

Diese Dissertation haben begutachtet:

Dirk Praetorius

Stefan Sauter



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Vienna University of Technology

DISSERTATION

Zur Konvergenz und Quasioptimalität adaptiver Randelementmethoden

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der technischen Wissenschaften unter der Leitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.Math. Dr.techn. Dirk Praetorius und
Univ.Prof. Jens Markus Melenk, PhD

E101 - Institut für Analysis und Scientific Computing

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Mathematik und Geoinformation

von

Dipl.-Ing. Michael Karkulik

Matrikelnummer: 0355535

Neubaugürtel 33/44

1150 Wien

Wien, am 24. 08. 2012

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird eine mathematisch fundierte Konvergenztheorie für adaptive Galerkinverfahren für Randintegralgleichungen entwickelt. Dabei wird auf die vorhandene Konvergenztheorie für adaptive Finite Elemente Methoden (AFEM) zurückgegriffen. Die dafür entwickelten Werkzeuge erfordern Aussagen lokaler Natur und können daher nicht unmittelbar für die Analyse adaptiver Randelementmethoden verwendet werden, da in diesem Fall die Operatoren und natürlichen Normen nichtlokal sind.

Kapitel 3 befasst sich mit Gittern und den diskreten Räumen stückweiser Polynome, die den Galerkinverfahren zugrunde liegen. Es werden vorhandene Aussagen zur Optimalität des Netzabschlusses bei lokaler Verfeinerung eines Gitters erweitert indem wir die bisher nötigen Annahmen an das grösste Gitter entfernen. Dadurch werden die Voraussetzungen, unter denen quasioptimale Konvergenz einer AFEM gezeigt werden kann, verringert. Des Weiteren werden Approximationsaussagen von Quasi-Interpolationsoperatoren in gebrochenen Sobolevräumen gezeigt, wofür Resultate aus der Theorie der Interpolationsräume verwendet werden.

Als Modellprobleme werden im Weiteren Randintegralgleichungen für das Dirichlet- und Neumannproblem der Laplacegleichung betrachtet. In Kapitel 4 werden die zugehörigen Randintegraloperatoren definiert. Durch die Anwendung von Resultaten der Regularitätstheorie für partielle Differentialgleichungen werden neuartige inverse Ungleichungen für diese Randintegraloperatoren gezeigt.

Das Kapitel 5 beinhaltet die Konvergenz- und Quasioptimalitätstheorie von adaptiven Galerkinverfahren für Gleichungen, die das Einfachschichtpotential enthalten. Es werden zwei Arten von a-posteriori Fehlerschätzern betrachtet: zum einen sogenannte $h - h/2$ -Fehlerschätzer, die darauf beruhen, den Fehler durch Verfeinerung des Ansatzraumes zu schätzen. Zum anderen gewichtete Residualschätzer, die darauf beruhen, den Fehler des (berechenbaren) Residuums zu schätzen. Im Falle des Dirichletproblems werden die gegebenen Randdaten zusätzlich durch diskrete Funktionen approximiert. Dazu werden die Operatoren verwendet, für die in Kapitel 3 Approximationsaussagen in Sobolevräumen gebrochener Ordnung gezeigt werden. Es wird die Konvergenz für adaptive Algorithmen, die durch $h - h/2$ -basierte oder gewichtete residuale Fehlerschätzer gesteuert werden, gezeigt. Dazu wird das Konzept der *Fehlerschätzerreduktion* verwendet, laut welchem es hinreichend ist, die Kontraktion der Fehlerschätzer bis auf eine Nullfolge zu zeigen. Im Falle des gewichteten Residualschätzers werden dazu die inversen Ungleichungen für Randintegraloperatoren benötigt, die in Kapitel 4 bewiesen werden. Davon ausgehend wird die quasioptimale Konvergenz für adaptive Algorithmen, die durch den gewichteten Residualschätzer gesteuert werden, gezeigt. Damit ist Folgendes gemeint: wenn es, ausgehend von einem festen Startgitter, eine beliebige Folge von Gittern gibt, die eine gewisse Konvergenzrate für die zugehörigen Schätzer garantiert, dann wird diese Rate auch durch den adaptiven Algorithmus erreicht. Für den Beweis dieser Aussage werden vorhandene Werkzeuge aus der Konvergenztheorie für AFEM auf den Fall von nichtlokalen Operatoren und Normen verallgemeinert.

In Kapitel 6 werden die Resultate, die für Gleichungen mit dem Einfachschichtpotential erhalten wurden, für Gleichungen mit dem hypersingulären Integraloperator gezeigt.

In Kapitel 7 werden numerische Resultate vorgestellt, welche die Theorie aus den vorangegangenen Kapiteln unterstützen und die Effizienz von adaptiven Verfahren im Allgemeinen zeigen sollen. Es werden verschiedene Experimente für Gleichungen mit dem Einfachschichtpotential durchgeführt, wobei die zugrundeliegende Implementierung schnelle Verfahren für die Berechnung der diskreten Randintegraloperatoren verwendet.

Abstract

The purpose of this work is to establish a convergence theory for adaptive Galerkin methods for boundary integral equations. For adaptive Finite Element Methods (AFEM), such a theory has been developed in the last 15 years. However, the ideas developed for AFEM cannot be used directly in boundary element methods, as the underlying operators and norms are non-local.

Chapter 3 deals with meshes and spaces of piecewise polynomials, which are used for the Galerkin discretization of the underlying problems. The existing results on the optimality of the mesh closure in the case of local mesh-refinement are generalized in that previous assumptions on the coarsest mesh are removed. Hence the conditions under which adaptive Finite Element Methods are guaranteed to converge are relaxed. Furthermore, (local) approximation properties in Sobolev space of non-integer order are shown for various quasi-interpolation operators.

In this thesis, the boundary integral equations arising from the Laplace equation are used as model problems. For the 4 classical boundary integral operators associated with the Laplace operator, novel inverse estimates are shown. To that end, results of elliptic regularity theory are exploited. These inverse estimates are the key to the convergence analysis in the chapters 5 and 6.

Chapter 5 is concerned with the convergence and quasi-optimality of adaptive Galerkin methods for equations involving the simple layer potential. We use two different approaches for a-posteriori error estimation. First, we consider $h - h/2$ -based error estimators, where solutions to uniformly refined meshes are used to estimate the error. Second, we deal with weighted residual error estimators, which use the equations' residual to estimate the error. For the Dirichlet problem, we additionally approximate the given boundary data by discrete functions. To that end, we use quasi-interpolation operators that were analyzed in chapter 3. We prove convergence of adaptive algorithms steered by either $h - h/2$ -based error estimators or weighted residual error estimators. To that end, we use the concept of *estimator reduction*: to show convergence of the estimator, it suffices to show that it is a contraction up to a zero sequence. In the case of the weighted residual estimator, we employ the inverse inequalities for boundary integral operators. Furthermore, we prove the quasi-optimality of adaptive algorithms steered by weighted residual error estimators. Quasi-optimality means the following: assume that there is an arbitrary sequence of meshes, starting from a fixed coarse mesh, such that the error estimator converges with a certain rate. Under this assumption, we show that the proposed adaptive algorithm exhibits the same rate for the underlying error estimator. To prove this kind of statement, we use tools from the convergence theory for adaptive Finite Element Methods, which we transfer to BEM.

In chapter 6, we show the convergence and quasi-optimality of adaptive algorithms for equations involving the hypersingular integral operator. We use the same approaches as for the simple layer potential in chapter 5.

Chapter 7 contains several numerical experiments for equations with the weakly singular integral operator. We consider Symm's integral equation and the Dirichlet problem for the Laplace equation. The experiments support the developed analytical results and show the efficiency of the adaptive algorithms.

Danksagung

Ich bedanke mich ganz herzlich bei Ao. Univ. Prof. Dirk Praetorius und Univ. Prof. Jens Markus Melenk. Diese Arbeit wäre nicht entstanden ohne ihre Unterstützung, ihre Motivation und ihre Gabe, die Freude an der Mathematik zu teilen. Im Laufe meines Studiums an der TU Wien habe ich von ihnen außerordentlich viel gelernt und viele Ideen und Anregungen bekommen, und die Kombination dieser Ideen und dieses Wissens ist die Grundlage dieser Arbeit.

Ganz herzlich möchte ich Herrn Prof. Stefan Sauter von der Universität Zürich für die Begutachtung dieser Dissertation danken.

Die Finanzierung durch den FWF im Zuge des Projektes P21732 *Adaptive Boundary Element Method* hat diese Arbeit erst ermöglicht. Ich bin sehr dankbar, dass dadurch die Arbeit an dieser Dissertation im Rahmen einer finanzierten Stelle möglich war.

Die letzten Jahre an der TU Wien waren für mich immer eine sehr gute Zeit, und das verdanke ich vor allem der gesamten Arbeitsgruppe am Institut für Analysis und Scientific Computing. Ganz besonders danke ich meinem Kollegen Michael Feischl für die vielen fachlichen Diskussionen, den regen Gedankenaustausch und den stetigen Zuspruch. Ein ganz besonderer Dank geht auch an Markus Mayr, der die gesamte Netzverwaltung des verwendeten Codes geschrieben hat, und der mir bei meinen vielen Fragen zu C++ immer weitergeholfen hat.

Meiner Familie danke ich von ganzem Herzen für so ungefähr alles. Meinen Eltern Irmgard und Erwin für die Wurzeln und die Flügel, meinem Bruder Stefan dafür, dass er immer für mich da ist. Ich danke Elisabeth dafür, dass sie mich immer auf andere Gedanken gebracht hat und mit mir quer durch die Welt gereist ist. Meinem Bruder Stefan und meinem guten Freund Rene danke ich dafür, dass sie mich in den letzten Monaten bei sich aufgenommen haben. Für die unvergesslichen Tage, Abende und Nächte im Park, im Club und auf Reisen danke ich Matteo, Harald, Ernst und Stefan. Mathematik ist zwar lustig, aber nicht so lustig wie die Zeit mit euch.

Diese Arbeit widme ich der kleinen Leonie und ihren Eltern Julia und Christian. Ihr seid die stärksten Menschen, die ich kenne!

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Konvergenz adaptiver Finite Elemente Methoden	2
1.2	Konvergenz adaptiver Randelementmethoden	3
1.3	Die Modellprobleme	5
1.4	Aufbau der Arbeit und wesentliche Resultate	6
1.5	Weitere Anwendungen der Resultate	16
2	Funktionenräume	19
2.1	Notation	19
2.2	Sobolevräume	19
2.3	Interpolationsräume	21
2.4	Dualräume	23
2.5	Diverses	24
3	Diskrete Räume	27
3.1	Gitter	29
3.2	Newest Vertex Bisection	29
3.3	Polynomräume	45
3.4	Die L_2 -Projektion	45
3.5	Approximationsresultate	51
3.6	Inverse Ungleichungen	55
4	Integraloperatoren	57
4.1	Integraloperatoren für die Laplacegleichung	57
4.2	Inverse Ungleichungen für Integraloperatoren	59
5	h-Adaptivität für die schwach singuläre Integralgleichung	73
5.1	Adaptiver Algorithmus	77
5.2	A-priori Konvergenz des adaptiven Algorithmus	78
5.3	$h - h/2$ -Fehlerschätzer und Konvergenz	79
5.4	Gewichteter residualer Fehlerschätzer und Konvergenz	84
5.5	Gewichteter residualer Fehlerschätzer und Quasioptimalität	90

6	<i>h</i>-Adaptivität für die hypersinguläre Integralgleichung	101
6.1	<i>h</i> – <i>h</i> /2-Fehlerschätzer und Konvergenz	102
6.2	Gewichteter residualer Fehlerschätzer und Konvergenz	105
6.3	Gewichteter residualer Fehlerschätzer und Quasioptimalität	107
7	Numerische Experimente	113
7.1	Implementierung	113
7.1.1	HILBERT3D	114
7.1.2	Quadraturformeln	114
7.1.3	Die Berechnung der Matrixeinträge	114
7.1.4	Matrixkompression	116
7.1.5	Implementierung des Residualschätzers und der Oszillationen	117
7.1.6	Lösen und Vorkonditionieren des linearen Gleichungssystems	118
7.2	Schwach singuläre Integralgleichung	119
7.2.1	L-förmiges Gebiet	119
7.2.2	Fichera’s Würfel	121
7.3	Dirichletproblem	122
7.4	Abschließende Bemerkungen	124
	Lebenslauf	147

Abbildungsverzeichnis

3.1	Newest Vertex Bisection	30
3.2	Zum Beweis von Lemma 3.11 (i).	33
3.3	Zum Beweis von Lemma 3.11 (i).	34
3.4	Zum Beweis von Lemma 3.11 (ii).	36
3.5	Zum Beweis von Lemma 3.11 (ii).	37
3.6	Gegenbeispiel für den Netzabschluss	41
7.1	Zeit zur Berechnung von $\mathbf{V}$ und ρ_ℓ	125
7.2	Grobe Gitter für Experimente zur schwach singulären Integralgleichung	125
7.3	<code>solve-res-weaksing</code> und <code>solve-hh2-weaksing</code> auf dem L-Shape: Konvergenzraten	126
7.4	<code>solve-res-weaksing</code> auf dem L-Shape: erzeugte Gitter	127
7.5	<code>solve-hh2-weaksing</code> auf dem L-Shape: erzeugte Gitter	128
7.6	Vergleich von $h - h/2$ -Schätzer und gewichtetem Residualschätzer auf dem L-Shape	129
7.7	Vergleich der Rechenzeiten für uniformes und adaptives Verfahren auf dem L-Shape	130
7.8	<code>solve-res-weaksing</code> und <code>solve-hh2-weaksing</code> auf dem Fichera Würfel: Konvergenzraten	131
7.9	<code>solve-res-weaksing</code> auf dem Fichera Würfel: erzeugte Gitter	132
7.10	<code>solve-hh2-weaksing</code> auf dem Fichera Würfel: erzeugte Gitter	133
7.11	Grobes Gitter für das Dirichletproblem	134
7.12	<code>solve-res-weaksing</code> und <code>solve-hh2-weaksing</code> auf dem L-Block: Konvergenzraten	135
7.13	<code>solve-separate-res-dirichlet</code> auf dem L-Block: erzeugte Gitter	136
7.14	<code>solve-hh2-dirichlet</code> auf dem L-Block: erzeugte Gitter	137
7.15	Vergleich von $h - h/2$ -Schätzer und gewichtetem Residualschätzer auf dem L-Block	138
7.16	Vergleich der Rechenzeiten für uniformes und adaptives Verfahren auf dem L-Block	139

Kapitel 1

Einführung

Die mathematische Modellierung von physikalischen, ökonomischen, chemischen oder mechanischen Problemen führt oft auf partielle Differentialgleichungen, die im Normalfall numerisch (d.h. am Computer) gelöst werden müssen. Computer können nur endlich viele Zahlen speichern und auch die Zeit für Berechnungen ist endlich, sodass die zugrunde liegenden Gleichungen oder Geometrien diskretisiert werden müssen. Betrachten wir zum Beispiel den simulierten Crashtest eines Autos, bei dem an gewissen Punkten auf der Karosserie die Spannungen und Verformungen berechnet werden, während das Auto in einer Simulation gegen eine Wand fährt. Heuristisch ist klar, dass der Crash den Motorraum stark verformt, während das Heck des Autos eher unbeschadet bleibt. Es scheint also ökologischer und billiger, die vorhandenen Rechenkapazitäten auf jene Stellen zu konzentrieren, an denen sie gebraucht werden, nämlich vorne. Die Entscheidung über die richtige Verteilung der Rechenkapazitäten ist vor allem bei komplizierten Problemen eine Angelegenheit, die genaue Kenntnis des zugrundeliegenden Problems beim Anwender solcher Methoden erfordert. Methoden, die die vorhandenen Ressourcen effizienter nutzen oder automatisch optimal verteilen, sind an dieser Stelle gefragt.

In mathematischer Terminologie handelt es sich bei Methoden, die selbstständig die vorhandenen Kapazitäten verteilen, um sogenannte *adaptive Algorithmen*. Diese Algorithmen entscheiden ohne Zutun des Anwenders, in welche Teile des Problems sie verstärkt Ressourcen investieren müssen, um deren optimale Nutzung zu erreichen. Für die Finite Elemente Methode (FEM) wird Adaptivität schon seit über dreißig Jahren erfolgreich eingesetzt, aber eine mathematische Theorie, welche beweist, dass adaptive FEM die Ressourcen optimal verteilt, wurde erst in den letzten zehn Jahren entwickelt. Die sogenannte Randelementmethode (BEM), eine zur FEM verwandte Methode, ist in diesem Kontext noch nicht analysiert. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Konvergenztheorie für adaptive Randelementmethoden und erreichen dabei (zumindest für die betrachteten Modellprobleme) denselben Stand wie für FEM.

1.1 Konvergenz adaptiver Finite Elemente Methoden

Die Entwicklung der Konvergenztheorie für adaptive Finite Elemente Methoden (AFEM) hat, wie bereits erwähnt, in den letzten zehn Jahren erhebliche Fortschritte gemacht. Wie so oft wurden adaptive Algorithmen zunächst für die Poissongleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (1.1)$$

betrachtet, die uns auch in dieser Arbeit als Modellproblem dienen soll. Ein Durchlauf des adaptiven Algorithmus für diese Gleichung hat typischerweise die Form

$$\boxed{\text{solve}} \rightarrow \boxed{\text{estimate}} \rightarrow \boxed{\text{mark}} \rightarrow \boxed{\text{refine}} \quad (1.2)$$

In einem Durchlauf wird, ausgehend von einem groben Gitter $\mathcal{E}_0$, aus dem aktuellen Gitter $\mathcal{E}_\ell$ ein neues Gitter $\mathcal{E}_{\ell+1}$ in folgender Weise erzeugt: zuerst wird in Modul $\boxed{\text{solve}}$ die Galerkinlösung von (1.1) auf dem Gitter $\mathcal{E}_\ell$ berechnet. Ausgehend von dieser Galerkinlösung werden im Modul $\boxed{\text{estimate}}$ für jedes Element $E \in \mathcal{E}_\ell$ ein Fehlerindikator $\eta_\ell(E)$ bestimmt. Das Modul $\boxed{\text{mark}}$ wählt auf Basis dieser Fehlerindikatoren eine Menge $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{E}_\ell$ aus, die verfeinert werden sollen, und schließlich erzeugt das Modul $\boxed{\text{refine}}$ ein Gitter $\mathcal{E}_{\ell+1}$, indem zumindest alle Elemente aus $\mathcal{M}_\ell$ verfeinert wurden. Iterierte Anwendung liefert dementsprechend eine Folge $\mathcal{E}_\ell$ geschachtelter Gitter sowie die Folgen der zugehörigen Galerkinlösungen U_ℓ und Fehlerschätzer $\eta_\ell = \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \eta_\ell(E)^2 \right)^{1/2}$.

Die erste Arbeit, die sich mit dem Problem der Konvergenz für eine AFEM der Form (1.2) beschäftigt, ist [BV84] aus dem Jahre 1984, in der Konvergenz und Quasioptimalität für eine AFEM für eine eindimensionale Diffusionsgleichung bewiesen wird. In der Arbeit von Willy Dörfler [Dör96] aus dem Jahre 1996 wird zum ersten Mal Konvergenz einer AFEM in 2D bewiesen. Dafür wird eine Markierungsstrategie eingeführt, die fortan eine wichtige Rolle für die Konvergenztheorie spielen wird. Dabei wird im Modul $\boxed{\text{marked}}$ ausgehend von einem Parameter $0 < \theta < 1$ eine Menge $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{E}_\ell$ von Elementen zur Verfeinerung markiert, die

$$\theta \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \eta_\ell(E)^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{M}_\ell} \eta_\ell(E)^2$$

erfüllt. Es wird bewiesen, dass die Folge der Galerkinfehler $\|u - U_\ell\|$, wobei $\|\cdot\| = \|\nabla \cdot\|_{L_2(\Omega)}$ die Energienorm bezeichnet, eine beliebige Genauigkeit erreicht, solange nur das grobe Gitter die rechte Seite f zur Genüge auflöst, das heißt

$$\|h_0 f\|_{L_2(\Omega)} \leq \varepsilon \implies \limsup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \|u - U_\ell\| \lesssim \varepsilon.$$

Hier und in weiterer Folge bedeutet die Notation $A \lesssim B$, dass $A \leq C \cdot B$, wobei $C > 0$ eine generische Konstante ist, die nicht von ℓ abhängt.

Diese Feinheitsannahme wird in den Arbeiten [MNS00, MNS02] durch die Betrachtung von sogenannten *Oszillationstermen* vermieden. Es passiert nämlich unter Umständen, dass $U_{\ell+1} = U_\ell$, sodass der Galerkinfehler in diesen Schritten stagniert. Dies tritt aber nur auf, wenn die Gitter $\mathcal{E}_{\ell+1}$ und $\mathcal{E}_\ell$ das Datum f nicht zur Genüge auflösen. In den Arbeiten [MNS00, MNS02] wird daher der Term

$$\text{osc}_\ell(E) := \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|h_\ell(f - f_\ell)\|_{L_2(E)}^2$$

verwendet, um das Gitter zusätzlich an den Stellen zu verfeinern, an denen osc_ℓ groß ist. Hier ist h_ℓ die lokale Gitterweite, und f_ℓ eine stückweise konstante Approximation an f . Durch die Verwendung dieser Oszillationsterme wird sichergestellt, dass der Galerkinfehler bis auf die Oszillationen kontrahiert. Das heißt, es gilt für ein $0 < \kappa < 1$ die Abschätzung

$$|||u - U_{\ell+1}||| \leq \kappa |||u - U_\ell||| + \text{osc}_\ell.$$

Die erste Arbeit, in der auch Konvergenzraten für AFEM bewiesen werden, ist [BDD04]. In dieser Arbeit wird jedoch ein zusätzlicher Coarsening-Schritt eingebaut, der schließlich in [Ste07] wegdiskutiert wird. Die Arbeit [CKNS08] aus dem Jahre 2008 fasst schließlich alles Wissen zusammen und die darin angegebenen Beweise bilden auch die Grundlage für weitere Betrachtungen und Verallgemeinerungen. Als Quasioptimalität adaptiver FEM versteht man die folgende Forderung, die selbstverständlich auch auf andere Verfahren übertragbar ist. Angenommen, es gibt eine Folge von Gittern $(\tilde{\mathcal{E}}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$, die allesamt Verfeinerungen von $\mathcal{E}_0$ sind, sodass für ein $s > 0$ die algebraische Konvergenz

$$\tilde{\nu}_\ell \lesssim (\#\tilde{\mathcal{E}}_\ell - \#\mathcal{E}_0)^{-s}$$

gilt. Hier bezeichnet $\tilde{\nu}_\ell$ eine interessierende Größe, die zum Gitter $\tilde{\mathcal{E}}_\ell$ gehört. Dann soll der adaptive Algorithmus eine Folge von Gittern $(\mathcal{E}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ erzeugen, die ebenfalls

$$\nu_\ell \lesssim (\#\mathcal{E}_\ell - \#\mathcal{E}_0)^{-s}$$

erfüllt. Die Größe ν_ℓ kann zum Beispiel der Diskretisierungs- oder der Datenfehler, der Fehlerschätzer oder auch eine Summe von interessierenden Größen sein. In aktuellen Beweisen für AFEM wie in [CKNS08] ist $\nu_\ell^2 = |||u - U_\ell|||^2 + \text{osc}_\ell^2$. Quasioptimale Konvergenz eines adaptiven Algorithmus besagt also, dass der Algorithmus mit den ihm zur Verfügung stehenden Informationen und Mitteln eine asymptotisch optimale Netzfolge findet.

1.2 Konvergenz adaptiver Randelementmethoden

Eine der ersten Arbeiten, die sich mit der Konvergenz von ABEM beschäftigt, ist [FLOP10]. Dort werden sogenannte $h - h/2$ -Schätzer η_ℓ in einem adaptiven Algorithmus verwendet, um Kontraktionsgrößen für AFEM und ABEM herzuleiten, wie es auch in [CKNS08] für Residualschätzer in AFEM gemacht wird. Unter einer Kontraktionsgröße versteht man eine Größe Δ_ℓ , die

$$\Delta_{\ell+1} \leq \kappa \Delta_\ell$$

für ein $0 < \kappa < 1$ erfüllt. Typischerweise hat eine solche Größe die Form $\Delta_\ell = |||u - U_\ell|||^2 + \lambda \eta_\ell^2$, wodurch Konvergenz des adaptiven Algorithmus folgt. Ein wesentlicher Teil, der bereits in der letztgenannten Arbeit enthalten ist, wird schließlich in der darauf folgenden Arbeit [AFLP12] abstrahiert, um das Konzept der *Fehlerschätzerreduktion* einzuführen. Es wird gezeigt, dass es für die Konvergenz eines adaptiven Verfahrens hinreichend ist, die Abschätzung

$$\eta_{\ell+1} \leq \kappa \eta_\ell + C |||U_{\ell+1} - U_\ell|||$$

für ein $0 < \kappa < 1$ zu zeigen. Die a-priori Konvergenz der Lösungen U_ℓ , die bereits in [BV84] bewiesen wird, liefert $\|U_{\ell+1} - U_\ell\| \rightarrow 0$ und somit auch $\eta_\ell \rightarrow 0$. Unter der Annahme, dass der Fehlerschätzer η_ℓ zuverlässig ist, d.h. $\|u - U_\ell\| \lesssim \eta_\ell$, folgt Konvergenz $\|u - U_\ell\| \rightarrow 0$.

