)$$

mit:  $Q$  ... Wasserandrang [m<sup>3</sup>/s]  
 $v = v_x(x)$  ... Strömungsgeschwindigkeit [m/s]

Die Geschwindigkeit der Strömung kann durch das Gesetz von DARCY beschrieben werden:

$$v = k_f i \quad (2.3)$$

mit:  $k_f$  ... Durchlässigkeitsbeiwert [m/s]  
 $i(x)$  ... hydraulischer Gradient [-]

Aus den beschriebenen Vereinfachungen bzw. Voraussetzungen (isotroper Grundwasserleiter, Gültigkeit des Gesetzes von DARCY, konstante Eintrittsgeschwindigkeit in den Brunnen über die gesamte Filterhöhe) ergibt sich ein hydraulischer Gradient, der konstant über die Höhe  $z(x)$  ist und folgendermaßen definiert wird:

$$i = \frac{dz}{dx} \quad (2.4)$$

mit:  $dx$  ... inkrementeller Längenabschnitt [m]  
 $dz$  ... Änderung der Höhe des Wasserspiegels [m]



Umformen ergibt wiederum die Differentialgleichung mit getrennten Variablen:

$$dz = \frac{Q}{2\pi k_f m} \frac{1}{x} dx \quad (2.10)$$

## 2.2 Lösung der Differentialgleichung

### 2.2.1 Freier Grundwasserspiegel

Durch Integration der Differentialgleichung aus Glg. 2.6 ergibt sich:

$$\frac{1}{2}z^2 = \frac{Q}{2\pi k_f} \ln(x) + C \quad (2.11)$$

Bei der gegenständlichen Differentialgleichung handelt es sich um ein Randwertproblem. Für deren Lösung ist die Kenntnis der Höhe des Grundwasserspiegels im Brunnen (Absenkziel) und am Rand des Einflussbereichs des Brunnens (Höhe des unbeeinflussten Grundwasserspiegels im freien Feld) erforderlich. Die Integrationskonstante der Gleichung wird durch die Randbedingungen bestimmt. Im Abstand  $R$  zum Brunnen entspricht die Höhe des Grundwassers dem unbeeinflussten Grundwasserstand:

$$x = R \quad \rightarrow \quad z = H \quad (2.12)$$

Im Übergangsbereich des Brunnens zum Bodens, also im Abstand  $r$  zum Brunnenmittelpunkt, ist der Grundwasserstand ebenfalls bekannt:

$$x = r \quad \rightarrow \quad z = h \quad (2.13)$$

Damit lautet die Gleichung der Spiegelfläche des Absenktrichters eines vollkommenen Brunnens mit freiem Wasserspiegel:

$$H^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi k_f} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \quad (2.14)$$

oder allgemein ausgedrückt:

$$z_2^2 - z_1^2 = \frac{Q}{\pi k_f} \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad (2.15)$$

Die Lösung ist nur für Werte innerhalb des Definitionsbereichs, der durch die Randwerte vorgegeben ist, gültig:

$$\mathbb{D} = \left\{ x \mid r \leq x \leq R \right\} \quad (2.16)$$

Durch Umformen lässt sich der Wasserzfluss zu einem vollkommenen Brunnen mit freiem Wasserspiegel bestimmen:

$$Q = \frac{\pi k_f (H^2 - h^2)}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)} \quad (2.17)$$

### 2.2.2 Gespannter Grundwasserspiegel

Die Lösung der Differentialgleichung bei gespanntem Grundwasserspiegel erfolgt analog zum Fall des freien Grundwasserspiegels. Durch Integration der Differentialgleichung aus Glg. 2.10 ergibt sich:

$$z = \frac{Q}{2\pi k_f m} \ln(x) + C \quad (2.18)$$

Die Integrationskonstante der Gleichung wird wiederum durch die gleichen Randbedingungen bestimmt. Die Spiegelgleichung für den Absenktrichter eines vollkommenen Brunnens mit einem Wasserspiegel mit gespannter Oberfläche lautet folglich:

$$H - h = \frac{Q}{\pi k_f m} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \quad (2.19)$$

oder allgemein geschrieben:

$$z_2 - z_1 = \frac{Q}{\pi k_f m} \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad (2.20)$$

Die Lösung ist auch hier nur für Werte innerhalb des Definitionsbereichs, der durch die Randwerte vorgegeben ist, gültig:

$$\mathbb{D} = \left\{x \mid r \leq x \leq R\right\} \quad (2.21)$$

Mit der Absenkung der Grundwasserdruckfläche  $s = H - h$  lässt sich der Wasserandrang  $Q$  zu einem vollkommenen Brunnen mit einem Wasserspiegel mit gespannter Oberfläche anschreiben:

$$Q = \frac{2\pi k_f m s}{\ln\left(\frac{R}{r}\right)} \quad (2.22)$$

## 2.3 Beispiel

Das vorliegende Beispiel wurde aus [Lang et al. 2011] entnommen. Es handelt sich dabei um die Bestimmung des  $k_f$ -Wertes aus einem Pumpversuch. Dabei werden die Pumpwassermenge  $Q$  aus einem Brunnen im Beharrungszustand (stationärer Fall) und die Wasserspiegelabsenkungen  $s_i$  in mehreren Messtellen (Piezometer) um den Brunnen gemessen:

$$Q = 3,5 \text{ L/s} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} \quad (2.23)$$

Abb. 2.5 zeigt die vorliegenden Dimensionen. In Tab. 2.1 sind die Messergebnisse darstellt, wobei die Spiegellinie durch  $z_i = H - s_i$  berechnet wird.

Zur Bestimmung des Durchlässigkeitsbeiwerts wird Glg. 2.17 (freier Grundwasserspiegel) umgeformt:

$$k_f = \frac{Q}{\pi} \frac{\ln\left(\frac{R}{r}\right)}{H^2 - h^2} \quad (2.24)$$

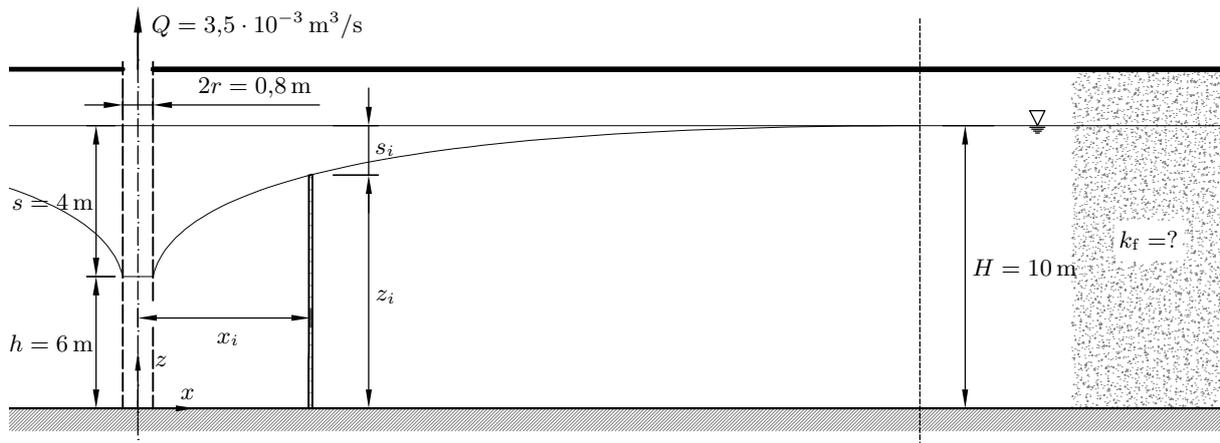


Abb. 2.5: Versuchsanordnung Pumpversuch (adaptiert nach [Lang et al. 2011])

Tab. 2.1: Messwerte der Piezometer (adaptiert nach [Lang et al. 2011])

| Messstelle $i$ | Abstand $x_i$ [m] | Abstich $s_i$ [m] | Spiegellinie $z_i$ [m] |
|----------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| 1              | 2                 | 2,8               | 7,2                    |
| 2              | 4                 | 1,8               | 8,2                    |
| 3              | 8                 | 1,5               | 8,5                    |
| 4              | 15                | 1,2               | 8,8                    |
| 5              | 30                | 0,8               | 9,2                    |
| 6              | 50                | 0,25              | 9,75                   |
| 7              | 80                | 0,15              | 9,85                   |
| 8              | 120               | 0,00              | 10,00                  |

Da die Reichweite des Brunnens, charakterisiert durch den Radius  $R$ , nicht bekannt ist, wird diese durch Regression der Wertepaare  $z^2$  gegen  $\ln(x)$  in einem Diagramm in Abb. 2.6 ermittelt.

Die Gleichung der Regressionsgerade lautet:

$$z^2 = 11,32 \ln(x) + 47,63 \quad (2.25)$$

Bei Einsetzen von  $z = 10$  m kann  $R$  somit zu  $x = R = 102$  m bestimmt werden. Der Durchlässigkeitsbeiwert kann damit berechnet werden:

$$k_f = \frac{Q}{\pi} \frac{\ln\left(\frac{R}{r}\right)}{H^2 - h^2} = \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{\pi} \frac{\ln\left(\frac{102}{0,4}\right)}{10^2 - 6^2} = 9,6 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} \approx 1 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} \quad (2.26)$$

Es handelt sich gemäß Tab. 1.1 um (stark) durchlässigen Mittel-/Grobsand bzw. Fein-/Mittelkies.

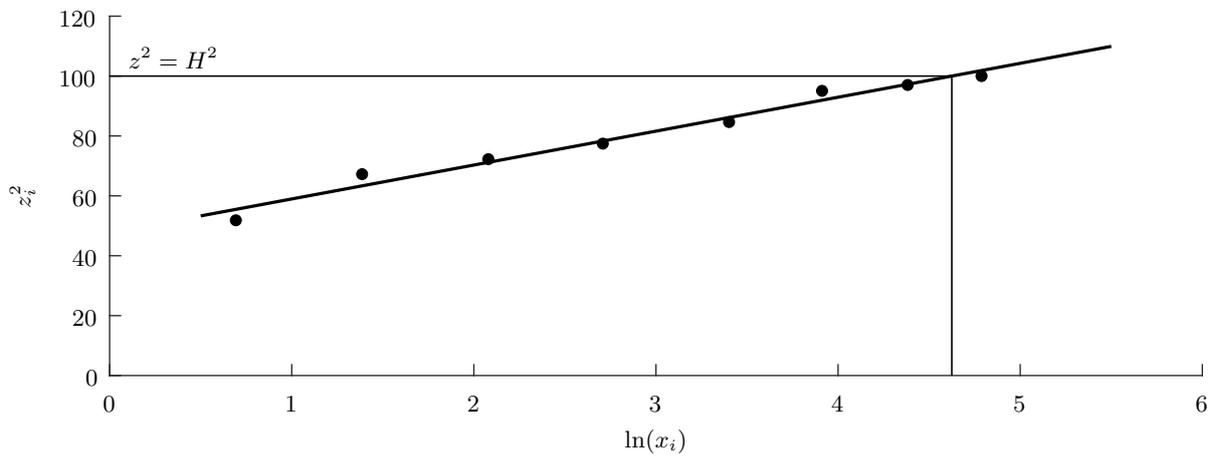


Abb. 2.6: Regressionsgrade zur Bestimmung der Reichweite (adaptiert nach [Lang et al. 2011])

# Kapitel 3

## Siloerddruck

### 3.1 Herleitung der Differentialgleichung

#### 3.1.1 Grundlagen und Motivation

Die Kraft, die das anstehende Erdreich auf eine (vorwiegend) vertikale Stützkonstruktion ausübt, wird als Erddruck bezeichnet. Die Größe des Erddrucks ist abhängig von der Relativbewegung zwischen der Stützkonstruktion und dem Erdreich. Wird die Stützkonstruktion vom Erdreich wegbewegt, so stellt sich bei einer ausreichend großen Verschiebung in Verbindung mit einem entsprechenden Versagen des Untergrunds der aktive Erddruck ein. Die (horizontale) Erddruckspannung ist in diesem Fall kleiner als die vertikale Spannung im Boden hinter der Stützkonstruktion. Bewegt sich die Stützkonstruktion hingegen zum Erdreich hin, so werden Horizontalspannungen im Boden aktiviert, die größer sind als die zugehörigen Vertikalspannungen und es kann bei entsprechend großen Verschiebungen der passive Erddruck (maximal möglicher Erddruck) mobilisiert werden. Kommt es zu keiner Verschiebung zwischen Stützbauwerk und Untergrund, so stellt sich der Erdruchdruck ein, der größer als der aktive Erddruck, jedoch kleiner als der passive Erddruck ist.

Bei horizontaler und unbelasteter Geländeoberfläche können die Vertikalspannungen zufolge des Eigengewichts des Bodens im freien Feld mit Glg. 3.1 berechnet werden. Diese Gleichung wird in der Praxis auch zur näherungsweise Berechnung der Vertikalspannungen hinter einer Stützkonstruktion verwendet:

$$\sigma_z = \gamma z \quad (3.1)$$

mit:

- $\sigma_z(z)$  ... Vertikalspannung unter Geländeoberfläche [kN/m<sup>2</sup>]
- $\gamma = \rho g$  ... Wichte des Bodens<sup>1</sup> [kN/m<sup>3</sup>]
- $\rho$  ... Dichte des feuchten Bodens [kg/m<sup>3</sup>]
- $z$  ... Tiefe unter Geländeoberkante (GOK) [m]

Die horizontalen Spannungen werden unter Berücksichtigung des jeweiligen Erddruckbeiwerts wie folgt ermittelt:

$$\sigma_h = K_i \sigma_z \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup>*Hinweis:* Ist der Boden wassergesättigt, so wird anstelle der Wichte bzw. der Dichte des feuchten Bodens die Wichte unter Auftrieb  $\gamma'$  bzw.  $\rho'$  eingeführt, womit sich effektive Spannungen  $\sigma'_z$  ergeben

mit:  $\sigma_h(z)$  ... Horizontalspannung unter Geländeoberfläche  
 $K_i$  ... Edruckbeiwert<sup>2</sup>

Befindet sich der Boden zwischen zwei gegenüberliegenden, rauen, vertikalen Flächen und ist die Vertikalverschiebung des Bodens größer als jene dieser begrenzenden Seitenflächen, werden Reibungskräfte zwischen dem Boden und den Begrenzungsflächen aktiviert. Damit wird ein Teil der Vertikalkräfte von den seitlichen Begrenzungsflächen aufgenommen und die Vertikalspannungen können nicht mehr mithilfe von Glg. 3.1 ermittelt werden. Durch die reduzierten Vertikalspannungen treten in weiterer Folge (je nach horizontaler Bewegungsmöglichkeit der Seitenflächen) auch geringere Erddrücke als bei einer gewöhnlichen Stützkonstruktion auf. Diese Form des Erddrucks wird Siloerddruck genannt und ist unter anderem für die nachfolgenden Fälle relevant:

- Raungitterstützmauern – „Krainerwände“
- hinterfüllte Stützmauern im Nahbereich von Felsböschungen
- seichtliegende Tunnel
- eingebettete, nachgiebige Rohre
- eingebettete, starre Rohre

### 3.1.2 Vertikaler Spannungszustand in einer Silofüllung

Der Siloerddruck ist eine Anwendung der Theorie von JANSEN aus dem Jahr 1895 ([Jansen, 1895]), die zur Ermittlung der Spannungszustände in Getreidesilos entwickelt wurde. Da es sich bei Getreide um einen granularen Stoff handelt, in dem ähnliche Lastabtragungsmechanismen vorherrschen wie im Boden, können die Ergebnisse auf die Bodenmechanik übertragen werden. Für die Herleitung des vertikalen Spannungszustands im Füllmaterial wird nach JANSEN ein horizontaler Schnitt durch das Füllmaterial eines kreisförmigen Silos mit der infinitesimalen Dicke  $dz$ , wie in Abb. 3.1 dargestellt, betrachtet. Des Weiteren wird eine an der Ober- und Unterseite des Schnitts konstante Vertikalspannung  $\sigma_z$  bzw.  $\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$  angenommen. Dementsprechend ist die Vertikalspannung im Füllmaterial nur von der Tiefe  $z$  und nicht von den anderen Ortskoordinaten  $x$  und  $y$  abhängig (es kann also auch folgende Notation verwendet werden:  $\sigma_z(z)$ ). Außerdem wird in dieser Theorie angenommen, dass die Außenwände des Silos in Vertikalrichtung unverschieblich sind. Durch die Spannungen im Füllmaterial kommt es zu Stauchungen (Setzungen) des Materials in Vertikalrichtung und es werden aufgrund der damit einhergehenden Relativverschiebungen zwischen Material und Silowand Reibungskräfte in der Kontaktfläche aktiviert. Diese Reibungskräfte lassen sich über die Schubspannungen zufolge Mantelreibung zwischen Füllmaterial und Silowand ermitteln:

$$\tau = \sigma_h \mu \tag{3.3}$$

mit:  $\tau$  ... Schubspannung (Mantelreibung) zwischen Füllmaterial und Silowand  
 $\quad$  [kN/m<sup>2</sup>]  
 $\mu$  ... Reibungskoeffizient zwischen Füllmaterial und Silowand [-]  
 $\sigma_h(z)$  ... Horizontalspannung im Füllmaterial [kN/m<sup>2</sup>]

<sup>2</sup> *Hinweis:* Der Index  $i$  wird hier stellvertretend für die verschiedenen Formen des Erddrucks angeführt. Üblicherweise werden anstelle des Index  $i$  die Indizes  $a$  (aktiver Erddruck),  $p$  (passiver Erddruck) und  $0$  (Erdruchdruck) verwendet.

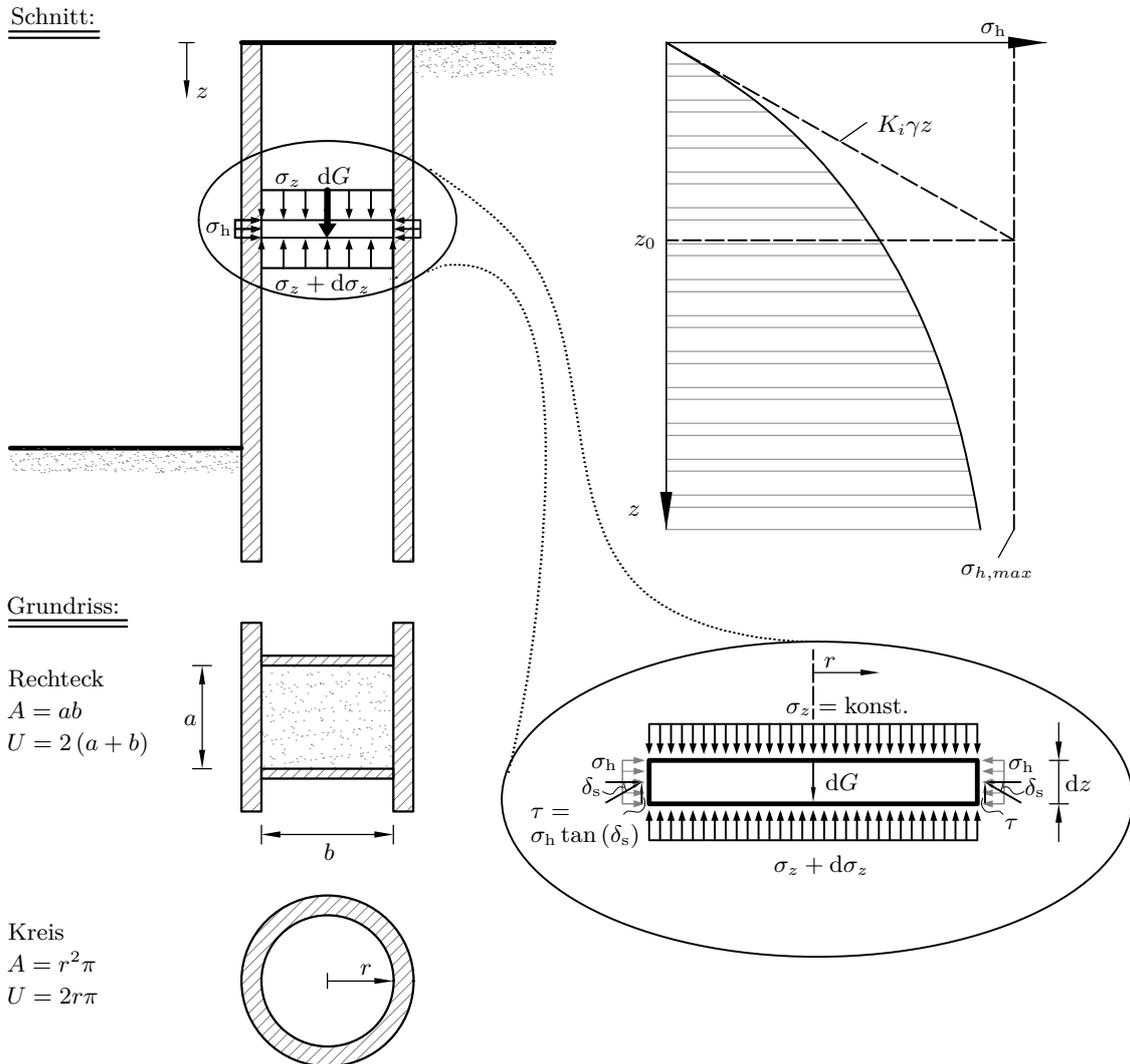


Abb. 3.1: Kräfte an einem infinitesimalen Horizontalschnitt durch das Füllmaterial eines kreisförmigen Silos mit dem Innenradius  $r$  und eines rechteckigen Querschnitts mit den Abmessungen  $a$  und  $b$

Der Reibungskoeffizient  $\mu$  wird in der Regel über den Wandreibungswinkel  $\delta_s$  ausgedrückt:

$$\mu = \tan(\delta_s) \tag{3.4}$$

Des Weiteren wird die Horizontalspannung  $\sigma_h$  als Funktion der Vertikalspannung gemäß Glg. 3.2 dargestellt, womit Glg. 3.3 üblicherweise folgendermaßen dargestellt wird:

$$\tau = K_i \sigma_z \tan(\delta_s) \tag{3.5}$$

- mit:
- $K_i$  ... Erddruckbeiwert in Abhängigkeit der horizontalen Wandbewegung – üblicherweise tritt entweder  $K_a$  (aktiver Erddruck) oder bei unverschieblichen, starren Wänden  $K_0$  (Erdruhedruck) auf [-]
  - $\delta_s$  ... Wandreibungswinkel zwischen Silowand und Füllmaterial [°]

Für das Kräftegleichgewicht in Vertikalrichtung, ergibt sich für ein freigeschnittenes Füllelement des kreisrunden Silos mit Radius  $r$  und infinitesimaler Dicke  $dz$  unter Berücksichtigung der Gewichtskraft  $dG = \gamma r^2 \pi dz$  und Glg. 3.5:

$$r^2 \pi \sigma_z - \left( \sigma_z + \frac{d\sigma_z}{dz} dz \right) r^2 \pi - K_i \sigma_z \tan(\delta_s) 2r \pi dz + \gamma r^2 \pi dz = 0 \quad (3.6)$$

Durch Vereinfachung von Glg. 3.6 ergibt sich die Differentialgleichung zur Ermittlung der (reduzierten) Vertikalspannungsverteilung in einem Silo zu:

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{2K_i \tan(\delta_s)}{r} \sigma_z = \gamma \quad (3.7)$$

Es handelt sich dabei um eine *gewöhnliche* (es treten keine partiellen Ableitungen auf), *lineare* (die Funktionsterme sind jeweils linear), *inhomogene* (es treten Störterme auf) Differentialgleichung *1. Ordnung* (es treten höchstens erste Ableitungen auf) mit *konstanten Koeffizienten*.