In der Arbeit [AFG⁺12] wird eine 2D-BEM für ein gemischtes Randwertproblem betrachtet. Um ein Verfahren zu erhalten, welches nur mit diskreten Integraloperatoren (also Matrizen) arbeitet, werden die Randdaten approximiert: das Neumanndatum wird durch die L_2 -Orthogonalprojektion auf den Raum der stückweise Konstanten approximiert, während das Dirichletdatum mit nodaler Interpolation durch eine affine, stetige Funktion angenähert wird. Der adaptive Algorithmus wird durch $h - h/2$ -Schätzer gesteuert, und zusätzlich werden sogenannte Oszillationsterme verwendet, um den Fehler bei der Approximation der Daten adaptiv mitzusteuern. Schliesslich wird die Konvergenz dieses adaptiven Verfahrens bewiesen.

Die Idee hinter den $h - h/2$ -Schätzern, die in den erwähnten Arbeiten verwendet werden, ist es, die Galerkinlösung $\widehat{U}_\ell$ zu einem uniform verfeinerten Gitter $\widehat{\mathcal{E}}_\ell$ zu verwenden, um den Fehler durch die Heuristik $\|u - U_\ell\| \simeq \|\widehat{U}_\ell - U_\ell\|$ zu schätzen. In der FEM sind die zugrundeliegenden Energienormen typischerweise lokal, d.h.

$$\|\cdot\|^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|\cdot\|_E^2.$$

Dies liefert also unmittelbar einen Fehlerschätzer, der in einem adaptiven Algorithmus verwendet werden kann. Für Randelementmethoden sind die Energienormen aber typischerweise nichtlokal, d.h.

$$\|\cdot\|^2 \approx \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|\cdot\|_E^2,$$

und dies gilt nicht einmal bis auf Konstanten, wie Gegenbeispiele aus [Fae93, Satz 24] und [CF01, Theorem 3.1 und 3.2] zeigen. Hier offenbart sich bereits eine der Schwierigkeiten in der Herleitung und der Analyse von adaptiven Algorithmen für Randelementmethoden: die zugrundeliegenden Operatoren und Normen sind nicht lokal, und müssen daher zum Beispiel durch lokal definierte Größen abgeschätzt werden.

Das Manko von $h - h/2$ -Schätzern ist es, dass sie nur unter der sogenannten *Saturationsannahme*

$$\|u - \widehat{U}_\ell\| \leq C_{\text{sat}} \|u - U_\ell\|, \quad C_{\text{sat}} \in (0, 1)$$

zuverlässig sind. Für die FEM wird in der Arbeit [DN02] bewiesen, dass der Galerkinfehler bei der Approximation der Funktion u aus (1.1) durch stückweise quadratische Polynome besser ist als durch stückweise lineare Polynome, das heißt es gibt ein $0 < \kappa < 1$, sodass

$$\|u - \widehat{U}_\ell\| \leq \kappa \|u - U_\ell\| + \left(\sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \|h(f - f_z)\|_{L_2(w_z)}^2 \right)^{1/2} \quad (1.3)$$

wobei $\widehat{U}_\ell \in \mathcal{S}_0^2(\mathcal{E}_\ell)$, $U_\ell \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{E}_\ell)$ die FEM-Lösungen von u sind, $\mathcal{N}_\ell$ die inneren Knoten des Gitters, w_z der zum Knoten z gehörige Knotenpatch und f_z eine konstante Approximation von f auf w_z . In der Arbeit [FLOP10] wird (1.3) für $\widehat{U}_\ell \in \mathcal{S}^1(\widehat{\mathcal{E}}_\ell)$ mit einem *bisec5*-verfeinertem Gitter $\widehat{\mathcal{E}}_\ell$ bewiesen.

Für BEM ist die Saturationsannahme, auch in der Form (1.3), offen. In der Arbeit [CP12] wird daher in den adaptiven Algorithmus ein numerischer Test der Saturationsannahme eingebaut, um sie gegebenenfalls zu erzwingen. Dieser erweiterte Algorithmus wird dann durch $h - h/2$ -Schätzer gesteuert, und seine

Konvergenz wird gezeigt. Die Optimalität eines adaptiven Algorithmus basierend auf Wavelets wird in der Arbeit [DHS07] gezeigt. Es wird bewiesen, dass der Algorithmus eine beliebige Genauigkeit erreichen kann, wobei die Anzahl der verwendeten Freiheitsgrade proportional zu der benötigten Anzahl eines Algorithmus ist, der volle Information über die Lösung zur Verfügung hat.

Damit ist die vorhandene, veröffentlichte Literatur zur Konvergenz adaptiver Randelementmethoden auch schon erschöpft. Im Zuge der Promotion sind 6 Arbeiten [AFF⁺12a, AFF⁺12b, FKMP11, FFKP12, KPP12, KOP12] entstanden, die nun in der vorliegenden Dissertation in einen gemeinsamen Rahmen eingeordnet werden und vollständig ausgearbeitet sind. Ferner enthalten der Abschnitt 4.2 und das Kapitel 6 auch originäre Resultate, die bisher noch nicht Teil einer wissenschaftlichen Arbeit sind. Parallel zum Entstehen dieser Arbeit wurde der Preprint [Gan11] veröffentlicht. Darin beweist der Autor die Optimalität adaptiver Randelementmethoden für Algorithmen mit gewichteten Residualschätzern. Die Resultate der Arbeit [Gan11] benötigen einen $C^{1,1}$ -Rand als zugrundeliegende Geometrie, wodurch polygonale oder polyhedrale Gebiete ausgeschlossen sind. Weiters werden nur Galerkinverfahren niedrigster Ordnung betrachtet. Diese Annahmen werden wir nicht treffen, das heißt, polygonale und polyhedrale Gebiete sind durch die Analysis dieser Arbeit abgedeckt, als auch die Anwendung von Galerkinverfahren mit Ansatzfunktionen höherer Ordnung.

1.3 Die Modellprobleme

In dieser Arbeit betrachten wir zum Dirichlet- und Neumannproblem der Laplacegleichung äquivalente Randintegralgleichungen. Es bezeichne $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ einen Teil des Randes einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Zum einen betrachten wir die sogenannte *schwach singuläre Integralgleichung*: finde $\phi \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$, sodass

$$V\phi = f \quad (1.4)$$

für ein gegebenes $f \in H^{1/2}(\Gamma)$. Für $\Gamma = \partial\Omega$ und $f = (1/2 + K)u_D$ ist diese Gleichung äquivalent zum Dirichletproblem der Laplacegleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= u_D && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Es ist dann $\phi = \partial_n u$ die Normalenableitung der Lösung u . Die zweite Gleichung, die wir untersuchen werden, ist die sogenannte *hypersinguläre Integralgleichung*: finde $v \in \tilde{H}_\star^{1/2}(\Gamma)$, sodass

$$Wv = g \quad (1.5)$$

für ein gegebenes $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Für $\Gamma = \partial\Omega$ und $g = (1/2 - K')u_N$ ist diese Gleichung äquivalent zum Neumannproblem der Laplacegleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \\ \partial_n u &= u_N && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Es ist dann $v = u|_\Gamma$ die Spur der (bis auf additive Konstante eindeutigen) Lösung u . Die Operatoren V , K , K' und W sind Randintegraloperatoren. Exemplarisch erwähnen wir hier die Definition des Einfach-

schichtpotentials V , das für eine Funktion $\phi \in L_1(\Gamma)$ gegeben ist als

$$V\phi(\mathbf{x}) := \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\Gamma(\mathbf{y}).$$

Die Definitionen und Eigenschaften der Randintegraloperatoren finden sich in Abschnitt 4.1.

1.4 Aufbau der Arbeit und wesentliche Resultate

Kapitel 2

Zunächst klären wir die nötige Notation und führen die Sobolevräume ein, im Rahmen derer die von uns betrachteten Gleichungen (1.4) und (1.5) wohlgestellt sind. Diese Funktionenräume können äquivalent auf verschiedene Arten definiert werden. Da wir jede dieser Arten benutzen werden, geben wir Resultate zur Äquivalenz der verschiedenen Definitionen an.

Kapitel 3

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den diskreten Räumen, die wir in den folgenden Kapiteln verwenden werden, um die betrachteten Gleichungen numerisch zu lösen. Da wir uns mit adaptiven Algorithmen beschäftigen, verwenden wir einen Großteil dieses Kapitels darauf, die im Weiteren verwendete lokale Netzverfeinerungsstrategie namens *Newest Vertex Bisection* zu definieren und ihre Eigenschaften zu zeigen. Am wichtigsten ist dabei zweifellos die Optimalitätsabschätzung für den Netzabschluss aus Lemma 3.14, die ein entsprechendes Resultat aus [BDD04] und [Ste08b] verallgemeinert. Dabei stellt sich die Frage, ob der Netzabschluss, der zusätzlich zu den markierten Elementen $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{E}_\ell$ weitere Elemente verfeinert, um hängende Knoten zu vermeiden, kontrollierbar ist. Die Abschätzung $\#\mathcal{M}_\ell \leq \#\mathcal{E}_{\ell+1} - \#\mathcal{E}_\ell$ gilt trivialerweise, aber die umgekehrte Abschätzung $\#\mathcal{E}_{\ell+1} - \#\mathcal{E}_\ell \leq C\#\mathcal{M}_\ell$ kann nicht mit einer von ℓ unabhängigen Konstanten $C > 0$ gelten, wie ein Gegenbeispiel in [NV11] zeigt, welches wir in Abbildung 3.6 in Abschnitt 3.2 angeben. Es stellt sich heraus, dass die gesamte Historie der getätigten Markierungen miteinbezogen werden muss, das heißt

$$\#\mathcal{E}_\ell - \#\mathcal{E}_0 \leq C_{\text{nvb}} \sum_{j=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_j. \quad (1.6)$$

Die Konstante C_{nvb} hängt in der Arbeit [BDD04] zunächst nicht von $\mathcal{E}_0$ oder anderen involvierten Größen ab, dafür ist jedoch eine Bedingung an das gröbste Gitter $\mathcal{E}_0$ sicherzustellen. Für die Anwendung der *Newest Vertex Bisection* ist auf dem größten Gitter $\mathcal{E}_0$ für jedes Element $E \in \mathcal{E}_0$ eine sogenannte *Referenzkante* zu wählen. Die Bedingung, unter der in den Arbeiten [BDD04, Ste08b] die Abschätzung (1.6) gezeigt wird, fordert eine spezielle Verteilung dieser Kanten. Da es aber keine effizienten Algorithmen gibt, um diese Bedingung sicherzustellen, werden wir zeigen, dass (1.6) auch ohne diese Bedingung gilt. Wir erhalten dann in C_{nvb} eine Abhängigkeit vom größten Gitter $\mathcal{E}_0$. Zusammengefasst beweisen wir das folgende Resultat, welches in Lemma 3.14 formuliert ist.

Theorem. *Unabhängig von der Wahl der Referenzkanten auf $\mathcal{E}_0$ gilt die Abschätzung (1.6). Die Konstante C_{nvb} hängt nur vom Anfangsgitter $\mathcal{E}_0$ ab.* ■

Danach definieren wir Räume von stückweisen Polynomen, die wir verwenden werden, um die Lösungen ϕ beziehungsweise v der Modellprobleme zu approximieren. Wir verwenden die unstetigen, stückweise polynomiellen Funktionen $\mathcal{P}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell)$ und die global stetigen Varianten $\mathcal{S}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell)$. Dabei ist $\mathbf{p}_\ell$ eine beliebige Polynomgradverteilung auf dem Gitter $\mathcal{E}_\ell$.

In Abschnitt 3.4 beschäftigen wir uns mit einer Frage, die uns im Rahmen der Konvergenzanalyse für das Dirichletproblem mit Datenapproximation begegnen wird. Dort benötigen wir die H^1 -Stabilität der L_2 -Projektion Π_ℓ auf die stückweise affinen, global stetigen Funktionen $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$, das heißt

$$\|\nabla_\Gamma \Pi_\ell u\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_{\text{stab}} \|\nabla_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)} \quad \text{für alle } u \in H^1(\Gamma).$$

Die vorhandene Literatur [CT87, BX91, BPS02, Ste01, Car02, Car04] zeigt diese Stabilität unter Annahmen an die Gitter beziehungsweise die Netzverfeinerungsstrategie, siehe dazu auch die kurze Diskussion in der Einleitung zu Kapitel 3, die wir in unserer Arbeit nicht voraussetzen wollen. Wir werden die Resultate, die wir für den Beweis des Netzabschlusses erhalten haben, mit Ideen aus der Arbeit [Car04] kombinieren und beweisen so das folgende Resultat, welches in Theorem 3.20 formuliert und bewiesen wird.

Theorem. *Es sei $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ ein Gitter mit einer beliebigen Referenzkantenverteilung und $\mathcal{E}_\ell = \text{refine}(\mathcal{E}_0)$ ein Gitter, welches durch Newest Vertex Bisection aus $\mathcal{E}_0$ erhalten wird. Dann gilt für die L_2 -Projektion Π_ℓ auf $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ die Abschätzung*

$$\|\nabla_\Gamma \Pi_\ell u\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_{\text{stab}} \|\nabla_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)} \quad \text{für alle } u \in H^1(\Gamma).$$

Die Konstante $C_{\text{stab}} > 0$ hängt nur von $\mathcal{E}_0$ ab. ■

Des weiteren zeigen wir Approximationsaussagen für Quasi-Interpolationsoperatoren in Sobolevräumen gebrochener Ordnung. Typischerweise haben Quasi-Interpolationsoperatoren J_ℓ , die in Räume stückweiser Polynome auf einem Gitter $\mathcal{S}^p(\mathcal{E}_\ell)$ abbilden, Approximationseigenschaften der Form

$$\|u - J_\ell u\|_{L_2(\Gamma)} \lesssim \|h_\ell \nabla_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)} \quad \text{und} \quad \|\nabla_\Gamma (u - J_\ell u)\|_{L_2(\Gamma)} \lesssim \|\nabla_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)},$$

wobei h_ℓ die lokale Netzweite und ∇_Γ den Oberflächengradienten bezeichnet. Für uniforme Gitter kann aus diesen Abschätzungen sofort eine Aussage in Sobolevräumen gebrochener Ordnung gewonnen werden, das heißt

$$\|u - J_\ell u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \lesssim h^{1/2} \|u\|_{H^1(\Gamma)}.$$

Da, wie bereits gesagt, die natürlichen Normen in Sobolevräumen gebrochener Ordnung nicht summierbar sind, ist es technisch aufwendig, solche Abschätzungen in gebrochenen Normen zu erhalten. Wir verwenden Resultate der Interpolationstheorie, genauer gesagt Resultate zur Interpolation zwischen gewichteten L_2 -Räumen, die wir auf gewichtete Sobolevräume verallgemeinern, um das folgende Resultat zu zeigen, welches in Theorem 3.26 formuliert ist.

Theorem. *Für $0 \leq s \leq 1$ und eine beliebige, $H^s(\Gamma)$ -stabile Projektion $\mathbb{P}_\ell$ auf $\mathcal{S}^p(\mathcal{E}_\ell)$ gilt*

$$\|(1 - \mathbb{P}_\ell)g\|_{H^s(\Gamma)} \leq C_{\text{apx}} \min \{ \|h_\ell^{1-s} \nabla_\Gamma g\|_{L_2(\Gamma)}, \|h_\ell^{1-s} \nabla_\Gamma (1 - \mathbb{P}_\ell)g\|_{L_2(\Gamma)} \}$$

für $g \in H^1(\Gamma)$ beliebig. Die Konstante $C_{\text{apx}} > 0$ hängt nur ab von $0 \leq s \leq 1$, von der Formregularitätskonstante des Gitters $\mathcal{E}_\ell$, von der Operatornorm von $\mathbb{P}_\ell$ und vom Rand Γ . ■

Schliesslich führen wir in Abschnitt 3.6 inverse Ungleichungen für die definierten diskreten Räume $\mathcal{P}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell)$ und $\mathcal{S}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell)$ an.

Kapitel 4

In diesem Kapitel definieren wir zunächst die Randintegraloperatoren V , K , K' und W , die bereits in Abschnitt 1.3 vorgekommen sind. Wir zitieren Stabilitäts- und Elliptizitätsaussagen, die für die eindeutige Lösbarkeit unserer Modellprobleme vonnöten sind. In Abschnitt 4.2 wenden wir uns schließlich dem wichtigsten Teil dieser Arbeit zu, den inversen Ungleichungen für die Randintegraloperatoren. Exemplarisch sei hier die inverse Ungleichung für das Einfachschichtpotential V in ihrer einfachsten Form angeführt, die neben den Ungleichungen für die übrigen Integraloperatoren das technische Herzstück dieses Kapitels in Theorem 4.4 bildet.

Theorem. *Es sei Γ der Rand eines beschränkten, polyhedralen Lipschitzgebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$ und $\mathcal{E}_\ell$ ein lokal quasi-uniformes Gitter auf Γ . Dann gilt*

$$\|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma V \Phi_\ell\|_{L_2(\Gamma)} \leq C \|\Phi_\ell\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } \Phi_\ell \in \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell),$$

wobei die Konstante $C > 0$ nur von Γ und der Formregularität von $\mathcal{E}_\ell$ abhängt. ■

Die typische Beweistechnik für inverse Ungleichungen besteht darin, Normäquivalenzen der Form

$$\|\nabla U_\ell\|_{L_2(\hat{E})} \leq C \|U_\ell\|_{L_2(\hat{E})} \quad \text{für alle } U_\ell \in \mathcal{P}^1(\hat{E}) \quad (1.7)$$

auf einem Referenzelement $\hat{E}$ auszunutzen und ein Skalierungsargument anzuwenden. Die Konstante $C > 0$ in (1.7) ist aufgrund der fixen Dimension des Raumes $\mathcal{P}^1(\hat{E})$ beschränkt. Das Problem bei den inversen Ungleichungen für Randintegraloperatoren ist jedoch, dass die Operatoren, in diesem Fall das Einfachschichtpotential V , nicht lokal sind, und daher die Konstante C in Abschätzungen der Form (1.7) von der Dimension des Raumes $V(\mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell))$ abhängt, die aber nicht fixiert werden darf. Um dieses Problem zu umgehen, teilen wir auf einem Element $E \in \mathcal{E}_\ell$ das Potential im wesentlichen gemäß

$$V(\Phi_\ell) = V(\Phi_\ell|_E) + V(\Phi_\ell|_{\Gamma \setminus E})$$

in einen *Nahfeldanteil* $V(\Phi_\ell|_E)$ und einen *Fernfeldanteil* $V(\Phi_\ell|_{\Gamma \setminus E})$ auf. Die Nahfeldanteile können dann durch die klassischen Beweistechniken für inverse Ungleichungen behandelt werden, da die Dimensionen der zugrundeliegenden Räume fixiert werden können. Für die Fernfeldanteile werden wir auf Resultate aus der Regularitätstheorie zurückgreifen. Die Regularität der Lösung u einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung $Lu = 0$ kann im Inneren des zugrundeliegenden Gebietes Ω durch eine inverse Ungleichung vom Typ

$$\|D^2 u\|_{L_2(B_r)} \lesssim h^{-1} \|\nabla u\|_{L_2(B_{r+h})}$$

gezeigt werden. Hier sind $B_r \subset \Omega$ und $B_{r+h} \subset \Omega$ Kugeln vom Radius r beziehungsweise $r+h$ mit dem gleichen Mittelpunkt. Eine solche Abschätzung ist also eine inverse Ungleichung, da die zweiten Ableitungen durch den Gradienten abgeschätzt werden. Das Fernfeld des Einfachschichtpotentials erfüllt bekanntermaßen eine Transmissionsgleichung in dem Sinne, dass im Inneren Ω und im Äußeren $\Omega^{\text{ext}} := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ die Laplacegleichung erfüllt wird, der Sprung verschwindet und für die Normalenableitung $\gamma_1^{\text{int}} V(\Phi_\ell|_{\Gamma \setminus E}) = -\Phi_\ell|_{\Gamma \setminus E}$ gilt. Auf E gilt aber $\Phi_\ell|_{\Gamma \setminus E} = 0$, und wir können schließen, dass der Fernfeldanteil lokal um das Element E harmonisch ist. Daher können wir dort den Oberflächengradient $\nabla_\Gamma V(\Phi_\ell|_{\Gamma \setminus E})$ mit Hilfe einer Spurgleichung durch die zweite Ableitung auf Kugeln, deren Mittelpunkte auf E liegen,

abschätzen. Das obige Resultat aus der Regularitätstheorie wird dann als inverse Ungleichung dienen, mit der wir den Fernfeldanteil verarbeiten können. Dies ist nur ein grober Umriss des Beweises, beschreibt aber die wesentliche Idee. Wir werden also in Abschnitt 4.2 inverse Ungleichungen für alle beteiligten Integraloperatoren nachweisen, die explizit in der lokalen Gitterweite h_ℓ und dem lokalen Polynomgrad $\mathbf{p}_\ell$ formuliert sind.

Kapitel 5 und Kapitel 6

In diesen beiden Kapiteln beschäftigen wir uns mit der Konvergenztheorie für die h -Version der Randelementmethode für die Gleichungen (1.4) und (1.5). In Kapitel 5 liegt der Fokus auf Gleichungen vom Typ (1.4), die schwach singuläre Integraloperatoren enthalten. Kapitel 6 erweitert die erhaltenen Resultate dann auf Randintegralgleichungen vom Typ (1.5), die hypersinguläre Operatoren enthalten. Exemplarisch erklären wir hier nur Kapitel 5, in welchem wir zu Beginn die zu diskretisierenden Gleichungen einführen. Ausgehend vom Modellproblem (1.4) werden dies die schwach singuläre Gleichung

$$V\phi = f$$

und das Dirichletproblem

$$V\phi = (1/2 + K)f$$

sein. Ab nun nehmen wir an, dass die lokalen Polynomgrade fixiert sind, das heißt wir fordern $\mathbf{p}_\ell \equiv p$ für ein fixes $p \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren drei Galerkinverfahren für die Approximation von ϕ durch stückweise Polynome $\mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$ auf einem Gitter $\mathcal{E}_\ell$, deren Lösungen mit Φ_ℓ bezeichnet werden:

- Das Galerkinverfahren für die schwach singuläre Integralgleichung: finde $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$, sodass

$$\langle V\Phi_\ell, \Psi_\ell \rangle = \langle f, \Psi_\ell \rangle \quad \text{für alle } \Psi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell), \quad (1.8)$$

- das Galerkinverfahren für das Dirichletproblem: finde $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$, sodass

$$\langle V\Phi_\ell, \Psi_\ell \rangle = \langle (1/2 + K)f, \Psi_\ell \rangle \quad \text{für alle } \Psi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell), \quad (1.9)$$

- und das Galerkinverfahren für das Dirichletproblem mit Datenapproximation: finde $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$, sodass

$$\langle V\Phi_\ell, \Psi_\ell \rangle = \langle (1/2 + K)\mathbb{P}_\ell f, \Psi_\ell \rangle \quad \text{für alle } \Psi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell). \quad (1.10)$$

Beim Galerkinverfahren für das Dirichletproblem mit Datenapproximation bezeichnet $\mathbb{P}_\ell f$ eine diskrete Approximation an f . Die Idee hinter diesem Verfahren ist es, dass nur diskrete Integraloperatoren betrachtet werden müssen.

Die adaptiven Algorithmen, die wir analysieren werden, sind von der Form

$$\boxed{\text{solve}} \rightarrow \boxed{\text{estimate}} \rightarrow \boxed{\text{mark}} \rightarrow \boxed{\text{refine}}$$

Das Modul $\boxed{\text{solve}}$ beinhaltet die Berechnung der Galerkinlösung Φ_ℓ der diskretisierten Gleichung und ist daher für die theoretische Konvergenzanalyse nicht weiter von Interesse. Das Modul $\boxed{\text{refine}}$ beinhaltet die

Verfeinerung durch Newest Vertex Bisection, die bereits weiter oben erwähnt wurde. Wichtig ist zunächst das Modul **estimate**, dass die Berechnung der a-posteriori Fehlerschätzer τ_ℓ auf Grundlage von bekannten Größen beinhaltet. Dabei heißt ein Fehlerschätzer τ_ℓ *zuverlässig*, wenn er eine obere Schranke für den Galerkinfehler ist, also

$$|||\phi - \Phi_\ell||| \lesssim \tau_\ell$$

erfüllt. Hier ist $|||\cdot||| \simeq \|\cdot\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)}$ die zugrundeliegende Energienorm im Falle des Einfachschichtpotentials. Wir formulieren zwei adaptive Algorithmen, die sich durch das Modul **mark** unterscheiden, welches die Markierungsstrategie enthält. Dabei verwenden wir die zwei folgenden Varianten:

1. Die kombinierte Variante: Wähle eine Menge $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{E}_\ell$ kleinster Kardinalität, die

$$\theta \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \eta_\ell(E)^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{M}_\ell} \eta_\ell(E)^2 \quad (1.11)$$

erfüllt.

2. Die separierte Variante: Wir nehmen an, der Fehlerschätzer ist vom Typ $\tau_\ell^2 = \tau_{1,\ell}^2 + \tau_{2,\ell}^2$. Gilt $\tau_{2,\ell}^2 \leq \vartheta \tau_{1,\ell}^2$, dann wähle eine kleinste Menge $\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{E}_\ell$ mit

$$\theta_1 \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \tau_{1,\ell}(E)^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{M}_\ell} \tau_{1,\ell}(E)^2. \quad (1.12)$$

Gilt $\tau_{2,\ell}^2 > \vartheta \tau_{1,\ell}^2$, dann wähle die kleinste Menge $\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{E}_\ell$ mit

$$\theta_2 \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \tau_{2,\ell}(E)^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{M}_\ell} \tau_{2,\ell}(E)^2. \quad (1.13)$$

In der separierten Variante wird üblicherweise $\tau_{1,\ell}$ den Galerkinfehler schätzen, während $\tau_{2,\ell}$ die Datenoszillationen schätzt, und wir werden diese Variante verwenden, wenn wir Optimalität eines Algorithmus mit Datenapproximation zeigen wollen.

Wie bereits erwähnt, wird für einen Konvergenzbeweis die a-priori Konvergenz der Lösungen Φ_ℓ benötigt, womit wir uns in Abschnitt 5.2 beschäftigen. Die Frage, die sich dabei stellt, ist, ob die Galerkinlösungen $\Phi_\ell \in \mathcal{P}(\mathcal{E}_\ell)$ der Gleichungen (1.8)–(1.10) für eine geschachtelte Folge von Gittern $\mathcal{E}_{\ell+1} \supseteq \mathcal{E}_\ell$ a-priori gegen eine Funktion ϕ_∞ konvergieren, das heißt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} |||\phi_\infty - \Phi_\ell||| = 0. \quad (1.14)$$

Ein Resultat aus der Arbeit [BV84], welches wir in Lemma 5.9 zitieren, stellt die a-priori Konvergenz (1.14) sicher, sofern nur Φ_ℓ die Orthogonalprojektion von ϕ ist.

- Für adaptive Galerkinverfahren für die schwach singuläre Gleichung (1.8) oder das Dirichletproblem (1.9) können wir daher das existierende Resultat aus [BV84] nutzen, um die a-priori Konvergenz (1.14) zu erhalten.

- Bei adaptiven Galerkinverfahren für das Dirichletproblem mit Datenapproximation (1.10) ist jedoch Φ_ℓ die Bestapproximation der Lösung ϕ_ℓ von

$$V\phi_\ell = (1/2 + K)\mathbb{P}_\ell f.$$

Daher werden wir in Lemma 5.10 zunächst auf die a-priori Konvergenz von $\mathbb{P}_\ell f$ eingehen. Da das Datum f im Raum $H^{1/2}(\Gamma)$ gemessen wird, werden wir an dieser Stelle die H^1 -Stabilität der L_2 -Projektion auf $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ verwenden, die wir in Kapitel 3 bewiesen haben.

Der darauf folgende **Abschnitt 5.3** ist der Konvergenz adaptiver Algorithmen mit zugrundeliegenden $h - h/2$ -Schätzern gewidmet. Ist $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$ die Galerkinlösung einer der Gleichungen (1.8)–(1.10), und $\widehat{\Phi}_\ell \in \mathcal{P}^p(\widehat{\mathcal{E}}_\ell)$ die Galerkinlösung derselben Gleichung auf dem uniform verfeinerten Gitter $\widehat{\mathcal{E}}_\ell$, so kann der Galerkinfehler durch die Heuristik $\|\phi - \Phi_\ell\| \approx \|\widehat{\Phi}_\ell - \Phi_\ell\|$ geschätzt werden. Da diese Fehlerschätzer nichtlokal sind, werden in der Arbeit [FLP08] lokalisierte Varianten eingeführt. Wir geben hier exemplarisch den lokalisierten Schätzer

$$\tilde{\mu}_\ell := \|h_\ell^{1/2}(1 - \pi_\ell^p)\widehat{\Phi}_\ell\|_{L_2(\Gamma)} \quad (1.15)$$

an, wobei π_ℓ^p die L_2 -orthogonale Projektion auf den Raum $\mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$ ist. In Lemma 5.12 geben wir 4 Varianten des $h - h/2$ -Schätzers für die schwach singuläre Integralgleichung an, die allesamt bereits der letztgenannten Arbeit analysiert wurden, wo ihre Effizienz und Zuverlässigkeit unter der Saturationsannahme bewiesen wird. Im Falle des Dirichletproblems mit Datenapproximation werden wir in Lemma 5.14 zeigen, dass unter der Annahme $f \in H^1(\Gamma)$ die Summe aus Galerkinfehlerschätzer und Datenoszillationen

$$\text{osc}_\ell := \|h_\ell^{1/2}\nabla_\Gamma(1 - \mathbb{P}_\ell)f\|_{L_2(\Gamma)}$$

ebenfalls effizient und unter der Saturationsannahme zuverlässig ist. Die Konvergenz des adaptiven Algorithmus für die schwach singuläre Gleichung wurde bereits in [AFLP12] gezeigt, wir beweisen zusätzlich die Konvergenz des adaptiven Algorithmus für das Dirichletproblem mit Datenapproximation in Lemma 5.18. Bezüglich der optimalen Konvergenz von $h - h/2$ -artigen Algorithmen gibt es auch für FEM keine Resultate, weshalb Resultate für BEM zur Zeit noch nicht betrachtet werden. Davon abgesehen sind die $h - h/2$ Schätzer, wie bereits erwähnt, nur unter der Saturationsannahme zuverlässig, daher sind die Resultate zur Konvergenz gewissermaßen unbefriedigend.

In **Abschnitt 5.4** betrachten wir daher eine andere Art, den Galerkinfehler zu schätzen. In den Arbeiten [CMS01, CMPS04] werden sogenannte gewichtete Residualschätzer ρ_ℓ vorgestellt, die das berechenbare Residuum in einer lokalisierten Norm messen. Diese Fehlerschätzer sind immer zuverlässig, und wir definieren drei adaptive Algorithmen, die durch diese Schätzer gesteuert werden:

- **solve-res-weaksing** zur Lösung der schwach singulären Gleichung mit Residualschätzer. Dabei ist $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$ die Galerkinlösung (1.8), die Fehlerindikatoren sind von der Form

$$\rho_\ell(E) := \|h_\ell^{1/2}\nabla_\Gamma(V\Phi_\ell - f)\|_{L_2(E)}, \quad (1.16)$$

und wir verwenden die kombinierte Markierungsstrategie.

- **solve-res-dirichlet** zur Lösung des Dirichletproblems mit Datenapproximation mit Residualschätzer und Dörfler-Markierung. Dabei ist $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$ die Galerkinlösung (1.9), die Fehlerindikatoren sind von der Form

$$\rho_\ell(E) := \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma (V\Phi_\ell - (1/2 + K)f)\|_{L_2(E)}, \quad (1.17)$$

und wir verwenden die kombinierte Markierungsstrategie.

- **solve-separate-res-dirichlet** zur Lösung des Dirichletproblems mit Datenapproximation mit Residualschätzer und separater Markierung. Dabei ist $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$ die Galerkinlösung (1.10), die Fehlerindikatoren sind von der Form

$$\tau_\ell^2 = \tau_{1,\ell}^2 + \tau_{2,\ell}^2 := \rho_\ell^2 + \text{osc}_\ell^2, \quad (1.18)$$

wobei

$$\rho_\ell(E) := \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma (V\Phi_\ell - (1/2 + K)\mathbb{P}_\ell f)\|_{L_2(E)} \quad (1.19)$$

und

$$\text{osc}_\ell := \|h_\ell^{1/2} (1 - \pi_\ell^p) \nabla_\Gamma f\|_{L_2(\Gamma)}, \quad (1.20)$$

wobei π_ℓ^p die L_2 -Projektion auf den Raum $\mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$ bezeichnet. Diese neue Definition der Datenoszillation erlaubt, lokale Orthogonalitätseigenschaften auszunutzen, die beim Beweis der Optimalität nötig sein werden. Wir zeigen in Lemma 5.20, dass der Fehlerschätzer τ_ℓ eine zuverlässige obere Schranke für den Galerkinfehler $\|\phi - \Phi_\ell\|$ ist.

Die Konvergenz dieser drei Algorithmen zeigen wir mit Hilfe des Schätzerreduktionsprinzips, welches abstrakt in [AFLP12] eingeführt wurde, um die Konvergenz adaptiver Algorithmen für FEM und BEM zu beweisen. Dieses Prinzip besagt, dass ein Fehlerschätzer gegen 0 konvergiert, sofern er bis auf eine Nullfolge eine Kontraktion ist. Für zuverlässige Fehlerschätzer, die dieses Prinzip erfüllen, folgt unmittelbar die Konvergenz des adaptiven Verfahrens. In unserem Fall ist die Fehlerschätzerreduktion jeweils von der folgenden Form:

- In Lemma 5.24 zeigen wir folgendes: der Algorithmus **solve-res-weaksing** erfüllt mit einem $0 < \hat{\kappa} < 1$

$$\rho_{\ell+1}^2 \leq \hat{\kappa} \rho_\ell^2 + C_{\text{red}} \|\Phi_{\ell+1} - \Phi_\ell\|^2. \quad (1.21)$$

- In den Lemmata 5.25 und 5.26 zeigen wir folgendes: die Algorithmen **solve-res-dirichlet** und **solve-separate-res-dirichlet** erfüllen mit einem $0 < \hat{\kappa} < 1$

$$\tau_{\ell+1}^2 \leq \hat{\kappa} \tau_\ell^2 + C_{\text{red}} \left(\|(\mathbb{P}_{\ell+1} - \mathbb{P}_\ell)f\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|\Phi_{\ell+1} - \Phi_\ell\|^2 \right). \quad (1.22)$$

An dieser Stelle kommen die inversen Ungleichungen für die Integraloperatoren zum Einsatz, denn die zusätzlichen Terme in der Schätzerreduktion sind zunächst von der Form

$$\|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla V(\Phi_{\ell+1} - \Phi_\ell)\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Hier wird also die Differenz zweier Galerkinlösungen in einer zu starken Norm gemessen. Terme dieser Arte schätzen wir mit Hilfe der inversen Ungleichungen für Integraloperatoren durch die Energienorm ab, so wie es die a-priori Konvergenz verlangt.

In **Abschnitt 5.5** beschäftigen wir uns schließlich mit der Quasioptimalität der Algorithmen **solve-res-weaksing** und **solve-separate-res-dirichlet**. Die Quasioptimalität für den Algorithmus **solve-res-dirichlet** werden wir nicht betrachten. Es sei aber erwähnt, dass ein Optimalitätsresultat für diesen Algorithmus möglich ist, wie in [FFKP12] vorgeführt wird, wenn $\mathbb{P}_\ell$ als Scott-Zhang Projektion gewählt wird.

- In Theorem 5.28 konstruieren wir zuerst eine Kontraktionsgröße für den Algorithmus **solve-res-weaksing** von der Form

$$\Delta_\ell := |||\phi - \Phi_\ell|||^2 + \lambda \rho_\ell^2 \simeq \rho_\ell^2.$$

Dabei nützen wir die Schätzerreduktion (1.21) für diesen Algorithmus. Aufgrund des Terms $|||\Phi_{\ell+1} - \Phi_\ell|||^2$ in (1.21) ist der Fehlerschätzer keine Kontraktionsgröße. Betrachten wir aber eine Summe von Fehlerschätzer und Galerkinfehler, so können wir Orthogonalitäten ausnutzen, um zu zeigen, dass diese Summe kontrahierend ist.

- Für den Algorithmus **solve-separate-dirichlet** enthält die Schätzerreduktion (1.22) den zusätzlichen Term $\|(\mathbb{P}_{\ell+1} - \mathbb{P}_\ell)f\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2$. Im Allgemeinen besitzt der Operator $\mathbb{P}_\ell$ in diesem Fall keine Orthogonalitätseigenschaften, weswegen wir daraus auch keine Kontraktionsgröße gewinnen können. Wir gehen daher anders vor: wir bezeichnen die Galerkinlösung von (1.9) zu den exakten Daten mit $\Phi_\ell^{\text{ex}} \in \mathcal{P}(\mathcal{E}_\ell)$ und betrachten zusätzlich den zugehörigen Fehlerschätzer $\rho_{\text{ex},\ell}$, das heißt

$$\rho_{\text{ex},\ell} := \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma (V \Phi_\ell^{\text{ex}} - (1/2 + K)f)\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Wir bemerken, dass dieser Schätzer nur theoretisch von Interesse ist, Φ_ℓ^{ex} oder $\rho_{\text{ex},\ell}$ müssen an keiner Stelle des Algorithmus berechnet werden. Wir zeigen in Lemma 5.20, dass die Galerkinfehler $|||\phi - \Phi_\ell|||$ und $|||\phi - \Phi_\ell^{\text{ex}}|||$ bis auf Oszillationen äquivalent sind und dass die Fehlerschätzer ρ_ℓ und $\rho_{\text{ex},\ell}$ sogar *lokal* äquivalent bis auf *globale* Oszillationsterme sind. Daraus schließen wir in Lemma 5.27, dass die separate Markierungsstrategie für $\tau_\ell^2 = \rho_\ell^2 + \text{osc}_\ell^2$ die Dörfler-Markierung für $\tau_{\text{ex},\ell}^2 = \rho_{\text{ex},\ell}^2 + \text{osc}_\ell^2$ impliziert. Dies erlaubt uns wiederum, die Schätzerreduktion für $\tau_{\text{ex},\ell}$ von der Form

$$\tau_{\text{ex},\ell+1}^2 \leq \hat{\kappa} \tau_{\text{ex},\ell}^2 + C_{\text{red}} \|\Phi_{\ell+1}^{\text{ex}} - \Phi_\ell^{\text{ex}}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2.$$

zu beweisen. Wir können dann, wie bereits für den Algorithmus **solve-res-weaksing**, eine Kontraktionsgröße der Form

$$\Delta_{\text{ex},\ell} := |||\phi - \Phi_\ell^{\text{ex}}|||^2 + \lambda \tau_{\text{ex},\ell}^2 \simeq \tau_{\text{ex},\ell}^2 \simeq \tau_\ell^2$$

herleiten, wie wir in Theorem 5.29 formulieren und beweisen.

Wir beweisen dann die diskrete lokale Zuverlässigkeit des residualen Fehlerschätzers in Lemma 5.30. Dabei schätzen wir die Energie der Differenz zweier Galerkinlösungen durch den Schätzer auf den verfeinerten

Elementen ab, das heißt

$$\|\Phi_\star - \Phi_\ell\|^2 \lesssim \sum_{E \in \omega_\ell(\mathcal{R}_\ell)} \rho_\ell(E)^2.$$

Hier ist $\Phi_\star$ die Galerkinlösung auf einer Verfeinerung $\mathcal{E}_\star$ von $\mathcal{E}_\ell$, und $\omega_\ell(\mathcal{R}_\ell)$ sind alle Elemente, die an den verfeinerten Elementen anstoßen, $\mathcal{R}_\ell := (\mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{E}_\star)$ anstoßen. Der Beweis dieser Aussage erweitert die Lokalisierungstechniken des Zuverlässigkeitsbeweises von [CMS01] in dem Sinne, dass wir eine passende Testfunktion abziehen.

Schliesslich beweisen wir die Optimalität der Markierungsstrategien.

- Für den Algorithmus **solve-res-weaksing** zeigen wir in Lemma 5.31, dass eine Verfeinerung $\mathcal{E}_\star$ eines Gitters $\mathcal{E}_\ell$, für das $\rho_\star^2 \leq \kappa_\star \rho_\ell^2$ gilt, bereits die Dörfler-Markierung (1.11) mit dem Schätzer ρ_ℓ erfüllt. Es muss dabei $0 < \theta < \theta_\star$ gelten, wobei $0 < \theta_\star < 1$ explizit angegeben werden kann, und die Konstante $\kappa_\star$ von θ und $\theta_\star$ abhängt.
- Für den Algorithmus **solve-separate-res-dirichlet** zeigen wir in Lemma 5.32, dass eine Verfeinerung $\mathcal{E}_\star$ eines Gitters $\mathcal{E}_\ell$, für das $\tau_{\text{ex},\star}^2 \leq \kappa_\star \tau_{\text{ex},\ell}^2$ gilt, bereits die separate Markierungsstrategie (1.12)–(1.13) mit dem Schätzer τ_ℓ aus 1.18 erfüllen muss. Dabei darf $0 < \theta_2 < 1$ beliebig gewählt werden, während $0 < \theta_1 < \theta_{\star,1}$ und $0 < \vartheta < \vartheta_\star$ gelten muss und $\theta_{\star,1}$ und $\vartheta_\star$ explizit angegeben werden.

Am Ende von Kapitel 5 definieren wir die Approximationsklassen und beweisen die Quasioptimalität der Algorithmen **solve-res-weaksing** und **solve-separate-res-dirichlet**. Die Approximationsklassen sind folgendermaßen definiert: Ausgehend von einem beliebigen Gitter $\mathcal{E}_0$ auf $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ definieren wir für $s > 0$ folgende Approximationsklassen:

- Es sei ϕ die schwache Lösung der schwach singulären Integralgleichung. Mit

$$|\phi|_s := \sup_{N>0} N^s \inf_{\mathcal{E}_\star \in \mathbb{T}_N} \rho_\star,$$

wobei $\rho_\star$ der Fehlerschätzer (1.16) auf dem Gitter $\mathcal{E}_\star$ ist, definieren wir

$$\phi \in \mathbb{A}_s : \Longleftrightarrow |\phi|_s < \infty.$$

- Es sei ϕ die schwache Lösung des Dirichletproblems und f das Dirichletdatum. Mit

$$|\phi, f|_s := \sup_{N>0} N^s \inf_{\mathcal{E}_\star \in \mathbb{T}_N} \tau_\star,$$

wobei $\tau_\star$ der Fehlerschätzer (1.18) auf dem Gitter $\mathcal{E}_\star$ ist, definieren wir

$$(\phi, f) \in \mathbb{A}_s : \Longleftrightarrow |\phi, f|_s < \infty.$$

In Worten bedeutet das, dass wir ausgehend von $\mathcal{E}_0$ eine Folge von Gittern $(\tilde{\mathcal{E}}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ finden, sodass der jeweilige Fehlerschätzer auf dieser Folge von Gittern sich verhält wie

$$\tau_\ell \lesssim (\#\tilde{\mathcal{E}}_\ell - \#\mathcal{E}_0)^{-s}.$$

In dieser Folge von Gittern müssen die aufeinanderfolgenden Gitter keine Verfeinerungen voneinander sein, wir können diese Folge beliebig wählen. Die Optimalitätsaussagen beweisen dann, dass die Algorithmen `solve-res-weaksing` und `solve-separate-res-dirichlet` ausgehend von $\mathcal{E}_0$ eine Folge von Gittern $(\mathcal{E}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ finden, sodass

$$\tau_\ell \lesssim (\#\mathcal{E}_\ell - \#\mathcal{E}_0)^{-s}$$

gilt, also der Fehlerschätzer auf dieser automatisch generierten Folge von Gittern bereits mit der optimalen Rate fällt. Wir formulieren und beweisen diese Aussagen in den Theoremen 5.34 und 5.35:

Theorem. *Algorithmus 5.21, `solve-res-weaksing` zur Lösung der schwach singulären Integralgleichung erfüllt folgendes: Es existiert eine Konstante $0 < \theta_\star < 1$, sodass für alle Parameter $0 < \theta < \theta_\star$ gilt: Die Galerkinlösungen Φ_ℓ und die Gitter $\mathcal{E}_\ell$, die von Algorithmus `solve-res-weaksing` erzeugt werden, erfüllen*

$$C_{\text{rel}}^{-1} \|\phi - \Phi_\ell\| \leq \rho_\ell \leq C_{\text{opt}} |\phi|_s (\#\mathcal{E}_\ell - \#\mathcal{E}_0)^{-s},$$

falls $\phi \in \mathbb{A}_s$ ist für $s > 0$. Die Konstante C_{opt} hängt nur von θ , s , p und dem groben Gitter $\mathcal{E}_0$ ab. ■

Theorem. *Algorithmus 5.23, `solve-separate-res-dirichlet` zur Lösung des Dirichletproblems erfüllt folgendes: Für beliebiges $0 < \theta_2 < 1$ existieren Konstanten $0 < \theta_{\star,1}, \vartheta_\star < 1$, sodass für alle Parameter $0 < \theta_1 < \theta_{\star,1}$ und $0 < \vartheta < \vartheta_\star$ gilt: Die Galerkinlösungen Φ_ℓ und die Gitter $\mathcal{E}_\ell$, die von Algorithmus `solve-separate-res-dirichlet` erzeugt werden, erfüllen*

$$C_{\text{rel}}^{-1} \|\phi - \Phi_\ell\| \leq \tau_\ell \leq C_{\text{opt}} |\phi, f|_{\text{ex},s} (\#\mathcal{E}_\ell - \#\mathcal{E}_0)^{-s},$$

falls $(\phi, f) \in \mathbb{A}_s$ ist für $s > 0$. Die Konstante C_{opt} hängt nur von θ , s , p und $\mathcal{E}_0$ ab. Hier ist

$$|\phi, f|_{\text{ex},s} := \sup_{N>0} N^s \inf_{\mathcal{E}_\star \in \mathbb{T}_N} \tau_{\text{ex},\star}.$$

■

In Kapitel 6 werden wir die Analysis, die wir in Kapitel 5 für die schwach singuläre Integralgleichung durchgeführt haben, auf die hypersinguläre Integralgleichung übertragen. Die Ideen sind dabei die gleichen, deswegen werden wir hier nicht mehr darauf eingehen. Die Quasioptimalitätsaussagen für die zugehörigen adaptiven Algorithmen finden sich in den Theoremen 6.26 und 6.27. Die Vorgehensweise ist dabei im Wesentlichen die Gleiche wie in Kapitel 5.

Kapitel 7

Im letzten Kapitel präsentieren wir einige numerische Experimente, die die vorangegangenen theoretischen Aussagen visualisieren sollen. Dabei betrachten wir nur die schwach singuläre Integralgleichung und das Dirichletproblem sowie Galerkinverfahren niedrigster Ordnung. Zunächst gehen wir in Abschnitt 7.1 kurz

auf die Implementierung der numerischen Beispiele ein. Wir verwenden sogenannte *Hierarchische Matrizen* und den ACA-Algorithmus zur schnellen Assemblierung und Verwendung der diskreten Integraloperatoren. Die etwas technische Implementierung des gewichteten Residualschätzers wird ebenfalls kurz besprochen. In Abschnitt 7.2.1 lösen wir ein Schirmproblem mit einer L-förmigen Geometrie. Wir verwenden zwei adaptive Algorithmen, die wir im theoretischen Teil dieser Arbeit analysiert haben. Einerseits einen durch den $h - h/2$ -Schätzer $\tilde{\mu}_\ell$ (1.15) gesteuerten Algorithmus, den wir `solve-hh2-weaksing` nennen, andererseits den durch den gewichteten Residualschätzer ρ_ℓ (1.16) gesteuerten Algorithmus `solve-res-weaksing`. Für beide Algorithmen untersuchen wir die Konvergenzrate, als auch die Effektivität im Vergleich zu einer uniformen Netzverfeinerung durch einen Vergleich der Konvergenzraten als auch der für eine gewisse Genauigkeit benötigten Rechenzeiten. In Abschnitt 7.2.2 lösen wir die schwach singuläre Integralgleichungen durch dieselben Algorithmen auf einem Fichera Würfel. Im letzten Abschnitt 7.3 wenden wir uns dem Dirichletproblem auf einem L-Block zu. Wir geben die exakte Lösung so vor, dass wir durch uniforme Netzverfeinerung keine optimale Konvergenzrate erreichen können. Wir betrachten wieder zwei Algorithmen, die im theoretischen Teil dieser Arbeit analysiert wurden. Einerseits einen durch einen $h - h/2$ -Schätzer und Oszillationen gesteuerten Algorithmus, den wir `solve-hh2-dirichlet` nennen, andererseits den durch den Schätzer τ_ℓ (1.18) gesteuerten Algorithmus `solve-separate-res-weaksing`. Für beide Algorithmen visualisieren wir die Konvergenzraten und vergleichen die Rechenzeiten mit der einer uniformen Netzverfeinerung.