Glg. 3.7 kann im Übrigen auch auf Silos mit anderer Querschnittsformen angewendet werden, indem ein äquivalenter Radius<sup>3</sup>  $r$  aus Glg. 3.7 über das Verhältnis zwischen Querschnittsfläche  $A$  und Umfang  $U$  ermittelt wird:

$$r = 2 \frac{A}{U} \quad (3.8)$$

Damit ergibt sich die Differentialgleichung Glg. 3.7 für allgemeine Querschnittsformen zu:

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) \sigma_z = \gamma \quad (3.9)$$

## 3.2 Lösung der Differentialgleichung

Da es sich bei der Differentialgleichung aus Glg. 3.9 um eine *inhomogene* Differentialgleichung handelt, sind mehrere Schritte zur Lösung dieser Gleichung notwendig. In einem ersten Schritt muss die *homogene* Lösung der Differentialgleichung ermittelt werden.

### 3.2.1 Homogene Lösung

Der homogene Teil der Differentialgleichung aus Glg. 3.7 ergibt sich, indem der linke Term aus Glg. 3.9 gleich null gesetzt wird:

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) \sigma_z = 0 \quad (3.10)$$

<sup>3</sup>*Hinweis:* Im Bereich der technischen Hydraulik existiert eine ähnliche Herangehensweise für die hydraulische Berechnung von durchströmten Röhren bzw. Gerinnen mit nicht-kreisförmigem Querschnitt, wobei der äquivalente Radius in diesem Fall als „hydraulischer Radius“ bezeichnet wird.

Die Differentialgleichung aus Glg. 3.10 entspricht dem Typ einer sog. separierbaren Differentialgleichung und kann mittels Trennung der Variablen gelöst werden [Papula 2015]. Durch passende Umstellung von Glg. 3.10 ergibt sich:

$$\frac{1}{\sigma_z} d\sigma_z = \frac{-U}{A} K_i \tan(\delta_s) dz \quad (3.11)$$

Integration der beiden Seiten führt zur homogenen Lösung der Differentialgleichung:

$$\ln(\sigma_z) - \ln(C_1) = \frac{-U}{A} K_i \tan(\delta_s) z \quad (3.12)$$

wobei in Glg. 3.12 eine logarithmische Darstellungsform für die Integrationskonstante gewählt wurde. Die Verwendung der Rechenregeln für den Logarithmus führen zu:

$$\ln\left(\frac{\sigma_z}{C_1}\right) = \frac{-U}{A} K_i \tan(\delta_s) z \quad (3.13)$$

Entlogarithmieren führt zur einer allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung (Glg. 3.10) [Papula 2015]:

$$\sigma_{z,\text{hom}} = C_1 e^{\frac{-U}{A} K_i \tan(\delta_s) z} \quad (3.14)$$

Glg. 3.14 dient als Basis für Auffindung der *allgemeinen* Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung (Glg. 3.9). Die allgemeine Lösung kann dabei entweder mittels *Variation der Konstanten* oder mittels Auffindung einer *speziellen* Lösung (*Partikulärlösung*) und anschließender Superposition der *homogenen* und der *partikulären Lösung* gefunden werden. Beide Varianten werden nachfolgend betrachtet.

### 3.2.2 Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mittels Variation der Konstanten

Bei der Lösung mittels Variation der Konstanten wird die Integrationskonstante  $C$  aus Glg. 3.14 zunächst durch eine a priori unbekannte Funktion  $C(z)$  ersetzt:

$$\sigma_z = C(z) e^{\frac{-U}{A} K_i \tan(\delta_s) z} \quad (3.15)$$

Um die Differentialgleichung (Glg. 3.9) mit diesem Ansatz beschreiben zu können, ist es erforderlich die erste Ableitung der Funktion aus Glg. 3.15 zu bilden:

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{-U K_i \tan(\delta_s)}{A} e^{\frac{-U K_i \tan(\delta_s)}{A} z} C + \frac{dC}{dz} e^{\frac{-U K_i \tan(\delta_s)}{A} z} \quad (3.16)$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke von Glg. 3.14 und Glg. 3.15 in Glg. 3.9 und Kürzen der einander aufhebenden Terme ergibt sich nach Umformung:

$$\frac{dC}{dz} = \gamma e^{\frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) z} \quad (3.17)$$

Durch unbestimmte Integration beider Seiten der Glg. 3.17 lässt sich schlussendlich die Lösung der Funktion  $C(z)$  ermitteln:

$$C(z) = \frac{A}{U} \frac{\gamma}{K_i \tan(\delta_s)} e^{\frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) z} + C_1 \quad (3.18)$$

wobei  $C_1$  wieder eine Integrationskonstante darstellt. Einsetzen des Ergebnisses von Glg. 3.18 in Glg. 3.15 und Zusammenfassung des rechten Terms ergibt schlussendlich die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung:

$$\sigma_z = \frac{A}{U} \frac{\gamma}{K_i \tan(\delta_s)} + C_1 e^{-\frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) z} \quad (3.19)$$

Es handelt sich beim vorliegenden Beispiel um ein Anfangswertproblem. Am Anfang des betrachteten Körpers (der Geländeoberfläche) wird der Funktionswert  $\sigma_z(z=0)$  sowie die Werte der ersten  $n-1$  Ableitungen an dieser Stelle zur Bestimmung der  $n$  Integrationskonstanten  $C_1, C_2, \dots, C_n$  vorgegeben. Da im gegenständlichen Fall nur eine unbekannte Integrationskonstante vorliegt, genügt es, den Funktionswert an dieser Stelle vorzugeben. Es werden dafür dementsprechend die Vertikalspannung an der Geländeoberfläche  $\sigma_z(z=0)$  benötigt. Im Falle einer unbelasteten, freien Oberfläche ergibt sich der Anfangswert für die Differentialgleichung zu:

$$\sigma_z(z=0) = 0 \quad (3.20)$$

Einsetzen des Anfangswerts aus Glg. 3.20 in Glg. 3.19 ermöglicht die Bestimmung der Integrationskonstante  $C_1$ :

$$C_1 = -\frac{A}{U} \frac{\gamma}{K_i \tan(\delta_s)} \quad (3.21)$$

womit sich die *spezielle* Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für die unbelastete, freie Geländeoberfläche ergibt:

$$\sigma_z = \frac{A}{U} \frac{\gamma}{K_i \tan(\delta_s)} \left( 1 - e^{-\frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) z} \right) \quad (3.22)$$

### 3.2.3 Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mittels Partikulärlösung

Alternativ zur Lösung mittels Variation der Konstanten kann die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung durch die Summe der *homogenen* Lösung und einer *partikulären* Lösung dargestellt werden. Der Lösungsansatz für die *partikuläre* Lösung einer *linearen* Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten entspricht dabei im Wesentlichen dem Funktionstyp des Störglieds [Papula 2015].

Im vorliegenden Fall handelt es sich bei dem Störglied um eine konstante Funktion, womit der Ansatz für die partikuläre Lösung ebenfalls einer konstanten Funktion  $C_0$  entspricht:

$$\sigma_{z,\text{part}} = C_0 \quad (3.23)$$

Die Ableitung einer konstanten Funktion wird zu null, womit gilt:

$$\frac{d\sigma_{z,\text{part}}}{dz} = 0 \quad (3.24)$$

Ein Einsetzen dieses Lösungsansatzes in die Differentialgleichung (Glg. 3.9) ergibt  $C_0$  und damit die partikuläre Lösung:

$$\sigma_{z,\text{part}} = C_0 = \frac{A}{U} \frac{\gamma}{K_i \tan(\delta_s)} \quad (3.25)$$

Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung ergibt sich als Summe der *homogenen* Lösung und der *partikulären* Lösung:

$$\sigma_z = \sigma_{z,\text{hom}} + \sigma_{z,\text{part}} = C_1 e^{-\frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) z} + \frac{A}{U} \frac{\gamma}{K_i \tan(\delta_s)} \quad (3.26)$$

Die *spezielle* Lösung für das definierte Anfangswertproblem einer unbelasteten, freien Geländeoberfläche kann wieder analog zur Lösung mittels Variation der Koeffizienten gefunden werden (siehe Abschnitt 3.2.2).

### 3.2.4 Varianten der Differentialgleichung

Nachfolgend wird dargestellt, dass sich durch die Differentialgleichung zur Ermittlung des Siloerddrucks weitere Faktoren berücksichtigen lassen. Konkret wird gezeigt wie eine vertikale Auflast an der Geländeoberfläche und wie eine allfällige Adhäsion zwischen den begrenzenden Wänden und dem Boden berücksichtigt werden kann.

#### Berücksichtigung einer vertikalen Auflast an der Geländeoberfläche

Eine vertikale, flächige Auflast  $p_v$  an der Geländeoberfläche stellt eine geänderte *Anfangsbedingung* des *Anfangswertproblems* dar. Dementsprechend kann diese Anfangsbedingung analog zur Bedingung einer unbelasteten Geländeoberfläche berücksichtigt werden. Dafür wird zunächst von der bekannten Lösung der Differentialgleichung (Glg. 3.19, Glg. 3.26) ausgegangen:

$$\sigma_z = C_1 e^{-\frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) z} + \frac{A}{U} \frac{\gamma}{K_i \tan(\delta_s)}$$

Damit die vertikale Auflast in der Lösung berücksichtigt werden kann, muss die unbekannte Konstante  $C_1$  bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \sigma_z(z=0) = p_v &= C_1 \underbrace{e^{-\frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) \cdot 0}}_{=1} + \frac{A}{U} \frac{\gamma}{K_i \tan(\delta_s)} \\ \rightarrow C_1 &= p_v - \frac{A}{U} \frac{\gamma}{K_i \tan(\delta_s)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Durch Rückeinsetzen des bekannten Werts der Konstante  $C_1$  in die Glg. 3.19 ergibt sich die Lösung der Differentialgleichung für die geänderte Anfangsbedingung zu:

$$\sigma_z = \frac{A}{U} \frac{\gamma}{K_i \tan(\delta_s)} \left( 1 - e^{-\frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) z} \right) + p_v e^{-\frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) z} \quad (3.28)$$

### Berücksichtigung einer Adhäsionskraft zwischen Boden und Wänden

Neben der Reibung zwischen den begrenzenden Wänden und dem Boden, kann sich auch eine Adhäsion  $c$  zwischen Wand und Boden einstellen. Diese Adhäsion bewirkt eine zusätzliche Verminderung der auftretenden Vertikalspannungen im Boden. Um die Adhäsion in der Differentialgleichung zu berücksichtigen, muss diese im Kräftegleichgewicht aufscheinen, womit die Notwendigkeit besteht Glg. 3.6 zu adaptieren:

$$r^2 \pi \sigma_z - \left( \sigma_z + \frac{d\sigma_z}{dz} dz \right) r^2 \pi - K_i \sigma_z \tan(\delta_s) 2r \pi dz + \gamma r^2 \pi dz - 2cr \pi dz = 0 \quad (3.29)$$

Nach Zusammenfassung und Kürzung ergibt dies unter Berücksichtigung eines äquivalenten Radius  $r$  für allgemeine Querschnittsformen die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) \sigma_z = \gamma - c \frac{U}{A} \quad (3.30)$$

Die homogene Lösung dieser Differentialgleichung entspricht Glg. 3.14. Damit kann die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung über die Variation der Konstanten gefunden werden, wobei wiederum analog zu Glg. 3.15 die Integrationskonstante  $C_1$  durch eine a priori unbekannte Funktion ersetzt wird und die erste Ableitung der erhaltenen Funktion gebildet wird.

$$\begin{aligned} \sigma_z &= C(z) e^{-\frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) z} \\ \frac{d\sigma_z}{dz} &= -\frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) e^{-\frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) z} C(z) + \frac{dC}{dz} e^{-\frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) z} \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Terme in die Glg. 3.30 und Kürzen der einander aufhebenden Terme liefert:

$$\frac{dC}{dz} = \left( \gamma - c \frac{U}{A} \right) e^{\frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) z} \quad (3.31)$$

Mittels unbestimmter Integration von Glg. 3.31 kann die Funktion  $C_1(z)$  bestimmt werden:

$$C(z) = \left( \gamma - c \frac{U}{A} \right) \frac{A}{U} \frac{1}{K_i \tan(\delta_s)} e^{\frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) z} + C_1 \quad (3.32)$$

Nach Einsetzen von Glg. 3.32 in Glg. 3.30 erhält man die Lösung der Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Adhäsion:

$$\sigma_z = \frac{A}{U} \frac{\gamma}{K_i \tan(\delta_s)} - \frac{c}{K_i \tan(\delta_s)} + C_1 e^{-\frac{U}{A} K_i \tan(\delta_s) z} \quad (3.33)$$

Auch in diesem Fall handelt es sich um ein Anfangswertproblem, bei welchem erneut nur eine Anfangsbedingung (an der Geländeoberfläche) definiert werden muss, um die Differentialgleichung

eindeutig zu lösen. Geht man wieder von einer unbelasteten Geländeoberfläche aus (Anfangsbedingung gemäß Glg. 3.20), so ergibt sich die Integrationskonstante  $C_1$  in diesem Fall zu:

$$C_1 = -\frac{A}{U} \frac{\gamma}{K_i \tan(\delta_z)} + \frac{c}{K_i \tan(\delta_s)} \quad (3.34)$$

womit sich die *spezielle* Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für die unbelastete, freie Geländeoberfläche ergibt:

$$\sigma_z = \left( \frac{A}{U} \frac{\gamma}{K_i \tan(\delta_s)} - \frac{c}{K_i \tan(\delta_s)} \right) \left( 1 - e^{-\frac{U}{A} K \tan(\delta_s) z} \right) \quad (3.35)$$

### 3.3 Beispiel 1

Siloerddruck tritt zum Beispiel bei räumlich begrenzten Hinterfüllbereichen auf. Ein Beispiel hierfür bilden Stützwände in der Nähe von Felsböschungen. Die Situation gemäß Abb. 3.1 kann dabei als „rechteckiger Silo“ mit  $A = ab$  und  $U = 2(a + b)$  aufgefasst werden, weshalb Glg. 3.22 angepasst wird:

$$\sigma_z = \frac{ab}{2(a + b)} \frac{\gamma}{K_i \tan(\delta_s)} \left( 1 - e^{-\frac{2(a+b)}{ab} K_i \tan(\delta_s) z} \right) \quad (3.36)$$

Kann die Längenausdehnung  $a$  als unendlich angenommen werden, ergibt sich für die Vertikalspannungen im Hinterfüllbereich (vgl. auch [ÖNORM B 4434 1993]):

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (\sigma_z) = \frac{b}{2} \frac{\gamma}{K_i \tan(\delta_s)} \left( 1 - e^{-\frac{2}{b} K_i \tan(\delta_s) z} \right) \quad (3.37)$$

Wenn die Stützwand und die Felsböschung als unverschieblich angenommen werden können, so wirkt der Erdruchdruck  $K_0$ , welcher sich für die Situation in Abb. 3.2 folgendermaßen errechnet:

$$K_0 = 1 - \sin(\varphi') = 1 - \sin(32,5^\circ) = 0,462 \quad (3.38)$$

Unter Verwendung von Glg. 3.37 und Glg. 3.38 ergibt sich für die Verteilung der Vertikalspannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_z(z = 0) &= 0 \text{ kN/m}^2 \\ \sigma_z(z = 1) &= 14,44 \text{ kN/m}^2 \\ \sigma_z(z = 2) &= 23,56 \text{ kN/m}^2 \\ \sigma_z(z = 4) &= 29,32 \text{ kN/m}^2 \\ \sigma_z(z = 5) &= 32,97 \text{ kN/m}^2 \\ &\vdots \\ \sigma_z(z = \infty) &= 39,23 \text{ kN/m}^2 \left( = \frac{b}{2} \frac{\gamma}{K_0 \tan(\delta_s)} \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

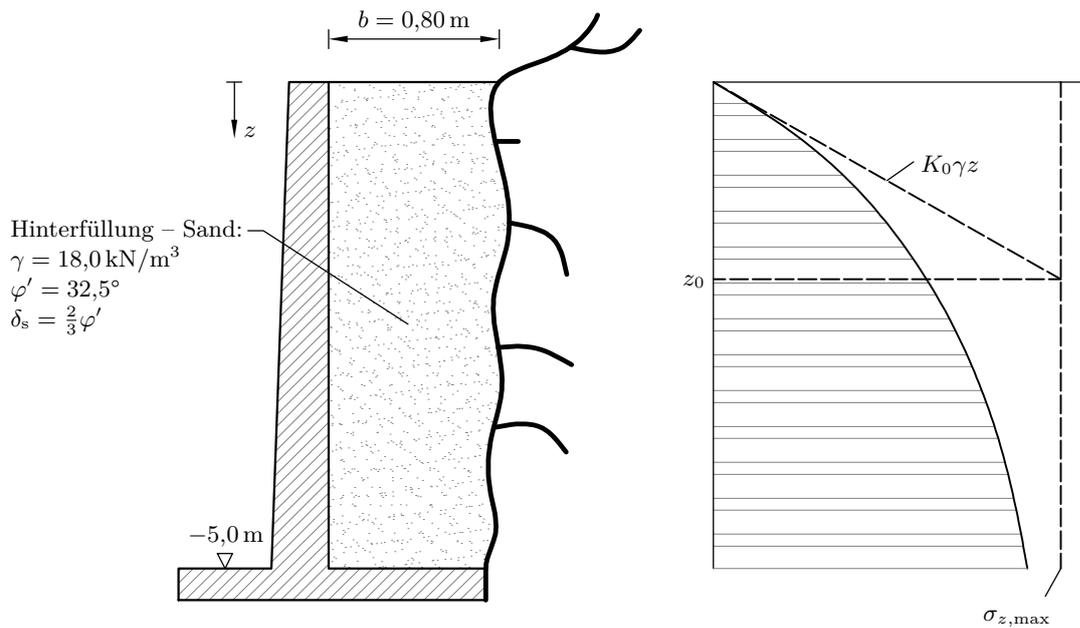


Abb. 3.2: Beispiel für ein Anwendungsgebiet des Siloerddrucks: Siloerddruck auf eine Stützmauer nahe einer Felsböschung

Zur Ermittlung des Siloerddrucks (Horizontalspannungen an der Rückseite der Stützmauer) müssen die Vertikalspannungen gemäß Glg. 3.2 noch mit dem Erdruehdrukbeiwert multipliziert werden  $e_0 = K_0\sigma_z$ :

$$\begin{aligned}
 e_0(z=0) &= 0 \text{ kN/m}^2 \\
 e_0(z=1) &= 6,67 \text{ kN/m}^2 \\
 e_0(z=2) &= 10,88 \text{ kN/m}^2 \\
 e_0(z=4) &= 13,55 \text{ kN/m}^2 \\
 e_0(z=5) &= 15,23 \text{ kN/m}^2 \\
 &\vdots \\
 e_s(z=\infty) &= 18,12 \text{ kN/m}^2
 \end{aligned}
 \tag{3.40}$$

Die Verläufe der Vertikalspannungen und der Erddruckverteilung über die Tiefe sind in Abb. 3.3 dargestellt.

Wie Glg. 3.39 bzw. der Abb. 3.3 zu entnehmen ist, strebt die vertikale Spannung bzw. der Siloerddruck asymptotisch einem Grenzwert entgegen, der sich durch Limes-Bildung der Glg. 3.22 für die Tiefe  $z \rightarrow \infty$  ergibt:

$$\sigma_{z,\max} = \lim_{z \rightarrow \infty} (\sigma_z) = \frac{A}{U} \frac{\gamma}{K_0 \tan(\delta_s)} \left( 1 - \underbrace{e^{-\frac{U}{A} K \tan(\delta_s) z}}_{\rightarrow 0} \right) = \frac{A}{U} \frac{\gamma}{K_0 \tan(\delta_s)}
 \tag{3.41}$$

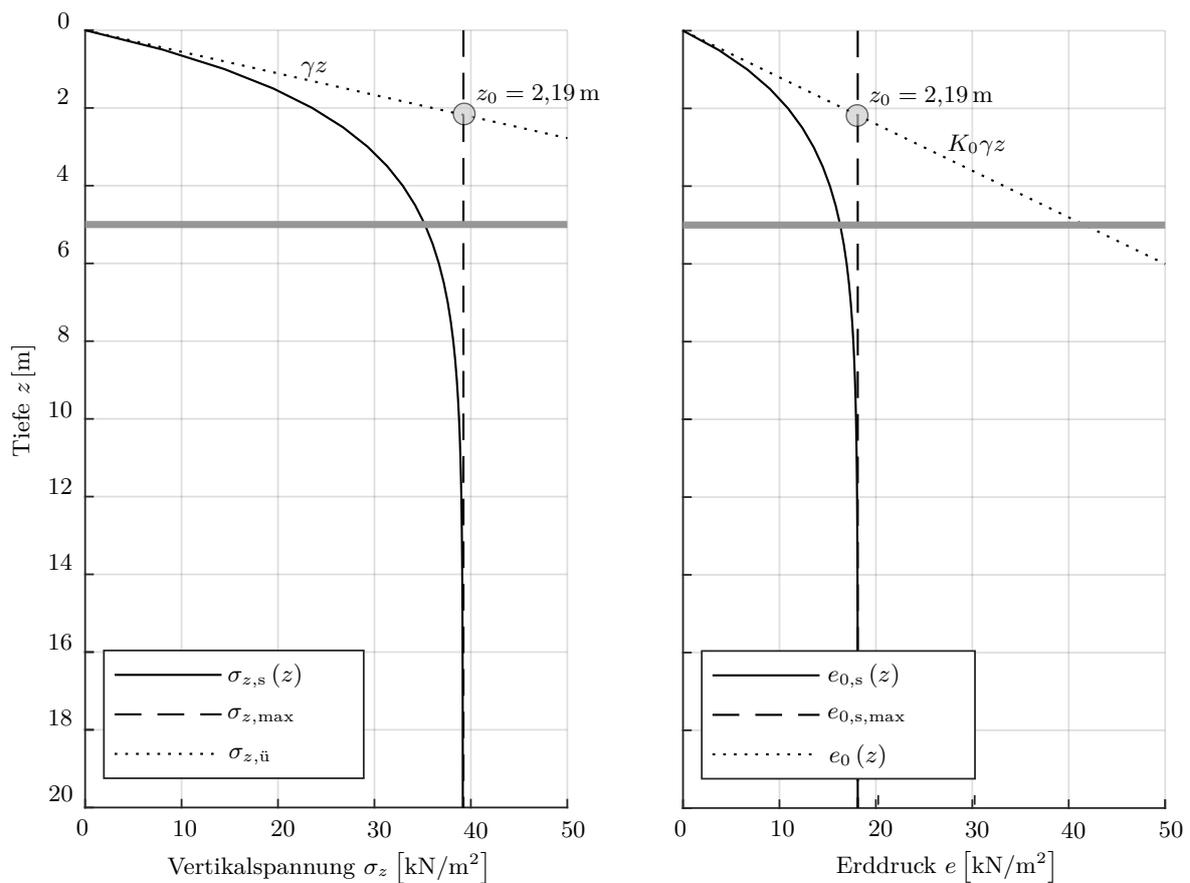


Abb. 3.3: Verlauf der Vertikalspannungen und des (Silo-)erdrucks in der Hinterfüllung für die Gegebenheiten gem. Abb. 3.2

Durch Gleichsetzen der Überlagerungsspannung mit der maximal auftretenden Vertikalspannungen zufolge Siloerddruck, lässt sich eine „ideelle Wandtiefe“  $z_0$  ermitteln, in der die Überlagerungsspannung gleich groß ist wie die maximal auftretende Vertikalspannung zufolge Siloerddruck:

$$\sigma_{z,max} = \frac{A}{U} \frac{\gamma}{K_0 \tan(\delta_s)} = \gamma z_0 \rightarrow z_0 = \frac{A}{U} \frac{1}{K_0 \tan(\delta_s)} \quad (3.42)$$

Für verschiedenen Querschnittsformen des „Silos“ lässt sich die ideelle Wandtiefe gemäß nachfolgender Auflistung ermitteln:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{A}{U} \frac{1}{K_0 \tan(\delta_s)} && \dots \text{ allgemeine Querschnittsfläche} \\ z_0 &= \frac{r}{2} \frac{1}{K_0 \tan(\delta_s)} && \dots \text{ kreisförmige Querschnittsfläche} \\ z_0 &= \frac{ab}{2(a+b)} \frac{1}{K_0 \tan(\delta_s)} && \dots \text{ rechteckige Querschnittsfläche} \\ z_0 &= \frac{b}{2} \frac{1}{K_0 \tan(\delta_s)} && \dots \text{ endlos ausgedehnte rechteckige Querschnittsfläche} \end{aligned}$$