1.5 Weitere Anwendungen der Resultate

Während die Resultate in den Kapiteln 5 und 6 die Konvergenz und Optimalitätstheorie für adaptive Randelementmethoden (zumindest für die Laplacegleichung) auf den gleichen Stand bringen wie in der Theorie adaptiver FEM, so sind die die dafür benötigten Resultate in den vorherigen Kapiteln von zusätzlichem Interesse:

- Das Resultat zum Netzabschluss ohne weitere Annahmen an die Referenzkantenverteilung des Anfangsgitters in Lemma 3.14 verringert die Annahmen, unter denen Optimalität von AFEM sichergestellt werden kann und erweitert daher sämtliche Resultate zu AFEM in 2D, die Newest Vertex Bisection verwenden.
- Die H^1 -Stabilität der L_2 -Projektion kommt in verschiedensten Bereichen zum Einsatz, für einen kurzen Überblick zu diesen Anwendungen verweisen wir auf [BPS02]. Unter der Voraussetzung, dass Newest Vertex Bisection als lokale Netzverfeinerung angewendet wird, erweitert das Resultat zur H^1 -Stabilität in Theorem 3.20 die in der Arbeit [BPS02] angeführten Anwendungen.
- Approximationsresultate sind klassische Werkzeuge der numerischen Analysis. Das Resultat aus Theorem 3.26 erlaubt Approximationsaussagen für gebrochene Sobolevräume auf lokal verfeinerten Gittern und ist daher für Randelementmethoden eine vielfältig einsetzbare Aussage.
- Die inversen Ungleichungen für die Randintegraloperatoren aus Abschnitt 4.2 wurden bisher in der Literatur noch nicht betrachtet. Eine Ausnahme bildet die Arbeit [Gan11], die zeitgleich mit dieser Dissertation entstanden ist. Solche inversen Ungleichungen könnten in Zukunft von unabhängigem Interesse sein. Wir verweisen auf die Arbeit [AFF⁺12b], in der mit Hilfe der inversen Ungleichungen

für die Integraloperatoren die Effizienz des gewichteten Residualschätzers für eine 2D-BEM auf lokal verfeinerten Gittern bewiesen wird.

Kapitel 2

Funktionenräume

In diesem Kapitel wird zunächst die Notation festgelegt. Wir führen Sobolevräume auf Gebieten und Rändern ein. Für Letzteres halten wir uns zunächst an [SS11], bemerken dann allerdings, dass wir eine äquivalente Definition durch sogenannte *Interpolationsräume* erhalten können, für welche wir einige wichtige Resultate anführen. Wir definieren Dualräume im Sinne des erweiterten L_2 -Skalarproduktes und schließen das Kapitel mit der Definition des Spuoperators und der verallgemeinerten Normalenableitung.

2.1 Notation

Punkte im $\mathbb{R}^d$ bezeichnen wir mit dicken Buchstaben, z.B.: $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$. Die Euklidische Norm eines Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir mit $|\mathbf{x}| := (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2}$. Ein *Multiindex* ist ein d -Tupel $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$. Wir schreiben auch $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, und wir verwenden die Schreibweise $\mathbf{x}^\alpha := \prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j}$ für einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Für eine differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ und einen Multiindex $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^d$ bezeichnet

$$D^{\boldsymbol{\alpha}}u := \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

die $\boldsymbol{\alpha}$ -te Ableitung. Hier ist $|\boldsymbol{\alpha}| := \sum_{i=1}^d \alpha_i$ die Ordnung von $\boldsymbol{\alpha}$.

Ist $A : X \rightarrow Y$ ein linearer, stetiger Operator zwischen zwei Banachräumen X und Y , so schreiben wir $A \in L(X, Y)$ und bezeichnen mit $\|A\|_{X \rightarrow Y}$, oder kurz $\|A\|$, die Operatornorm. Die Notation $A \lesssim B$ bedeutet $A \leq C \cdot B$, wobei $C > 0$ eine generische Konstante ist, die nicht von interessierenden Größen abhängt. Die Schreibweise $A \simeq B$ bedeutet sowohl $A \lesssim B$ als auch $B \lesssim A$.

2.2 Sobolevräume

Als Standardreferenzen verweisen wir auf [Ada75, Tar07]. Es bezeichnet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ für $d \in \{2, 3\}$ ein beschränktes Lipschitzgebiet mit Rand $\partial\Omega$ und $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ eine zusammenhängende Teilmenge. Wir werden im folgenden immer Γ schreiben, damit kann also der Rand $\partial\Omega$ oder eine Teilmenge davon gemeint sein. Der Raum $L_2(\Omega)$ ist der Raum aller quadratisch integrierbaren Funktionen, und $(\cdot, \cdot)_{L_2(\Omega)}$ bezeichnet das $L_2(\Omega)$ -Skalarprodukt. Die Sobolevräume $H^k(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ sind definiert als

$$H^k(\Omega) := \left\{ u \in L_2(\Omega) \mid D^{\boldsymbol{\alpha}}u \in L_2(\Omega) \text{ für alle } \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |\boldsymbol{\alpha}| \leq k \right\}.$$

Hier bezeichnet $D^\alpha u$ die α -te schwache Ableitung von u , d.h.:

$$\int_{\Omega} D^\alpha u(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) D^\alpha \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Der Raum $H^k(\Omega)$ wird versehen mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{H^k(\Omega)}$, definiert durch

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L_2(\Omega)},$$

zu einem Hilbertraum mit der Norm

$$\|u\|_{H^k(\Omega)}^2 := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Es folgt unmittelbar $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$.

Für reelle Zahlen $s = k + \sigma$ mit $k \in \mathbb{N}_0$, $\sigma \in (0, 1)$ definiert man Sobolevräume $H^s(\Omega)$ mit gebrochenem Index folgendermassen: Die *Slobodeckij*-Seminorm ist gegeben als

$$|u|_{H^\sigma(\Omega)} = (u, u)_{H^\sigma(\Omega)}^{1/2}$$

mit

$$(u, v)_{H^\sigma(\Omega)} := \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y}))(v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y}))}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+2\sigma}} d\mathbf{x} d\mathbf{y}.$$

Der Raum $H^s(\Omega)$ ist dann definiert als $\overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}}$, wobei

$$\|u\|_{H^s(\Omega)}^2 := \|u\|_{H^k(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{H^s(\Omega)}^2.$$

Für den Lipschitzrand $\partial\Omega$ von Ω können Sobolevräume $H^k(\partial\Omega)$ auf verschiedene Arten definiert werden. Wir verwenden die Definition "durch Hochheben" aus [SS11, Kapitel 2.4]. Abhängig von der Glattheit des Randes $\partial\Omega$ können Sobolevräume nur mit beschränktem Index definiert werden, mit [SS11, Gl. 2.84] gilt genauer: die Räume $H^s(\partial\Omega)$ können für den Rand $\partial\Omega$ eines Gebietes Ω definiert werden, wenn

$$\begin{aligned} 0 \leq s \leq 1 & \text{ für ein Lipschitzgebiet } \Omega, \\ 0 \leq s \leq k & \text{ für ein } C^k\text{-Gebiet } \Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ist $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$ eine echte, messbare Teilmenge von $\partial\Omega$ mit $|\Gamma| > 0$, so definieren wir für $0 \leq s \leq 1$ die Sobolevräume

$$\tilde{H}^s(\Gamma) := \{u|_{\Gamma} \mid u \in H^s(\partial\Omega), \text{supp}(u) \subset \overline{\Gamma}\}$$

mit der Norm $\|u\|_{\tilde{H}^s(\Gamma)} = \|u^*\|_{H^s(\partial\Omega)}$, wobei u^* die Fortsetzung von u durch 0 bezeichnet. Wir bemerken, dass für $\Gamma = \partial\Omega$ die Gleichheit $\tilde{H}^s(\Gamma) = H^s(\Gamma)$ gilt. Weiters führen wir für $\Gamma = \partial\Omega$ den Raum

$$H_\star^s(\Gamma) = \left\{ u \in H^s(\Gamma) \mid \int_{\Gamma} u(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \right\}$$

ein. Um die Fälle $\Gamma = \partial\Omega$ und $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$ gleichzeitig behandeln zu können, definieren wir

$$\tilde{H}_*^s(\Gamma) = \begin{cases} \tilde{H}^s(\Gamma) & \text{falls } \Gamma \subsetneq \partial\Omega \\ H_*^s(\Gamma) & \text{falls } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

Wir benötigen auch den Raum $H_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^3)$, den wir als den Raum aller stetigen linearen Funktionale u auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ definieren welche die Eigenschaft haben, dass $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^3)$ ist für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Der Raum $H_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^3)$ ist nicht normierbar - allerdings kann man eine Metrik bzw. eine Topologie definieren. Wir benötigen die folgende Aussage, die in [SS11, Theorem 2.6.7 (c)] angegeben wird.

2.1 Theorem. *Eine lineare Abbildung $A : E \rightarrow H_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^3)$ von einem normierten Raum E ist genau dann stetig, wenn für alle $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ eine Konstante $C_\varphi < \infty$ existiert, sodass*

$$\|\varphi Au\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} \leq C_\varphi \|u\|_E \quad \text{für alle } u \in E.$$

■

Wir bemerken, dass dieses Theorem nicht nur für $\mathbb{R}^3$, sondern auch für beliebige unbeschränkte Mengen wie z.B. Ω^{ext} gilt.

Zur Definition einer äquivalenten Norm auf $H^1(\Gamma)$ folgen wir [Ver84, Néd01]: Für ein Element $u \in H^1(\Gamma)$ kann fast überall auf Γ ein Vektor $\nabla_\Gamma u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^d$ definiert werden, sodass

$$\|u\|_{L_2(\Gamma)} + \|\nabla_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)}$$

eine äquivalente Norm zur $H^1(\Gamma)$ -Norm ist. Für glatte Funktionen u in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbf{x} \in \Gamma$ gilt

$$\nabla u(\mathbf{x}) = \nabla_\Gamma u(\mathbf{x}) + \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}),$$

weswegen ∇_Γ auch als *Oberflächengradient* bezeichnet wird. Wir bemerken, dass fast überall auf Γ die Abschätzung $|\nabla_\Gamma u(\mathbf{x})| \leq 2|\nabla u(\mathbf{x})|$ gilt, woraus $\|\nabla_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)} \leq 2\|\nabla u\|_{L_2(\Gamma)}$ folgt.

2.3 Interpolationsräume

Sobolevräume mit gebrochenem Index können äquivalent als Interpolationsräume definiert werden, siehe [BL76, Tri95, McL00]. Wir werden diese Darstellung von Sobolevräumen nutzen, aus diesem Grund geben wir hier eine kurze Einführung.

Für zwei Banachräume B_0, B_1 mit stetiger Einbettung $B_1 \subset B_0$ definieren wir das K-Funktional

$$K(t, u) := \inf_{v \in B_1} (\|u - v\|_{B_0} + t\|v\|_{B_1})$$

für alle $u \in B_0$ und $t > 0$. Für $p \in [1, \infty]$, $0 < \theta < 1$ definieren wir den Interpolationsraum $[B_0, B_1]_{\theta, p}$ durch

$$[B_0, B_1]_{\theta, p} := B_{\theta, p} := \left\{ u \in B_0 \mid \|u\|_{[B_0, B_1]_{\theta, p}} < \infty \right\}$$

wobei

$$\|u\|_{[B_0, B_1]_{\theta, p}} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty t^{-\theta p} K(t, u)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} & \text{für } p \in [1, \infty), \\ \sup_{0 < t < \infty} (t^{-\theta} K(t, u)) & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Die Räume $[B_0, B_1]_{\theta, p}$ sind wieder Banachräume. Ausserdem gelten die folgenden Aussagen, die beispielsweise in [Tri95, Theorem 1.3.3] und [BL76, Theorem 3.4.1] bewiesen werden:

2.2 Theorem. *Für zwei Banachräume B_0, B_1 mit stetiger Einbettung $B_1 \subset B_0$ gilt:*

1. *Für $0 < \theta_2 \leq \theta_1 < 1$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gelten die stetigen Einbettungen*

$$B_1 \subset [B_0, B_1]_{\theta_1, p} \subset [B_0, B_1]_{\theta_2, q} \subset B_0.$$

2. *Im Falle $B_0 = B_1$ gilt $[B_0, B_1]_{\theta, p} = B_0$ mit äquivalenten Normen*

$$\|a\|_{B_0} = (p\theta(1-\theta))^{1/p} \|a\|_{[B_0, B_1]_{\theta, p}}.$$

3. *Für $a \in B_1$ gilt*

$$\|a\|_{[B_0, B_1]_{\theta, p}} \leq C_{\theta, p} \|a\|_{B_0}^{1-\theta} \|a\|_{B_1}^\theta.$$

■

Für $\sigma \notin \mathbb{N}_0$ können nun die Räume $H^\sigma(\Omega)$ bzw. $H^\sigma(\Gamma)$ in äquivalenter Weise als Interpolationsräume definiert werden, siehe [SS11, Proposition 2.3.11 und Proposition 2.4.3].

2.3 Proposition. *Sei Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet oder C^k -Gebiet mit Rand Γ . Für $\sigma = k+s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ gilt*

$$H^\sigma(\Omega) = \left[H^k(\Omega), H^{k+1}(\Omega) \right]_{s, 2}.$$

Erfüllt zusätzlich $k+1$ die Bedingung (2.1), so gilt

$$H^\sigma(\Gamma) = \left[H^k(\Gamma), H^{k+1}(\Gamma) \right]_{s, 2}.$$

■

Das folgende Theorem erlaubt es, einen linearen, beschränkten Operator zwischen jeweils stetig eingebetteten Banachräumen auch als linearen, beschränkten Operator zwischen den Interpolationsräumen aufzufassen und die entstehende Abbildungsnorm zu kontrollieren, siehe [Tar07, Lemma 22.3].

2.4 Theorem (Interpolationstheorem). *Bezeichne mit A_i und B_i für $i \in \{0, 1\}$ zwei Paare von Banachräumen mit stetigen Einbettungen $A_1 \subset A_0$ und $B_1 \subset B_0$. Ist $T : A_i \rightarrow B_i$ ein linearer, beschränkter Operator für $i \in \{0, 1\}$, dann ist auch $T : A_{\theta, p} \rightarrow B_{\theta, p}$ ein linearer, beschränkter Operator mit*

$$\|T\|_{A_{\theta, p} \rightarrow B_{\theta, p}} \leq \|T\|_{A_0 \rightarrow B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1 \rightarrow B_1}^\theta.$$

■

Wir werden im Zuge dieser Arbeit zwischen diskreten Unterräumen von Sobolevräumen interpolieren. Die resultierende Interpolationsnorm ist aufgrund der endlichen Dimension der diskreten Räume äquivalent zu der Norm die entstehen würde, würde man zwischen den ursprünglichen Sobolevräumen interpolieren. Das folgende Lemma aus [AL09] liefert hinreichende Bedingungen, unter denen die Äquivalenzkonstanten nicht von den diskreten Räumen abhängen.

2.5 Lemma. *Für zwei Hilberträume B_0 und B_1 seien zwei Unterräume $\widehat{B}_0$ und $\widehat{B}_1$ mit der gleichen Norm gegeben. Es existiere ein Operator I , der B_i stetig nach $\widehat{B}_i$ für $i \in \{0, 1\}$ abbildet, sodass die Normen $\|I\|_{B_i \rightarrow \widehat{B}_i}$ nicht von den $\widehat{B}_i$ abhängen. Zusätzlich sei I eine Projektion auf $\widehat{B}_0$. Dann gilt*

$$\|u\|_{[\widehat{B}_0, \widehat{B}_1]_\theta} \simeq \|u\|_{[B_0, B_1]_\theta} \quad \text{für alle } u \in [\widehat{B}_0, \widehat{B}_1]_\theta,$$

und die Äquivalenzkonstanten hängen nur von den Normen $\|I\|_{B_i \rightarrow \widehat{B}_i}$ für $i \in \{0, 1\}$ und θ ab.

Beweis. Laut Voraussetzungen des Lemmas ist die Identität eine stetige Abbildung von $\widehat{B}_i$ nach B_i für $i \in \{0, 1\}$. Laut dem Interpolationstheorem 2.4 ist die Identität dann auch eine stetige Abbildung von $[\widehat{B}_0, \widehat{B}_1]_\theta$ nach $[B_0, B_1]_\theta$ mit

$$\|u\|_{[B_0, B_1]_\theta} \leq \|u\|_{[\widehat{B}_0, \widehat{B}_1]_\theta}$$

für alle $u \in [\widehat{B}_0, \widehat{B}_1]_\theta$. Sei andererseits $u \in [\widehat{B}_0, \widehat{B}_1]_\theta$. Laut Definition ist dann $u \in \widehat{B}_0$, also gilt $u = Iu$ da I eine Projektion auf $\widehat{B}_0$ ist. Eine weitere Anwendung des Interpolationstheorems 2.4 zeigt, dass I stetig von $[B_0, B_1]_\theta$ nach $[\widehat{B}_0, \widehat{B}_1]_\theta$ abbildet mit einer Stetigkeitskonstanten, die nur von den Normen $\|I\|_{B_i \rightarrow \widehat{B}_i}$ für $i \in \{0, 1\}$ und θ abhängt. Wir schließen

$$\|u\|_{[\widehat{B}_0, \widehat{B}_1]_\theta} = \|Iu\|_{[\widehat{B}_0, \widehat{B}_1]_\theta} \lesssim \|u\|_{[B_0, B_1]_\theta},$$

falls $u \in [\widehat{B}_0, \widehat{B}_1]_\theta$. □

2.4 Dualräume

Seien X_0 und X_1 zwei Hilberträume mit stetiger Einbettung $X_1 \subset X_0$. Ein Element $x'_0 \in X'_0$ wirkt durch $x_0 \in X_0 \mapsto x'_0(x_0)$. Für ein Element $x_1 \in X_1$ definiert also $x_1 \mapsto x'_0(x_1)$ ein Element aus X'_1 , da

$$|x'_0(x_1)| \leq \|x'_0\|_{X'_0} \|x_1\|_{X_0} \leq C \|x'_0\|_{X'_0} \|x_1\|_{X_1}.$$

Ausserdem gilt

$$\|x'_0\|_{X'_1} = \sup_{x_1 \in X_1} \frac{|x'_0(x_1)|}{\|x_1\|_{X_1}} \leq C \sup_{x_1 \in X_0} \frac{|x'_0(x_1)|}{\|x_1\|_{X_0}} = \|x'_0\|_{X'_0}.$$

Man definiert die Einbettung $X_0 \mapsto X'_1$ für $x_0 \in X_0$ und $x_1 \in X_1$ formal durch

$$\langle x_1, J_{X_0}(x_0) \rangle_{X_1 \times X'_1} := \langle x_1, J_{X_0}(x_0) \rangle_{X_0 \times X'_0} = (x_1, x_0)_{X_0},$$

wobei $J_{X_0} : X_0 \rightarrow X'_0$ den Riesz-Isomorphismus bezeichnet. Es ist leicht einzusehen, dass durch diese Definition der dualen Klammer $J_{X_0}(x_0)$ ein stetiges, lineares Funktional auf X_1 definiert. Es gilt also auch die stetige Einbettung $X'_0 \subset X'_1$. Hier ist Vorsicht geboten: $X_1 \simeq X'_1$ gilt laut dem Satz von Riesz, wenn die beiden Räume durch das Skalarprodukt auf X_1 identifiziert werden. Für die Einbettungen $X_1 \subset X_0 \simeq X'_0 \subset X'_1$ wird jedoch stets das Skalarprodukt auf X_0 verwendet. Präzise kann dies folgendermaßen formuliert werden.

2.6 Lemma. *Seien X_1, X_0 zwei Hilberträume mit stetiger Einbettung $X_1 \subset X_0$. Bezeichne die Riesz-Abbildung mit $J_{X_0} : X_0 \rightarrow X'_0$, d.h.: $J_{X_0}(x_0) = y_0 \mapsto (x_0, y_0)_{X_0}$. Dann ist $J_{X_0} : X_0 \rightarrow X'_1$ eine stetige, lineare Abbildung, und $J_{X_0}(X_0)$ ist dicht in X'_1 .* ■

Wir können also die duale Klammer $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_1 \times X'_1}$ auf X'_1 erweitern. Die Dichtheitsaussage aus dem vorigen Lemma besagt dann, dass für $x_1 \in X'_1$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $x_0^\varepsilon \in X_0$ existiert, sodass

$$\sup_{x_1 \in X_1} \frac{|\langle x_1, x'_1 \rangle_{X_1 \times X'_1} - (x_1, x_0^\varepsilon)_{X_0}|}{\|x_1\|_{X_1}} \leq \varepsilon$$

ist. In diesem Sinne definieren wir für $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ und $0 < s < 1$ den Raum $\tilde{H}^{-s}(\Gamma)$ als den Dualraum von $H^s(\Gamma)$ im eben besprochenen Sinne mit dem L_2 -Skalarprodukt. Weiters definieren wir $H^{-s}(\Gamma)$ als den Dualraum von $\tilde{H}^s(\Gamma)$. Für ein Gebiet Ω definieren wir $\tilde{H}^{-s}(\Omega)$ als den Dualraum von $H^s(\Omega)$ ebenso. Wir haben bereits bemerkt, dass für $\Gamma = \partial\Omega$ die Räume $\tilde{H}^s(\Gamma)$ und $H^s(\Gamma)$ übereinstimmen, daher tun dies auch ihre Dualräume.

2.5 Diverses

Auf Lipschitzgebieten kann ein Spuroperator definiert werden, siehe [McL00, Theorem 3.37], und für die hier angegebene, stärkere Aussage [Cos88].

2.7 Theorem (Spuroperator). *Für ein Lipschitzgebiet Ω mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$ und $1/2 < s < 3/2$ existiert ein Operator $\gamma_0^{\text{int}} \in L(H^s(\Omega), H^{s-1/2}(\Gamma))$ mit*

$$\gamma_0^{\text{int}} \varphi = \varphi|_\Gamma \quad \text{für alle } \varphi \in C^0(\overline{\Omega}).$$

Analog können wir auf dem Außengebiet $\Omega^{\text{ext}} := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ einen Spuroperator γ_0^{ext} definieren - die Aussagen aus dem letzten Theorem gelten dann analog. Genauere Kontrolle über die $L_2(\Gamma)$ -Norm einer Funktion aus $H^1(\Omega)$ liefert das folgende Resultat.

2.8 Lemma (Spurungleichung). *Bezeichne $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine Hyperebene und $B \subset \mathbb{R}^3$ eine Kugel mit Mittelpunkt in Γ und Radius r_B . Es existiert eine Konstante $C_{\text{tr}} > 0$ mit*

$$C_{\text{tr}}^{-1} \|u\|_{L_2(\Gamma \cap B)}^2 \leq \frac{1}{r_B} \|u\|_{L_2(B)}^2 + \|u\|_{L_2(B)} \|\nabla u\|_{L_2(B)} \quad \text{für alle } u \in H^1(B). \quad (2.2)$$

Die Konstante C_{tr} hängt nicht von Γ , B und u ab.