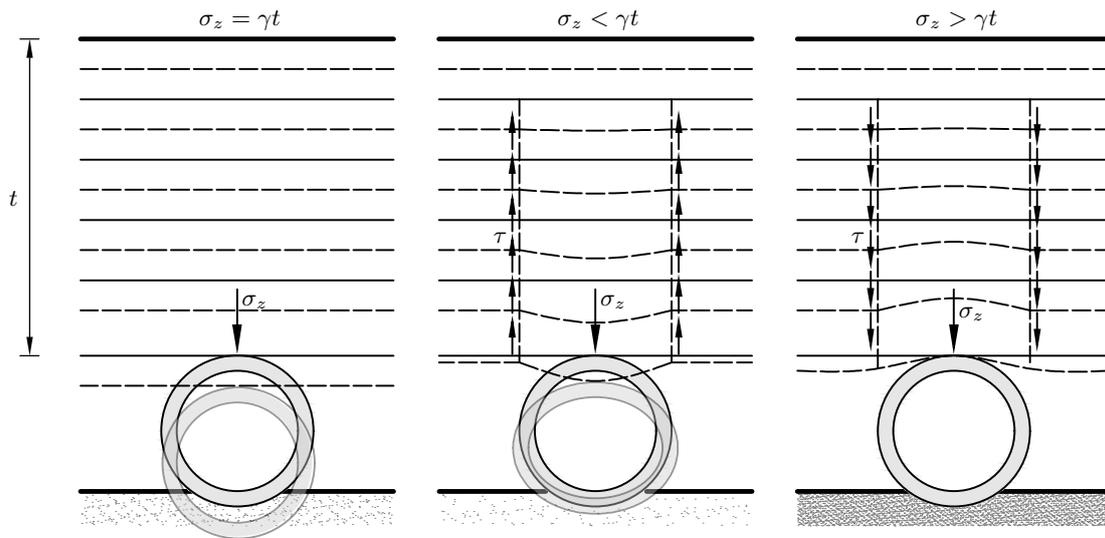


Abb. 3.4: Unterschiedliche Formänderungsbedingungen bei eingebetteten Rohren (Parallelverschiebung des Rohres, Grabenbedingung und Dammbedingung)

### 3.4 Beispiel 2

Ein weiteres Beispiel für das Auftreten des Siloerddrucks stellen nachgiebige Rohre dar, die in einem engen Graben verlegt wurden und das Hinterfüllmaterial des Grabens anschließend mit lockerer bis mitteldichter Lagerungsdichte eingebaut wurde. Bei dieser Konstellation tritt eine Relativverschiebung zwischen dem Hinterfüllmaterial und den Grabenwänden auf. Diese Verschiebung setzt sich aus einem Anteil aus der (elastischen) Verformung des Rohres und einem Anteil aus der Setzung des Hinterfüllmaterials zusammen. Durch die Mantelreibung zwischen Hinterfüllmaterial und Grabenwand können wiederum Schubspannungen aktiviert werden, womit die Grabenwände wie die Wände eines (rechteckigen) Silos wirken und die Vertikalspannung auf den Rohrscheitel als Silodruck berechnet werden kann. In diesem Fall (*Grabenbedingung*) treten geringere Vertikalspannungen am Rohrscheitel auf als beim (theoretischen) Fall, in dem das Rohr dieselbe Verformung wie der umgebende Untergrund (unendlicher Halbraum) erfährt. Wird anstelle des nachgiebigen Rohres ein steifes Rohr (auf steifem Planum) verlegt und es setzen sich sowohl die Hinterfüllung als auch die Umgebung, so treten höhere Vertikalspannungen auf (*Dammbedingung*) als beim theoretischen Fall, in dem die Verformungen des Rohres ident mit den Verformungen des umgebenden Untergrunds sind. Dieser Fall kann über Näherungsformeln berücksichtigt werden [Kézdi 1962]. Die beschriebenen Bedingungen sind in Abb. 3.4 dargestellt.

Nachfolgend soll die Vertikalspannung am Rohrscheitel für ein nachgiebiges Rohr zufolge Bodeneigenlast ermittelt werden. Das Rohr (Durchmesser  $D = 50$  cm) wurde in einem 80 cm breiten, mit Sand aufgefüllten Rohrgraben in einer Tiefe von 2,5 m (Scheitelebene) verlegt. Die Bodenparameter sind sowohl für das Hinterfüllungsmaterial als auch für den anstehenden (homogenen) Untergrund bekannt (siehe Tab. 3.1).

Als Wandreibungswinkel zwischen Hinterfüllungsmaterial und anstehendem Untergrund wird der kleinste Reibungswinkel der betrachteten Materialien gewählt:

$$\delta_s = \min [\varphi'_{\text{Füllung}}, \varphi'_{\text{Boden}}] = \varphi'_{\text{Boden}} = 25,0^\circ$$

Tab. 3.1: Bodenparameter für das Hinterfüllungsmaterial und den anstehenden Boden

| Bodenparameter                                       | Anstehender Boden<br>(schluffiger Sand) | Hinterfüllungsmaterial<br>( Sand) |
|--|---|-----------------------------------|
| Wichte $\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]                 | 18,0                                    | 18,0                              |
| Wichte unter Auftrieb $\gamma'$ [kN/m <sup>3</sup> ] | 10,0                                    | 10,0                              |
| Reibungswinkel $\varphi'$ [°]                        | 25,0                                    | 32,5                              |
| Kohäsion $c$ [kN/m <sup>2</sup> ]                    | 5                                       | 0                                 |

In dieser Situation wirkt aufgrund der geringen seitlichen Deformation an den Wandflächen des Grabens der Erdruchdruck. Der Erdruchdruckbeiwert beträgt für die vorliegende Situation:

$$K_0 = 1 - \sin(\varphi') = 1 - \sin(32,5^\circ) = 0,462$$

Nimmt man eine unbelastete Geländeoberfläche und eine unendliche Ausdehnung des Grabens an, so entspricht die Lösung jener aus Glg. 3.37 und es ergibt sich für die Vertikalspannung am Rohrscheitel:

$$\begin{aligned} \sigma_z(z = 2,5 \text{ m}) &= \frac{b}{2} \frac{\gamma}{K_i \tan(\delta_s)} \left( 1 - e^{-\frac{2}{b} K_i \tan(\delta_s) z} \right) = \dots \\ &= \frac{0,8}{2} \frac{18,0}{0,462 \tan(25)} \left( 1 - e^{-\frac{2}{0,8} 0,462 \tan(25 \cdot 2,5)} \right) = 24,73 \text{ kN/m}^2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Würde man die Silowirkung nicht beachten und für die Vertikalspannung nur das Gewicht aus dem überlagernden Hinterfüllmaterial berücksichtigen, so erhielte man:

$$\sigma_z(z = 2,5 \text{ m}) = \gamma z = 18,0 \cdot 2,5 = 45,0 \text{ kN/m}^2$$



# Kapitel 4

## Bettungsmodulverfahren

### 4.1 Herleitung der Differentialgleichung

#### 4.1.1 Grundlagen und Motivation

Das Bettungsmodulverfahren dient in der Geotechnik in vielfältiger Weise zur Beschreibung der Interaktion zwischen dem Baugrund und einem Fundament. Häufig Anwendung findet es für die Berechnung von Flachgründungen bzw. Baugrubensicherungen oder bei horizontal belasteten Tiefgründungselementen zur Berücksichtigung von vertikalen bzw. horizontalen Bodenreaktionen. Wird beispielsweise ein flachgegründetes Fundament (z. B. Streifenfundamente oder Plattenfundamente) belastet, so ruft diese Belastung eine Reaktion des Untergrunds hervor (Sohlspannung), wobei sowohl die Sohlspannung als auch die Verformung des Fundaments zunächst unbekannt sind. Eine Möglichkeit, diese unbekanntes Größen zu ermitteln, stellt das Bettungsmodulverfahren dar, bei dem ein (linearer) Zusammenhang zwischen der Verformung des Fundaments (Biegelinie) und der hervorgerufenen Sohlspannung unterstellt wird. Die Einsenkung eines Punktes der Sohlfläche wird unabhängig von der Belastung benachbarter Teilflächen ermittelt, womit diese nur von der Belastung des betrachteten Punktes selbst abhängig ist.

#### 4.1.2 Biegelinie eines elastisch gebetteten Balkens

Sind die Querschnittsabmessungen eines Fundaments sehr klein im Verhältnis zu dessen Längsausdehnung, so kann dieses Fundament als Balken (Beschreibung des Körpers anhand seiner Längsachse) betrachtet und (bei entsprechend kleinen Verformungen im Verhältnis zur unverformten Lage) gemäß der Balkentheorie erster Ordnung beschrieben werden. Für einen Balken (Fundament) mit der Biegesteifigkeit  $EI$  kann die elastische Biegelinie unter Verwendung des Koordinatensystems gemäß Abb. 4.1 durch die Differentialgleichung der Biegelinie beschrieben werden:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (4.1)$$

mit:  $z(x)$  ... Ortskoordinate zur Beschreibung der vertikalen Balkenverformung [m]  
 $M$  ... Biegemoment [kN m]  
 $EI$  ... (konstante) Biegesteifigkeit des Balkenes [kN m<sup>2</sup>]

Durch Differenzieren dieser Gleichung ergibt sich die Querkraft  $Q$  und nach einer weiteren Ableitung die Gesamtbelastung des Balkenes  $q(x)$ :

$$Q = \frac{dM}{dx} = -EI \frac{d^3z}{dx^3} \quad (4.2)$$

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = -EI \frac{d^4z}{dx^4} \quad (4.3)$$

mit:  $Q(x)$  ... Querkraft [kN]  
 $q(x)$  ... Belastung des Balkenes [kN/m]

Die Gesamtbelastung des Balkens  $q$  setzt sich aus der äußeren Belastung  $p$  – welche senkrecht nach unten wirkt – und der ihr entgegengesetzten Bodenreaktion bzw. Sohlpressung  $\sigma_0$  zusammen:

$$q = -p + \sigma_0 \quad (4.4)$$

Die unbekannte Sohlpressung kann durch ein Federgesetz mit der Durchbiegung des Balkens in Verbindung gebracht werden. Konkret erfolgt die Modellierung der Bettungseigenschaften des Bodens durch eine unendlich gedachte Anzahl parallel wirkender linearer Federn, welche durch ihre Federsteifigkeit, den Bettungsmodul  $k_s$  [kN/m<sup>3</sup>]<sup>1</sup>, gekennzeichnet sind. Es ergibt sich damit ein proportionales Verhalten zwischen dem Sohldruck  $\sigma_0$  und der Einsenkung  $z$  an der Stelle  $x$ :

$$\sigma_0 = k_s z \quad (4.5)$$

Glg. 4.5 gilt dabei für eine Flächenlast [kN/m<sup>2</sup>]. Für eine Linienlast [kN/m] muss der Ausdruck noch mit der Breite  $b$  multipliziert werden:

$$\sigma_0 = k_s z b \quad (4.6)$$

Einsetzen von Glg. 4.6 und Glg. 4.4 in Glg. 4.3 führt zu:

$$-EI \frac{d^4z}{dx^4} = -p + \sigma_0 = -p + k_s b z \quad (4.7)$$

In der Regel wird Glg. 4.7 durch die Einführung der elastischen Länge  $L$  adaptiert:

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{k_s b}} \quad (4.8)$$

worauhin sich die Differentialgleichung für einen elastisch gebetteten Balken folgendermaßen ergibt:

$$\frac{d^4z}{dx^4} + \frac{4z}{L^4} = \frac{1}{EI} p \quad (4.9)$$

<sup>1</sup>Die Einheit des Bettungsmodul kann nicht direkt als Kraft pro Volumen interpretiert werden. Es handelt sich um eine Federsteifigkeit [kN/m], die auf eine bestimmte Fläche [m<sup>2</sup>] bezogen wird. Dementsprechend ergibt sich die dargestellte Schreibweise [kN/m<sup>3</sup>] als Verkürzung der Einheit [kN/m/m<sup>2</sup>].

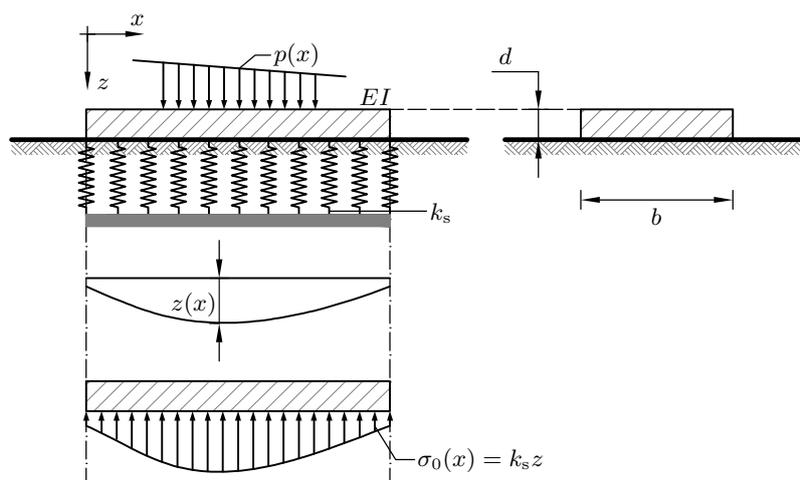


Abb. 4.1: Statischer Systemansatz des Bettungsmodulverfahrens

Es handelt sich dabei um eine *gewöhnliche* (es treten keine partiellen Ableitungen auf), *lineare* (die Funktionsterme  $z(x)$  und  $\frac{d^4 z(x)}{dx^4}$  sind jeweils linear), *inhomogene* (es treten Störterme auf) Differentialgleichung 4. Ordnung (es treten höchstens vierte Ableitungen auf) mit *konstanten Koeffizienten*.

## 4.2 Lösung der Differentialgleichung

Für einfache Randbedingungen wie zum Beispiel eine konstante Belastung ist diese Differentialgleichung analytisch lösbar. Damit existiert eine mathematisch geschlossene Lösung für die Verformungen  $z$  und (über den Bettungsmodulansatz) auch eine Lösung für die Verteilung des Sohldrucks  $\sigma_0$ .

### 4.2.1 Homogene Lösung

Da es sich bei Glg. 4.9 um eine *inhomogene* Differentialgleichung handelt, setzt sich die Lösung aus einem *homogenen* und einem *partikulären* Anteil zusammen. Der *homogene* Anteil der Differentialgleichung ergibt sich zu:

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + \frac{4z}{L^4} = 0 \quad (4.10)$$

Der Homogenteil linearer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung kann über folgenden Ansatz gelöst werden [Papula 2015]:

$$z(x) = e^{\lambda x} \quad (4.11)$$

Damit ergibt sich für die Differentialgleichung in Glg. 4.10 folgende charakteristische Gleichung:

$$\lambda^4 + \frac{4}{L^4} = 0 \quad (4.12)$$

womit sich  $\lambda$  folgendermaßen errechnen lässt:

$$\lambda = \sqrt[4]{-1} \frac{\sqrt[4]{4}}{L} \quad (4.13)$$

Der Ausdruck in Glg. 4.13 beinhaltet eine negative Wurzel, welche nicht im reellen Zahlenraum gelöst werden kann. Es ist daher zweckmäßig, den Wert unter der Wurzel (Radikand) in Glg. 4.13 bereits als komplexe Zahl zu betrachten. Der Radikand kann dabei folgendermaßen dargestellt werden:

$$z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = -1 + 0 \cdot i \quad (4.14)$$

$$z = |z| e^{i(\theta+2k\pi)} = |z| (\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)) \quad (4.15)$$

Wobei sich für die Lösung des Wurzelausdrucks in Glg. 4.13 die Darstellung mittels Glg. 4.15 empfiehlt, bei der die EULER'sche Formel verwendet wurde. Der Ausdruck  $2k\pi$  berücksichtigt das Fehlen einer eindeutigen Lösung im komplexen Zahlenraum über die Periodizität des Arguments, wobei gilt:  $k \in \mathbb{Z}_0^+$ . Wird  $-1$  als komplexe Zahl aufgefasst, so ist deren Betrag  $|z| = 1$  und das Argument  $\theta = \pi$ . Glg. 4.13 lässt sich daher umformulieren zu:

$$\lambda = \sqrt[4]{-1} \frac{\sqrt[4]{4}}{L} = \sqrt[4]{|z| e^{i(\theta+2k\pi)}} \frac{\sqrt[4]{4}}{L} = 1 \cdot e^{i(\pi+2k\pi)\frac{1}{4}} \frac{\sqrt[4]{4}}{L} = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{4}}{L} \quad (4.16)$$

Für  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  besitzt Glg. 4.16 voneinander verschiedene Lösungen, die sich für  $k \geq 4$  wiederholen. Dementsprechend ergeben sich die Lösungen von Glg. 4.16 zu:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\sqrt[4]{4}}{L} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt[4]{4}}{L} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = \frac{1}{L} + i \frac{1}{L} \\ \lambda_2 &= \frac{\sqrt[4]{4}}{L} e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt[4]{4}}{L} \left[ \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right] = -\frac{1}{L} + i \frac{1}{L} \\ \lambda_3 &= \frac{\sqrt[4]{4}}{L} e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{\sqrt[4]{4}}{L} \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right] = -\frac{1}{L} - i \frac{1}{L} \\ \lambda_4 &= \frac{\sqrt[4]{4}}{L} e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt[4]{4}}{L} \left[ \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right] = \frac{1}{L} - i \frac{1}{L} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die Lösung der charakteristischen Glg. 4.12 ergibt zwei konjugiert komplexe Zahlenpaare. Ein konjugiert komplexes Zahlenpaar  $(\lambda_1, \lambda_4)$  lässt sich dabei folgendermaßen umschreiben:

$$z_{1,3} = e^{\lambda x} = e^{\left(\frac{1}{L} \pm i \frac{1}{L}\right)x} = e^{\frac{x}{L}} \left( \cos\left(\frac{x}{L}\right) \pm i \sin\left(\frac{x}{L}\right) \right) \quad (4.18)$$

Da sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil aus Glg. 4.18 Lösungsfunktionen der Glg. 4.12 darstellen (wie leicht durch viermaliges Ableiten der entsprechenden Terme aus Glg. 4.18 und

anschließendes Einsetzen in Glg. 4.10 gezeigt werden kann), ergeben sich die vier Basislösungen der Differentialgleichung zu:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= e^{\frac{x}{L}} \cos\left(\frac{x}{L}\right) \\
 z_2 &= e^{\frac{x}{L}} \sin\left(\frac{x}{L}\right) \\
 z_3 &= e^{-\frac{x}{L}} \cos\left(\frac{x}{L}\right) \\
 z_4 &= e^{-\frac{x}{L}} \sin\left(\frac{x}{L}\right)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Wenn die Lösungen gemäß Glg. 4.19 ein Fundamentalsystem bilden und somit linear unabhängig sind, kann die homogene Gesamtlösung als Linearkombination der Basislösungen (mit zunächst unbekanntem Faktoren  $C_i$ ) gebildet werden [Papula 2015]. Um gewährleisten zu können, dass die Basislösungen nicht linear voneinander abhängen, muss die WRONSKI-Determinante der Basislösungen von null verschieden sein. Die WRONSKI-Determinante wird im vorliegenden Fall aus den Basislösungen und den ersten drei Ableitungen gebildet:

$$\begin{vmatrix}
 z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\
 \frac{dz_1}{dx} & \frac{dz_2}{dx} & \frac{dz_3}{dx} & \frac{dz_4}{dx} \\
 \frac{d^2z_1}{dx^2} & \frac{d^2z_2}{dx^2} & \frac{d^2z_3}{dx^2} & \frac{d^2z_4}{dx^2} \\
 \frac{d^3z_1}{dx^3} & \frac{d^3z_2}{dx^3} & \frac{d^3z_3}{dx^3} & \frac{d^3z_4}{dx^3}
 \end{vmatrix} = \frac{32 \left( \cos\left(\frac{x}{L}\right)^4 + \sin\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 2 \cos\left(\frac{x}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right)}{L^6} \tag{4.20}$$

Die Berechnung der Determinante einer 4x4-Matrix kann z. B. mit dem LAPLACE'schen Entwicklungssatz erfolgen, wobei dieses Verfahren rechenaufwändig ist und daher an dieser Stelle nicht näher ausgeführt wird. Im vorliegenden Fall wurde das Ergebnis der WRONSKI-Determinante (Glg. 4.20) unter Verwendung des symbolischen Teils des Softwarepakets MATLAB ermittelt. Da die WRONSKI-Determinante aus Glg. 4.20 ungleich null ist, handelt es sich um linear unabhängige Basislösungen, womit sich die homogene Lösung folgendermaßen ergibt:

$$\begin{aligned}
 z_{\text{hom}} &= C_1 \left[ e^{\frac{x}{L}} \cos\left(\frac{x}{L}\right) \right] + C_2 \left[ e^{\frac{x}{L}} \sin\left(\frac{x}{L}\right) \right] \\
 &+ C_3 \left[ e^{-\frac{x}{L}} \cos\left(\frac{x}{L}\right) \right] + C_4 \left[ e^{-\frac{x}{L}} \sin\left(\frac{x}{L}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Glg. 4.21 dient als Basis für die Auffindung der *allgemeinen* Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung (Glg. 4.9). Die *allgemeine* Lösung kann dabei entweder mittels *Variation der Konstanten* oder mittels Auffindung einer *speziellen* Lösung (*Partikulärlösung*) und anschließender Superposition dieser Lösungen gefunden werden, wobei nachfolgend nur die Vorgehensweise mit *Partikulärlösung* gezeigt wird.

### 4.2.2 Inhomogene Lösung

Der Störterm  $p$  der hier behandelten *inhomogenen* Differentialgleichung (Glg. 4.9) stellt eine äußere Belastung auf das Fundament in Form einer Flächenlast [kN/m<sup>2</sup>] dar. Um eine Linienlast [kN/m] zu erhalten (die mit der Balkentheorie kompatibel ist), wird die Flächenlast mit der Breite  $b$  multipliziert. Es folgt somit für Glg. 4.9:

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + \frac{4z}{L^4} = \frac{pb}{EI} \quad (4.22)$$

Der Lösungsansatz für die *partikuläre* Lösung einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten entspricht dabei im Wesentlichen dem Funktionstyp des Störglieds [Papula 2015]. Als Belastung wird im Folgenden der Sonderfall einer Gleichlast behandelt. Dabei gilt:

$$p = \text{const.} \quad (4.23)$$

Damit handelt es sich bei dem Störglied um eine konstante Funktion, womit der Ansatz für die partikuläre Lösung ebenfalls einer konstanten Funktion  $C_0$  entspricht:

$$z_{\text{part}} = C_0 \quad (4.24)$$

Alle Ableitungen einer konstanten Funktion werden zu null, womit sich nach Einsetzen in Glg. 4.22 ergibt:

$$0 + \frac{4C_0}{L^4} = \frac{pb}{EI} \quad (4.25)$$

Daraus folgt für die partikuläre Lösung im Falle einer Gleichlast:

$$z_{\text{part}} = C_0 = \frac{L^4 b}{4EI} p \quad (4.26)$$

Damit ergibt sich die *allgemeine* Lösung für eine konstante Gleichlast durch Addition der *homogenen* Lösung und der *partikulären* Lösung:

$$\begin{aligned} z_{\text{ges}} = & C_1 \left[ e^{\frac{x}{L}} \cos\left(\frac{x}{L}\right) \right] + C_2 \left[ e^{\frac{x}{L}} \sin\left(\frac{x}{L}\right) \right] \\ & + C_3 \left[ e^{-\frac{x}{L}} \cos\left(\frac{x}{L}\right) \right] + C_4 \left[ e^{-\frac{x}{L}} \sin\left(\frac{x}{L}\right) \right] + \frac{L^4 b}{4EI} p \end{aligned} \quad (4.27)$$

Wie aus der allgemeinen Lösung ersichtlich ist, ergeben sich vier Unbekannte ( $C_1, C_2, C_3, C_4$ ), wobei es sich hier um ein *Randwertproblem* handelt. Sowohl am linken als auch am rechten Rand des Fundamentstreifens erhält man aufgrund der Randbedingungen (Einspannung, gelenkige Lagerung oder freies Ende) je zwei Gleichungen und damit insgesamt vier Gleichungen zur Bestimmung der vier Unbekannten.