Beweis. Wir betrachten zunächst die Referenzkonfiguration $\widehat{\Gamma} = \mathbb{R}^2$ mit der Einheitskugel $\widehat{B} = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$. Die multiplikative Spurungleichung [BS08, Theorem 1.6.6] liefert

$$\|\widehat{u}\|_{L_2(\widehat{\Gamma} \cap \widehat{B})}^2 \leq C \|\widehat{u}\|_{L_2(\widehat{B}_+)} \|\widehat{u}\|_{H^1(\widehat{B}_+)} \leq C \|\widehat{u}\|_{L_2(\widehat{B})} \|\widehat{u}\|_{H^1(\widehat{B})} \quad \text{for all } \widehat{u} \in H^1(\widehat{B}),$$

wobei $B_+ := \{x \in B \mid x_3 > 0\}$. Die rechte Seite kann nun weiter abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} \|\widehat{u}\|_{L_2(\widehat{B})} \|\widehat{u}\|_{H^1(\widehat{B})} &= \left(\|\widehat{u}\|_{L_2(\widehat{B})}^4 + \|\widehat{u}\|_{L_2(\widehat{B})}^2 \|\nabla \widehat{u}\|_{L_2(\widehat{B})}^2 \right)^{1/2} \\ &\lesssim \|\widehat{u}\|_{L_2(\widehat{B})}^2 + \|\widehat{u}\|_{L_2(\widehat{B})} \|\nabla \widehat{u}\|_{L_2(\widehat{B})}, \end{aligned}$$

und durch Skalierungsargumente erhält man das Gewünschte. $\square$

Neben dem Spuroperator werden wir auch die Normalenableitung benötigen. Folgendes Theorem definiert eine verallgemeinerte Normalenableitung, indem die Formel der partiellen Integration gefordert wird, und ist zu finden in [McL00, Lemma 4.3].

2.9 Theorem (Verallgemeinerte Normalenableitung). *Es sei Ω ein zusammenhängendes Lipschitzgebiet mit Rand $\Gamma := \partial\Omega$. Für $u \in H^1(\Omega)$ und $f \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ mit $-\Delta u = f$ im schwachen Sinne existiert ein $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ mit*

$$\langle g, \gamma_0^{\text{int}} v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} = (\nabla u, \nabla v)_\Omega - \langle f, v \rangle_{\widetilde{H}^{-1}(\Omega) \times H^1(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega).$$

Wir nennen $\gamma_1^{\text{int}} u := g$ die verallgemeinerte Normalenableitung von u , denn für $u \in H^2(\Omega)$ gilt $\partial_{\mathbf{n}} u = \gamma_1^{\text{int}} u$ fast überall auf Γ . $\blacksquare$

Wie im Falle des Spurooperators können wir auch die verallgemeinerte Normalenableitung γ_1^{ext} für das Außengebiet Ω^{ext} definieren.

Kapitel 3

Diskrete Räume

Die Gleichungen, die wir numerisch zu lösen beabsichtigen, sind im Rahmen der unendlich-dimensionalen Funktionenräume aus dem ersten Kapitel gestellt. In diesem Kapitel führen wir endlichdimensionale Teilräume ein, die aus stückweise polynomiellen Funktionen auf einem Randgitter bestehen. Adaptive Algorithmen müssen in der Lage sein, solche Gitter lokal zu verfeinern. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten, dazu siehe [Ver96]. Wir benutzen dazu die sogenannte *Newest Vertex Bisection*-Strategie, deren Definition ebenfalls in der Arbeit [Ver96] zu finden ist. Der Grund für diese Wahl ist, dass diese Verfeinerungsstrategie Eigenschaften hat, die in (aktuellen) Beweisen für Optimalitätsaussagen adaptiver Algorithmen benötigt werden. Zur lokalen Verfeinerung eines gegebenen Gitters $\mathcal{E}_\ell$ wählen wir eine Menge von *markierten Elementen* $\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{E}_\ell$, die wir auf jeden Fall verfeinern wollen. Da wir uns auf reguläre Gitter beschränken (d.h. keine hängenden Knoten zulassen wollen), wird schließlich eine Menge $\mathcal{R}_\ell \supseteq \mathcal{M}_\ell$ von Elementen verfeinert werden. Es stellt sich natürlich die Frage, ob $\#\mathcal{R}_\ell$ durch $\#\mathcal{M}_\ell$ beschränkt werden kann. Ein einfaches Gegenbeispiel aus [NV11] (welches vor Lemma 3.14 angegeben wird) zeigt aber, dass dies nicht möglich ist. Glücklicherweise stellt sich heraus, dass es für quasioptimale Konvergenzraten von adaptiven Algorithmen genügt, die gesamte Historie von Markierungen miteinzubeziehen, d.h. eine Abschätzung der Form

$$\#\mathcal{E}_\ell - \#\mathcal{E}_0 \lesssim \sum_{j=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_j$$

ist hinreichend. Diese Abschätzung wurde zum ersten Mal in [BDD04] unter gewissen Annahmen an das Anfangsgitter $\mathcal{E}_0$ bewiesen. Es gibt leider keine effizienten Algorithmen, um diese Annahme sicherzustellen - davon abgesehen scheint sie in Experimenten nicht nötig zu sein. Für eine uniforme Verfeinerung von $\mathcal{E}_0$ kann diese Annahme jedoch ganz leicht sichergestellt werden, allerdings startet der adaptive Algorithmus dann mit einem Gitter, das vier Mal so groß ist. Dies ist für Randelementmethoden, deren Systemmatrizen vollbesetzt sind, unattraktiv. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Optimalitätsabschätzung für den Netzabschluss ohne jegliche Annahmen an $\mathcal{E}_0$. Dabei werden wir ausnutzen, dass ein beliebiges Gitter $\mathcal{E}_0$ *lokal* immer die Annahmen der Arbeit [BDD04] erfüllt, und diese Beobachtung wird uns schließlich erlauben, das Resultat der letztgenannten Arbeit zu erweitern. Für eine genauere Diskussion, wie diese Erweiterung zu verstehen ist, und welche Auswirkung es hat, die Annahme von [BDD04] fallen zu lassen, verweisen wir auf Bemerkung 3.16.

Im weiteren Verlauf werden wir Räume von stückweisen Polynomen definieren und Approximationsoperatoren in diese Räume betrachten, zum Beispiel die Scott-Zhang Projektion J_ℓ aus [SZ90] oder die L_2 -Projektionen. Wir werden uns dann folgenden Fragen zuwenden, die in den späteren Kapiteln essentielle Bedeutung haben werden:

Der Quasi-Interpolationsoperator J_ℓ hat die Approximationseigenschaften

$$\begin{aligned}\|u - J_\ell u\|_{L_2(E)} &\lesssim \text{diam}(E) \|\nabla u\|_{L_2(\omega_\ell(E))} \\ \|\nabla(u - J_\ell u)\|_{L_2(E)} &\lesssim \|\nabla u\|_{L_2(\omega_\ell(E))}\end{aligned}$$

Ist $\text{diam}(E) \simeq h_\ell$ mit einem E -unabhängigen h_ℓ , dann liefert das klassische Interpolationstheorem 2.4 sofort

$$\|u - J_\ell u\|_{H^s(\Omega)} \lesssim h_\ell^{1-s} \|u\|_{H^1(\Gamma)}.$$

Die Frage, die sich im Rahmen von lokal verfeinerten Gittern stellt, ist, ob auch

$$\|u - J_\ell u\|_{H^s(\Omega)} \lesssim \|h_\ell^{1-s} u\|_{H^1(\Gamma)}$$

gilt, wenn h_ℓ die lokale Netzweite beschreibt. Es wird sich herausstellen, dass dies gilt, und wir werden dazu auf Resultate der Interpolation von gewichteten L_2 -Räumen zurückgreifen, wie sie in [Tar07] verwendet werden.

Eine weitere Frage, die in diesem Kapitel beantwortet werden soll, beschäftigt sich mit der Frage, ob auf einer Folge von Netzen, die durch den NVB-Algorithmus erzeugt wird, eine uniform stetige Folge von L_2 -Projektionen auf den Raum der global stetigen, stückweise linearen Funktionen besitzt, d.h.

$$\|\nabla_\Gamma \Pi_\ell u\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_{\text{stab}} \|\nabla_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)} \quad \text{für alle } u \in H^1(\Gamma)$$

mit einer ℓ -unabhängigen Konstante C_{stab} . Diese Eigenschaft wird sich bei der Konvergenz adaptiver Verfahren mit Datenapproximation als wesentlich herausstellen, wenn die Datenapproximation durch die günstige L_2 -Projektion durchgeführt wird. In der Literatur finden sich verschiedene Arbeiten, die sich mit der Frage beschäftigen, ob man die Stabilitätskonstanten der Folge $(\Pi_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ uniform in ℓ beschränken kann. So beschäftigt sich zum Beispiel die Arbeit [CT87] mit der Stabilität in den Räumen $W^{1,p}$. Für uniforme Gitter ist die Aussage zu finden in der Arbeit [BX91]. Eine Erweiterung auf Gitter mit kontrollierter Änderung des Flächeninhalts der Elemente ist in [BPS02] beschrieben und wurde schließlich [Ste01] auf Sobolevräume mit gebrochenem Index angegeben. Schliesslich wurden die Resultate aus [CT87] und [BPS02] zusammengefasst in [Car02]. Die erste Arbeit, die keine Kontrolle über Fläche oder Durchmesser forderte, war [Car04]. Dort wird ein modifizierter NVB-Algorithmus zur lokalen Netzverfeinerung verwendet, und die Stabilität wird unter einer abgeschwächten BDD-Bedingung gezeigt. Keines der Resultate in den zitierten Arbeiten ist jedoch unmittelbar auf den Fall einer beliebigen Folge von formregulären Gittern anwendbar, deren größtes Gitter eine beliebige Verteilung von Referenzkanten hat. Wir werden in Abschnitt 3.4 einen Beweis der Stabilität in diesem Fall geben, d.h., nach Wahl eines groben Gitters $\mathcal{E}_0$ ist die Konstante C_{stab} für alle Gitter $\mathcal{E}_\ell = \text{refine}(\mathcal{E}_0)$ gleichmässig beschränkt. Dabei werden wir im Wesentlichen auf Ideen aus [Car04] zurückgreifen und unsere Resultate zum Beweis der Optimalität des Netzabschlusses einfließen lassen. Das Kapitel beschließen dann zwei klassische inverse Ungleichungen für Polynomräume.

3.1 Gitter

Ab nun bezeichnet $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ immer eine Teilmenge eines stückweise flachen Randes, Ω ist also als polyederrförmig vorausgesetzt.

3.1 Definition. Als *Gitter* auf Γ bezeichnet man eine endliche Partition $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$ von Γ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Die Elemente $E_j \subset \Gamma$ sind offene, flache Dreiecke.
- (ii) $\bar{\Gamma} = \bigcup_{j=1}^n \bar{E}_j$.
- (iii) Die Menge $\bar{E}_j \cap \bar{E}_i$ für $i \neq j$ ist entweder leer, ein gemeinsamer Knoten, oder eine gemeinsame Kante von E_j und E_i .

Die lokale *Gitterweite* $h \in L_\infty(\Gamma)$ ist $\mathcal{E}$ -elementweise definiert als $h|_E := h(E) := |E|^{1/d}$, und $\rho \in L_\infty(\Gamma)$ ist für E definiert als der Durchmesser der größten Kugel, die in E eingeschrieben werden kann. Mit $\mathcal{N}$ bezeichnen wir die Menge aller Knoten eines Netzes $\mathcal{E}$, mit $\mathcal{K}$ die Menge aller Kanten.

Besitzt ein Gitter einen Index, z.B. $\mathcal{E}_\ell$, so schreiben wir $h_\ell := h$, $\rho_\ell = \rho$ usw. Zu jedem Element E eines Gitters $\mathcal{E}$ gibt es eine affine Abbildung $F_E : \hat{E} \rightarrow E$, wobei $\hat{E}$ ein Referenzelement ist. Eine Folge von Netzen $(\mathcal{E}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ heißt *quasi-uniform*, wenn es Parameter $h_\ell, \rho_\ell \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt mit $h_\ell(E) \simeq h_\ell$ und $\rho_\ell(E) \simeq \rho_\ell$ für alle $E \in \mathcal{E}_\ell$. Eine Folge von Netzen $(\mathcal{E}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ nennen wir *lokal quasi-uniform*, falls ρ_ℓ und h_ℓ vergleichbar auf benachbarten Elementen sind, also $h_\ell(E) \simeq h_\ell(E')$ und $\rho_\ell(E) \simeq \rho_\ell(E')$ für alle $\bar{E} \cap \bar{E}' \neq \emptyset$. Wir definieren den Patch eines Elementes $E \in \mathcal{E}_\ell$ als $\omega_\ell(E) := \bigcup \{E' \in \mathcal{E}_\ell \mid \bar{E}' \cap \bar{E} \neq \emptyset\}$, sowie den größeren Patch $\omega_\ell^2(E) := \bigcup \{E' \in \mathcal{E}_\ell \mid \bar{E}' \cap \overline{\omega_\ell(E)} \neq \emptyset\}$. Für eine Teilmenge $\mathcal{R}_\ell \subseteq \mathcal{E}_\ell$ bezeichnet $\omega_\ell(\mathcal{R}_\ell)$ die Menge aller Elemente, die sich in einem Patch eines Elementes aus $\mathcal{R}_\ell$ befinden.

Wir definieren die *Formregularitätskonstante* σ_ℓ durch

$$\sigma_\ell := \max_{E \in \mathcal{E}_\ell} \frac{h_\ell(E)}{\rho_\ell(E)},$$

und nennen eine Folge von Netzen $(\mathcal{E}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ γ -formregulär, falls $\sigma_\ell \leq \gamma$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt.

3.2 Newest Vertex Bisection

In diesem Abschnitt erklären wir die lokale Verfeinerungsstrategie, die wir in den adaptiven Algorithmen verwenden wollen. Auf Γ sei ein Gitter $\mathcal{E}_0$ zusammen mit einer Verteilung $(e_E)_{E \in \mathcal{E}_0}$ von Referenzkanten gegeben, d.h. zu jedem Element $E \in \mathcal{E}_0$ sei eine Kante $e_E \in \mathcal{K}_0$ ausgezeichnet mit $e_E \subset \bar{E}$.

Das Paar $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ erzeugt einen eindeutigen Binärbaum $\mathbb{F}$ in folgender Weise:

3.2 Definition. Der Binärbaum $\mathbb{F}$ ist definiert durch:

- Die Wurzeln von $\mathbb{F}$ sind gegeben durch die Menge $\mathcal{E}_0$.

- Jeder Knoten E in $\mathbb{F}$ hat zwei Söhne E_1, E_2 , wobei gilt:

$$\overline{E} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}, \quad \text{und } E_1, E_2 \neq \emptyset,$$

und E_1, E_2 entstehen aus E durch Bisektion entlang der Referenzkante e_E von E . Die Referenzkanten von E_1 und E_2 werden dann gegenüber des neuen Knotens gewählt, siehe Abbildung 3.1, linkes Bild.

■

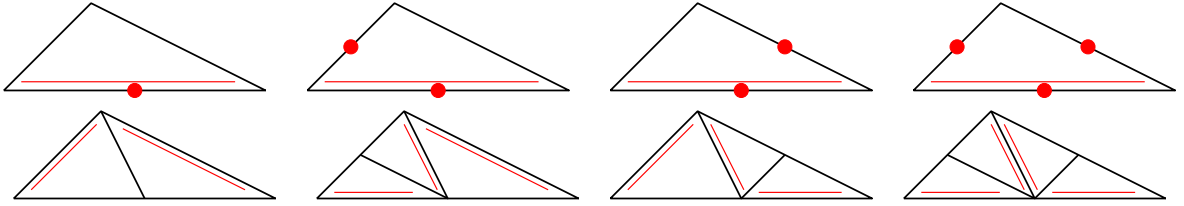


Abbildung 3.1: Jedes Element $E \in \mathcal{E}_\ell$ besitzt eine *Referenzkante*, in der obigen Grafik wird dies durch eine zweite, rote Linie gekennzeichnet. Wird E verfeinert, so wird die Referenzkante geteilt, und ihr Mittelpunkt wird zum neuen Knoten. Als Referenzkanten der Söhne wählt man die Kanten, die gegenüber dem neuen Knoten liegen (links unten). Um hängende Knoten zu vermeiden, geht man folgendermassen vor: Die Menge der Kanten, die geteilt werden, wird erweitert, sodass für jedes Element E , welches mindestens eine markierte Kante hat, auch die Referenzkante markiert ist. Entsprechend der Anzahl der markierten Kanten wird das Element in 2, 3 oder 4 Elemente geteilt.

3.3 Definition.

- Eine endliche Teilmenge $\mathcal{E} \subset \mathbb{F}$ nennen wir einen Teilbaum von $\mathbb{F}$, falls

- (1) Jeder Knoten in $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_0$ hat einen Vorgänger,
- (2) Jeder Knoten in $\mathcal{E}$ hat entweder zwei Nachfolger oder keinen.

Jeder Teilbaum $\mathcal{E} \subset \mathbb{F}$ erzeugt eine Partition von Γ , welche wir wieder $\mathcal{E}$ nennen.

- Seien $\mathcal{E}_\ell$ und $\mathcal{E}_\star$ zwei Teilbäume von $\mathbb{F}$ mit $\mathcal{E}_\ell \subset \mathcal{E}_\star$. Dann nennen wir $\mathcal{E}_\star$ eine Verfeinerung von $\mathcal{E}_\ell$. Die Menge $\mathcal{R}_{\mathcal{E}_\ell \rightarrow \mathcal{E}_\star} \subset \mathcal{E}_\ell$ definiert durch

$$\mathcal{R}_{\mathcal{E}_\ell \rightarrow \mathcal{E}_\star} := \mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{E}_\star$$

nennen wir die Menge der verfeinerten Elemente. Falls aus dem Kontext $\mathcal{E}_\star$ eindeutig hervorgeht, schreiben wir auch einfach nur $\mathcal{R}_\ell$. Weiters definieren wir für zwei Gitter $\mathcal{E}_\ell$ und $\mathcal{E}_\star$ den Overlay $\mathcal{E}_\ell \oplus \mathcal{E}_\star$ als die Partition von Γ , die durch den Teilbaum $\mathcal{E}_\ell \cup \mathcal{E}_\star$ erzeugt wird.

- Die Levelfunktion $\text{gen} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{N}$ ist definiert durch $\text{gen}(E) = 0$ für alle $E \in \mathcal{E}_0$ und $\text{gen}(E') = \text{gen}(E) + 1$ für alle Söhne E' von E .
- Es sei $\mathcal{E}_\ell \subset \mathbb{F}$ ein Gitter. Für ein Element $E \in \mathcal{E}_\ell$ definieren wir den Referenzkanten-Nachbar $N(E)$ als das Element $E' \in \mathcal{E}_\ell$, sodass $\overline{E} \cap \overline{E'} = e_E$. Ist ein solches Element E' nicht vorhanden, dann setzen wir $N(E) = \emptyset$. Ausserdem definieren wir $N(\emptyset) := \emptyset$.

■

Wir bemerken, daß ein Teilbaum $\mathcal{E}$ kein Gitter im Sinne der Definition 3.1 erzeugen muss, da die induzierte Partition $\mathcal{E}$ hängende Knoten enthalten kann. Die folgenden Aussagen entstammen [NV11], [CKNS08, Lemma 3.7] und [Sew72, Seite 17].

3.4 Lemma. *Es sei $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ ein grobes Gitter.*

- *Es gibt Konstanten $C_{\text{diam}} > 0$ und $C^{\text{diam}} > 0$, die nur von $\mathcal{E}_0$ abhängen, sodass*

$$C_{\text{diam}} 2^{-\text{gen}(E)/2} \leq |E|^{1/2} \leq \text{diam}(E) \leq C^{\text{diam}} 2^{-\text{gen}(E)/2} \quad \text{für alle } E \in \mathbb{F}.$$

- *Für zwei Gitter $\mathcal{E}_\ell \subset \mathbb{F}$ und $\mathcal{E}_\star \subset \mathbb{F}$ ist $\mathcal{E}_\ell \oplus \mathcal{E}_\star$ wieder ein Gitter, und es gilt*

$$\#\mathcal{E}_\ell \oplus \mathcal{E}_\star \leq \#\mathcal{E}_\ell + \#\mathcal{E}_\star - \#\mathcal{E}_0.$$

- *Erzeugt ein Teilbaum $\mathcal{E} \subset \mathbb{F}$ ein Partition $\mathcal{E}$ von Γ , so ist diese γ -formregulär, und γ hängt nur von $\mathcal{E}_0$ ab.*

■

Wir führen nun das Konzept der kompatiblen Teilbarkeit aus [Sew72] ein, welches besagt, dass sich die Bisektion eines Elementes nicht weiter als zu seinem Referenzkantennachbar ausbreitet.

3.5 Definition. Es sei $\mathcal{E}_\ell$ ein Gitter.

- Wir nennen zwei benachbarte Elemente $E, E' \in \mathcal{E}_\ell$ mit $\overline{E} \cap \overline{E'} = e \in \mathcal{K}_\ell$ *kompatibel teilbar* (k.t.) falls $e = e_E = e_{E'}$ gilt. In diesem Fall ist also

$$N(E) = E' \iff N(E') = E.$$

- Wir nennen ein Element $E \in \mathcal{E}_\ell$ *isoliert* wenn $N(E) \neq \emptyset$, aber E und $N(E)$ nicht kompatibel teilbar sind, also falls $N(N(E)) \neq E$.
- Wir nennen $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ ein Gitter mit einer *BDD-Referenzkantenverteilung*, wenn es keine isolierten Elemente gibt. Äquivalent dazu ist die folgende Aussage: teilen sich zwei Elemente eine Kante, und ist diese Kante Referenzkante eines der beiden Elemente, so sind die beiden Elemente kompatibel teilbar.

■

Wir formulieren nun den klassischen NVB-Algorithmus zur lokalen Verfeinerung eines Gitters $(\mathcal{E}_\ell, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_\ell})$. Die *markierten Elemente*, welche zur Verfeinerung ausgewählt sind, sammeln wir in $\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{E}_\ell$. Der folgende Algorithmus erzeugt nun ein Gitter $(\mathcal{E}_{\ell+1}, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_{\ell+1}})$, in dem alle Elemente aus $\mathcal{M}_\ell$ geteilt wurden.

3.6 Algorithmus (refine). *Input:* Gitter $(\mathcal{E}_\ell, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_\ell})$, Menge von markierten Elementen $\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{E}_\ell$, Index $i := 0$. *Output:* Gitter $(\mathcal{E}_{\ell+1}, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_{\ell+1}})$.

(o) Definiere die Menge von markierten Referenzkanten $\mathcal{K}_\ell^{(0)} := \{e_E \mid E \in \mathcal{M}_\ell\}$.

(i) Definiere $\mathcal{K}_\ell^{(i+1)} := \left\{e_E \mid E \in \mathcal{E}_\ell \text{ sodass } e \in \mathcal{K}_\ell^{(i)} \text{ für eine Kante } e \subset E\right\}$.

(ii) Falls $\mathcal{K}_\ell^{(i)} \subsetneq \mathcal{K}_\ell^{(i+1)}$, erhöhe Index $i \mapsto i + 1$ und springe zu (i).

(iii) Verfeinere alle Kanten aus $\mathcal{K}_\ell^{(i)}$ laut den Regeln aus Bild 3.1.

3.7 Definition.

- Entsteht das Gitter $\mathcal{E}_{\ell+1}$ aus dem Gitter $\mathcal{E}_\ell$ durch Anwenden von Algorithmus 3.6, so schreiben wir

$$\mathcal{E}_{\ell+1} = \mathbf{refine}(\mathcal{E}_\ell, \mathcal{M}_\ell).$$

- Wir schreiben

$$\mathcal{E}_\star = \mathbf{refine}(\mathcal{E}_\ell)$$

wenn wir sagen wollen, dass das Gitter $\mathcal{E}_\star$ durch endlich viele Aufrufe von Algorithmus 3.6 entsteht, d.h. es gibt ein beliebiges, aber fixes $n \in \mathbb{N}$ und Gitter $\mathcal{E}_\ell, \dots, \mathcal{E}_{\ell+n}$ sowie beliebige $\mathcal{M}_{\ell+j} \subset \mathcal{E}_{\ell+j}$ für $j = 0, \dots, n-1$, sodass

$$\mathcal{E}_{\ell+j} = \mathbf{refine}(\mathcal{E}_{\ell+j-1}, \mathcal{M}_{\ell+j-1}) \quad \text{für } j = 1, \dots, n-1,$$

und $\mathcal{E}_{\ell+n} = \mathcal{E}_\star$.

- Für $E \in \mathcal{E}_\ell$ bezeichnet $\mathbf{chain}(\mathcal{E}_\ell, E)$ die endliche Folge von verschiedenen Elementen aus $\mathcal{E}_\ell$, die durch den Aufruf von $\mathbf{refine}(\mathcal{E}_\ell, \{E\})$ geteilt werden, d.h.: $\mathbf{chain}(\mathcal{E}_\ell, E) = (E_j)_{j=1}^n$ mit $E_1 = E$, $N(E_j) = E_{j+1}$ für $j = 1, \dots, n-1$. Die Länge $n \in \mathbb{N}$ ist so gewählt, dass entweder $N(E_n) = \emptyset$ oder $N(E_n) \in \mathbf{chain}(\mathcal{E}_\ell, \{E\})$ gilt.