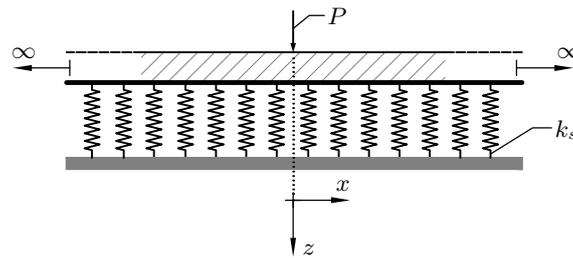


Abb. 4.2: Balken mit unendlicher Länge und einer Einzellast

### 4.3 Beispiel

Ein Anwendungsbeispiel für das Bettungsmodulverfahren stellt die Modellierung eines Gleises dar. Ein Gleis kann dabei als unendlich langer Balken (*Zimmermannbalken*) mit elastischer Bettung<sup>2</sup> betrachtet werden. Im Folgenden wird dieser Fall des unendlich langen Balkenes unter einer normal auf die Balkenachse angreifenden Einzellast betrachtet. Da die Last nur in einem Punkt angreift, wird der Koordinatenursprung für dieses Beispiel in den Lastangriffspunkt gelegt (siehe Abb. 4.2).

Bezüglich der *Randbedingungen* gilt, dass in unendlicher Entfernung zum Lastangriffspunkt die vertikale Verschiebung gleich null sein muss und dass im Koordinatenursprung die Querkraft (Produkt aus Biegesteifigkeit und der dritten Ableitung der Biegelinie) gleich der halben Einzelkraft sein muss. Außerdem gilt, da das betrachtete System symmetrisch um den Koordinatenursprung ist, dass die Biegelinie an dieser Stelle eine horizontale Tangente aufweist. Damit können die Randbedingungen der Differentialgleichung folgendermaßen zusammengefasst werden:

1.  $z(x = \infty) = 0$
2.  $\frac{dz(x=0)}{dx} = 0$
3.  $EI \frac{d^3z(x=0)}{dx^3} = \frac{P}{2}$

Die erste Randbedingung liefert beim Einsetzen in die homogene Lösung gemäß Glg. 4.21:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ C_1 \left[ e^{\frac{x}{L}} \cos \left( \frac{x}{L} \right) \right] + C_2 \left[ e^{\frac{x}{L}} \sin \left( \frac{x}{L} \right) \right] \right. \\ \left. C_3 \left[ e^{-\frac{x}{L}} \cos \left( \frac{x}{L} \right) \right] + C_4 \left[ e^{-\frac{x}{L}} \sin \left( \frac{x}{L} \right) \right] \right\} = 0 \quad (4.28)$$

Der Grenzwert für die Exponentialfunktion mit negativem Exponenten beträgt null:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ C_3 \left[ e^{-\frac{x}{L}} \sin \left( \frac{x}{L} \right) \right] + C_4 \left[ e^{-\frac{x}{L}} \sin \left( \frac{x}{L} \right) \right] \right\} = 0 \quad (4.29)$$

<sup>2</sup>In diesem Zusammenhang wird die elastische Bettung oftmals als WINKLER-Bettung bezeichnet.

Somit verbleiben in Glg. 4.28 die Ausdrücke für  $C_1$  und  $C_2$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ -C_2 \left[ e^{\frac{x}{L}} \sin \left( \frac{x}{L} \right) \right] \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ C_1 \left[ e^{\frac{x}{L}} \cos \left( \frac{x}{L} \right) \right] \right\} \quad (4.30)$$

Sinus und Kosinus sind beschränkt und die Exponentialfunktion unterliegt einem stetigen Wachstum<sup>3</sup>. Deshalb kann die Bedingung aus Glg. 4.29 nur erfüllt werden, wenn  $C_1 = C_2 = 0$  gilt. Einsetzen der zweiten Randbedingung in die homogene Lösung gemäß Glg. 4.21 und Berücksichtigung der bereits bekannten Konstanten liefert wiederum:

$$\frac{dz(x=0)}{dx} = 0 = C_3 \frac{-1}{L} + C_4 \frac{1}{L} \quad (4.31)$$

woraus wiederum hervorgeht, dass  $C_3 = C_4 = C$  sein muss. Damit kann die letzte Unbekannte bestimmt werden:

$$\frac{P}{2} = EI C \left[ \frac{2}{L^3} + \frac{2}{L^3} \right] \quad (4.32)$$

was nach Umformung für die Konstante  $C$  ergibt:

$$C = \frac{P}{2Lk_s} \quad (4.33)$$

womit sich die Biegelinie sowie die Momentenlinie des unendlich ausgedehnten Balkenes bestimmen lassen:

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{P}{2Lk_s} e^{\frac{-x}{L}} \left[ \cos \left( \frac{x}{L} \right) + \sin \left( \frac{x}{L} \right) \right] \\ M(x) &= \frac{PL}{4} e^{\frac{-x}{L}} \left[ \cos \left( \frac{x}{L} \right) - \sin \left( \frac{x}{L} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

---

<sup>3</sup> $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$

# Kapitel 5

## Allgemeine Wärmeleitung

### 5.1 Herleitung der Differentialgleichung

#### 5.1.1 Grundlagen und Motivation

Die allgemeine Wärmeleitung kommt in der Geotechnik in verschiedenen Bereichen zur Anwendung. Bei Bodenvereisungen, welche etwa bei der Herstellung von U-Bahn-Tunnel zum Einsatz kommen können, wird das Bodenwasser künstlich gefroren, um eine verfestigte, wasserundurchlässige Schicht zu erzeugen. Beim Verkehrswegebau ist die sorgfältige Herstellung von Frostschutzschichten, also Tragschichten ohne Bindemittel, welche die Bildung von Eislinsen verhindert, ein wesentliches Kriterium für eine lange Gebrauchstauglichkeit. Im Rohrleitungsbau kann die Messung von Temperaturanomalien im Boden zur Ortung von Leckagen beitragen [Adam 2019].

Ein weiterer Anwendungsbereich ist jener der Geothermie, also die Nutzung des Baugrunds zur Nutzbarmachung und Speicherung thermischer Energie. Die Temperatur im Boden liegt in Mitteleuropa in einer Tiefe von etwa 15 m über das gesamte Jahr nahezu konstant bei über 10 °C. Der Einsatz der oberflächennahen Geothermie ist somit ein geeigneter und nachhaltiger Weg, Gebäude im Sommer zu kühlen und im Winter zu wärmen.

Um die Energie des Bodens nutzen zu können, muss ein Austausch zwischen dem Boden und einem künstlich eingebrachten, zirkulierenden Medium (Wärmeträgerflüssigkeit in Absorberleitungen) stattfinden. Der dabei stattfindende physikalische Mechanismus ist die Wärmeleitung (Konduktion), welche neben der Wärmestrahlung (Radiation) und dem Wärmeübergang (Konvektion) eine der wesentlichen Übertragungsarten thermischer Energie ist [Tipler et al. 2019].

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Begriffe Wärme und Energie oftmals als Synonyme verwendet werden. Wärme stellt allerdings keine Energieform (wie z. B. die innere, die kinetische oder potenzielle Energie), sondern (neben der Arbeit) eine Energietransportform aufgrund von Temperaturunterschieden über eine thermodynamische Systemgrenze dar [Herwig und Moschallski 2009].

#### 5.1.2 Wärmebilanzierung

Die Herleitung der allgemeinen (*inhomogenen* und *instationären*) Wärmeleitungsgleichung erfolgt mit Hilfe des in Abb. 5.1 gezeigten Volumenelements im kartesischen Koordinatensystem  $dV =$

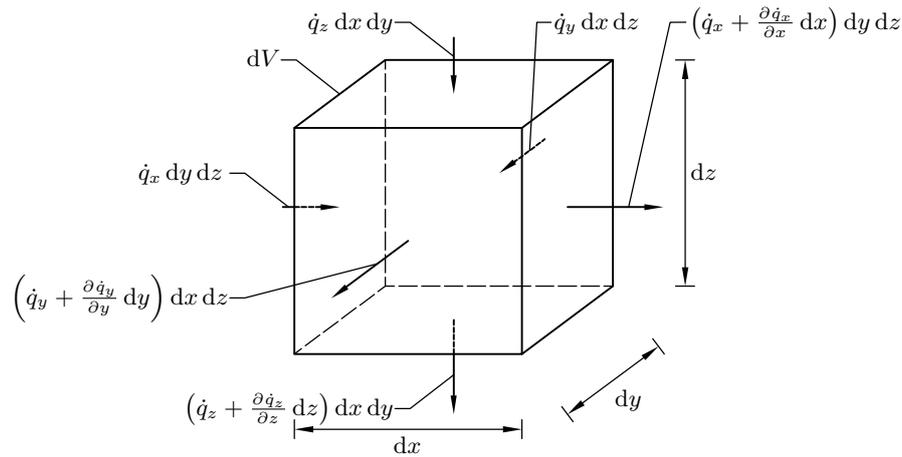


Abb. 5.1: Ein- und austretende Wärmeströme in ein infinitesimales Volumenelement  $dV$

$dx dy dz$  und die über die Grenzflächen ein- und austretenden Wärmestromdichten. Diese sind definiert als:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\dot{Q}}{dA} = \frac{dQ}{dA dt} \quad (5.1)$$

mit:  $Q(\mathbf{x}, t)$  ... Wärme [J]  
 $\dot{Q}(\mathbf{x}, t)$  ... Wärmestrom, Wärmeleistung [W] = [J/s]  
 $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t)$  ... Wärmestromdichte [W/m<sup>2</sup>]

Die pro Zeiteinheit einströmende Wärme entspricht dabei:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{x,\text{ein}} &= \dot{q}_x dy dz \\ \dot{Q}_{y,\text{ein}} &= \dot{q}_y dx dz \\ \dot{Q}_{z,\text{ein}} &= \dot{q}_z dx dy \end{aligned} \quad (5.2)$$

Die pro Zeiteinheit ausströmende Wärme kann durch eine linearisierte TAYLOR-Entwicklung geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{x,\text{aus}} &= \left( \dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx \right) dy dz \\ \dot{Q}_{y,\text{aus}} &= \left( \dot{q}_y + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} dy \right) dx dz \\ \dot{Q}_{z,\text{aus}} &= \left( \dot{q}_z + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} dz \right) dx dy \end{aligned} \quad (5.3)$$

Zusätzlich kann im betrachteten Volumenelement eine Wärmequelle (oder Wärmesenke) vorhanden sein. Beispiele für Wärmequellen sind z. B. exotherme chemische Reaktionen, welche für Freisetzung von innerer Energie sorgen, oder die Dissipation mechanischer Energie [Herwig und Moschallski 2009]. Wärmequellen (oder Wärmesenken) bewirken, dass sich die innere Energie im infinitesimalen Volumenelement erhöht (oder verringert):

$$\dot{Q}_0 = \dot{q}_0 dx dy dz \quad (5.4)$$

mit:  $\dot{Q}_0(\mathbf{x}, t)$  ... freigesetzte oder gebundene Wärme [W]  
 $\dot{q}_0(\mathbf{x}, t)$  ... volumenbezogene Wärmequellendichte [W/m<sup>3</sup>]

Eine Bilanzierung der ein- und austretenden Wärme sowie der Wärmequelle für das in Abb. 5.1 betrachtete Volumenelement ergibt die zeitliche Änderung der Wärme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} &= \dot{Q}_{\text{ein}} - \dot{Q}_{\text{aus}} + \dot{Q}_0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= [\dot{q}_x \, dy \, dz + \dot{q}_y \, dx \, dz + \dot{q}_z \, dx \, dy] \\ &\quad - \left[ \left( \dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} \, dx \right) dy \, dz + \left( \dot{q}_y + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} \, dy \right) dx \, dz + \left( \dot{q}_z + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} \, dz \right) dx \, dy \right] \\ &\quad + \dot{q}_0 \, dx \, dy \, dz \end{aligned} \quad (5.5)$$

Durch Vereinfachung ergibt sich:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \left( \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z} \right) dV + \dot{q}_0 \, dV \quad (5.6)$$

Der Zusammenhang zwischen Wärmestromdichte und Temperatur geht auf FOURIER zurück und wird auch FOURIER-Gesetz genannt [Adam 2019]:

$$\begin{aligned} \dot{q}_x &= -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \\ \dot{q}_y &= -\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \\ \dot{q}_z &= -\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.7)$$

mit:  $\lambda(\mathbf{x}, t)$  ... Wärmeleitfähigkeit [W/(m K)]  
 $T(\mathbf{x}, t)$  ... Temperatur [K]

Das negative Vorzeichen besagt dabei einen Zustrom in Richtung des negativen Temperaturgradienten. Bei der Temperatur handelt es sich nicht um eine vektorielle Größe, sondern um ein skalares Feld. Dies bedeutet, dass eine einzige Zahl ausreicht, um die Temperatur an einem bestimmten Ort und zu einer bestimmten Zeit eindeutig zu bestimmen [Hannoschöck 2018].

Einsetzen von Glg. 5.7 in Glg. 5.6 ergibt:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dV + \dot{q}_0 \, dV \quad (5.8)$$

Die materialabhängige spezifische Wärmekapazität gibt den Zusammenhang zwischen Wärme- und Temperaturänderung an:

$$c = \frac{Q}{m \Delta T} \quad (5.9)$$

mit:  $c(\mathbf{x}, t)$  ... spezifische Wärmekapazität [J/(kg K)]  
 $\Delta T(\mathbf{x}, t)$  ... Temperaturdifferenz [K]

oder im Kontext von zeitlichen Änderungen und einem infinitesimalen Kontrollvolumen mit infinitesimaler Masse:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = c \, dm \, \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.10)$$

Zusätzlich lässt sich die Masse eines Körpers als Produkt aus Dichte und Volumen beschreiben:

$$dm = \rho \, dV \quad (5.11)$$

Einsetzen von Glg. 5.10 und Glg. 5.11 in Glg. 5.8 ergibt die auf das betrachtete Volumen bezogene Energiebilanz:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_0 = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.12)$$

oder mit der Wärmeleitfähigkeit als Tensor zweiter Stufe:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\lambda} \operatorname{grad}(T)) + \dot{q}_0 = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.13)$$

bzw. mit dem Nabla-Operator geschrieben:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\lambda} \nabla(T)) + \dot{q}_0 = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.14)$$

Glg. 5.14 stellt die allgemeine Wärmeleitungsgleichung dar. Dabei muss das Material nicht isotrop sein, das heißt die Stoffeigenschaften (Wärmeleitkoeffizient, Dichte und Wärmekapazität) können sich sowohl mit der Temperatur als auch mit der Ortskoordinate ändern. Die Wärmeleitfähigkeit kann in verschiedene Richtungen unterschiedlich groß sein und die volumenbezogene Wärmequellendichte kann sich mit der Ortskoordinate und der Zeit ändern [Hannoschöck 2018].

Die allgemeine Wärmeleitungsgleichung lässt sich für verschiedene Spezialfälle wesentlich vereinfachen. Im Falle eines *isotropen* Materials gilt (in einem kartesischen Koordinatensystem):

$$a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}_0}{c\rho} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.15)$$

oder in verkürzter Schreibweise mit dem LAPLACE-Operator  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ :

$$a\Delta T + \frac{\dot{q}_0}{c\rho} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.16)$$

mit:  $a(\mathbf{x}, t) = \frac{\lambda}{c\rho}$  ... Temperaturleitfähigkeit [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]  
 $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda(\mathbf{x}, t)$  ... Wärmeleitfähigkeit [ $\text{W}/(\text{m K})$ ]

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich im *homogenen, stationären* Fall. Dies bedeutet, dass keine Wärmequelle vorhanden ist und sich das System über die Zeit nicht verändert. Das Ergebnis ist eine sogenannte LAPLACE-Gleichung, welche beispielsweise auch eine stationäre Grundwasserströmung (vgl. Kapitel 6) beschreibt:

$$\Delta T = 0 \quad (5.17)$$

Als weiterer Spezialfall sei nun noch der Fall einer *inhomogenen, stationären* Wärmeleitungsgleichung genannt. Die resultierende Gleichung ist als POISSON-Gleichung bekannt:

$$-a\Delta T = \frac{\dot{q}_0}{c\rho} \quad (5.18)$$

## 5.2 Lösung der Differentialgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung kann für stationäre, örtlich eindimensionale Probleme, beispielsweise mittels Trennung der Variablen oder durch eine LAPLACE-Transformation gelöst werden. Diese Methoden können in zahlreichen Quellen, beispielsweise bei Hancock [2006], nachgelesen werden.

Bei zweidimensionalen Problemen ist eine analytische Lösung bereits eine schwierige Aufgabe, weshalb heutzutage hauptsächlich numerische Verfahren wie die Finite-Differenzen-Methode (FDM, Finite Difference Method), Finite-Elemente-Methode (FEM, Finite Element Method) oder die Randelemente-Methode (REM, häufig auch BEM für Boundary Element Method) zur Anwendung kommen.

In Kapitel 6 wird der *homogene, stationäre* Fall im Kontext der zweidimensionalen Grundwasserströmung mit Hilfe eines graphischen Verfahrens und der FDM gelöst.

## 5.3 Beispiel

Als Beispiel soll die Temperaturentwicklung im Boden aufgrund der jährlichen Temperaturschwankungen untersucht werden. Wie zuvor bereits erwähnt, liegt die Temperatur im Boden in Mitteleuropa in ausreichender Tiefe über das gesamte Jahr nahezu konstant bei über 10 °C. Jahreszeitliche Schwankungen der Lufttemperatur beeinflussen die Temperatur im Untergrund lediglich in wenigen Metern unter der Erdoberfläche.

Diese Schwankungen dienen als Randbedingung für das System und sollen als harmonischer Temperaturverlauf mit folgenden Eigenschaften modelliert werden:

$$T(z = 0, t) = T_m + \Delta T \cos(\omega t) \quad (5.19)$$

wobei:

$$\omega = \frac{2\pi}{t_0} \quad \dots \text{Kreisfrequenz [Hz]}$$

Die in diesem Beispiel verwendeten Parameter sind:

$$\begin{aligned} T_m &= 10 \text{ °C} && \dots \text{mittlere Temperatur (Mittelwert)} \\ \Delta T &= 15 \text{ °C} && \dots \text{Temperaturschwankung (Amplitude)} \\ t_0 &= 12 \text{ Mo} && \dots \text{Periodendauer} \end{aligned}$$

Abb. 5.2 zeigt den modellierten Verlauf der Lufttemperatur über ein Jahr.

Die Modellierung des Bodens erfolgt als einseitig unendlich ausgedehnter Körper  $0 \leq z < \infty$ . Obwohl das Problem durch die Zeitabhängigkeit der Randbedingung *instationär* ist, kann durch die periodische Antwort von einem *quasi-stationären* Zustand gesprochen werden [Hancock 2006]. Zusätzlich sind die in der Erde vorhandenen Wärmequellen aus der Erdentstehung bzw. durch

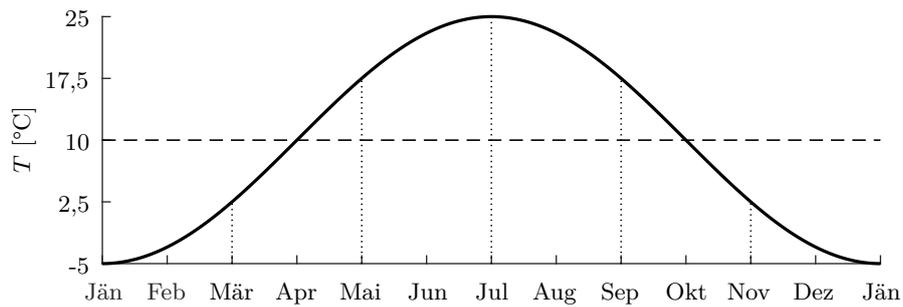


Abb. 5.2: Modellierter jährlicher Verlauf der Lufttemperatur

radioaktive Zerfallsprozesse in den ersten hundert Metern der Erdkruste gering [Kolymbas 2019], wodurch das Problem als *homogen* betrachtet werden kann.

Ohne auf die Herleitung einzugehen, kann die Temperatur im Boden folgendermaßen berechnet werden [Hancock 2006]:

$$T(z, t) = T_m + \Delta T e^{-\delta z} \cos(\omega t - \delta z) \quad (5.20)$$

worin die Dämpfung folgendermaßen definiert wird:

$$\delta = \sqrt{\frac{\omega}{2a}} = \sqrt{\frac{\pi}{at_0}} \quad (5.21)$$

Mit den gegebenen Bodenparametern:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2,5 \text{ W/(m K)} && \dots \text{ Wärmeleitfähigkeit} \\ c &= 800 \text{ J/(kg K)} && \dots \text{ spezifische Wärmekapazität} \\ \rho &= 2700 \text{ kg/m}^3 && \dots \text{ Dichte} \end{aligned}$$

lässt sich die Temperaturleitfähigkeit berechnen:

$$a = \frac{\lambda}{c\rho} = \frac{2,5}{800 \cdot 2700} = 1,1574 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} = 3,04 \text{ m}^2/\text{Mo} \quad (5.22)$$

Der Temperaturverlauf des Bodens in Glg. 5.20 entspricht somit der vorgegebenen Temperatur aus Glg. 5.19 mit derselben Kreisfrequenz, besitzt allerdings einen Abklingterm  $e^{-\delta z}$  und eine mit der Tiefe zunehmende Phasenverschiebung  $\delta z$ . Beide Terme sind von den Bodenparametern abhängig. Der Temperaturverlauf des Bodens ist in Abb. 5.3 für jeden zweiten Monat dargestellt.

Eine interessante Frage ist nun, welche Tiefe optimal für eine Anwendung der Geothermie ist. Das Kriterium hierfür ist, dass die Temperaturdifferenz zwischen dem Boden in der gesuchten Tiefe und der Luft möglichst groß ist. Anders ausgedrückt, soll die Bodentemperatur an dieser Stelle im Winter möglichst warm und im Sommer möglichst kalt sein.

Eine Betrachtung der Glg. 5.20 zeigt, dass für dieses Ziel eine Phasenumkehr notwendig ist. Wenn zum Zeitpunkt  $t$  an der Oberfläche nach Glg. 5.19 also die Temperatur  $T(z = 0, t) = T_m + \Delta T \cos(\omega t)$  herrscht, so wäre die maximale gegenteilige Temperatur im Boden bei  $T(z, t) = T_m - \Delta T e^{-\delta z} \cos(\omega t - \delta z)$ .