Im Folgenden benötigen wir Aussagen über die Eigenschaften von Gittern, die (lokale) Verfeinerungen eines groben Gitters $\mathcal{E}_0$ mit einer BDD-Referenzkantenverteilung sind. Das folgende Lemma ist samt Beweis zu finden in [Ste08b, Corollary 4.6] oder [BDD04, Lemma 2.2, (ii)].

3.8 Lemma. *Bezeichne $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ ein Gitter mit einer BDD-Referenzkantenverteilung und $\mathcal{E}_\ell = \mathbf{refine}(\mathcal{E}_0)$ eine beliebige Verfeinerung. Dann gilt für $E \in \mathcal{E}_\ell$ mit $N(E) \neq \emptyset$ einer der beiden folgenden Fälle:*

- (i) $\text{gen}(E) = \text{gen}(N(E))$ und $E, N(E)$ sind kompatibel teilbar, oder
- (ii) $\text{gen}(E) = \text{gen}(N(E)) + 1$ und E ist kompatibel teilbar mit einem Sohn von $N(E)$.

■

Wir erweitern dieses Lemma um eine Aussage, die wir im Folgenden benötigen werden.

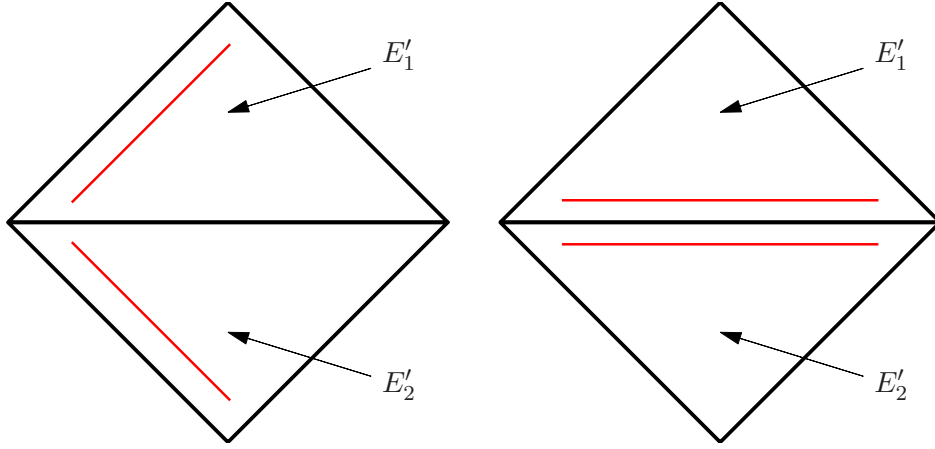


Abbildung 3.2: Zum Beweis von Lemma 3.11 (i).

3.9 Korollar. Bezeichne $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ ein Gitter mit einer BDD-Referenzkantenverteilung und $\mathcal{E}_\ell = \text{refine}(\mathcal{E}_0)$ eine beliebige Verfeinerung. Dann gilt

$$|\text{gen}(E_1) - \text{gen}(E_2)| \leq 1 \quad \text{für } E_1, E_2 \in \mathcal{E}_\ell \text{ mit } \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 = e \in \mathcal{K}_\ell.$$

Beweis. Sei e eine Kante von $\mathcal{E}_\ell$, an der zwei Elemente $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_\ell$ liegen, d.h.: $\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 = e$. Ist diese Kante Referenzkante einer dieser beiden Elemente, so folgt die Aussage aus Lemma 3.8. Ist sie nicht Referenzkante von einem der beiden Elemente, so betrachte die uniforme *bisec*₁-Verfeinerung $\widehat{\mathcal{E}}_\ell := \text{refine}(\mathcal{E}_\ell, \mathcal{E}_\ell)$ von $\mathcal{E}_\ell$. In $\widehat{\mathcal{E}}_\ell$ ist e noch immer Kante, sie ist sogar Referenzkante der beiden anliegenden Elemente E'_1 und E'_2 , wie leicht aus Abbildung 3.1 zu ersehen ist. Daher gilt laut Lemma 3.8, dass $\text{gen}(E'_1) = \text{gen}(E'_2)$. Dies bedeutet aber, dass schon $\text{gen}(E_1) = \text{gen}(E_2)$ gegolten hat. $\square$

Im Weiteren wollen wir ähnliche Eigenschaften wie in den letzten zwei Aussagen für (lokale) Verfeinerungen eines Gitters mit beliebiger Referenzkantenverteilung zeigen. Dazu wird es sich als bequem herausstellen, ein Element oder zwei benachbarte Elemente des groben Gitters $\mathcal{E}_0$ als “Teilgitter” zu betrachten. Eine (lokale) einfache Verfeinerung von $\mathcal{E}_0$ ist nicht notwendigerweise eine einfache Verfeinerung von diesem Teilgitter. Wir halten aber im folgenden fest, dass eine (lokale) einfache Verfeinerung von $\mathcal{E}_0$ auf einem Teilgitter äquivalent erhalten werden kann durch mehrere (lokale) Verfeinerungen von diesem Teilgitter.

3.10 Lemma. Sei $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ ein Gitter mit beliebiger Referenzkantenverteilung. Sei $\omega \subset \mathcal{E}_0$ eine Menge von Elementen. Wir definieren $W := \bigcup_{E \in \omega} \overline{E}$. Bezeichne mit $\mathcal{E} = \text{refine}(\mathcal{E}_0)$ eine beliebige Verfeinerung. Das Teilgitter $\mathcal{E}|_W$ erfüllt dann

$$\mathcal{E}|_W = \text{refine}(\mathcal{E}_0|_W).$$

■

Mit Hilfe von Lemma 3.10 können wir Lemma 3.8 und Korollar 3.9 auf Gitter mit beliebiger Referenzkantenverteilung erweitern.

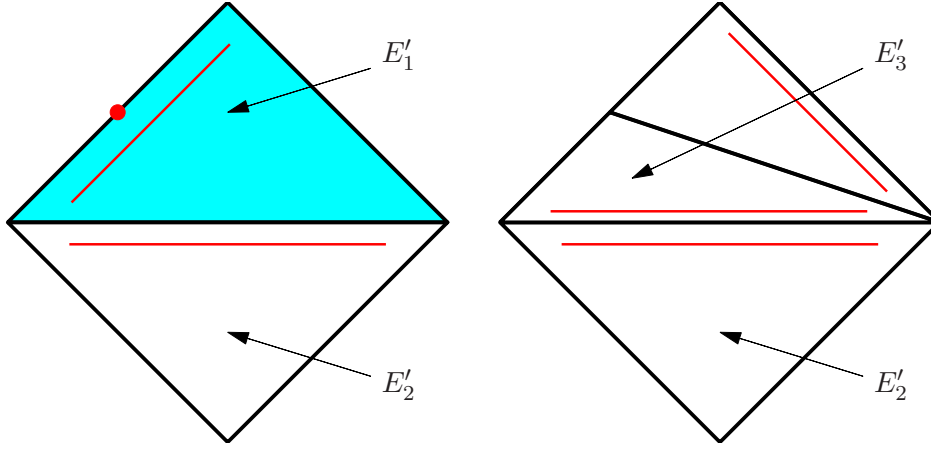


Abbildung 3.3: Zum Beweis von Lemma 3.11 (i).

3.11 Lemma. Bezeichne $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ ein Gitter mit beliebiger Referenzkantenverteilung. Dann gilt

(i) Für $\mathcal{E}_\ell = \text{refine}(\mathcal{E}_0)$ gilt

$$|\text{gen}(E_1) - \text{gen}(E_2)| \leq 2 \quad \text{für } E_1, E_2 \in \mathcal{E}_\ell \text{ mit } \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 = e \in \mathcal{K}_\ell.$$

(ii) Sei $\mathcal{E}_\ell = \text{refine}(\mathcal{E}_0)$ und $E \in \mathcal{E}_\ell$ mit $\text{gen}(N(E)) > \text{gen}(E)$. Dann sind E und $N(E)$ kompatibel teilbar, und $\text{gen}(N(E)) = \text{gen}(E) + 1$.

Beweis.

ad(i): Da sich E_1 und E_2 eine Kante teilen, können wir zwei getrennte Fälle betrachten.

- (1) Die Elemente E_1 und E_2 haben denselben Vorfahren aus $\mathcal{E}_0$, und dieser sei mit $E \in \mathcal{E}_0$ bezeichnet. Dann ist $(\mathcal{E}_0|_E, (e_E))$ ein Gitter mit einer BDD-Referenzkantenverteilung. Laut Lemma 3.10 gilt

$$\mathcal{E}_\ell|_E = \text{refine}(\mathcal{E}_0|_E) \tag{3.1}$$

und $E_1, E_2 \in \mathcal{E}_\ell$. Nun ist es aber wegen (3.1) möglich, Korollar 3.9 auf $\mathcal{E}_\ell|_E$ anzuwenden, woraus also $|\text{gen}(E_1) - \text{gen}(E_2)| \leq 1$ folgt.

- (2) Die Elemente E_1 und E_2 haben nicht denselben Vorfahren aus $\mathcal{E}_0$. Dann muss also $\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 = e \subset e_0 \in \mathcal{K}_0$ gelten, und E_1 hat einen Vorfahren $E'_1 \in \mathcal{E}_0$, während E_2 einen Vorfahren $E'_2 \in \mathcal{E}_0$ hat mit $E'_1 \neq E'_2$. Man beachte, dass $\overline{E}'_1 \cap \overline{E}'_2 = e_0$. Ist e_0 Referenzkante von E'_1 und E'_2 (siehe Abbildung 3.2 rechts), so ist $(\mathcal{E}_0|_{E'_1 \cup E'_2}, (e_0, e_0))$ ein Gitter mit BDD-Referenzkantenverteilung, und wir benutzen wie in Fall (1) Korollar 3.9, um $|\text{gen}(E_1) - \text{gen}(E_2)| \leq 1$ zu erhalten. Analog kann der Fall betrachtet werden, wenn e_0 weder Referenzkante von E'_1 noch von E'_2 ist (siehe Abbildung 3.2, links).

Nun betrachten wir den Fall, dass e_0 Referenzkante von E'_2 ist, aber nicht von E'_1 . Dieser Fall ist prototypisch in Abbildung 3.3 (links) dargestellt. Eine beliebige Verfeinerung $\mathcal{E}_\ell$ von $\mathcal{E}_0$, die also E'_1 oder E'_2 teilen würde, muss aufgrund der speziellen Verteilung der Referenzkanten auf jeden Fall

das Element E'_1 teilen, dies führt auf Abbildung 3.3 (rechts). Es ist also $\mathcal{E}' := ((E'_3, E'_2), (e_0, e_0))$ ein Gitter mit einer BDD-Referenzkantenverteilung. Wir führen eine neue Generations-Funktion gen' auf $\mathcal{E}'$ ein, indem wir $\text{gen}'(E'_3) = \text{gen}'(E'_2) = 0$ setzen. Dann ist also mit Lemma 3.10

$$\mathcal{E}_\ell|_{\overline{E'_2 \cup E'_3}} = \text{refine}(\mathcal{E}'),$$

und Korollar 3.9 liefert $|\text{gen}'(E_1) - \text{gen}'(E_2)| \leq 1$. Wir bemerken aber, dass $\text{gen}|_{E'_1} = \text{gen}' + 1$ und $\text{gen}|_{E'_2} = \text{gen}'$ gilt, woraus also

$$|\text{gen}(E_1) - \text{gen}(E_2)| \leq 2$$

folgt.

ad(ii): Wir zeigen

$$\text{gen}(N(E)) > \text{gen}(E) \implies E \text{ und } N(E) \text{ sind kompatibel teilbar.}$$

durch Kontraposition.

Wir starten mit der prototypischen Situation aus Abbildung 3.4 (links oben) mit $E = E_2$ und $N(E) = E_1$ und nehmen an, dass $\text{gen}(E_1) > \text{gen}(E_2)$. Wir zeigen im weiteren, dass dieser Fall nicht auftreten kann, indem wir durch geeignete Verfeinerungen einen Widerspruch zu (i) herstellen: Eine uniforme *bisec*₃-Verfeinerung von $\mathcal{E}_\ell$, eingeschränkt auf den betrachteten Patch, hat die Struktur aus Abbildung 3.4 (rechts oben). Markieren wir das ausgezeichnete Element, so erhalten wir die Situation in 3.4 (links unten). Ausserhalb des abgebildeten Bereiches verfeinern wir das Gitter uniform, während wir im inneren nur das ausgezeichnete Element durch eine Bisektion teilen. Dies liefert schließlich 3.4 (rechts unten). Es gilt $\text{gen}(E'_1) = \text{gen}(E_1) + 5$ sowie $\text{gen}(E'_2) = \text{gen}(E_2) + 3$. Weil wir $\text{gen}(E_1) > \text{gen}(E_2)$ angenommen haben, schließen wir

$$\text{gen}(E'_1) = \text{gen}(E_1) + 5 \geq \text{gen}(E_2) + 5 = \text{gen}(E'_2) + 2,$$

was aber ein Widerspruch zu Punkt (i) ist. Daher mussten E_1 und $E_2 = N(E_1)$ schon kompatibel teilbar gewesen sein. Wir zeigen nun

$$\text{gen}(N(E)) \leq \text{gen}(E) + 1.$$

Angenommen, $\text{gen}(N(E)) > \text{gen}(E) + 1$ gilt für $E \in \mathcal{E}_\ell$. Laut dem in diesem Punkt bereits Gezeigten gilt also, dass E und $N(E)$ kompatibel teilbar sind. Wir betrachten also das Setting aus Abbildung 3.5 (links oben) mit $E = E_2$ und $N(E) = E_1$. Wir nehmen an, dass $\text{gen}(E_1) > \text{gen}(E_2) + 1$ ist und verfeinern einmal mit *bisec*₃ (Abbildung 3.5, rechts oben), und jeweils zweimal mit lokalem *bisec*₁, sodass wir schließlich die Situation aus Abbildung 3.5 (rechts unten) erhalten. Nun ist also $\text{gen}(E'_1) = \text{gen}(E_1) + 4$ und $\text{gen}(E'_2) = \text{gen}(E_2) + 3$. Dies führt auf

$$\text{gen}(E'_1) = \text{gen}(E_1) + 4 > \text{gen}(E_2) + 5 = \text{gen}(E'_2) + 2.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu Punkt (i) und zeigt

$$\text{gen}(N(E)) = \text{gen}(E_1) \leq \text{gen}(E_2) + 1 = \text{gen}(E) + 1.$$

□

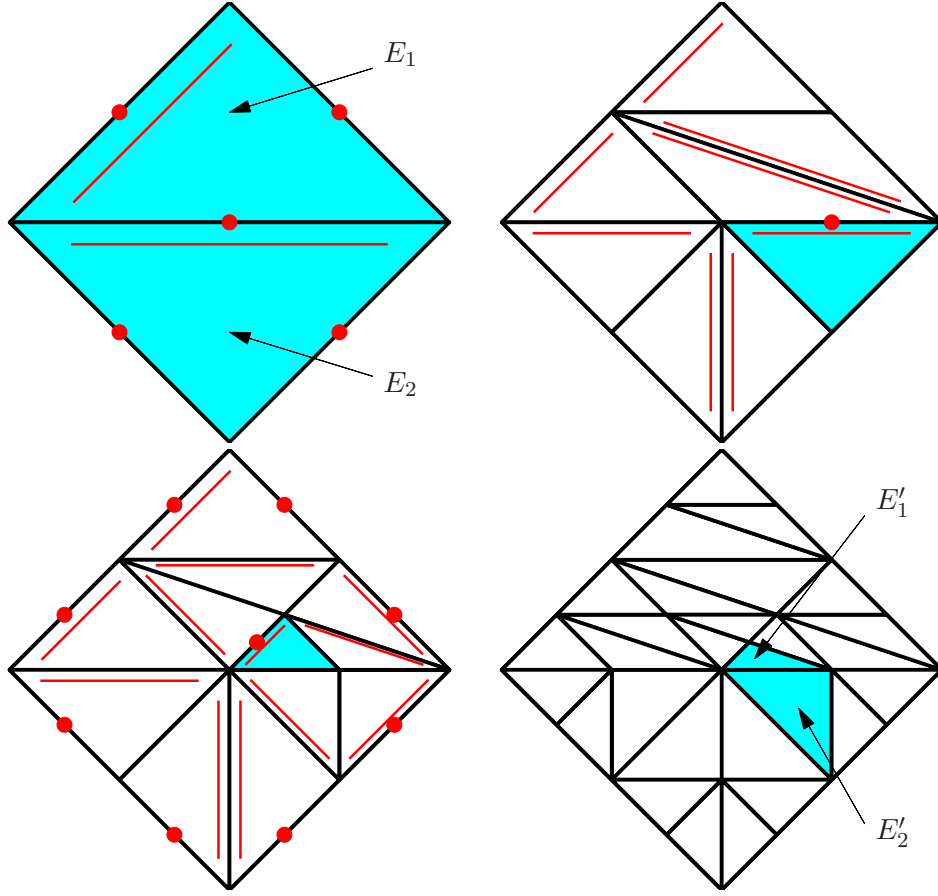


Abbildung 3.4: Zum Beweis von Lemma 3.11 (ii).

Das ein Gitter mit beliebiger Referenzkantenverteilung lokal ein BDD-Gitter ist, führt uns im Weiteren zu folgenden Aussagen.

3.12 Lemma. *Bezeichne $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ ein Gitter mit beliebiger Referenzkantenverteilung.*

- (i) *Sei $E \in \mathcal{E}_\ell = \text{refine}(\mathcal{E}_0)$ ein Element. Dann sind benachbarte Nachfahren von E mit gleichem Level immer kompatibel teilbar.*
- (ii) *Seien E, E' aus $\mathcal{E}_0$ mit E und E' kompatibel teilbar. Dann sind benachbarte Nachfahren E_1 von E bez. Nachfahren E'_1 von E' , die gleiches Level haben, kompatibel teilbar.*
- (iii) *Sei $E \in \mathcal{E}_\ell := \text{refine}(\mathcal{E}_0)$. Es gelte $\text{gen}(N(E)) = \text{gen}(E)$, und E und $N(E)$ seien nicht kompatibel teilbar. Dann muss die gemeinsame Kante von E und $N(E)$ Teil einer Kante des größten Gitters $\mathcal{E}_0$ sein.*
- (iv) *Sei $E \in \mathcal{E}_\ell := \text{refine}(\mathcal{E}_0)$. Es existiere eine endliche Folge von paarweise verschiedenen Elementen $(E_j)_{j=1}^n$ mit $E_j \in \mathcal{E}_\ell$, $E_j = N(E_{j-1})$ und E_j haben alle gleichen Level. Dann gilt schon $n \leq C_{\text{chain}}$ mit einer Konstanten $C_{\text{chain}} \in \mathbb{N}$, die nur von $\mathcal{E}_0$, aber nicht von $\mathcal{E}_\ell$ abhängt.*

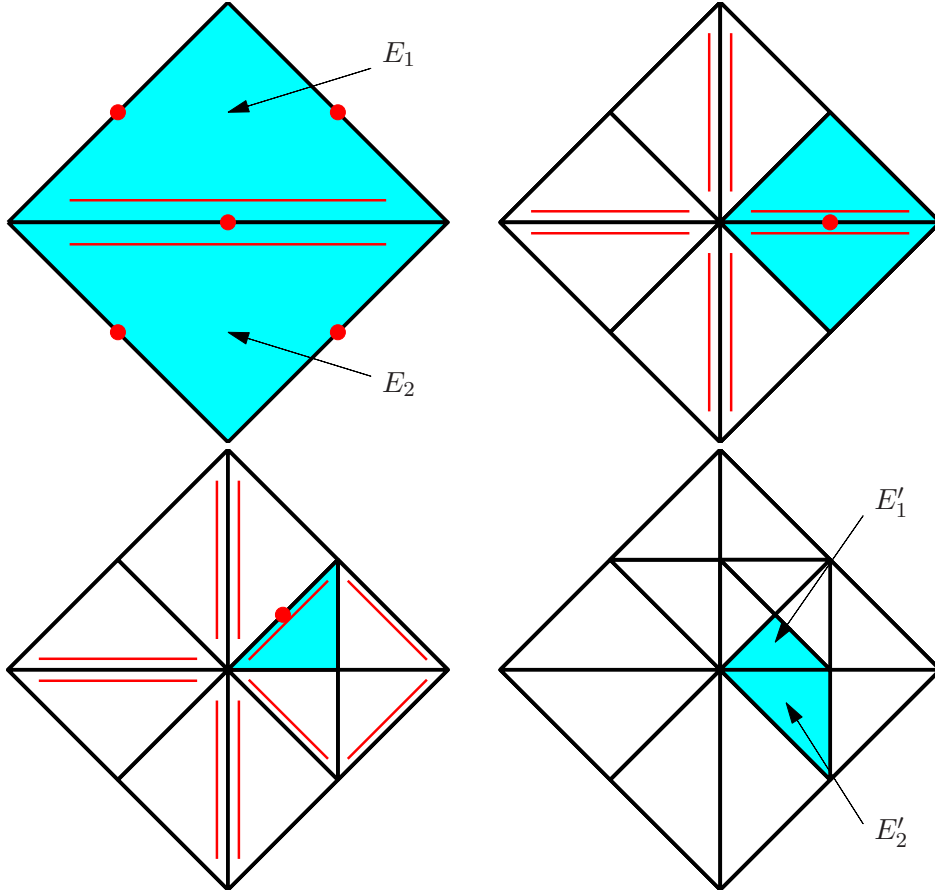


Abbildung 3.5: Zum Beweis von Lemma 3.11 (ii).

Beweis.

ad (i): Aufgrund von Lemma 3.10 wissen wir

$$\mathcal{E}_\ell|_E = \text{refine}(\mathcal{E}_0|_E).$$

Da nun $(\mathcal{E}_0|_E, e_E)$ ein Gitter mit einer BDD-Referenzkantenverteilung ist, folgt die Aussage mit Lemma 3.8.

ad (ii): Dies folgt analog zu Punkt (i).

ad (iii): Es gelte also $\text{gen}(N(E)) = \text{gen}(E)$, und E und $N(E)$ seien nicht kompatibel teilbar. Wären E und $N(E)$ Nachfahren eines Elementes $E' \in \mathcal{E}_0$, so würde laut Punkt (i) gelten, dass E und $N(E)$ kompatibel teilbar sind, was aber den Annahmen widerspricht. Daher können E und $N(E)$ nur Nachfahren von zwei benachbarten Elementen E' und E'' aus $\mathcal{E}_0$ sein, also ist die gemeinsame Kante von E und $N(E)$ Teil einer Kante aus $\mathcal{K}_0$.

ad (iv): o.B.d.A. gelte $n > 3$. Da die Elemente paarweise verschieden sind, können die Paare E_i, E_{i+1} für $i \in \{1, \dots, n-2\}$ auf jeden Fall nicht kompatibel teilbar sein. Weiters gilt, dass die Referenzkanten

der Elemente $E_1, \dots, E_{n-3}$ mindestens jeweils einen Knoten aus dem Gitter $\mathcal{E}_0$ beinhalten müssen. Denn gäbe es eine Referenzkante eines E_k mit $k \in \{1, \dots, n-3\}$, die keinen ihrer Knoten in $\mathcal{E}_0$ hat, so wären die beiden restlichen Kanten von E_{k+1} nicht Teil von Kanten aus $\mathcal{E}_0$. Damit hätten E_{k+1} und E_{k+2} aber denselben Vater $E \in \mathcal{E}_0$. Dann müssten E_{k+1} und E_{k+2} aber laut (i) kompatibel teilbar sein.

Wir schließen mit dem bisher Gesagten, dass die Referenzkanten der Elemente $E_1, \dots, E_{n-3}$ allesamt mindestens einen Knoten aus dem Gitter $\mathcal{E}_0$ besitzen. Da aber Newest Vertex Bisection auf γ -formreguläre Gitter führt, ist die Anzahl der Elemente, die an einem Knoten anstoßen, uniform beschränkt. Somit gilt also

$$n - 3 \lesssim \#\mathcal{N}_0,$$

woraus also $n \leq C$ folgt. Nun wählen wir $C_{\text{chain}} := \lceil C \rceil$. □

3.13 Lemma. *Bezeichne $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ ein Gitter mit beliebiger Referenzkantenverteilung. Sei $\mathcal{E}_\ell = \text{refine}(\mathcal{E}_0)$. Für alle E' , die durch $\text{refine}(\mathcal{E}_\ell, \{E\})$ erzeugt werden, gilt dann*

$$\text{gen}(E') \leq \text{gen}(E) + 2, \quad \text{sowie} \quad (3.2)$$

$$\text{dist}(E, E') \leq C_{\text{dist}} C^{\text{diam}} \sum_{k=\text{gen}(E')}^{\text{gen}(E)+2} 2^{-k/2} \leq \frac{C_{\text{dist}} C^{\text{diam}}}{1 - 2^{-1/2}} 2^{-\text{gen}(E')/2}. \quad (3.3)$$

wobei $C_{\text{dist}} := 2C_{\text{chain}} + 2^{3/2}$ nur von $\mathcal{E}_0$ abhängt und C^{diam} in Lemma 3.4 definiert ist.