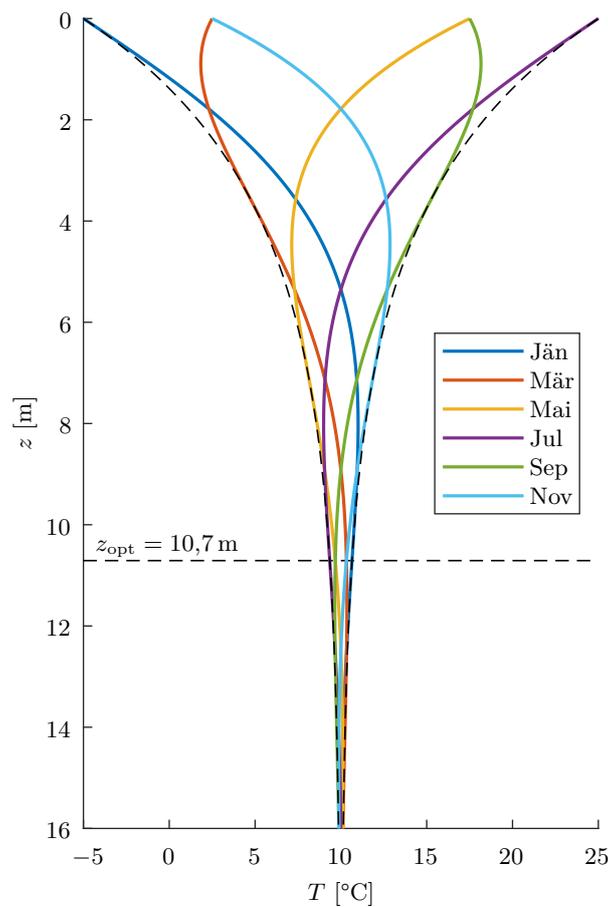


Abb. 5.3: Temperaturverlauf im Boden für ausgewählte Monate

Diese Phasenumkehr ist durch eine Phasenverschiebung um  $\pi$  möglich:

$$\cos(\omega t) = \cos\left(\frac{2\pi}{t_0}t\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{t_0}t - \pi\right) \quad (5.23)$$

Die optimale Tiefe errechnet sich somit durch:

$$\begin{aligned} \delta z_{\text{opt}} &= \sqrt{\frac{\pi}{at_0}} z_{\text{opt}} = \pi \\ z_{\text{opt}} &= \pi \sqrt{\frac{at_0}{\pi}} = \sqrt{\pi at_0} = \sqrt{\pi \cdot 3,04 \cdot 12} = 10,7 \text{ m} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Die Amplitude der Temperaturvariation über das Jahr beträgt in dieser Tiefe aufgrund des Abklingterms:

$$\Delta T e^{-\delta z} = \Delta T e^{-\pi} \approx 0,04 \Delta T \quad (5.25)$$

nur 4 % der Lufttemperatur.



# Kapitel 6

## Zweidimensionale stationäre Grundwasserströmung

### 6.1 Herleitung der Differentialgleichung

#### 6.1.1 Grundlagen und Motivation

Für die folgende Herleitung der LAPLACE- oder Potentialgleichung für den Fall der zweidimensionalen stationären Grundwasserströmung wird zunächst die in Abb. 6.1 dargestellte Situation betrachtet. Zwei vollkommen wassergesättigte Schichten werden durch eine undurchlässige Schicht begrenzt. Im Zuge eines Bauvorhabens wird eine in  $y$ -Richtung weit ausgedehnte, als undurchlässig angenommene Spundwand in den Boden eingebracht. Anschließend wird Schicht 1 auf einer Seite der Spundwand bis zur Schichtgrenze ausgehoben. Durch ein Abpumpen des Wassers in der Baugrube entsteht ein Spiegelunterschied  $H$ , welcher ein Unterströmen der Spundwand und somit eine zweidimensionale Grundwasserströmung in der  $x$ - $z$ -Ebene induziert.

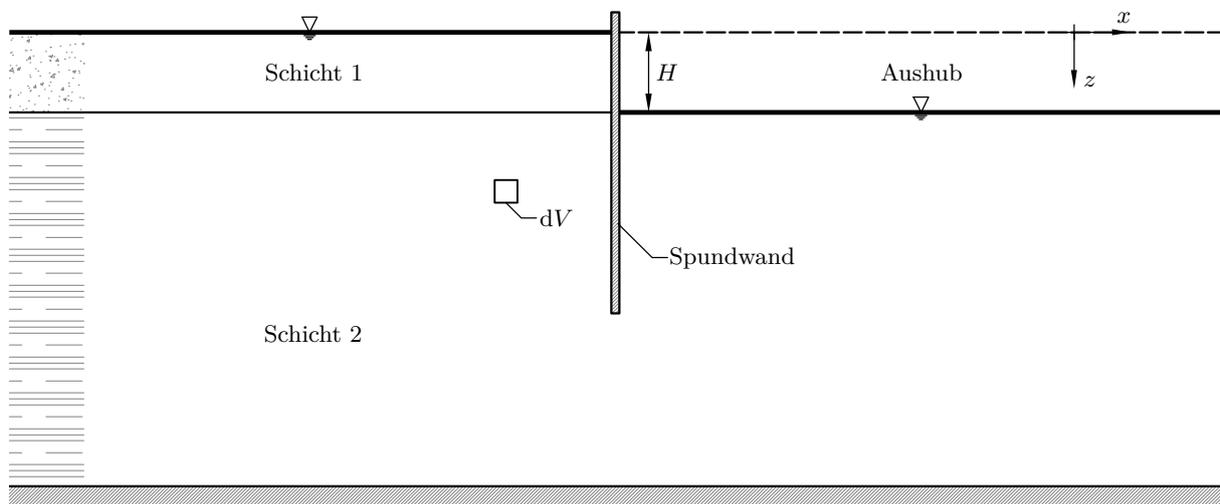


Abb. 6.1: Ausgangssituation der zweidimensionalen Grundwasserströmung

#### 6.1.2 Massenerhaltung

Die zweidimensionale Grundwasserströmung soll hier für den stationären Fall hergeleitet werden. Das bedeutet, dass sich im betrachteten Beispiel die Pegelstände auf beiden Seiten der Spundwand

nicht ändern. Dies könnte beispielsweise durch ein kontinuierliches Zuströmen auf der einen und ein Abpumpen auf der anderen Seite gewährleistet werden.

Abb. 6.2 stellt das Volumenelement  $dV = dx dy dz$  aus Abb. 6.1 größer dar.

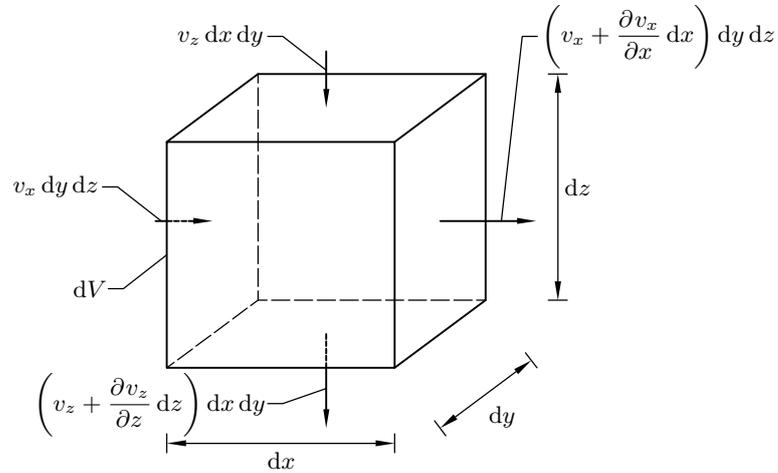


Abb. 6.2: Durchfluss durch das Volumenelement  $dV$

Das pro Zeiteinheit in das Volumenelement einströmende Wasser entspricht dabei:

$$\begin{aligned} q_{x,\text{ein}} &= v_x dy dz \\ q_{z,\text{ein}} &= v_z dx dy \end{aligned} \quad (6.1)$$

Das aus dem Volumenelement ausströmende Wasser entspricht wiederum:

$$\begin{aligned} q_{x,\text{aus}} &= \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy dz \\ q_{z,\text{aus}} &= \left( v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) dx dy \end{aligned} \quad (6.2)$$

mit:  $q_x(x, z)$  ... Durchflussmenge pro Zeiteinheit  $x$ -Richtung [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]  
 $q_z(x, z)$  ... Durchflussmenge pro Zeiteinheit  $z$ -Richtung [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]  
 $v_x(x, z)$  ... Fließgeschwindigkeit in  $x$ -Richtung [ $\text{m}/\text{s}$ ]  
 $v_z(x, z)$  ... Fließgeschwindigkeit in  $z$ -Richtung [ $\text{m}/\text{s}$ ]

Unter Voraussetzung der Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltung und Inkompressibilität des Wassers) muss der Ausfluss gleich dem Einfluss entsprechen:

$$q_{\text{aus}} - q_{\text{ein}} = 0$$

$$\left[ \left( v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left( v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) dx dy \right] - [v_x dy dz + v_z dy dz] = 0 \quad (6.3)$$

oder:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (6.4)$$

Die Geschwindigkeit der Strömung kann bei isotropen Böden mit gleicher Durchlässigkeit in  $x$ - und  $z$ -Richtung durch das Gesetz von DARCY beschrieben werden:

$$\begin{aligned}v_x &= k_f i_x \\v_z &= k_f i_z\end{aligned}\tag{6.5}$$

mit:  $k_f$  ... Durchlässigkeitsbeiwert in  $x$ - und  $z$ -Richtung [m/s]  
 $i_x(x, z)$  ... hydraulischer Gradient in  $x$ -Richtung [-]  
 $i_z(x, z)$  ... hydraulischer Gradient in  $z$ -Richtung [-]

Der hydraulische Gradient ist für kartesische Koordinaten definiert als:

$$\begin{aligned}i_x &= -\frac{\partial h}{\partial x} \\i_z &= -\frac{\partial h}{\partial z}\end{aligned}\tag{6.6}$$

wobei:

$$h = \frac{\Delta u}{\gamma_w}\tag{6.7}$$

mit:  $h(x, z)$  ... Druckhöhe [m]  
 $\Delta u(x, z)$  ... Porenwasserüberdruck [N/m<sup>2</sup>]  
 $\gamma_w$  ... Wichte des Wassers [N/m<sup>3</sup>]

Ein Einsetzen von Glg. 6.5 unter Berücksichtigung von Glg. 6.6 in Glg. 6.4 ergibt die Differentialgleichung der Grundwasserströmung für den zweidimensionalen Fall:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0\tag{6.8}$$

Die Druckhöhe  $h$  wird auch Potential genannt, weshalb Glg. 6.8 auch *Potentialgleichung* genannt wird. Mit der Differentialgleichung können neben der Fluidmechanik auch andere physikalische Transportvorgänge wie die Wärmeleitung (siehe Kapitel 5) oder die Leitung elektrischen Gleichstroms beschrieben werden. Sie ist auch unter dem Namen LAPLACE-Gleichung bekannt. Eine verkürzte Schreibweise ergibt:

$$\Delta h = 0\tag{6.9}$$

mit dem LAPLACE-Operator im zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\tag{6.10}$$

## 6.2 Lösung der Differentialgleichung

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt die Verteilung des Porenwasserdrucks bzw. durch dessen Differenzial und das Gesetz von DARCY (Glg. 6.5) die Filtergeschwindigkeiten. Eine analytische Lösung ist nur bei sehr einfachen Randbedingungen möglich. Neben experimentellen Untersuchungen und numerischen Lösungsverfahren (FEM, FDM) wird deshalb häufig ein graphisches Verfahren zur näherungsweise Lösung eingesetzt.



Da das Zeichnen des Potentialnetzes nach wie vor in vielen Fällen eine gute und anschauliche Möglichkeit darstellt, die Wasserdruckverteilung zu ermitteln, wird folgend kurz auf den Vorgang eingegangen und in Abb. 6.4 exemplarisch dargestellt:

1. Festlegung des Modellgebiets und Einzeichnung der Randbedingungen. Dazu gehören undurchlässige und freie Ränder.
2. Grobe Festlegung der Netzfeinheit durch Einzeichnen von einigen, verlaufsmäßig angenommenen Stromlinien. Die Anzahl ist hierbei willkürlich wählbar. Eine „übertriebene Genauigkeit“ ist mit Hinsicht auf die approximative Natur der graphischen Methode und der Unsicherheiten der Bodenparameter nicht sinnvoll.
3. Einzeichnen der Potentiallinien unter der Bedingung, dass diese orthogonal auf die angenommenen Stromlinien stehen und sich Kreise in die so erschaffenen „krummlinigen Quadrate“ einschreiben lassen. In der Umgebung von Singularitäten, spitzwinkligen Begrenzungen oder scharfen Ecken lassen sich für gewöhnlich keine „krummlinigen Quadrate“ mehr konstruieren, da die Krümmung der Stromlinien an diesen Stellen zu stark ist (Abb. 6.5).
4. Überprüfung der geforderten Bedingungen und eventuell mehrfache Anpassung des Strom- und Potentiallinien. Es empfiehlt sich aus diesem Grund, die Zeichnung mit Bleistift anzufertigen, um Linien durch Radieren leicht anpassen zu können.
5. Ist das Netz korrekt gezeichnet, so müssen sich die einzelnen Bereiche durch zusätzliche Strom- und Potentiallinien weiter unterteilen lassen. In die so erschaffenen, kleineren „krummlinigen Quadrate“ müssen sich wiederum Kreise einschreiben lassen.

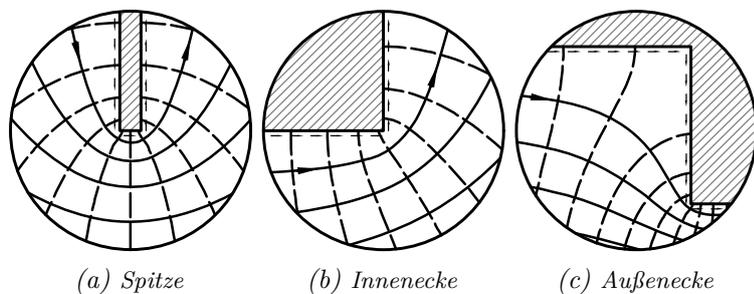


Abb. 6.5: Singularitäten bzw. scharfkantige Begrenzungen

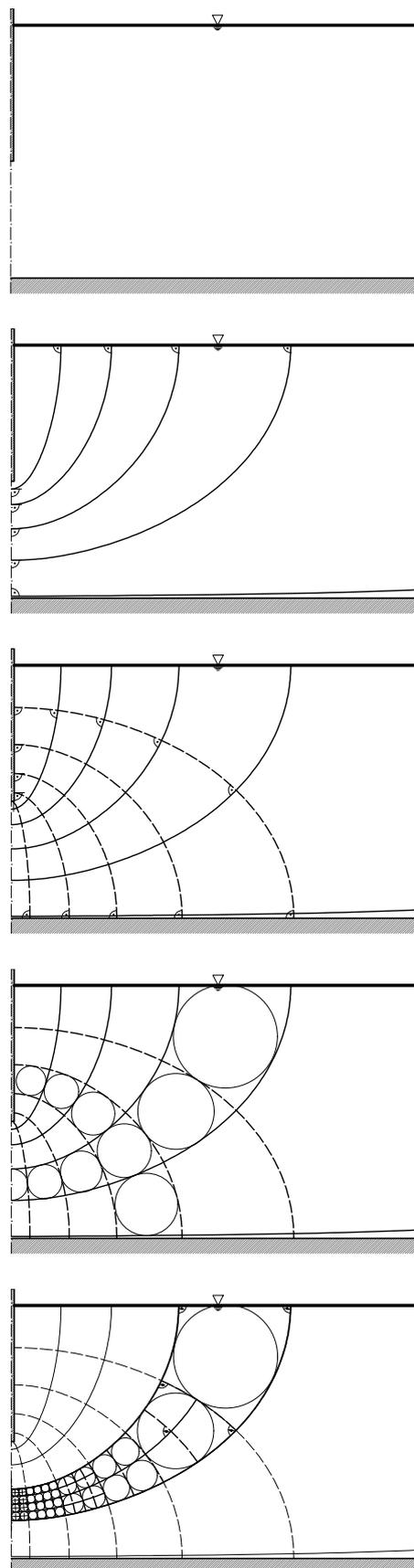


Abb. 6.4: Schrittweises Konstruieren des Strömungsnetzes

## 6.2.2 Finite-Differenzen-Methode

Aufgrund der Einfachheit in der Anwendung soll nun auch kurz auf die Möglichkeit der numerischen Berechnung mit Hilfe der Finiten-Differenzen-Methode (FDM) eingegangen werden. Die Idee dahinter ist, die in Glg. 6.8 vorhandenen (partiellen) Ortsableitungen durch eine endliche Anzahl an Differenzenquotienten zu approximieren [Von Wolfersdorff und Schweiger 2017]. Ein dafür erstelltes Netz mit den Schrittweiten  $\Delta x$ ,  $\Delta z$  und den Knoten  $(i, j)$  mit  $i = 1, 2, \dots, n_x$  und  $j = 1, 2, \dots, n_z$  geben die Genauigkeit der Lösung und den Rechenaufwand vor.

Die TAYLOR-Reihenentwicklungen der Funktion  $h(x, z)$  an der Stelle  $x$  lauten:

$$\begin{aligned} h(x + \Delta x, z) &= h(x, z) + \frac{\partial h(x, z)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 h(x, z)}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \frac{\partial^3 h(x, z)}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \\ h(x - \Delta x, z) &= h(x, z) - \frac{\partial h(x, z)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 h(x, z)}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2} - \frac{\partial^3 h(x, z)}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \end{aligned} \quad (6.11)$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen bzw. deren Äquivalente in  $z$ -Richtung können die ersten Ableitungen des Potentials an der Stelle  $(i, j)$  unter Vernachlässigung der Ableitungen höherer Ordnung als zentraler Differenzenquotient dargestellt werden:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial h}{\partial z} \right|_{i,j} \approx \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\Delta z} \quad (6.12)$$

Die zweiten Ableitungen ergeben sich analog zu:

$$\left. \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right|_{i,j} \approx \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right|_{i,j} \approx \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} \quad (6.13)$$

Glg. 6.8 ergibt sich somit im Kontext der Finiten Differenzen zu:

$$\frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} = 0 \quad (6.14)$$

Bei Randknoten  $i = 1$  und  $i = n_x$  bzw.  $j = 1$  und  $j = n_z$  und bei undurchlässigen Hindernissen wie der Spundwand bzw. einem Damm muss eine Randbedingung vorgegeben werden. Eine DIRICHLET-Randbedingung gibt dabei das Potential an der betrachteten Stelle vor. Im Beispiel der Unterströmung einer Spundwand wird die obere Grenze der durchströmten Schicht somit vorgegeben. Zusätzlich werden den seitlichen Rändern die gleichen Werte vorgegeben. Um eine Beeinflussung dieser physikalisch inkorrekten Zuweisung zu vermeiden, muss das betrachtete Gebiet groß genug sein. Die Lösung kann schließlich durch „Ausschneiden“ des Bereichs, der von Interesse ist, abgebildet werden.

Eine NEUMANN-Randbedingung gibt die erste Ableitung des Potentials und somit die Geschwindigkeit an der betrachteten Stelle vor. Im gegenständlichen Beispiel sind die Strömungsge-

schwindigkeiten normal auf die undurchlässige Schichtbegrenzung (in  $z$ -Richtung) und auf die Spundwand (in  $x$ -Richtung) null. Glg. 6.12 ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{i,j} &\approx \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\Delta x} = 0 \quad \rightarrow \quad h_{i+1,j} = h_{i-1,j} \\ \left. \frac{\partial h}{\partial z} \right|_{i,j} &\approx \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\Delta z} = 0 \quad \rightarrow \quad h_{i,j+1} = h_{i,j-1} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Die Randbedingungen in Form von Glg. 6.15 können wiederum in Glg. 6.14 an den entsprechenden Knoten eingesetzt werden.

Abb. 6.6 zeigt das Ergebnis einer FDM-Berechnung. Dabei ist die Größe des Potentials durch eine entsprechende Farbgebung dargestellt. Zusätzlich sind die Potential- und Stromlinien aus dem graphischen Verfahren enthalten.

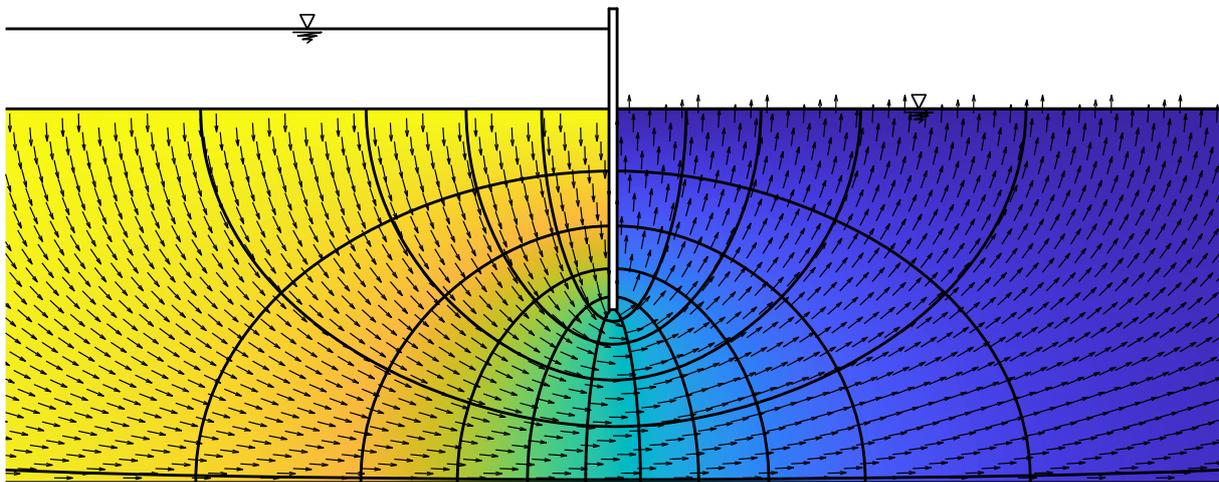


Abb. 6.6: Ergebnis einer FDM-Berechnung

Ein Vorteil der numerischen Berechnung ist die leichte Anpassungsfähigkeit der Randbedingungen. Für den Fall, dass die betrachtete durchströmte Schicht einen Höhengsprung besitzt, ergibt sich kein symmetrisches Netz mehr, was die händische Zeichnung des Potentialnetzes etwas erschwert. Abb. 6.7 zeigt die Ausgangssituation, die Unterströmung eines (breiteren) Damms sowie die Auswirkung von Höhengsprüngen der durchströmten Schichten.

Die dabei gezeigte Anzahl an Potential- und Stromlinien wurde willkürlich gewählt, um einen Bezug zum graphischen Verfahren herzustellen. Sie sind in der numerischen Berechnung zur Bestimmung der Sickermenge, wie im folgenden Kapitel dargestellt, nicht notwendig.

### 6.2.3 Bestimmung der Sickermenge

Für den hier behandelten stationären Fall lässt sich die Sickermenge näherungsweise mit Hilfe der graphischen Konstruktion des Strömungsnetzes bestimmen. Bei stationärer Strömung werden die Bereiche zwischen zwei Stromlinien Stromröhren genannt. Da in diesem Fall die Stromlinien den Bahnkurven des Wassers entsprechen, findet zwischen benachbarten Stromlinien kein Austausch

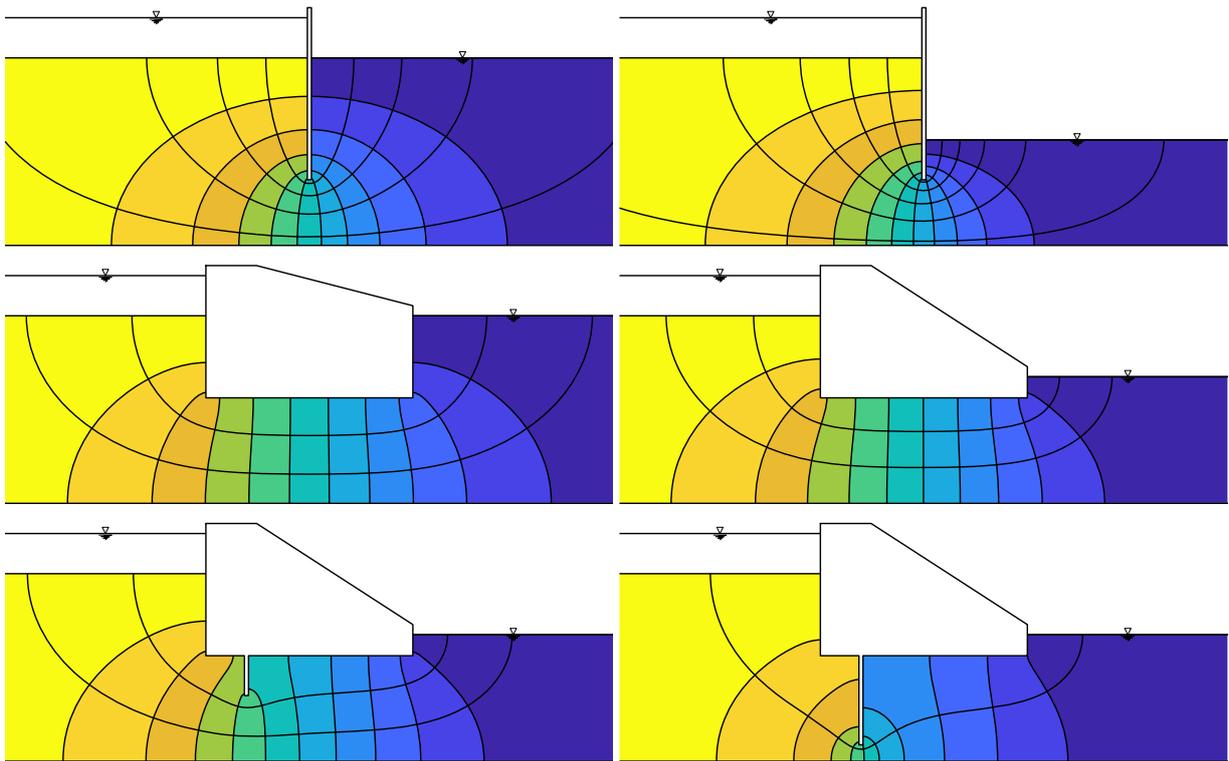


Abb. 6.7: Variation der Randbedingungen einer FDM-Berechnung

statt. Der gesamte Durchfluss entspricht somit der Summe der Durchflüsse aller Stromröhren  $m$ :

$$q = \Delta q_1 + \Delta q_2 + \dots + \Delta q_m = \sum_{j=1}^m \Delta q_j \quad (6.16)$$

mit:  $q$  ... Durchflussmenge pro Zeiteinheit [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]  
 $\Delta q_j$  ... Durchflussmenge pro Zeiteinheit der Stromröhre  $j$  [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]

Der Durchfluss durch eine einzelne Stromröhre ist konstant. Da der Potentialabbau durch die Potentiallinien vorgegeben ist, muss der Durchfluss durch alle Stromröhren gleich groß sein:

$$\Delta q_1 = \Delta q_2 = \dots = \Delta q = \text{const.} \quad (6.17)$$

Da es sich hierbei um eine zweidimensionale Grundwasserströmung handelt, wird nachfolgend eine Einheitstiefe betrachtet. Mit Hilfe des Gesetzes von DARCY aus Glg. 6.5 kann der Durchfluss geschrieben werden als:

$$\Delta q = vA = k_f i b t = k_f \frac{\Delta h}{a} b = \text{const.} \quad (6.18)$$

mit:  $A = bt = b$  ... Durchströmte Fläche bei Einheitstiefe [ $\text{m}^2$ ]  
 $t$  ... Einheitstiefe [m]  
 $\Delta h$  ... Potentialabbau in einem Quadrat [m]  
 $a$  ... Länge eines Quadrates [m]  
 $b$  ... Breite eines Quadrates [m]

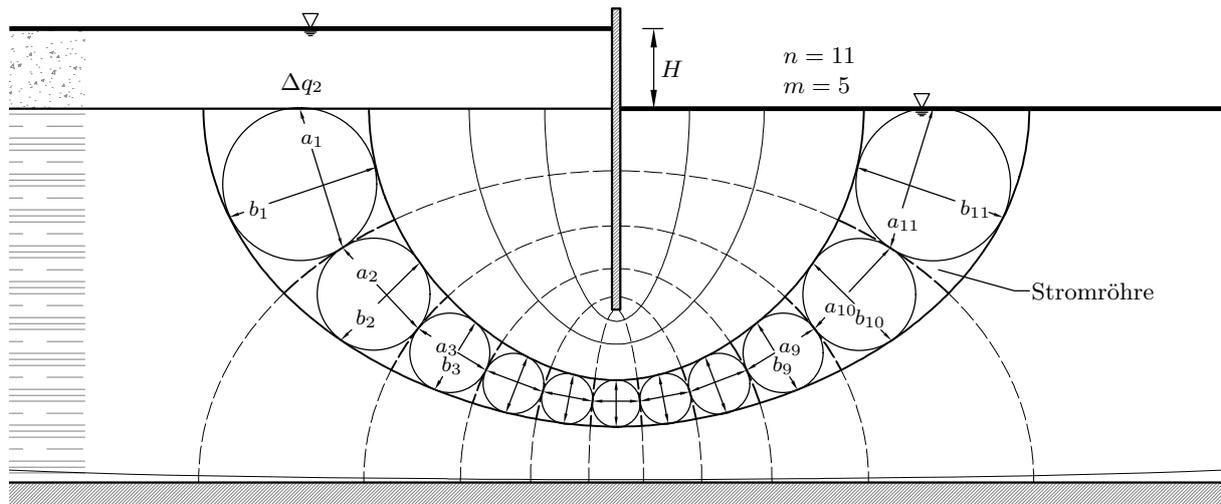


Abb. 6.8: Darstellung einer Stromröhre im Detail

Abb. 6.8 zeigt eine Stromröhre aus der Ausgangssituation. Bei einem quadratischem Potentialnetz entspricht  $a \approx b$ , wodurch gilt:

$$\Delta h = \frac{\Delta q}{k_f} = \text{const.} \quad (6.19)$$

Für ein quadratisches Netz ist der Potentialabbau zwischen zwei Potentiallinien konstant. Bei  $n$  Potentialstufen, welche aus dem graphischen Verfahren ausgelesen werden können, bedeutet dies:

$$\Delta h = \frac{H}{n} \quad (6.20)$$

Der Durchfluss durch alle Stromröhren entspricht dann:

$$q = \sum_{j=1}^m \Delta q = m \Delta q = m v b = k_f H \frac{m}{n} \quad (6.21)$$

Dies gilt jedoch nur, wenn alle Elemente des Potentialnetzes annähernd quadratisch sind. Für andere  $a/b$ -Verhältnisse können allerdings entsprechende Anpassungen getroffen werden [Braja 2008].

Im Fall der numerischen Berechnung durch eine FDM-Berechnung erfolgt die Auswertung der Sickermenge auf gleiche Weise nach Glg. 6.18. Wird ein vertikaler Schnitt durch die Mitte der Spundwand an der Stelle  $x_i = \frac{n_x}{2}$  betrachtet, so ergibt sich der Durchfluss durch die Summe der hydraulischen Gradienten gemäß Glg. 6.6 in  $x$ -Richtung, welche numerisch nach Glg. 6.12 berechnet werden können, multipliziert mit der Elementhöhe  $\Delta z$  und dem Durchlässigkeitsbeiwert:

$$q = \sum_{j=1}^m \Delta q = -k_f \Delta z \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{i=\frac{n_x}{2}, j} \quad (6.22)$$

### 6.3 Beispiel

Als Beispiel soll der Durchfluss des für die Herleitung der Potentialgleichung betrachteten Falles mit physikalischen Werten berechnet werden. Das Ergebnis der händischen Berechnung aus dem graphischen Verfahren wird dafür mit dem Ergebnis aus der numerischen Berechnung verglichen. Dafür werden folgende Parameter angenommen:

$$\begin{aligned} H &= 2,0 \text{ m} && \dots \text{ Spiegelunterschied} \\ k_f &= 10^{-6} \text{ m/s} && \dots \text{ Durchlässigkeitsbeiwert (schluffiger Sand)} \end{aligned}$$

Aus dem graphischen Verfahren (siehe Abb. 6.3 bzw. Abb. 6.8) können die Anzahl an Potentialröhren  $m = 5$  und die Anzahl an Stromröhren  $n = 11$  ausgelesen werden. Ein Einsetzen in Glg. 6.21 ergibt:

$$q = \sum_{j=1}^m \Delta q = k_f H \frac{m}{n} = 10^{-6} \cdot 2,0 \cdot \frac{5}{11} = 9,1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/(\text{s m}) \quad (6.23)$$

Die numerische Auswertung des Durchflusses nach Glg. 6.22 konvergiert bei ausreichend vielen Elementen und Iterationen zu:

$$q = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/(\text{s m}) \quad (6.24)$$

Es zeigt sich, dass die graphische Methode bei einer sorgfältigen Konstruktion praktisch die gleichen Ergebnisse wie die numerische Berechnung liefern kann. Es gilt dabei allerdings zu beachten, dass die FDM-Berechnung selbst nur eine Näherungsrechnung ist, auch wenn die Genauigkeit mit zunehmender Elementanzahl und Iterationsschritten zunimmt (der Berechnungsfehler wird bei einer Verdopplung der Elementanzahl um den Faktor 4 reduziert). Die größte Ungewissheit stellen für gewöhnlich weiterhin die Bodenparameter dar.

# Kapitel 7

## Eindimensionale Konsolidationstheorie

### 7.1 Herleitung der Differentialgleichung

#### 7.1.1 Grundlagen und Motivation

Für die folgende Herleitung der Differentialgleichung der eindimensionalen Konsolidationstheorie nach TERZAGHI [Terzaghi 1925] wird zunächst die in Abb. 7.1 dargestellte Situation betrachtet. Eine wassergesättigte Tonschicht wird durch Sandschichten auf beiden Seite begrenzt. Dabei gilt, dass die Durchlässigkeit des Sandes  $k_{\text{Sand}}$  um ein Vielfaches größer als jene des Tones  $k_f$  ist.

Zum Zeitpunkt  $t < 0$  befindet sich der Wasserspiegel in einem gedachten Standrohr in der Tonschicht auf der Höhe des Grundwasserspiegels. Der Porenwasserüberdruck  $\Delta u$  ist über die gesamte Schicht null, da sich das System im Ruhezustand befindet.

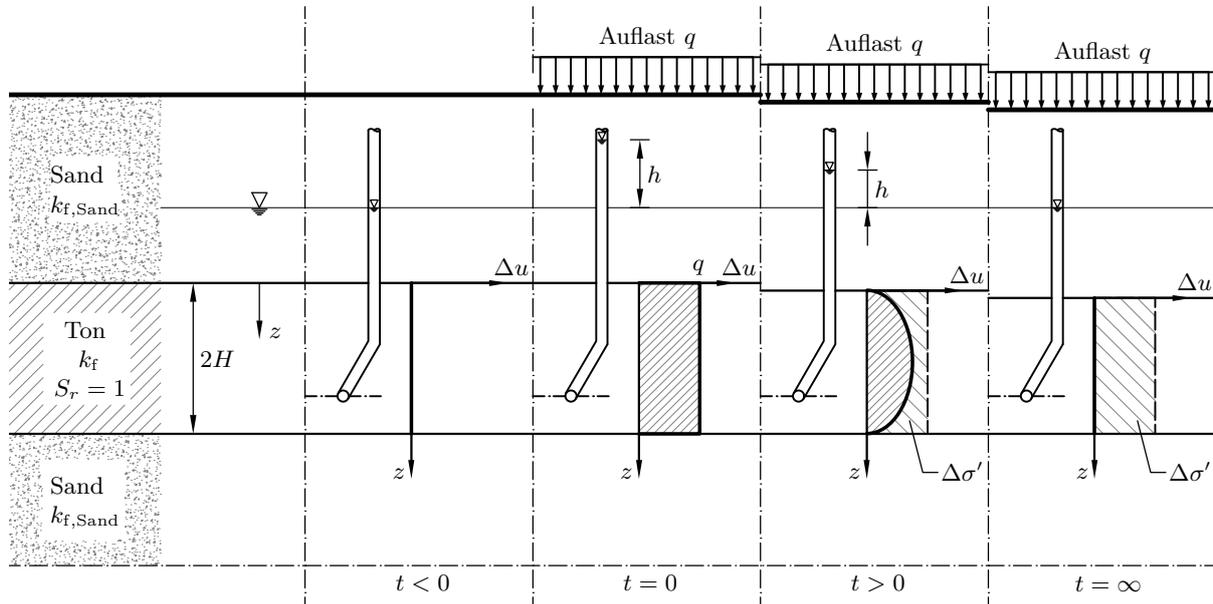


Abb. 7.1: Ausgangssituation und Entwicklung des Porenwasserüberdrucks zufolge einer Auflast

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird auf der Geländeoberfläche eine Auflast  $q$ , welche im Vergleich zur betrachteten Höhe flächenhaft weit ausgedehnt ist, aufgebracht. Da die Tonschicht vollkommen wassergesättigt ist und im Unterschied zu den Sandschichten eine geringe Durchlässigkeit aufweist,

wird die zusätzliche Last durch das Wasser aufgenommen und erzeugt einen Porenwasserüberdruck  $\Delta u$ . Gleichzeitig steigt der Wasserspiegel im gedachten Standrohr um  $h$  an:

$$h = \frac{\Delta u}{\gamma_w} \quad (7.1)$$

mit:  $h(z, t)$  ... Druckhöhe [m]  
 $\Delta u(z, t)$  ... Porenwasserüberdruck [ $\text{N}/\text{m}^2$ ]  
 $\gamma_w$  ... Wichte des Wassers [ $\text{N}/\text{m}^3$ ]

Unmittelbar nach Lastaufbringung, zu einem Zeitpunkt  $t > 0$ , wird das Wasser an der Grenze zu den sehr durchlässigen Sandschichten drainiert. Dadurch sinkt der Porenwasserdruck bei  $z = 0$  und  $z = 2H$  auf null ab. In der restlichen Schicht baut sich der Porenwasserüberdruck durch ein Abfließen des Wassers nur langsam ab. Dabei verringert sich auch das Bodenvolumen der Tonschicht, was sich durch Setzungen bemerkbar macht. Diese Setzungen werden als Primär- oder Konsolidationssetzungen bezeichnet und sind in Abb. 7.1 angedeutet.

Allgemein gilt, dass die zusätzliche Auflast  $q$  zu jedem Zeitpunkt durch die effektiven Spannungen des Bodens (Spannungen auf das Korngerüst) und den Porenwasserüberdruck aufgenommen wird [Terzaghi 1925]:

$$q = \Delta\sigma_{\text{tot}} = \Delta\sigma' + \Delta u \quad (7.2)$$

mit:  $q$  ... Auflast [ $\text{N}/\text{m}^2$ ]  
 $\Delta\sigma_{\text{tot}}$  ... zusätzliche totale Spannung [ $\text{N}/\text{m}^2$ ]  
 $\Delta\sigma'(z, t)$  ... zusätzliche effektive Spannung zufolge der Auflast [ $\text{N}/\text{m}^2$ ]

Das bedeutet, dass eine Reduktion des Porenwasserdrucks mit einer Erhöhung der effektiven Spannungen einhergeht. Dieser Umstand ist in den Diagrammen in Abb. 7.1 und Abb. 7.2 dargestellt.

Die ersten drei Diagramme in Abb. 7.2 veranschaulichen Glg. 7.2 graphisch für die in Abb. 7.1 dargestellte Situation, indem sie die normierten Porenwasserüberdrücke, zusätzlichen effektiven Spannungen und zusätzlichen totalen Spannungen über den dimensionslosen Zeitfaktor  $T_v$  zeigen. Dieser zu einem späteren Zeitpunkt definierte Zeitfaktor  $T_v$  (Glg. 7.42) ist neben der Zeit  $t$  auch von den Faktoren Konsolidationsbeiwert  $c_v$  (Glg. 7.14) und der Höhe  $H$  abhängig.

Da der Abbau der Porenwasserüberdrücke je nach Entfernung  $z$  zu einer relativ durchlässigen Schicht unterschiedlich verläuft, sind ausgewählte  $z/H$ -Verläufe eingetragen. Es ist leicht erkennbar, dass für geringe  $z/H$ -Werte, also für Bereiche nahe einer gut durchlässigen Schicht, der Abbau der Porenwasserüberdrücke  $\Delta u$  rascher erfolgt als für hohe  $z/H$ -Werte. Für sie alle gilt jedoch Glg. 7.2, was sich im dritten Diagramm bei den normierten totalen Spannungen widerspiegelt.

Das vierte Diagramm in Abb. 7.2 zeigt den mittleren Konsolidationsgrad  $U_m$ , auf welchen in Kapitel 7.2.2 eingegangen wird. Es handelt sich dabei um das Verhältnis der bereits eingestellten Konsolidationssetzungen zu den Setzungen zum Zeitpunkt  $t = \infty$  der gesamten betrachteten Schicht.

Zum Zeitpunkt  $t = \infty$  hat sich der gesamte Porenwasserüberdruck abgebaut und die Auflast  $q$  wird vollständig durch das Korngerüst des Bodens abgetragen. Die Setzung der Tonschicht für die aufgebrachte Auflast ist somit abgeschlossen. Ein solcher Zeitpunkt,  $t = \infty$ , existiert nur in einem mathematischen Sinn. In Abb. 7.2 zeigt sich das durch die asymptotische Annäherung

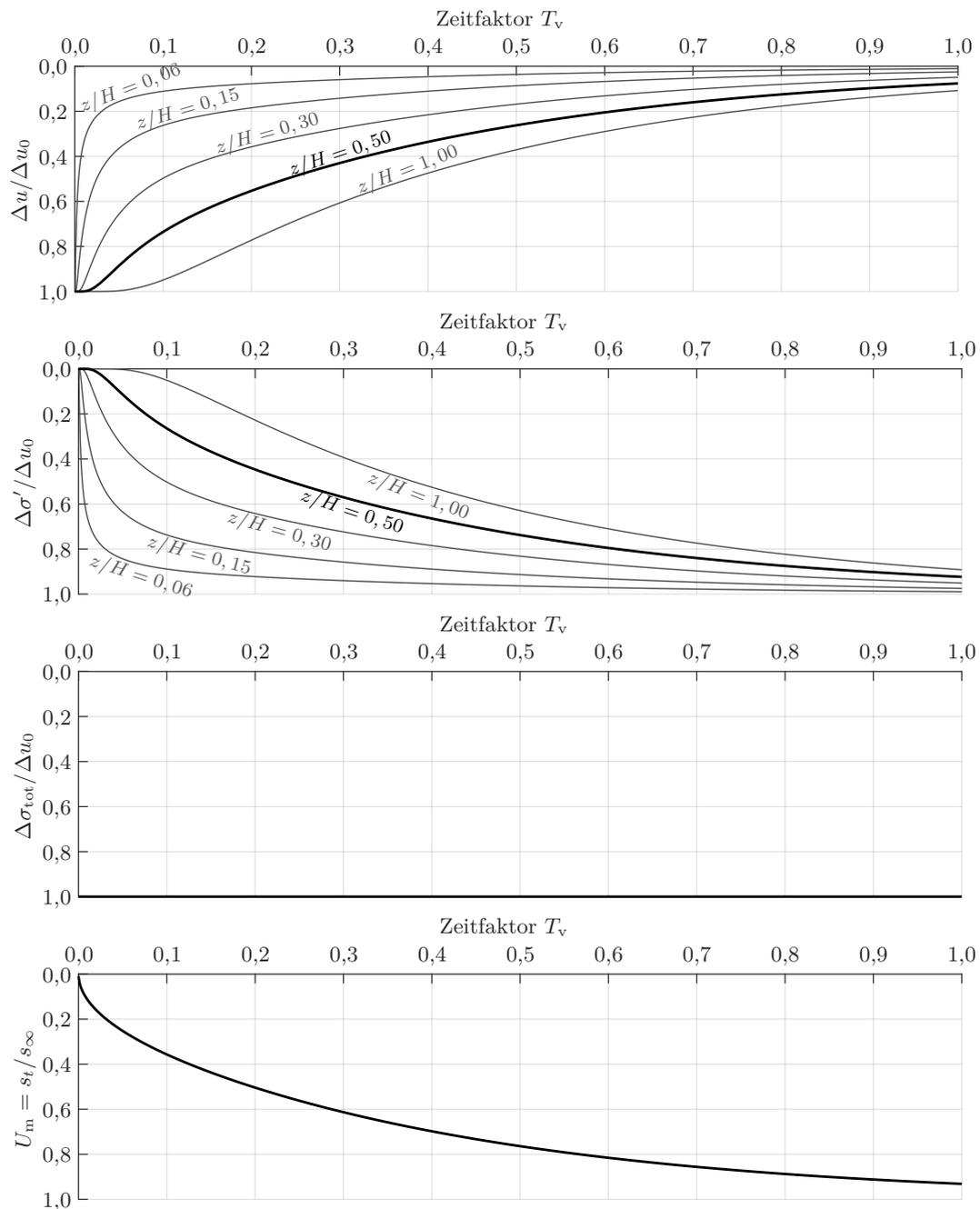


Abb. 7.2: Entwicklung der normierten Porenwasserüberdrücke, effektiven Spannungen und totalen Spannungen sowie des mittleren Konsolidationsgrades über den dimensionslosen Zeitfaktor

der Kurven an ihren entsprechenden Endwert. In der Realität hängt die Zeitspanne bis zum praktischen Erreichen der Konsolidationssetzung, wobei es sich um Tage oder Jahrzehnte handeln kann, von folgenden Parametern ab:

- Durchlässigkeit der konsolidierenden Schicht
- Durchlässigkeit der angrenzenden Schichten
- Mächtigkeit der Bodenschicht

- Tiefe der Bodenschicht
- Ausbreitung der Auflast

### 7.1.2 Massenerhaltung

In einem ersten Schritt wird ein infinitesimales Volumenelement  $dV = dx dy dz$  aus der Tonschicht zu einem Zeitpunkt  $t > 0$  in Abb. 7.3 betrachtet. Das ausgepresste Wasservolumen pro Zeiteinheit entspricht dabei der Differenz zwischen dem aus- und einströmenden Wasser:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \left( v + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) dx dy - v dx dy \quad (7.3)$$

oder:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial z} dx dy dz \quad (7.4)$$

mit:  $dQ(z, t)$  ... Wasservolumen in  $dV$  [ $\text{m}^3$ ]  
 $v = v_z(z, t)$  ... Fließgeschwindigkeit in  $z$ -Richtung [ $\text{m/s}$ ]

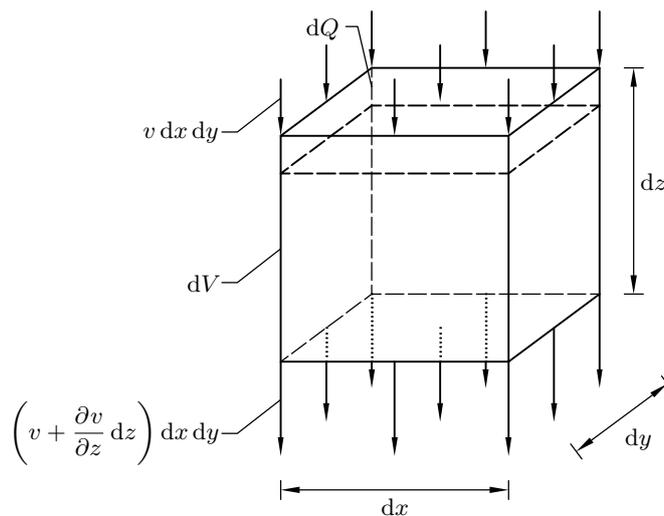


Abb. 7.3: Änderung des Volumens eines Bodenelements zufolge Wasserausflusses

Die Geschwindigkeit der Strömung kann durch das Gesetz von DARCY<sup>1</sup> beschrieben werden:

$$v = k_f i \quad (7.5)$$

mit:  $k_f$  ... Durchlässigkeitsbeiwert [ $\text{m/s}$ ]  
 $i(z, t)$  ... hydraulischer Gradient [-]

wobei der hydraulische Gradient definiert ist als:

$$i = - \frac{\partial h}{\partial z} \quad (7.6)$$

<sup>1</sup>Das Gesetz von DARCY setzt voraus, dass die Bodenkörner in Ruhe sind, was aufgrund der fortschreitenden Konsolidation genau genommen nicht zutrifft. Die Relativgeschwindigkeit zwischen Körnern und Wasser kann durch das sog. Gesetz von DARCY-GERSEVANOV berücksichtigt werden, siehe: [Kolymbas 2019].

Das negative Vorzeichen besagt dabei, dass die Strömung in Richtung des geringeren Überdrucks  $\Delta u$  verläuft. Für die vorliegende Ausgangssituation mit gleichen Eigenschaften der begrenzenden Sandschichten bedeutet das ein Abfließen des Wassers von  $0 \leq z < H$  nach oben und von  $H < z \leq 2H$  nach unten. Die Mitte der betrachteten Schicht,  $z = H$ , nimmt, wie sich bei der Lösung der Differentialgleichung zeigen wird, bei beidseitig drainierten Schichten eine Sonderstellung ein.