Beweis. Die Eigenschaft (3.2) folgt unmittelbar aus den vorangegangenen Aussagen: Ist E' Sohn eines Elementes $\tilde{E}$ aus $\text{chain}(\mathcal{E}_\ell, E)$ mit $\text{gen}(\tilde{E}) \leq \text{gen}(E)$, so folgt (3.2), da die Levelfunktion gen lokal um höchstens 2 erhöht wird. Ist jedoch E' Sohn von $\tilde{E}$ aus $\text{chain}(\mathcal{E}_\ell, E)$ mit $\text{gen}(\tilde{E}) > \text{gen}(E)$, so folgt aus Lemma 3.11 (ii), dass $\tilde{E}$ das letzte Element von $\text{chain}(\mathcal{E}_\ell, E)$ ist und dass $\text{gen}(\tilde{E}) = \text{gen}(E) + 1$. Daher wird es nur einmal geteilt, sodass (3.2) folgt.

Zu (3.3): Zuerst bemerken wir, dass die zweite Abschätzung eine Anwendung der Rechenregeln für die geometrische Reihe ist. Wir beschäftigen uns also im Folgenden mit der ersten Abschätzung. Mit $\tilde{E} \in \text{chain}(\mathcal{E}_\ell, E)$ bezeichnen wir wieder den Vater von E' . Ist $c_\ell(E) := \#\text{chain}(\mathcal{E}_\ell, E) \leq 2$, so gilt klarerweise $\text{dist}(E, E') = 0$ und die gewünschte Abschätzung gilt. Wir nehmen also im folgenden $c_\ell(E) > 2$ an und zeigen die Aussage per Induktion nach $\text{gen}(E)$. Zunächst sei $\text{gen}(E) = 0$ und $\text{chain}(\mathcal{E}_\ell, E) = (E_j)_{j=1}^{c_\ell(E)}$. Lemma 3.12 (iv) und Lemma 3.11 (ii) liefern $c_\ell(E) \leq C_{\text{chain}} + 1$ und $\text{gen}(E_k) = 0$ für $k = 1, \dots, c_\ell(E) - 1$. Aus der letzten Gleichheit schließen wir mit Lemma 3.4, dass $\text{diam}(E_k) \leq C^{\text{diam}}$. Wir erhalten also

$$\text{dist}(E, E') \leq \sum_{k=2}^{c_\ell(E)-1} \text{diam}(E_k) \leq \sum_{k=2}^{c_\ell(E)-1} C^{\text{diam}} \leq 2C_{\text{chain}} C^{\text{diam}} 2^{-1}.$$

Aus der bereits gezeigten Abschätzung (3.2) folgt $\text{gen}(E') \in \{1, 2\}$, somit auch $2^{-1} \leq \sum_{k=\text{gen}(E')}^{\text{gen}(E)+2} 2^{-k/2}$. Mit

$2C_{\text{chain}} \leq C_{\text{dist}}$ erhalten wir nun

$$\text{dist}(E, E') \leq C_{\text{dist}} C^{\text{diam}} \sum_{k=\text{gen}(E')}^{\text{gen}(E)+2} 2^{-k/2}.$$

Dies zeigt die erste Abschätzung in (3.3) für $\text{gen}(E) = 0$. Wir nehmen nun an, diese Abschätzung gilt für alle E mit $\text{gen}(E) \leq n$. Nun sei $E \in \mathcal{E}_\ell$ mit $\text{gen}(E) = n + 1$ gewählt. Wir wählen die ersten J Elemente $(E_j)_{j=1}^J$ aus $\mathbf{chain}(\mathcal{E}_\ell, E)$ mit $\text{gen}(E_j) = \text{gen}(E)$ für $j = 1, \dots, J$ und $\text{gen}(E_{J+1}) \neq \text{gen}(E)$ falls $c_\ell(E) > J$. Lemma 3.12 (iv) besagt zunächst $J \leq C_{\text{chain}}$. Wir unterscheiden nun drei Fälle:

- (A) $\tilde{E} \in (E_j)_{j=1}^J$,
- (B) $\tilde{E} \in \mathbf{chain}(\mathcal{E}_\ell, E) \setminus (E_j)_{j=1}^J$, $c_\ell(E) > J$, und $\text{gen}(E_{J+1}) > \text{gen}(E)$,
- (C) $\tilde{E} \in \mathbf{chain}(\mathcal{E}_\ell, E) \setminus (E_j)_{j=1}^J$, $c_\ell(E) > J$, und $\text{gen}(E_{J+1}) < \text{gen}(E)$.

Im Fall (A) gilt $\text{gen}(E') \in \{\text{gen}(E) + 1, \text{gen}(E) + 2\}$ und $\text{dist}(E, E') \leq \sum_{k=2}^J \text{diam}(E_k)$. Im Fall (B) folgt mit Hilfe von Lemma 3.11 (ii) dass $\text{gen}(E_{J+1}) = \text{gen}(E) + 1$ und E_{J+1} und E_J kompatibel teilbar sein müssen. Daher muss wegen $\tilde{E} \in \mathbf{chain}(\mathcal{E}_\ell, E) \setminus (E_j)_{j=1}^J$ also $\tilde{E} = E_{J+1}$ gelten, und $\tilde{E}$ wird nur einmal geteilt. Daher erfüllt E' als Sohn von $\tilde{E}$ also $\text{gen}(E') = \text{gen}(\tilde{E}) + 1 = \text{gen}(E) + 2$. In den beiden Fällen (A) und (B) gilt also

$$\begin{aligned} \text{dist}(E, E') &\leq \sum_{k=2}^J \text{diam}(E_k) \leq C^{\text{diam}} \sum_{k=2}^J 2^{-\text{gen}(E_k)/2} \leq C_{\text{chain}} C^{\text{diam}} 2^{-\text{gen}(E)/2} \\ &= 2C_{\text{chain}} C^{\text{diam}} 2^{-(\text{gen}(E)+2)/2} \leq C_{\text{dist}} C^{\text{diam}} \sum_{k=\text{gen}(E')}^{\text{gen}(E)+2} 2^{-k/2}. \end{aligned}$$

Im Fall (C) benützen wir die Dreiecksungleichung

$$\text{dist}(E, E') \leq \text{dist}(E_{J+1}, E') + \text{diam}(E_{J+1}) + \sum_{k=2}^J \text{diam}(E_k).$$

Da in diesem Falle $\text{gen}(E_{J+1}) < \text{gen}(E)$ gilt, folgt aus Lemma 3.11 (i), dass $\text{gen}(E_{J+1}) = \text{gen}(E_J) - i$ für $i \in \{1, 2\}$. Aufgrund der Induktionshypothese können wir den ersten Term auf der rechten Seite abschätzen. Den zweiten Term schätzen wir durch $\text{diam}(E_{J+1}) \leq C^{\text{diam}} 2^{-(\text{gen}(E)-i)/2}$ und den dritten Term durch $\text{diam}(E_k) \leq C^{\text{diam}} 2^{-\text{gen}(E)/2}$ ab und erhalten

$$\begin{aligned} \text{dist}(E, E') &\leq C_{\text{dist}} C^{\text{diam}} \sum_{k=\text{gen}(E')}^{\text{gen}(E)-i+2} 2^{-k/2} + C^{\text{diam}} 2^{-(\text{gen}(E)-i)/2} + C_{\text{chain}} C^{\text{diam}} 2^{-\text{gen}(E)/2} \\ &= C_{\text{dist}} C^{\text{diam}} \sum_{k=\text{gen}(E')}^{\text{gen}(E)-i+2} 2^{-k/2} + C^{\text{diam}} 2^{-\text{gen}(E)/2} 2^{i/2} + 2C_{\text{chain}} C^{\text{diam}} 2^{-(\text{gen}(E)+2)/2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Im Fall $i = 1$ wird (3.4) zu

$$\begin{aligned}
\text{dist}(E, E') &\leq C_{\text{dist}} C^{\text{diam}} \sum_{k=\text{gen}(E')}^{\text{gen}(E)+1} 2^{-k/2} + C^{\text{diam}} 2^{-(\text{gen}(E)+2)/2} 2^{3/2} + 2C_{\text{chain}} C^{\text{diam}} 2^{-(\text{gen}(E)+2)/2} \\
&\leq C_{\text{dist}} C^{\text{diam}} \sum_{k=\text{gen}(E')}^{\text{gen}(E)+1} 2^{-k/2} + (2C_{\text{chain}} + 2^{3/2}) C^{\text{diam}} 2^{-(\text{gen}(E)+2)/2} \\
&= C_{\text{dist}} C^{\text{diam}} \sum_{k=\text{gen}(E')}^{\text{gen}(E)+2} 2^{-k/2}.
\end{aligned}$$

Im Fall $i = 2$ wird (3.4) zu

$$\begin{aligned}
\text{dist}(E, E') &\leq C_{\text{dist}} C^{\text{diam}} \sum_{k=\text{gen}(E')}^{\text{gen}(E)} 2^{-k/2} + C^{\text{diam}} 2^{-(\text{gen}(E)+1)/2} 2^{3/2} + 2C_{\text{chain}} C^{\text{diam}} 2^{-(\text{gen}(E)+2)/2} \\
&\leq C_{\text{dist}} C^{\text{diam}} \sum_{k=\text{gen}(E')}^{\text{gen}(E)} 2^{-k/2} + C_{\text{dist}} C^{\text{diam}} 2^{-(\text{gen}(E)+1)/2} + C_{\text{dist}} C^{\text{diam}} 2^{-(\text{gen}(E)+2)/2} \\
&= C_{\text{dist}} C^{\text{diam}} \sum_{k=\text{gen}(E')}^{\text{gen}(E)+2} 2^{-k/2}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt also die erste Abschätzung in (3.3). $\square$

Aussagen der Form $\#\mathcal{R}_\ell \leq C\#\mathcal{M}_\ell$ für ℓ -unabhängige Konstanten sind wünschenswert, aber nicht möglich, wie ein einfaches Gegenbeispiel aus [NSV09, Kapitel 4.5] zeigt, welches in Abbildung 3.6 visualisiert ist. Es wird sich jedoch zeigen, dass eine schwächere Aussage für den Beweis der Quasioptimalität von adaptiven Verfahren ausreichend ist, die die kumulativen Effekte der Markierung von allen bisherigen Gittern des adaptiven Verfahrens miteinbezieht. Eine solche Aussage wurde für Gitter in $\mathbb{R}^2$ mit einer BDD-Referenzkantenverteilung in [BDD04] gezeigt und in [Ste08b] für höhere Dimensionen verallgemeinert. Es stellt sich natürlich die Frage nach effizienten Algorithmen, welche die BDD-Referenzkantenverteilung sich erstellen. Eine *bisec*₃-Verfeinerung eines groben Gitters besitzt klarerweise immer eine BDD-Referenzkantenverteilung, aber dies vervierfacht die Anzahl der Elemente und ist für praktische Anwendungen von adaptiven Randelementmethoden unvorteilhaft. Wir verallgemeinern daher die Aussagen bezüglich der Optimalität des Netzabschlusses aus [BDD04] und [Ste08b] auf Gitter mit beliebiger Referenzkantenverteilung. Der Beweis folgt im wesentlichen [NV11, Kapitel 6.3], wird aber aufgrund leichter Änderungen angegeben.

3.14 Lemma. *Die Verteilung der Referenzkanten auf $\mathcal{E}_0$ sei beliebig. Seien $\mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_k$ Gitter und $\mathcal{M}_j \subseteq \mathcal{E}_j$ mit $\mathcal{E}_j = \text{refine}(\mathcal{E}_{j-1}, \mathcal{M}_{j-1})$ für alle $j = 1, \dots, k$. Dann gilt*

$$\#\mathcal{E}_k - \#\mathcal{E}_0 \leq C_{\text{nvb}} \sum_{j=0}^{k-1} \#\mathcal{M}_j \quad \text{für } k \geq 1,$$

und $C_{\text{nvb}} > 0$ hängt nur von $\mathcal{E}_0$ ab.

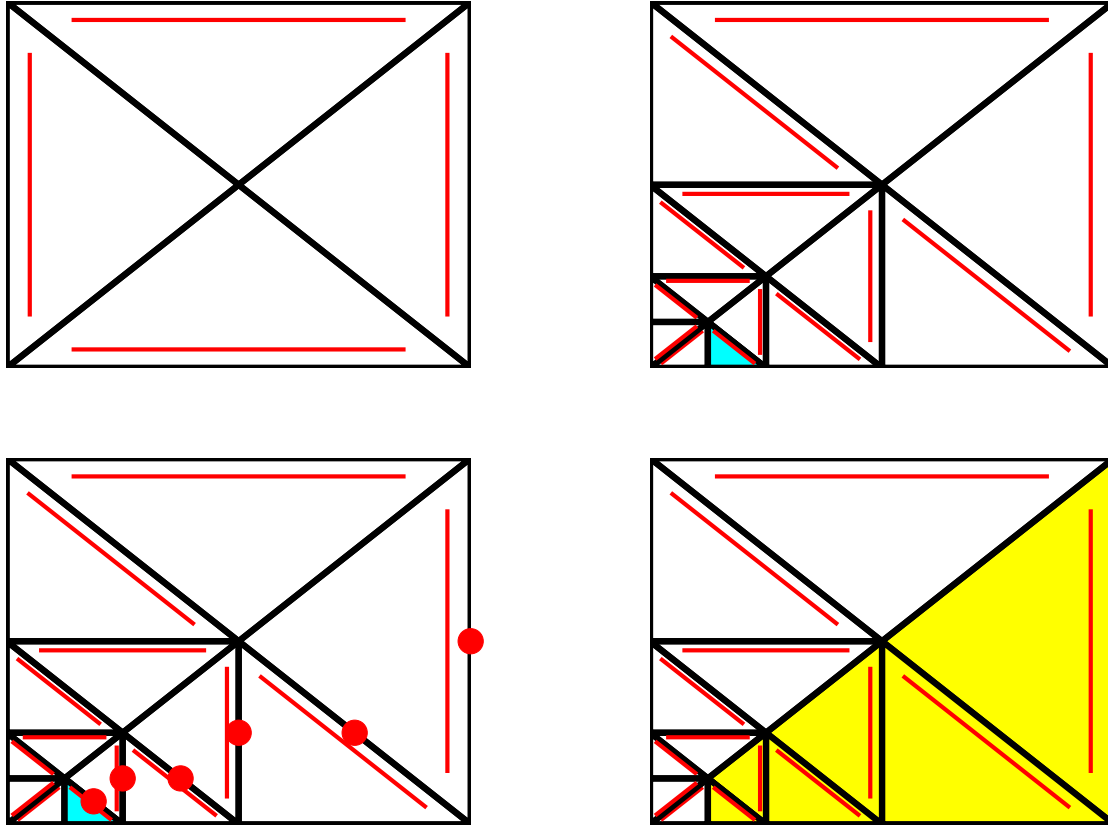


Abbildung 3.6: Ein Gegenbeispiel aus [NV11] dazu, dass die Anzahl verfeinerter Elemente nicht durch die Anzahl der markierten Elemente abgeschätzt werden kann. Wir starten mit dem Gitter links oben, und führen eine beliebige Anzahl von *bisec*₂ Schritten durch (in diesem Fall 5), um die Konfiguration rechts oben zu erhalten. Dort markieren wir dann das eingefärbte Element. Die Regeln für den Netzabschluss besagen, dass wir die Kanten markieren müssen, die links unten eingezeichnet sind. Wir schließen also, dass wir die Elemente, die rechts unten eingefärbt sind, verfeinern müssen. Es ist also $\#\mathcal{M}_\ell = 1$, aber $\#\mathcal{R}_\ell = 6$. Wir können dies für eine beliebige Anzahl von *bisec*₂-Schritte durchführen, ganz allgemein erhalten wir dann $\#\mathcal{M}_\ell = 1$ und $\#\mathcal{R}_\ell \simeq \ell$. Eine Abschätzung $\#\mathcal{R}_\ell \lesssim \#\mathcal{M}_\ell = 1$ kann also nicht gelten.

Beweis. Die Schreibweise $\mathcal{E}_k = \mathbf{refine}(\mathcal{E}_0)$ kürzt laut Definition folgenden Sachverhalt ab: Für $j = 1, \dots, k$ gibt es Gitter $\mathcal{E}_j$ und Mengen $\mathcal{M}_{j-1} \subset \mathcal{E}_{j-1}$ sodass

$$\mathcal{E}_j = \mathbf{refine}(\mathcal{E}_{j-1}, \mathcal{M}_{j-1}).$$

Wir definieren für die paarweise disjunkten Mengen $\mathcal{M}_j$ die Menge $\mathcal{M} := \bigcup_{j=0}^{k-1} \mathcal{M}_j$ und eine Funktion $\lambda : \mathcal{E}_k \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ folgendermaßen: Zuerst wählen wir zwei Folgen positiver Zahlen $(a_\ell)_{\ell=-2}^\infty$ und $(b_\ell)_{\ell=0}^\infty$ mit den Eigenschaften

$$\sum_{\ell \geq -2} a_\ell =: A < \infty, \quad \sum_{\ell \geq 0} 2^{-\ell/2} b_\ell =: B < \infty, \quad \inf_{\ell \geq 1} b_\ell a_\ell =: c > 0$$

und $b_0 \geq 1$. Ein Beispiel für eine gültige Wahl für diese Folgen ist in Bemerkung 3.15 angegeben. Die Funktion λ wird nun definiert als

$$\lambda(E, E_\star) = \begin{cases} a_{\text{gen}(E_\star) - \text{gen}(E)}, & \text{falls } \text{dist}(E, E_\star) < C_\lambda B 2^{-\text{gen}(E)/2} \text{ und } \text{gen}(E) \leq \text{gen}(E_\star) + 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Konstante C_λ ist definiert als $C_\lambda := C^{\text{diam}} \left(1 + \frac{C_{\text{dist}}}{1-2^{-1/2}}\right)$. Wir zeigen im Folgenden

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_k \setminus \mathcal{E}_0} \lambda(E, E_\star) \leq C^\$ \quad \text{für alle } E_\star \in \mathcal{M} \text{ und} \quad (3.5)$$

$$\sum_{E_\star \in \mathcal{M}} \lambda(E, E_\star) \geq C_\$ \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}_k \setminus \mathcal{E}_0 \quad (3.6)$$

mit Konstanten $C_\$, C^\$ > 0$. Die Kombination aus den letzten beiden Abschätzungen ergibt das Gewünschte:

$$C_\$ (\#\mathcal{E}_k - \#\mathcal{E}_0) \leq \sum_{E \in \mathcal{E}_k \setminus \mathcal{E}_0} \sum_{E_\star \in \mathcal{M}} \lambda(E, E_\star) = \sum_{E_\star \in \mathcal{M}} \sum_{E \in \mathcal{E}_k \setminus \mathcal{E}_0} \lambda(E, E_\star) \leq C^\$ \#\mathcal{M} = C^\$ \sum_{j=0}^{k-1} \#\mathcal{M}_j.$$

Wir zeigen zunächst (3.5): Sei dazu ein $E_\star \in \mathcal{M}$ gegeben. Wir definieren für $g \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq g \leq \text{gen}(E_\star) + 2$ eine Teilmenge von $\mathcal{E}_k$ durch

$$\mathcal{E}_k(E_\star, g) := \left\{ E \in \mathcal{E}_k \mid \text{dist}(E, E_\star) \leq C_\lambda B 2^{-g/2} \text{ und } \text{gen}(E) = g \right\}.$$

Nun gilt für $0 \leq g \leq \text{gen}(E_\star) + 2$, dass $\text{diam}(E_\star) \leq C^{\text{diam}} 2^{-\text{gen}(E_\star)/2} \leq 2C^{\text{diam}} 2^{-g/2}$, und $\text{diam}(E) \leq C^{\text{diam}} 2^{-g/2}$ für alle $E \in \mathcal{E}_k(E_\star, g)$. Wir schließen, dass die Anzahl der Elemente in $\mathcal{E}_k(E_\star, g)$ uniform beschränkt sein muss,

$$\#\mathcal{E}_k(E_\star, g) \leq C_3$$

mit einer Konstante $C_3 > 0$. Daraus folgt nun

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_k \setminus \mathcal{E}_0} \lambda(E, E_\star) = \sum_{g=0}^{\text{gen}(E_\star)+2} \sum_{E \in \mathcal{E}_k(E_\star, g)} a_{\text{gen}(E_\star) - g} \leq C_3 \sum_{\ell=-2}^{\infty} a_\ell = C_3 A.$$

Nun zeigen wir (3.6): Betrachte ein beliebiges Element $E_0 \in \mathcal{E}_k \setminus \mathcal{E}_0$. Es gibt dann einen Index $1 \leq k_0 \leq k$ sodass $E_0 \in \mathcal{E}_{k_0}$ und $E_0 \notin \mathcal{E}_{k_0-1}$. Daher gibt es ein $E_1 \in \mathcal{M}_{k_0-1} \subset \mathcal{M}$, sodass E_0 durch die Teilung von E_1 erzeugt wird. Iterativ erhalten wir so eine Folge $(E_j)_{j=1}^J \subset \mathcal{M}$ sodass E_j durch die Teilung von E_{j+1} entsteht, und eine streng monoton fallende Folge $(k_j)_{j=1}^J$, sodass $k_J = 0$. Mit Lemma 3.13 schließen wir $\text{gen}(E_{j+1}) \geq \text{gen}(E_j) - 2$. Wir wählen den kleinsten Index $s \in \mathbb{N}$, sodass $\text{gen}(E_s) < \text{gen}(E_0)$ ist, und bemerken, dass $\text{gen}(E_0) - 2 \leq \text{gen}(E_s)$.

Für $1 \leq j \leq s$ und $\ell > 0$ definieren wir die Menge

$$\mathcal{E}_k(E_0, i, j) := \{E \in \{E_0, \dots, E_{j-1}\} \mid \text{gen}(E) = \text{gen}(E_0) + i\}$$

und $m(i, j) := \#\mathcal{E}_k(E_0, i, j)$. Induktive Anwendung der Dreiecksungleichung gibt

$$\text{dist}(E_0, E_j) \leq \sum_{i=1}^j \text{dist}(E_{i-1}, E_i) + \sum_{i=1}^{j-1} \text{diam}(E_i).$$

Nun wenden wir Lemma 3.13 und Lemma 3.4 an, und erhalten

$$\begin{aligned} \text{dist}(E_0, E_j) &\leq \frac{C_{\text{dist}} C_{\text{diam}}}{1 - 2^{-1/2}} \sum_{i=1}^j 2^{-\text{gen}(E_{i-1})/2} + C_{\text{diam}} \sum_{i=1}^{j-1} 2^{-\text{gen}(E_i)/2} \\ &\leq C_{\text{diam}} \left(1 + \frac{C_{\text{dist}}}{1 - 2^{-1/2}} \right) \sum_{i=0}^{j-1} 2^{-\text{gen}(E_i)/2} \\ &= C_\lambda \sum_{i=0}^{j-1} 2^{-\text{gen}(E_i)/2} \\ &= C_\lambda \sum_{i=0}^{\infty} m(i, j) 2^{-(\text{gen}(E_0) + i)/2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung für m , um die letzte Summe weiter abzuschätzen:

(i) $m(i, s) \leq b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Damit folgt aus (3.7)

$$\text{dist}(E_0, E_s) \leq C_\lambda 2^{-\text{gen}(E_0)/2} \sum_{i=0}^{\infty} b_i 2^{-i/2} = C_\lambda B 2^{-\text{gen}(E_0)/2}.$$

Die Definition von λ besagt dann

$$\sum_{E_\star \in \mathcal{M}} \lambda(E_0, E_\star) \geq \lambda(E_0, E_s)$$

Aufgrund der Wahl von s gilt nun $\text{gen}(E_s) - \text{gen}(E_0) \in \{-1, -2\}$, und es folgt

$$\lambda(E_0, E_s) = a_{\text{gen}(E_s) - \text{gen}(E_0)} \geq \min(a_{-2}, a_{-1}) > 0.$$

- (ii) Es existiert ein $i \geq 0$ mit $m(i, s) > b_i$. Für alle i mit dieser Eigenschaft existiert ein kleinstes $s(i)$ sodass $m(i, s(i)) > b_i$. Sei nun $i^* \in \underset{i \in \mathbb{N}}{\operatorname{argmin}} s(i)$. Insbesondere gilt $1 \leq s(i^*) \leq s$, und da $m(i, j)$ monoton steigend in j ist, gilt

$$m(i, s(i^*) - 1) \leq b_i \quad \text{für alle } i \geq 0. \quad (3.8)$$

Die Wahl von i^* besagt weiters

$$m(i^*, s(i^*)) > b_{i^*}. \quad (3.9)$$

Aus (3.8) folgt wie in Punkt (i), dass für beliebiges $i \in \mathbb{N}$ für alle $E \in \mathcal{E}_k(E_0, i, s(i^*))$ gilt, dass $\operatorname{dist}(E_0, E) \leq C_\lambda B 2^{-\operatorname{gen}(E_0)/2}$. Ist $i^* = 0$, so ist zumindest $E_0 \in \mathcal{E}_k(E_0, 0, s(0))$. Gleichung (3.9) besagt aber $m(0, s(0)) > b_0 \geq 1$. Also existiert ein $E' \in \mathcal{E}_k(E_0, 0, s(0)) \cap \mathcal{M}$, und wir erhalten

$$\sum_{E_* \in \mathcal{M}} \lambda(E_0, E_*) \geq \lambda(E_0, E') = a_0 > 0.$$

Ist aber $i^* > 0$, so gilt klarerweise $E_0 \notin \mathcal{E}_k(E_0, i^*, s(i^*))$, also gilt $\mathcal{E}_k(E_0, i^*, s(i^*)) \subset \mathcal{M}$. Es gilt per Definition $\lambda(E_0, E') = a_{i^*}$ für alle $E' \in \mathcal{E}_k(E_0, i^*, s(i^*))$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_{E_* \in \mathcal{M}} \lambda(E_0, E_*) &\geq \sum_{E_* \in \mathcal{E}_k(E_0, i^*, s(i^*))} \lambda(E_0, E_*) = m(i^*, s(i^*)) a_{i^*} \\ &> b_{i^*} a_{i^*} \geq \inf_{i \geq 1} b_i a_i = c > 0. \end{aligned}$$

Setzen wir $C_\S := \min\{a_{-2}, a_{-1}, a_0, c\}$, so erhalten wir (3.6).