Einsetzen von Glg. 7.6 in Glg. 7.5 unter Berücksichtigung von Glg. 7.1 ergibt:

$$v = -\frac{k_f}{\gamma_w} \frac{\partial \Delta u}{\partial z} \quad (7.7)$$

Das Wasservolumen aus Glg. 7.4 kann somit durch Einsetzen von Glg. 7.7 geschrieben werden als:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{k_f}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial z^2} dx dy dz \quad (7.8)$$

### 7.1.3 Spannungs-Stauchungs-Beziehung

In einem zweiten Schritt wird dasselbe Volumenelement  $dV = dx dy dz$  aus der Tonschicht zum selben Zeitpunkt  $t > 0$  in Abb. 7.4 betrachtet. Unter Annahme kleiner Verformungen sowie eines spannungsunabhängigen, konstanten Steifemoduls kann der Zusammenhang zwischen Stauchung und Spannung bzw. deren Änderungen über die Zeit folgendermaßen beschrieben werden:

$$\frac{\partial \Delta \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E_s} \frac{\partial \Delta \sigma'}{\partial t} \quad (7.9)$$

mit:  $\Delta \varepsilon(z, t)$  ... Stauchung [-]  
 $\Delta \sigma'(z, t)$  ... effektive Spannung im Boden [N/m<sup>2</sup>]  
 $E_s$  ... Steifemodul [N/m<sup>2</sup>]

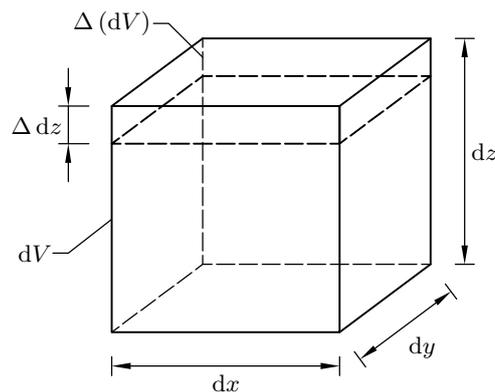


Abb. 7.4: Änderung des Volumens eines Bodenelements zufolge Zusammendrückung

Dabei kann, wie in Abb. 7.4 dargestellt, die Stauchung  $\Delta \varepsilon$  des Bodenelements definiert werden als

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz} \quad (7.10)$$

Mit der Forderung aus Glg. 7.2, dass die zusätzliche Auflast  $q$  jederzeit durch den Porenwasserüberdruck und die effektiven Spannungen aufgenommen werden muss, ergibt sich durch Umformung:

$$\Delta\sigma' = q - \Delta u \quad (7.11)$$

Einsetzen von Glg. 7.10 und Glg. 7.11 in Glg. 7.9 ergibt unter Berücksichtigung von  $q = \text{const.}$  bzw.  $\frac{\partial q - \Delta u}{\partial t} = -\frac{\partial \Delta u}{\partial t}$  sowie  $dz = \text{const.}$ :

$$\frac{\partial \Delta(dz)}{\partial t} = -\frac{1}{E_s} \frac{\partial \Delta u}{\partial t} dz \quad (7.12)$$

Eine Erweiterung der Glg. 7.12 um die Fläche  $dx dy$  ergibt:

$$\frac{\partial \Delta(dz)}{\partial t} dx dy = -\frac{1}{E_s} \frac{\partial \Delta u}{\partial t} dx dy dz \quad (7.13)$$

oder:

$$\frac{\partial \Delta(dV)}{\partial t} = -\frac{1}{E_s} \frac{\partial \Delta u}{\partial t} dx dy dz \quad (7.14)$$

mit:  $\Delta(dV)(z, t)$  ... zusammengedrücktes Volumen in  $dV$  [m<sup>3</sup>]

#### 7.1.4 Zusammensetzung der Differentialgleichung

Um die Kontinuität zu erfüllen, muss das zusammengedrückte Volumen des Korngefüges  $\Delta(dV)$  aus Glg. 7.14 dem ausgedrückten Wasservolumen  $dQ$  aus Glg. 7.8 entsprechen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta(dV)}{\partial t} &= \frac{\partial Q}{\partial t} \\ -\frac{1}{E_s} \frac{\partial \Delta u}{\partial t} dx dy dz &= -\frac{k_f}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial z^2} dx dy dz \end{aligned} \quad (7.15)$$

woraus, nach Umformen, die Differentialgleichung des eindimensionalen Konsolidationsvorganges nach TERZAGHI resultiert:

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial t} = \frac{k_f E_s}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial z^2} \quad (7.16)$$

bzw.:

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial z^2} \quad (7.17)$$

mit:  $c_v = \frac{k_f E_s}{\gamma_w}$  ... Konsolidations- bzw. Verfestigungsbeiwert [m<sup>2</sup>/s]

Der Konsolidationsbeiwert enthält nur Materialkenngrößen des konsolidierenden Bodens. Tab. 7.1 gibt Richtwerte des Konsolidationsbeiwerts in Abhängigkeit der Bodenart an.

Tab. 7.1: Richtwerte für den Konsolidationsbeiwert  $c_v$ 

| Erdstoff        | Konsolidationsbeiwert $c_v$ [ $\text{m}^2/\text{s}$ ] |
|-----------------|---|
| Schluff         | $10^{-5}$ – $10^{-4}$                                 |
| Schluffiger Ton | $10^{-6}$ – $10^{-5}$                                 |
| Ton             | $10^{-8}$ – $10^{-6}$                                 |

## 7.2 Lösung der Differentialgleichung

### 7.2.1 Allgemeine Lösung

Die analytische Lösung der *partiellen, linearen* und *homogenen* Differentialgleichung 2. Ordnung kann mit der Methode der Trennung der Variablen oder mit LAPLACE-Transformationen geschlossen angegeben werden. Eine numerische Lösung ist beispielsweise mit der Finiten-Differenzen-Methode (FDM) möglich.

Für die vollständige Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung müssen in der Regel zwei Randbedingungen und eine Anfangsbedingung miteinbezogen werden. Die Randbedingungen sind gleichbedeutend mit den Entwässerungsbedingungen der konsolidierenden Schicht. Eine offene Schicht ist beidseitig drainiert, d. h. Wasser kann sowohl durch ihre obere als auch durch ihre untere Grenze frei abgeführt werden. Die Dicke einer offenen Schicht wird mit  $2H$  angegeben. Im Gegensatz dazu kann, bei einer halb-geschlossenen oder einseitig drainierten Schicht, das Wasser nur durch eine Grenzfläche austreten. Ihre Dicke wird mit  $H$  angegeben, da die Lösung der Differentialgleichung in diesem Fall der Lösung der beidseitig drainierten Schicht bis zur Schichtmitte entspricht. Dieser Umstand wird zu einem späteren Zeitpunkt ersichtlich.

Die Anfangsbedingung folgt aus der Tatsache, dass unmittelbar nach Aufbringen der Belastung  $q$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  noch kein Porenwasser abgeflossen sein kann. Der Porenwasserüberdruck  $\Delta u$  wird mit der sogenannten Nullisochrone dargestellt und hängt von der Art der Belastung ab. Da der Porenwasserüberdruck zu Belastungsbeginn den effektiven Spannungen nach Konsolidationsabschluss entspricht, hängt der Verlauf der Verteilung neben der Ausdehnung der Belastung genau genommen auch von der Mächtigkeit der betrachteten Schicht sowie deren Tiefe ab. So kann die Annahme einer unbegrenzten Auflast für oberflächennahe Schichten durchaus bei kleineren Lastausdehnungen als bei tieferliegenden Schichten mit größeren Lastausdehnungen gerechtfertigt sein.

Abb. 7.5 zeigt die Randbedingungen und Anfangsbedingung (Nullisochrone) für ausgewählte praxisrelevante Beispiele. Die Dreiecksverteilung stellt dabei einen Sonderfall der Trapezverteilung dar. Auch sinusförmige Verteilungen und Kombinationen aus mehreren Verteilungen sind mathematisch möglich [Taylor 1954].

Betrachtet wird nun Fall (II-C) aus Abb. 7.1, bei dem eine gering durchlässige Tonschicht auf beiden Seiten durch Sandschichten begrenzt wird und eine weit ausgedehnte Auflast  $q$  aufgebracht wird. Die Rand- und Anfangsbedingungen lauten:

1. Die Schichtobergrenze erlaubt eine vollständige Entwässerung:  $\Delta u(z = 0) = 0$
2. Die Schichtuntergrenze erlaubt eine vollständige Entwässerung:  $\Delta u(z = 2H) = 0$
3. Der Porenwasserüberdruck zu Belastungsbeginn ist über die gesamte Höhe konstant:  $\Delta u(t = 0) = u_i = u_0$

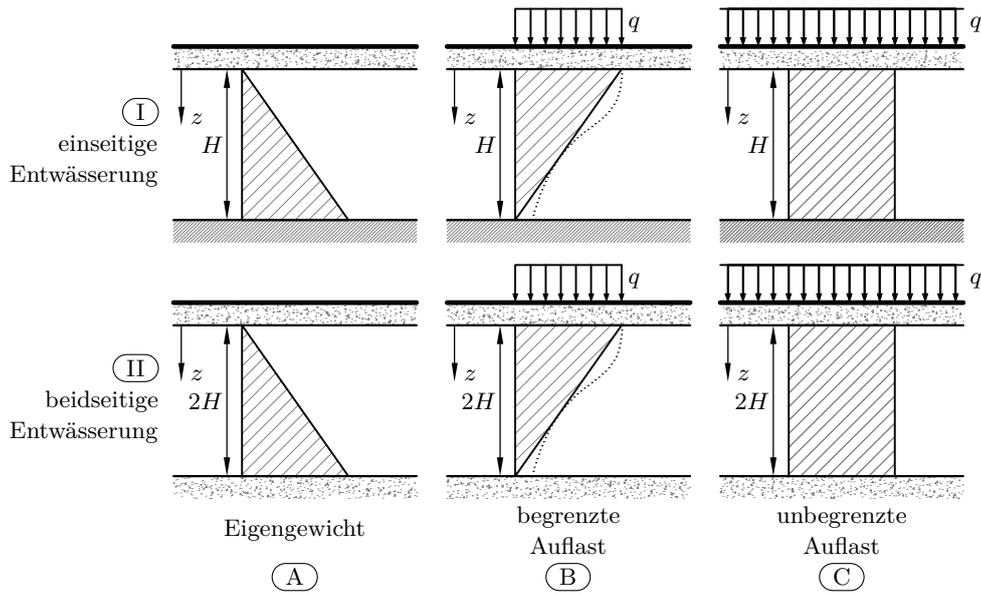


Abb. 7.5: Randbedingungen und Anfangsbedingung für die Lösung der Differentialgleichung

Der Grund für die mehrfache Definition der Anfangsbedingung als  $u_i$  wird zu einem späteren Zeitpunkt ersichtlich. Die zu lösende Differentialgleichung, Glg. 7.17, wird hier nochmals wiederholt:

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial z^2}$$

Für ihre Lösung wird nun die Methode der Trennung der Variablen gewählt, welcher auch von Taylor [1954] beschrieben wird. Dafür wird angenommen, dass die Funktion  $\Delta u(t, z)$  als Produkt zweier Funktionen dargestellt werden kann:

$$\Delta u(t, z) = F(z)\Phi(t) \quad (7.18)$$

Glg. 7.17 kann dann geschrieben werden als:

$$F(z)\dot{\Phi}(t) = c_v\Phi(t)F''(z) \quad (7.19)$$

oder:

$$\frac{\dot{\Phi}(t)}{c_v\Phi(t)} = \frac{F''(z)}{F(z)} \quad (7.20)$$

Nachdem die linke Seite der Gleichung nur von der Zeit  $t$  abhängig ist, kann eine Änderung der Koordinate  $z$  diese Seite der Gleichung nicht beeinflussen. Die gleiche Argumentation ist auch für die rechte Seite der Gleichung mit vertauschten Variablen gültig. Dies bedeutet, dass beide Seiten konstant sind. Diese Konstante wird mit  $-A^2$  angesetzt. Die rechte Seite der Gleichung lautet somit:

$$\frac{F''(z)}{F(z)} = -A^2 \quad (7.21)$$

oder:

$$F''(z) = -A^2 F(z) \quad (7.22)$$

Eine geeignete Lösung für diesen Ausdruck gibt:

$$F(z) = C_1 \cos(Az) + C_2 \sin(Az) \quad (7.23)$$

wobei  $C_1$  und  $C_2$  willkürliche Variablen darstellen.

In einer ähnlichen Herangehensweise für die linke Seite der Glg. 7.20 bedeutet das:

$$\frac{\dot{\Phi}(t)}{c_v \Phi(t)} = -A^2 \quad (7.24)$$

oder:

$$\dot{\Phi}(t) = -A^2 c_v \Phi(t) \quad (7.25)$$

Eine geeignete Lösung für diesen Ausdruck kann mit Hilfe der Exponentialfunktion geschrieben werden:

$$\Phi(t) = C_3 e^{-A^2 c_v t} \quad (7.26)$$

Glg. 7.18 kann somit geschrieben werden als:

$$\Delta u(t, z) = F(z) \Phi(t) = (C_4 \cos(Az) + C_5 \sin(Az)) e^{-A^2 c_v t} \quad (7.27)$$

Die Konstanten können nun mit Hilfe der Randbedingungen und der Anfangsbedingung bestimmt werden. Die erste Randbedingung  $\Delta u(z = 0) = 0$  ist erfüllt, wenn:

$$C_4 = 0 \quad (7.28)$$

Dadurch reduziert sich Glg. 7.27 auf:

$$\Delta u(t, z) = F(z) \Phi(t) = C_5 \sin(Az) e^{-A^2 c_v t} \quad (7.29)$$

Die zweite Randbedingung  $\Delta u(z = 2H) = 0$  ergibt somit:

$$0 = C_5 \sin(2AH) e^{-A^2 c_v t} \quad (7.30)$$

und ist erfüllt, wenn  $2AH = n\pi$ , wobei  $n$  eine ganze Zahl ist. Dies ergibt:

$$A = \frac{n\pi}{2H} \quad (7.31)$$

und:

$$\Delta u = C_5 \sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2}{4H^2} c_v t} \quad (7.32)$$

Nachdem  $C_5$  eine willkürliche Variable darstellt und  $n$  jede ganze Zahl annehmen kann, ist eine Darstellung in Form einer Reihenentwicklung eine valide Lösung:

$$\begin{aligned} \Delta u = & B_1 \sin\left(\frac{\pi z}{2H}\right) e^{-\frac{\pi^2}{4H^2} c_v t} + B_2 \sin\left(\frac{2\pi z}{2H}\right) e^{-\frac{4\pi^2}{4H^2} c_v t} + \dots \\ & + B_n \sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{4H^2} c_v t} + \dots \end{aligned} \quad (7.33)$$

Dies entspricht in verkürzter Schreibweise:

$$\Delta u = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{4H^2} c_v t} \quad (7.34)$$

Eine jede Anfangsbedingung  $\Delta u(t=0) = u_i$  ist erfüllt, wenn:

$$u_i = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right) \quad (7.35)$$

Dies entspricht einer typischen FOURIER-Reihe. Um die Variablen der Gleichung zu bestimmen, wird auf folgende Integrations-Verhältnisse zurückgegriffen:

$$\int_0^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{wenn } n = m \end{cases} \quad \text{mit } n, m = 1, 2, 3, \dots \quad (7.36)$$

Im Falle von Glg. 7.35 wird daraus:

$$\int_0^{2H} \sin\left(\frac{m\pi z}{2H}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right) dz = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \neq m \\ H & \text{wenn } n = m \end{cases} \quad \text{mit } n, m = 1, 2, 3, \dots \quad (7.37)$$

Bei einer Multiplikation beider Seiten von Glg. 7.35 mit  $\sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right) dz$  und Integration von 0 bis  $2H$  ist demnach lediglich der  $n$ -te Term ungleich null, wodurch die Variablen bestimmt werden können:

$$\int_0^{2H} u_i \sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right) dz = B_n \int_0^{2H} \sin^2\left(\frac{n\pi z}{2H}\right) dz = B_n H \quad (7.38)$$

oder:

$$B_n = \frac{1}{H} \int_0^{2H} u_i \sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right) dz \quad (7.39)$$

Ein Einsetzen in Glg. 7.34 ergibt somit die allgemeine Form:

$$\Delta u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{H} \int_0^{2H} u_i \sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right) dz \sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{4H^2} c_v t} \quad (7.40)$$

oder:

$$\Delta u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{H} \int_0^{2H} u_i \sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right) dz \sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{4} T_v} \quad (7.41)$$

mit dem dimensionslosen Zeitfaktor:

$$T_v = \frac{c_v t}{H^2} \quad (7.42)$$

Es fällt auf, dass Glg. 7.41 für jede Anfangsbedingung  $\Delta u(t=0) = u_i$  gültig ist. Unter der Voraussetzung, dass die beiden Randbedingungen der beidseitig drainierten Schicht mit Höhe  $2H$  gegeben sind, können von diesem Punkt aus verschiedene Verteilungen des Porenwasserüberdrucks untersucht werden.

Im vorliegenden Fall der konstanten Spannungsverteilung zu Belastungsbeginn, sprich der Anfangsbedingung  $\Delta u(t=0) = u_i = u_0$ , lässt sich Glg. 7.41 weiter vereinfachen:

$$\Delta u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u_0}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{4}T_v} \quad (7.43)$$

Da:

$$1 - \cos(n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n = 2, 4, 6, \dots \\ 2 & \text{wenn } n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (7.44)$$

kann durch  $n = 2m + 1$ , wobei  $m$  eine ganze Zahl darstellt, und  $M = \frac{\pi}{2}(2m + 1)$  eine verkürzte Schreibweise eingeführt werden:

$$\Delta u = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2u_0}{M} \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) e^{-M^2 T_v} \quad (7.45)$$

Abb. 7.6 veranschaulicht Glg. 7.45, wobei der Porenwasserüberdruck durch eine Division durch  $u_0$  normiert wurde. Das Ergebnis sind sogenannte *Isochronen*, welche eine Momentaufnahme von Linien gleicher Porenwasserüberdrücke darstellen. Die Randbedingungen, sprich ein sofortiger Abfall des Porenwasserdrucks auf null an den Schichtgrenzen, sowie die Anfangsbedingung einer konstanten Spannungsverteilung lassen sich mit Hilfe des Diagramms in Abb. 7.6 leicht überprüfen.

Die bisherige Herleitung behandelt mit Fall  $\textcircled{\text{II-C}}$  beidseitig drainierte Schichten mit einer definierten Schichtdicke von  $2H$ . Wie in Abb. 7.6 durch die horizontale Linie bei  $z/H = 1,0$  angedeutet wird, ist eine Änderung der Randbedingung auf eine einseitig undurchlässige Schichtbegrenzung, Fall  $\textcircled{\text{I-C}}$ , im Falle einer konstanten Spannungsverteilung als Anfangsbedingung mit einer Halbierung der Schichtdicke gleichbedeutend.

Abb. 7.7 ist eine dreidimensionale Darstellung von Glg. 7.45 mit derselben Anfangsbedingung wie in Abb. 7.6. Es wird hier allerdings nur die halbe Schichthöhe dargestellt, was also Fall  $\textcircled{\text{I-C}}$  entspricht. Bei der Berechnung wurden Terme bis  $m = 200$  berücksichtigt.

Im Falle einer linearen Spannungsverteilung (Fall  $\textcircled{\text{A}}$ ) ist die Vorgehensweise der Halbierung der Schichtdicke, wie in Abb. 7.8 angedeutet, ebenfalls möglich. Die zugehörige Spannungsverteilung zu Belastungsbeginn ist  $\Delta u(t=0) = u_i = \frac{z}{2H}u_0$ , wobei  $u_0$  den maximalen Porenwasserüberdruck darstellt.

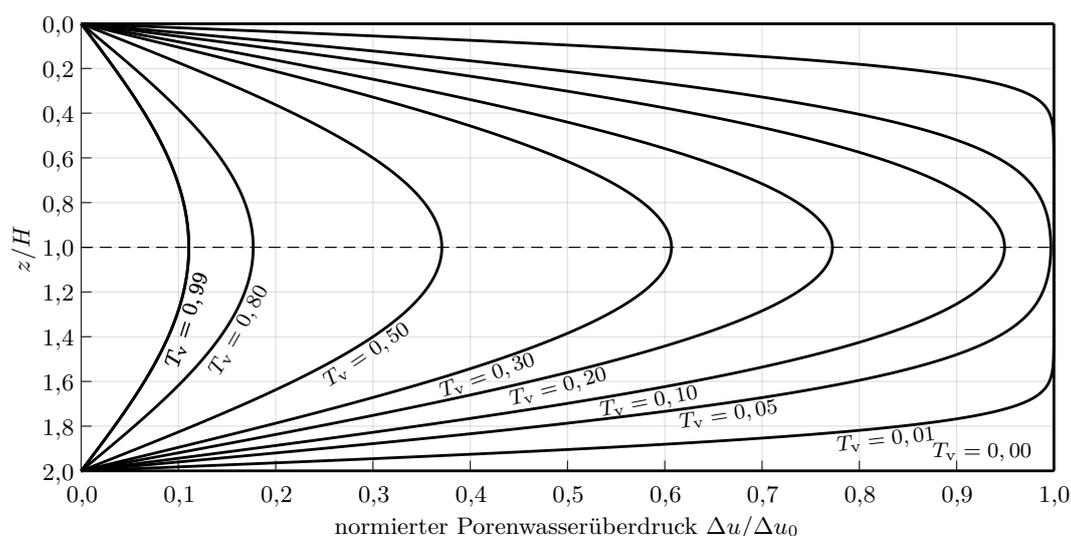


Abb. 7.6: Verlauf des normierten Porenwasserüberdrucks von 0 bis  $2H$  für eine konstante Spannungsverteilung zu Belastungsbeginn (Fall (II-C))

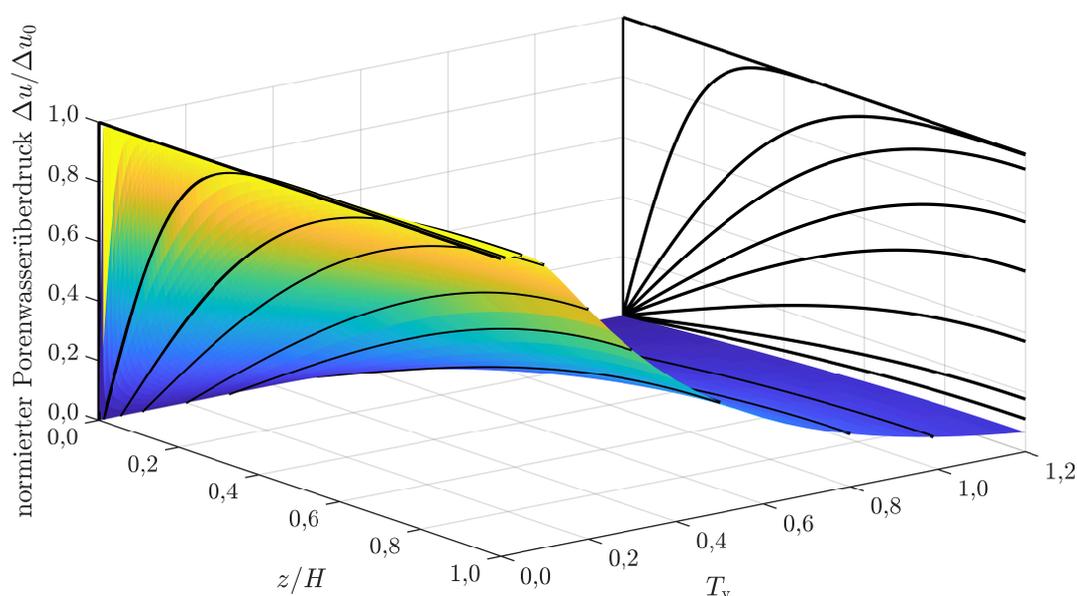


Abb. 7.7: 3D-Verlauf des normierten Porenwasserüberdrucks von 0 bis  $H$  für eine konstante Spannungsverteilung zu Belastungsbeginn (Fall (I-C))

Der Porenwasserüberdruck kann für den linearen Fall wie folgt berechnet werden:

$$\Delta u = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2u_0}{n\pi} \cos(n\pi) \sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{4}T_v} \quad (7.46)$$

Abb. 7.9 zeigt eine dreidimensionale Darstellung mit derselben Anfangsbedingung wie in Abb. 7.8. Wie zuvor ist nur die halbe Schichtdicke für eine undurchlässige Schicht auf der Unterseite dargestellt, wobei in diesem Fall die berechneten Porenwasserdrücke um den Faktor 2 zu skalieren sind, um erneut einen maximalen Porenwasserüberdruck von  $u_0$  zu gewährleisten. Bei der Berechnung von Glg. 7.46 wurden Terme bis  $n = 4000$  berücksichtigt.

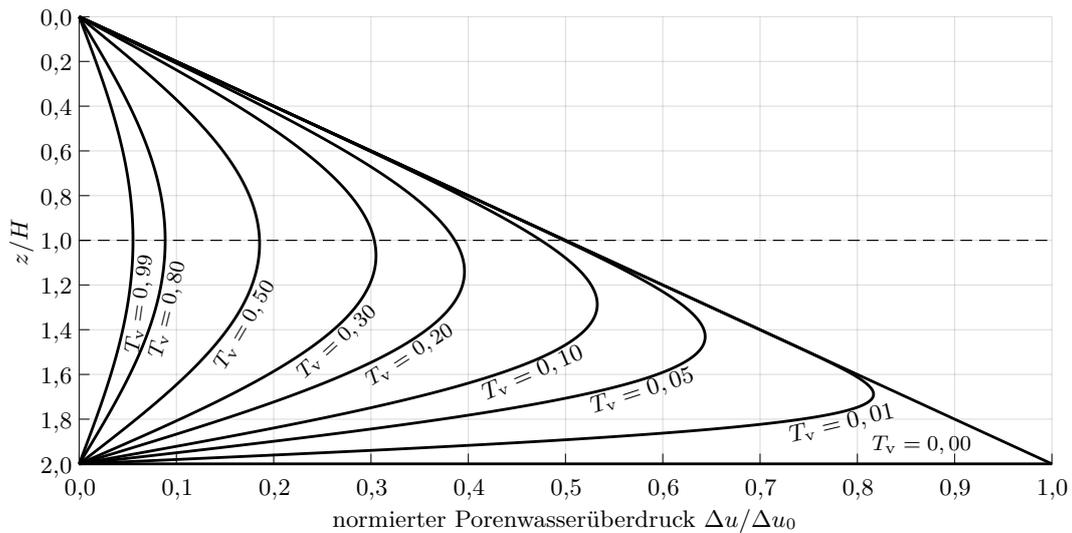


Abb. 7.8: Verlauf des normierten Porenwasserüberdrucks von 0 bis  $2H$  für eine linear zunehmende Spannungsverteilung zu Belastungsbeginn (Fall (II-A))

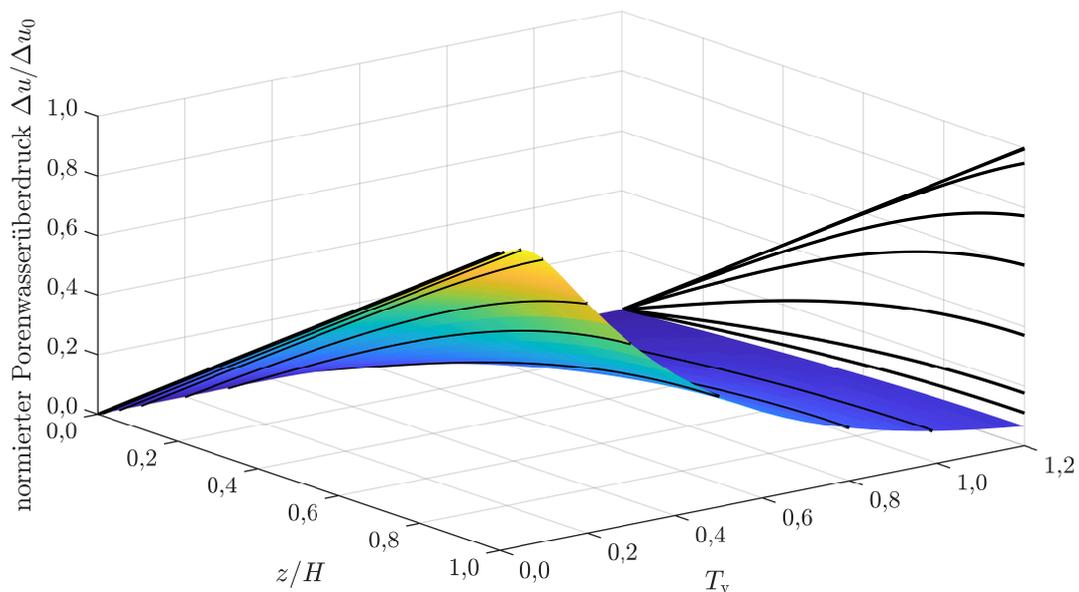


Abb. 7.9: 3D-Verlauf des normierten Porenwasserüberdrucks von 0 bis  $H$  für eine linear zunehmende Spannungsverteilung zu Belastungsbeginn (Fall (I-A))

Fall (II-B) kann aufgrund der Symmetrieeigenschaft durch eine Spiegelung des Ergebnisses von Fall (II-A) dargestellt werden.

Für eine undurchlässige Schicht auf jener Seite der linearen Spannungsverteilung, an welcher zu Belastungsbeginn keine Porenwasserüberdrücke auftreten sollen, ist die zuvor angewendete Methode der Schichthalbierung nicht möglich. In Abb. 7.5 entspricht dieser Fall der einseitigen Entwässerung bei begrenzter Auflast, also Fall (I-B). Dafür sollen die wichtigsten Herleitungsschritte im Folgenden gezeigt werden.

Die Rand- und Anfangsbedingungen sind:

1. Die Schichtobergrenze erlaubt eine vollständige Entwässerung:  $\Delta u(z=0) = 0$
2. Die Schichtuntergrenze erlaubt keine Entwässerung:  $v = \frac{\partial \Delta u(z=H)}{\partial z} = 0$
3. Der Porenwasserüberdruck zu Belastungsbeginn nimmt mit zunehmender Tiefe linear ab:  
 $\Delta u(t=0) = u_i = \left(1 - \frac{z}{H}\right) u_0$

Die zuvor angewendete Lösungsmethode der Trennung der Variablen kann analog angewendet werden. Die zweite Randbedingung,  $v = \frac{\partial \Delta u(z=H)}{\partial z} = 0$ , besagt, dass die Strömungsgeschwindigkeit an der unteren Schichtgrenze null ist:

$$0 = AC_5 \cos(AH) e^{-A^2 c_v t} \quad (7.47)$$

Die Gleichung ist erfüllt, wenn  $AH = \frac{(2m+1)\pi}{2} = M$ , wobei  $m$  eine ganze Zahl ist. Dies ergibt:

$$A = \frac{M}{H} = \frac{(2m+1)\pi}{2H} \quad (7.48)$$

und:

$$\Delta u = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) e^{-M^2 T_v} \quad (7.49)$$

Die Variablen  $B_m$  können erneut mit Hilfe der Integrationsverhältnisse bestimmt werden:

$$0 = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) \quad (7.50)$$

und:

$$\int_0^H \sin\left(\frac{(2m+1)\pi z}{2H}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2H}\right) dz = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \neq m \\ \frac{H}{2} & \text{wenn } n = m \end{cases} \quad (7.51)$$

wobei  $n, m = 0, 1, 2, \dots$  gilt.

Bei einer Multiplikation beider Seiten von Glg. 7.50 mit  $\sin\left(\frac{(2m+1)\pi z}{2H}\right) dz = \sin\left(\frac{Mz}{H}\right)$  und Integration von 0 bis  $H$  ist demnach lediglich der  $m$ -te Term ungleich null, wodurch die Variablen bestimmt werden können:

$$\int_0^H u_i \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) dz = B_m \int_0^H \sin^2\left(\frac{Mz}{H}\right) dz = B_m \frac{H}{2} \quad (7.52)$$

oder:

$$B_m = \frac{2}{H} \int_0^H u_i \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) dz \quad (7.53)$$

Einsetzen in Glg. 7.49 ergibt:

$$\Delta u = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{H} \int_0^H u_i \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) dz \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) e^{-M^2 T_v} \quad (7.54)$$

Eine Berücksichtigung der Anfangsbedingung und eine Vereinfachung der Gleichung ergibt schlussendlich:

$$\Delta u = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2u_0}{M^2} (M - \sin(M)) \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) e^{-M^2 T_v} \quad (7.55)$$

Eine normierte Darstellung des Ergebnisses ist in Abb. 7.10 gegeben. Dabei fällt auf, dass die Porenwasserüberdrücke an der undurchlässigen Schicht zunächst bis etwa  $T_v = 0,1$  ansteigen. Dies ist laut Lang et al. [2011] mit einer tendenziellen Volumenzunahme (Schwellvorgang) verbunden.

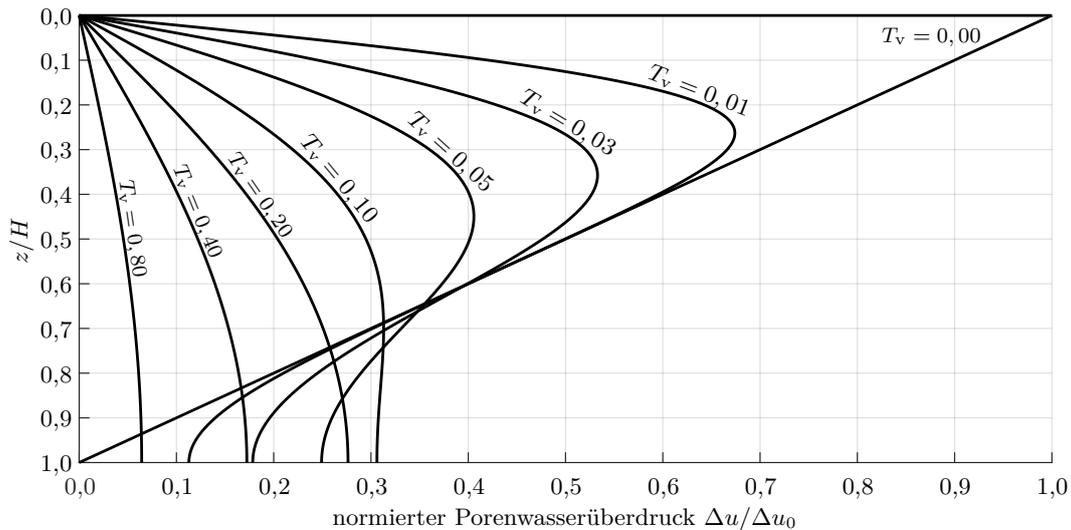


Abb. 7.10: Verlauf des normierten Porenwasserüberdrucks von 0 bis  $H$  für eine linear abnehmende Spannungsverteilung zu Belastungsbeginn bei einer unten undurchlässigen Schicht (Fall (I-B))

Abb. 7.11 ist die dreidimensionale, alternative Darstellungsvariante zu jener in Abb. 7.10. Bei der Berechnung von Glg. 7.55 wurden Terme bis  $m = 2000$  berücksichtigt.

### 7.2.2 Verfestigungs- bzw. Konsolidationsgrad

Um neben den Porenwasserdrücken die fortlaufende Konsolidation zu beschreiben, wird der Verfestigungs- bzw. Konsolidationsgrad  $U_z$  definiert. Dieser ist das Verhältnis zwischen dem an der Stelle  $z$  und zum Zeitpunkt  $t$  vorherrschendem Porenwasserüberdruck und dem Anfangsporenwasserüberdruck:

$$U_z = \frac{u_i - \Delta u}{u_i} = 1 - \frac{\Delta u}{u_i} \quad (7.56)$$

Der Konsolidationsgrad beträgt somit zum Zeitpunkt  $t = 0$  gleich null und zum Zeitpunkt  $t = \infty$  gleich eins. Im Unterschied zum Porenwasserüberdruck ist dieser allerdings nicht von der Größe der Auflast abhängig.

In vielen Fällen ist der mittlere Verfestigungs- bzw. Konsolidationsgrad  $U_m$  von Interesse. Dieser entspricht dem durchschnittlichen Konsolidationsgrad über die gesamte Schichthöhe. Glg. 7.57

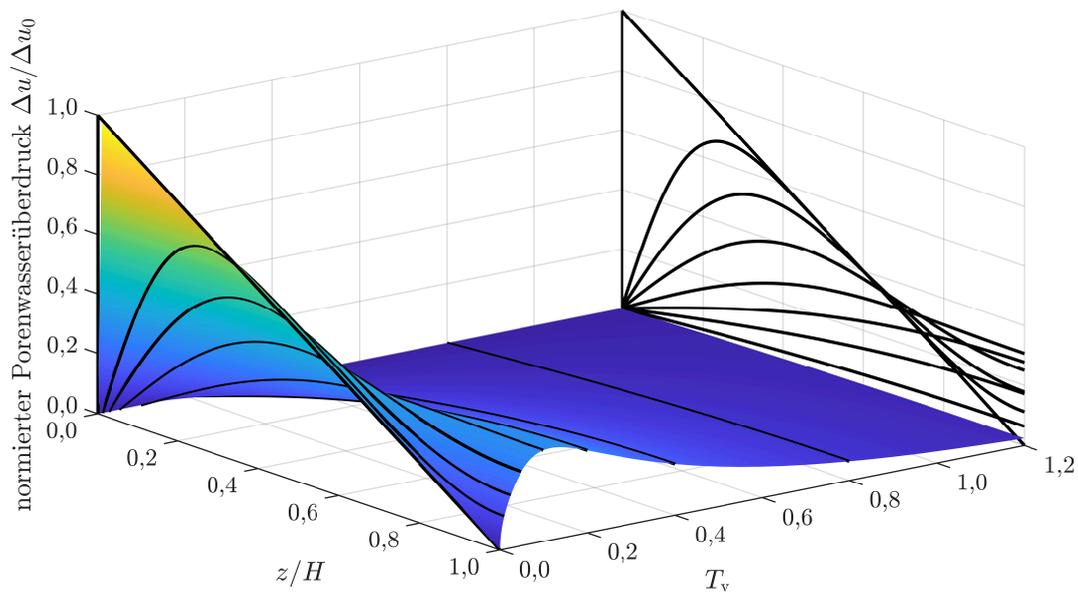


Abb. 7.11: 3D-Verlauf des normierten Porenwasserüberdrucks von 0 bis  $H$  für eine linear abnehmende Spannungsverteilung zu Belastungsbeginn bei einer unten undurchlässigen Schicht (Fall (I-B))

stellt somit den durchschnittlichen Konsolidationsgrad für beidseitig drainierte Schichten mit Höhe  $2H$  dar:

$$U_m = \frac{s_t}{s_\infty} = 1 - \frac{\int_0^{2H} \Delta u \, dz}{\int_0^{2H} u_i \, dz} \quad (7.57)$$

Die Verwendung des dimensionslosen Zeitfaktors aus Glg. 7.42,  $T_v = \frac{c_v t}{H^2}$ , zeigt den Zusammenhang zwischen dem Konsolidationsbeiwert  $c_v$ , der Zeit  $t$  und der gesamten Schichthöhe  $H$  bzw.  $2H$ . Der Konsolidationsgrad  $U_z$  ist demnach für jede Schicht gleich, die unter bestimmten Belastungs- und Entwässerungsbedingungen konsolidiert. Dies ermöglicht die Verwendung eines Diagramms für den mittleren Konsolidationsgrad  $U_m$ , wie es in Abb. 7.12 dargestellt ist.

Aufgrund der Mittelung ist es im Falle einer einseitigen Entwässerung unbedeutend, ob der Drainrand oben oder unten liegt. Somit muss lediglich die Schichtdicke in diesem Fall als  $H$  definiert werden, und das Diagramm behält seine Gültigkeit.

### 7.2.3 Modellgesetz der Zeitsetzung

In der Praxis wird die Beziehung zwischen dem Konsolidationsgrad und dem Zeitfaktor im Labor ermittelt. Eine Voraussetzung dafür ist, dass der Abbau des Porenwasserdrucks eines gleichen Bodens, also mit gleichem Konsolidationsbeiwert, im Labor (Modell, Index M) und im Boden (Natur, Index N) gleich abläuft. Ist dies erfüllt, lässt sich das Modellgesetz der Zeitsetzung ableiten.

Aus

$$U_{z,N} = U_{z,M} \quad \dots \text{gleicher Konsolidationsverlauf}$$

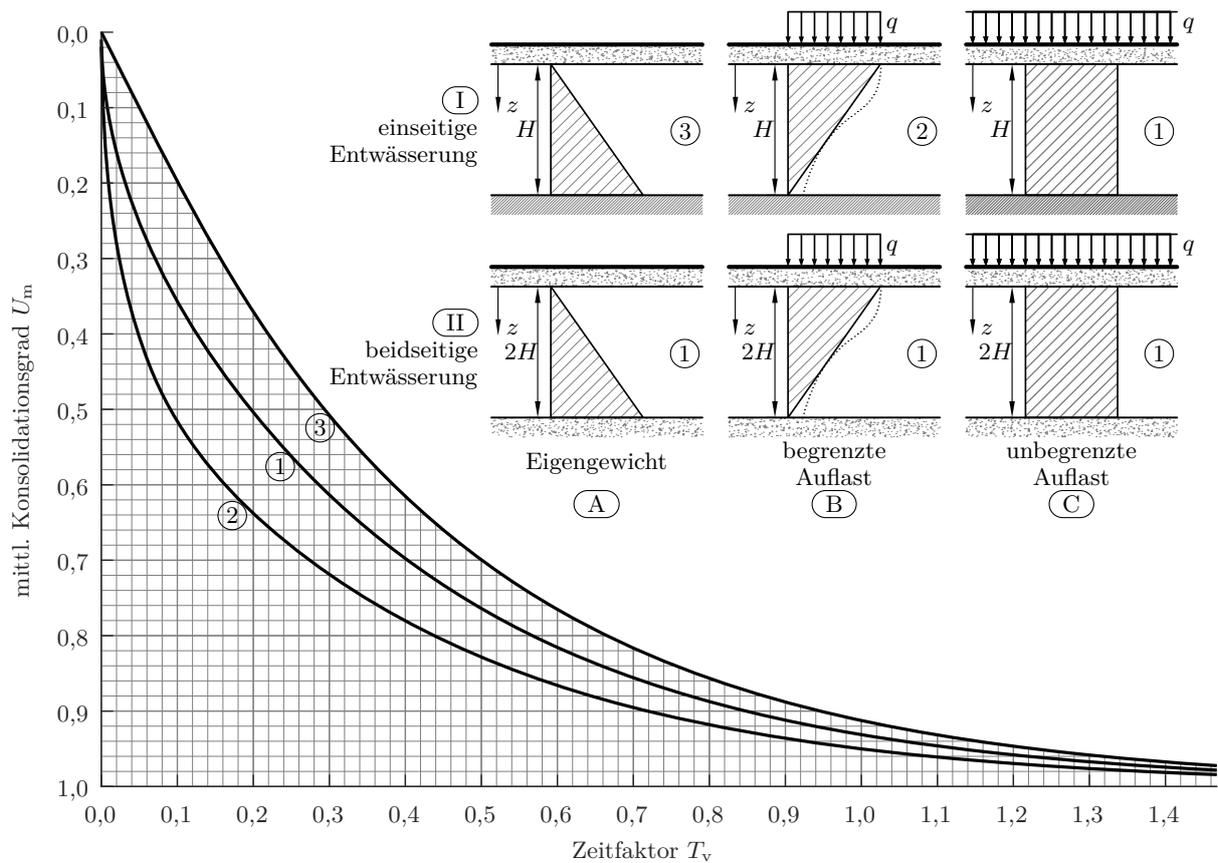


Abb. 7.12: Mittlerer Konsolidationsgrad für verschiedene Rand- und Anfangsbedingungen

folgt

$$T_{v,N} = T_{v,M} \quad \dots \text{gleicher Zeitfaktor}$$

bzw.

$$\frac{c_{v,N} t_N}{H_N^2} = \frac{c_{v,M} t_M}{H_M^2}$$

und mit

$$c_{v,N} = c_{v,M} \quad \dots \text{gleicher Konsolidationsbeiwert}$$

folgt das Modellgesetz der Zeitsetzung:

$$\frac{t_M}{t_N} = \frac{H_M^2}{H_N^2} \quad \text{bzw.} \quad t_N = \frac{H_N^2}{H_M^2} t_M \quad (7.58)$$

Das bedeutet, dass bei einer bekannten Schichtdicke in der Natur und durch einen Ödometer-versuch mit dem gleichen Boden auf jene Zeit geschlossen werden kann, die in der Natur bis zum Eintreten des gleichen Konsolidationsgrades benötigt wird. Die Schichthöhe geht dabei zum Quadrat ein, weshalb bei gleichen Randbedingungen in der Natur und im Modell eine Verdoppelung der Höhe eine Vervielfachung der Konsolidationszeit zur Folge hat.

### 7.3 Beispiel

Wird bei einem beidseitig drainierten Ödometerversuch mit einer gesamten Höhe von 2 cm ein Konsolidationsgrad von 1, also ein vollständiger Abbau der Porenwasserdrücke, nach einer Stunde gemessen, so ergibt das für eine beidseitig drainierte Bodenschicht mit einer Mächtigkeit von 2 m eine Zeitdauer von 417 Tagen:

$$t_N = \frac{H_N^2}{H_M^2} t_M = \frac{1^2}{0,01^2} \cdot 1 = 1000 \text{ h} \approx 417 \text{ d} \quad (7.59)$$

# Literatur

- Adam, D. (2019). *Studienunterlagen zur Vorlesung Grundbau und Bodenmechanik*. Institut für Geotechnik an der Technischen Universität Wien.
- Braja, M. D. (2008). *Fundamentals of Geotechnical Engineering*. Third Edition. Toronto: Thomson Learning.
- Hancock, M. (2006). *The 1-D Heat Equation. 18.303 Linear Partial Differential Equations*. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, <https://ocw.mit.edu/>. License: Creative Commons BY-NC-SA. Fall 2006. URL: <https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-303-linear-partial-differential-equations-fall-2006/lecture-notes/heateqni.pdf> (Zugriff am 03.09.2020).
- Hannoschöck, N. (2018). *Wärmeleitung und -transport*. Berlin Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Vieweg.
- Herwig, H. und A. Moschallski (2009). *Wärmeübertragung. Physikalische Grundlagen – Illustrierende Beispiele – Übungsaufgaben mit Musterlösungen*. 2., überarbeitete und erweiterte Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden.
- Kézdi, Á. (1962). *Erddrucktheorien*. 1. Aufl. 1962. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Kolymbas, D. (2019). *Geotechnik. Bodenmechanik, Grundbau und Tunnelbau*. 5. Aufl. 2019. Berlin Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Vieweg.
- Lang, H.-J., J. Huder, P. Amann und A. M. Puzrin (2011). *Bodenmechanik und Grundbau*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- ÖNORM B 4434 (1993). *Erd- und Grundbau. Erddruckberechnung*. Austrian Standards Institute. Wien.
- Papula, L. (2015). *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2. Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*. 14., überarb. u. erw. Aufl. 2015. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Taylor, D. W. (1954). *Fundamentals of Soil Mechanics*. 7. Auflage. New York: John Wiley & Sons.
- Terzaghi, K. (1925). *Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage*. Leipzig, Wien: Deuticke.
- Tipler, P. A., G. Mosca, P. Kersten und J. Wagner (2019). *Physik. für Studierende der Naturwissenschaften und Technik*. 8. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Spektrum.
- Von Wolfersdorff, P.-A. und H. F. Schweiger (2017). „Numerische Verfahren in der Geotechnik“. In: *Grundbau-Taschenbuch*. Hrsg. von K. J. Witt. John Wiley & Sons, Ltd, S. 633–719.