□

3.15 Bemerkung. Eine gültige Wahl für die Folgen $(a_\ell)_{\ell=-2}^\infty$ und $(b_\ell)_{\ell=0}^\infty$ ist zum Beispiel $b(\ell) = 2^{\ell/3}$ und $a(-2) = 1$, $a(\ell) = (\ell + 2)^{-2}$ für $\ell \geq -1$.

3.16 Bemerkung. Verwendet man die BDD-Referenzkantenverteilung aus [BDD04], so ist die Konstante C_{nvb} beschränkt - und zwar unabhängig vom Gitter $\mathcal{E}_0$. In unserem Fall hängt die Konstante C_{nvb} jedoch am Gitter $\mathcal{E}_0$, ist aber zumindest unabhängig von der Wahl der Referenzkantenverteilung. Dies liegt daran, dass wir eine sehr pessimistische Wahl für die Konstante C_{chain} aus Lemma 3.12 getroffen haben, die bereits die schlechteste Wahl für die Referenzkantenverteilung abfängt. Um das einzusehen, wähle man einfach eine Kette von Elementen als größtes Gitter $\mathcal{E}_0$. Wir postulieren daher, dass die Konstante C_{nvb} tatsächlich von der Länge der Ketten im groben Gitter $\mathcal{E}_0$ abhängt. Die Referenzkantenverteilung in [BDD04] ist so gewählt, dass diese Ketten die Länge 2 haben, sodass die kleinst mögliche Konstante C_{nvb} erhalten wird. In unserem Fall erhalten wir die grösste Konstante C_{nvb} , die für das Gitter $\mathcal{E}_0$ möglich ist. Dies wird die Optimalitätsaussagen von adaptiven Algorithmen nicht beeinflussen, ist aber natürlich ein Punkt, über den man sich bei der Wahl der Referenzkanten Gedanken machen muss.

3.3 Polynomräume

Polynomräume auf dem Referenzelement $\widehat{E} = \text{conv} \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ bezeichnen wir als

$$\mathcal{P}^p(\widehat{E}) := \text{span}\{x^i y^k \mid 0 \leq i + k \leq p\}.$$

Für ein Element $E \in \mathcal{E}_\ell$ mit $E = \text{conv} \{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ lautet die Element-Abbildung

$$F_E : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \widehat{\mathbf{x}} & \mapsto \mathbf{B}_E \widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_0 \end{cases}$$

mit $\mathbf{B}_E = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0 \mid \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_0)$. Ist für ein Gitter $\mathcal{E}_\ell$ eine Polynomgradverteilung $\mathbf{p}_\ell = (p_E)_{E \in \mathcal{E}_\ell}$ mit $p_E \in \mathbb{N}_0$ für alle $E \in \mathcal{E}_\ell$ gegeben, dann definieren wir Räume von stückweisen Polynomen als

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell) &= \{u \in L_\infty(\Gamma) \mid u \circ F_E \in \mathcal{P}^{p_E}(\widehat{E}) \text{ für alle } E \in \mathcal{E}_\ell\}, \\ \mathcal{S}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell) &= \mathcal{P}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell) \cap C^0(\Gamma). \end{aligned}$$

Ist der Polynomgrad auf allen Elementen gleich p , so schreiben wir auch $\mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$ und $\mathcal{S}^p(\mathcal{E}_\ell)$. Wir nennen eine Polynomgradverteilung $\mathbf{p}_\ell = (p_E)_{E \in \mathcal{E}_\ell}$ lokal quasi-uniform, wenn p_E vergleichbar auf benachbarten Elementen ist, also $p_E \simeq p_{E'}$ für $\overline{E} \cap \overline{E'} \neq \emptyset$. Ist $\mathcal{E}_\ell \subseteq \mathcal{E}_{\ell+1}$, dann fordern wir immer, dass $\mathcal{P}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell) \subseteq \mathcal{P}^{\mathbf{p}_{\ell+1}}(\mathcal{E}_{\ell+1})$ beziehungsweise $\mathcal{S}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell) \subseteq \mathcal{S}^{\mathbf{p}_{\ell+1}}(\mathcal{E}_{\ell+1})$.

3.4 Die L_2 -Projektion

Die L_2 -Projektionen $\pi_\ell^{\mathbf{p}} : L_2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{P}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell)$ und $\Pi_\ell^{\mathbf{p}} : L_2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell)$ sind definiert als

$$\begin{aligned} (\pi_\ell^{\mathbf{p}} g, \Psi_\ell)_{L_2} &= (g, \Psi_\ell)_{L_2} \quad \text{für alle } \Psi_\ell \in \mathcal{P}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell), \\ (\Pi_\ell^{\mathbf{p}} g, V_\ell)_{L_2} &= (g, V_\ell)_{L_2} \quad \text{für alle } V_\ell \in \mathcal{S}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell). \end{aligned}$$

Für konstantes $\mathbf{p}_\ell$ schreiben wir einfach nur p in dieser Notation. Wenn $p = 0$, schreiben wir auch $\pi_\ell := \pi_\ell^p$, wenn $p = 1$, schreiben wir auch $\Pi_\ell := \Pi_\ell^p$. Da Π_ℓ nach $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell) \subset H^1(\mathcal{E}_\ell)$ abbildet, stellt sich die Frage, ob und unter welchen Voraussetzungen an die Gitter $\mathcal{E}_\ell$ die Folge von L_2 -Projektionen $(\Pi_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ uniform $H^1(\Gamma)$ -stabil ist, d.h.

$$\|\nabla_\Gamma \Pi_\ell u\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_{\text{stab}} \|\nabla_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)} \quad \text{für alle } u \in H^1(\Gamma) \quad (3.10)$$

mit einer Konstante $C_{\text{stab}} > 0$, die unabhängig von u und ℓ ist. Da Normen auf endlichdimensionalen Räumen äquivalent sind, folgt, dass auf einem festen Gitter $\mathcal{E}_\ell$ die Abbildung Π_ℓ stabil in $H^1(\Gamma)$ ist und die Konstante C_{stab} nur von $\mathcal{E}_\ell$, aber nicht von u abhängt. Wir beweisen in diesem Abschnitt, dass die L_2 -Projektionen $(\Pi_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ auf einer Folge von Gittern, die durch den Algorithmus **refine** 3.6 erzeugt wird, uniform H^1 -stabil sind.

Dazu führen wir zusätzliche Notation ein. Die Knoten des Elements E seien bezeichnet durch $z_{[E,1]}, z_{[E,2]}$ und $z_{[E,3]}$. Die Massenmatrix eines Elementes ist dann definiert als

$$\mathbf{M}_E \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (\mathbf{M}_E)_{ij} = \int_E \varphi_{[E,i]}(\mathbf{x}) \varphi_{[E,j]}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{für } E \in \mathcal{E}_\ell \text{ und } i, j = 1, 2, 3.$$

Hier bezeichnet $\varphi_k \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ die Hutfunktion zum Knoten $z_k \in \mathcal{N}_\ell$. Für jeden Knoten z_k sei eine Zahl $d_k \in \mathbb{R}_{>0}$ gewählt sodass $d_{[E,i]} \simeq |E|^{1/2} \simeq \text{diam}(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}_\ell$ und $i = 1, 2, 3$. Wir definieren eine Matrix Λ_E durch

$$(\Lambda_E) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (\Lambda_E)_{ij} = \frac{h_\ell(E)}{d_{[E,i]}} \delta_{ij} \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}_\ell \text{ und } i, j = 1, 2, 3.$$

Mit Hilfe des folgenden Lemmas aus [Car04] kann die H^1 -Stabilität von Π_ℓ aus lokalen Abschätzungen für die Eigenwerte von $\mathbf{M}_E$ und Λ_E gewonnen werden.

3.17 Lemma. *Es sei $\mathcal{E}_\ell$ ein γ -formreguläres Gitter auf Γ , und für alle $E \in \mathcal{E}_\ell$ gelte*

$$C_{\text{stab:low}}^{-1} \mathbf{x}^\top \Lambda_E^2 \mathbf{M}_E \Lambda_E^2 \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^\top \mathbf{M}_E \mathbf{x} \leq C_{\text{stab:up}} \mathbf{x}^\top \Lambda_E^2 \mathbf{M}_E \mathbf{x} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (3.11)$$

mit Konstanten $C_{\text{stab:low}} > 0$ und $C_{\text{stab:up}} > 0$, die nicht von $E \in \mathcal{E}_\ell$ abhängen. Dann ist Π_ℓ H^1 -stabil (3.10) und die Konstante $C_{\text{stab}} > 0$ hängt nur von $C_{\text{stab:low}}$, $C_{\text{stab:up}}$ und der γ -Formregularitätskonstante ab.

Beweis. Mit $J_\ell : H^1(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^1(\Gamma)$ bezeichnen wir einen Clément-artigen Quasi-Interpolationsoperator wie sie zum Beispiel in [Clé75] oder [SZ90] konstruiert werden, siehe auch [SS11, Theorem 4.3.28]. Diese Operatoren sind stabil und haben Approximationseigenschaften: Es gilt

$$\|\nabla_\Gamma J_\ell u\|_{L_2(E)} \lesssim \|\nabla_\Gamma u\|_{L_2(\omega_\ell(E))} \quad \text{und} \quad \|u - J_\ell u\|_{L_2(E)} \lesssim \|h_\ell \nabla_\Gamma u\|_{L_2(\omega_\ell(E))},$$

für alle $u \in H^1(\Gamma)$ wobei die involvierten Konstanten nur an der γ -Formregularitätskonstante hängen. Eine inverse Ungleichung und Stabilität von J_ℓ liefern

$$\|\nabla_\Gamma \Pi_\ell u\|_{L_2(\Gamma)} \leq \|\nabla_\Gamma (\Pi_\ell u - J_\ell u)\|_{L_2(\Gamma)} + \|\nabla_\Gamma J_\ell u\|_{L_2(\Gamma)} \lesssim \|h_\ell^{-1} (\Pi_\ell u - J_\ell u)\|_{L_2(\Gamma)} + \|\nabla_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)}, \quad (3.12)$$

wobei die Konstanten wieder nur an der γ -Formregularitätskonstante hängen. Wir definieren $q_\ell := \Pi_\ell u - J_\ell u \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ und zeigen die Abschätzung $\|h_\ell^{-1} q_\ell\|_{L_2(\Gamma)} \lesssim \|\nabla_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)}$. Mit $\mathbf{x}_E = (q_{[E,1]}, q_{[E,2]}, q_{[E,3]})^\top$ gilt aufgrund der oberen Abschätzung in (3.11) die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|h_\ell^{-1} q_\ell\|_{L_2(\Gamma)}^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E)^{-2} \mathbf{x}_E^\top \mathbf{M}_E \mathbf{x}_E \leq C_{\text{stab:up}} \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E)^{-2} \mathbf{x}_E^\top \Lambda_E^2 \mathbf{M}_E \mathbf{x}_E \\ &= C_{\text{stab:up}} \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \sum_{i=1}^3 \frac{q_{[E,i]}^2}{d_{[E,i]}^2} \int_E \varphi_{[E,i]} q_\ell = C_{\text{stab:up}} \int_\Gamma p_\ell q_\ell, \end{aligned}$$

wobei wir $p_\ell = \sum_{j=1}^n q_j d_j^{-2} \varphi_j \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ gesetzt haben. Da Π_ℓ als L_2 -Orthogonalprojektion auf $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ Orthogonalitätseigenschaften besitzt, gilt

$$\int_\Gamma p_\ell q_\ell = \int_\Gamma p_\ell (\Pi_\ell u - J_\ell u) = \int_\Gamma p_\ell (u - J_\ell u) \lesssim \|h_\ell p_\ell\|_{L_2(\Gamma)} \|\nabla_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Wir erhalten schließlich

$$\|h_\ell^{-1} q_\ell\|_{L_2(\Gamma)}^2 \lesssim C_{\text{stab:up}} \|h_\ell p_\ell\|_{L_2(\Gamma)} \|\nabla_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Mit $\mathbf{y}_E = (q_{[E,1]}d_{[E,1]}^{-2}, q_{[E,2]}d_{[E,2]}^{-2}, q_{[E,3]}d_{[E,3]}^{-2})^\top = h_\ell(T)^{-2} \Lambda_E \mathbf{x}_E$ gilt aufgrund der unteren Abschätzung in (3.11)

$$\begin{aligned} \|h_\ell p_\ell\|_{L_2(\Gamma)}^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(T)^2 \mathbf{y}_E^\top \mathbf{M}_E \mathbf{y}_E = \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(T)^{-2} \mathbf{x}_E^\top \Lambda_E^2 \mathbf{M}_E \Lambda_E^2 \mathbf{x}_E \\ &\leq C_{\text{stab:low}} \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(T)^{-2} \mathbf{x}_E^\top \mathbf{M}_E \mathbf{x}_E = C_{\text{stab:low}} \|h_\ell^{-1} q_\ell\|_{L_2(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Die Kombination der beiden letzten Abschätzungen liefert

$$\|h_\ell^{-1} q_\ell\|_{L_2(\Gamma)} \lesssim \|\nabla_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Da $q_\ell = \Pi_\ell u - J_\ell u$ gewählt wurde, können wir diese Abschätzung in (3.12) einsetzen und erhalten das Gewünschte. $\square$

Wir benötigen folgende elementare Abschätzung:

3.18 Lemma. *Es seien $a, b, c > 0$ und $M \geq 1$ reelle Zahlen mit $M^{-1} \leq a, b, c \leq M$ und $c = 1/(ab)$. Dann gilt*

$$a + b + c + a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} \leq 2(1 + M + M^{-1}).$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $M > 1$ und $a, b \geq 1$ annehmen. Wir schreiben $a = pM$ und $b = qM$ mit $q, p \in [1/M, 1]$. Aus $c^{-1} \leq M$ folgt sofort $pqM \leq 1$. Daher genügt es, die Maxima der Funktion

$$f(p, q) = pM + qM + 1/(pqM^2) + 1/(pM) + 1/(qM) + pqM^2$$

auf der kompakten Menge

$$K := \{(q, p) \in [1/M, 1]^2 \mid qpM \leq 1\}$$

zu bestimmen. Für fixes $q \in [1/M, 1]$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial p}(p, q) = M - \frac{1}{p^2 q M^2} - \frac{1}{p^2 M} + q M^2.$$

Für $p \in (1/M, 1)$ gilt $qpM < 1$ und somit

$$\frac{\partial f}{\partial p}(p, q) > M - \frac{1}{q} - M + q M^2 = \frac{1}{q} (q^2 M^2 - 1) \geq 0,$$

wobei die letzte Abschätzung aus $q \in [1/M, 1]$ folgt. Die bedeutet insbesondere, dass die Funktion $f(\cdot, q)$ ihr Maximum auf der kompakten Menge $K_p := \{p \in [1/M, 1] \mid qpM \leq 1\}$ in einem der Punkte $\{1/M, 1/(qM), 1\}$ annimmt. Für fixes $p \in [1/M, 1]$ gilt analoges für die Funktion $f(p, \cdot)$. Für $q = 1/(pM)$ ist

$$\tilde{f}(p) := f(p, 1/(pM)) = pM + \frac{1}{p} + \frac{1}{M} + \frac{1}{pM} + p + M$$

konkav, da

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial p^2} = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^3 K} > 0.$$

Wir schließen daraus, dass die Funktion f ihr Maximum nur in den Punkten $(1/M, 1/M)$, $(1/M, 1)$ oder $(1, 1/M)$ annehmen kann. Dort gilt aber

$$\begin{aligned} f(1/M, 1/M) &= 6 \leq 2(1 + M + M^{-1}) \\ f(1/M, 1) &= f(1, 1/M) = 2(1 + M + M^{-1}), \end{aligned}$$

wodurch der Beweis abgeschlossen ist. $\square$

Das folgende Lemma zeigt nun, dass eine entsprechende Wahl der Zahlen d_k die H^1 -Stabilität von Π_ℓ nach sich zieht.

3.19 Lemma. *Es sei $\mathcal{E}_\ell$ ein γ -formreguläres Gitter auf Γ , und für alle $E \in \mathcal{E}_\ell$ seien die folgenden Abschätzungen gültig:*

$$\frac{d_{[E,i]}}{d_{[E,j]}} \leq C_5 \leq \pi \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3 \quad (3.13)$$

und

$$C_6^{-1} \leq \frac{d_{[E,i]}}{h_\ell(E)} \leq C_6 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad (3.14)$$

wobei $C_5, C_6 > 0$ Konstanten sind. Dann ist Π_ℓ stabil in $H^1(\Gamma)$ (3.10) und die Konstante C_{stab} hängt nur von C_5, C_6 sowie von γ ab.

Beweis. Laut [QV94] gilt für ein Element $E \in \mathcal{E}_\ell$ das Skalierungsargument

$$|E| \mathbf{x}^\top \mathbf{x} \lesssim \mathbf{x}^\top \mathbf{M}_E \mathbf{x} \lesssim |E| \mathbf{x}^\top \mathbf{x}, \quad (3.15)$$

wobei die Konstanten nur von γ abhängen. Zusammen mit der unteren Abschätzung in (3.14) erhalten wir

$$\mathbf{x}^\top \Lambda_E^2 \mathbf{M}_E \Lambda_E^2 \mathbf{x} \lesssim |E| (\Lambda_E^2 \mathbf{x})^\top (\Lambda_E^2 \mathbf{x}) \leq C_6^4 |E| \mathbf{x}^\top \mathbf{x} \lesssim C_6^4 \mathbf{x}^\top \mathbf{M}_E \mathbf{x}.$$

Dies zeigt die untere Abschätzung in (3.11). Wir zeigen nun die obere Abschätzung in (3.11): Wir wählen ein Referenzelement $\widehat{E}$ für das dessen lokale Massenmatrix geschrieben werden kann als $\widehat{\mathbf{M}}_{jk} = 1 + \delta_{jk}$. Für ein beliebiges Element $E \in \mathcal{E}_\ell$ gilt dann $\mathbf{M}_E = C_{\text{ref}} |E| \widehat{\mathbf{M}}$. Wir definieren zwei Matrizen $\mathbf{A}_E$ und $\widehat{\mathbf{A}}_E$ durch

$$\mathbf{A}_E := \Lambda_E^2 \mathbf{M}_E + \mathbf{M}_E \Lambda_E^2 = C_{\text{ref}} |E| (\Lambda_E^2 \widehat{\mathbf{M}} + \widehat{\mathbf{M}} \Lambda_E^2) =: C_{\text{ref}} |E| \widehat{\mathbf{A}}_E.$$

Aufgrund der Symmetrie von Λ_E und $\mathbf{M}_E$ gilt $\mathbf{x}^\top \mathbf{M}_E \Lambda_E^2 \mathbf{x} = (\Lambda_E^2 \mathbf{x})^\top \mathbf{M}_E \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \Lambda_E^2 \mathbf{M}_E \mathbf{x}$ und daher

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A}_E \mathbf{x} = 2 \mathbf{x}^\top \Lambda_E^2 \mathbf{M}_E \mathbf{x}. \quad (3.16)$$

Wir definieren eine weitere, symmetrische Matrix $\widehat{\mathbf{B}}_E$ durch

$$(\widehat{\mathbf{B}}_E)_{jk} := \left(\Lambda_E^{-1} \widehat{\mathbf{A}}_E \Lambda_E^{-1} \right)_{jk} = \left(\Lambda_E \widehat{\mathbf{M}} \Lambda_E^{-1} + \Lambda_E^{-1} \widehat{\mathbf{M}} \Lambda_E \right)_{jk} = \left(\frac{d_{[E,j]}}{d_{[E,k]}} + \frac{d_{[E,k]}}{d_{[E,j]}} \right) \widehat{\mathbf{M}}_{jk}.$$

Laut [BPS02, Proposition 6.1] ist der kleinste Eigenwert von $\widehat{\mathbf{B}}_E$ gegeben durch

$$\lambda_{\min} = 5 - \left(\sum_{j,k=1}^3 \frac{d_{[E,j]}^2}{d_{[E,k]}^2} \right)^{1/2}$$

Aus Lemma 3.18 folgt

$$\sum_{j,k=1}^3 \frac{d_{[E,j]}^2}{d_{[E,k]}^2} \leq 3 + 2(1 + \pi^2 + \pi^{-2}) \leq 24.95 < 25, \quad (3.17)$$

und somit $\lambda_{\min} > 0$. Man beachte, dass $\lambda_{\min}$ nur von C_5 abhängt. Es folgt die positive Definitheit von $\widehat{\mathbf{B}}_E$

$$\mathbf{y}^\top \widehat{\mathbf{B}}_E \mathbf{y} \geq \lambda_{\min} \mathbf{y}^\top \mathbf{y} \quad \text{für } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$$

Für $\mathbf{y} = \Lambda_E \mathbf{x}$ gilt wegen (3.14) $\mathbf{y}^\top \mathbf{y} \simeq \mathbf{x}^\top \mathbf{x}$, und wir schließen

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{M}_E \mathbf{x} \simeq |E| \mathbf{x}^\top \mathbf{x} \simeq |E| \mathbf{y}^\top \mathbf{y} \lesssim |E| \mathbf{y}^\top \widehat{\mathbf{B}}_E \mathbf{y} = |E| \mathbf{x}^\top \widehat{\mathbf{A}}_E \mathbf{x} \simeq \mathbf{x}^\top \mathbf{A}_E \mathbf{x} = 2 \mathbf{x}^\top \Lambda_E^2 \mathbf{M}_E \mathbf{x},$$

wobei die letzte Gleichheit aus (3.16) folgt. Dies zeigt also die obere Abschätzung in (3.11), wodurch der Beweis abgeschlossen ist. $\square$

3.20 Theorem. *Es sei $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ ein Gitter mit einer beliebigen Referenzkantenverteilung und $\mathcal{E}_\ell = \text{refine}(\mathcal{E}_0)$ ein Gitter, welches durch Algorithmus `refine` 3.6 erzeugt wird. Dann gilt für die L_2 -Projektion Π_ℓ auf $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ die Abschätzung*

$$\|\nabla_\Gamma \Pi_\ell u\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_{\text{stab}} \|\nabla_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)} \quad \text{für alle } u \in H^1(\Gamma).$$

Die Konstante $C_{\text{stab}} > 0$ hängt nur von $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ ab.

Beweis. Wir wollen Lemma 3.19 verwenden und werden daher für jeden Knoten $z_k \in \mathcal{N}_\ell$ eine Zahl $d_k \in \mathbb{R}_{>0}$ wählen und die hinreichenden Bedingungen (3.13) und (3.14) nachweisen. Für Knoten $z_j, z_k \in \mathcal{N}_\ell$ definieren wir eine Zahl $\delta(z_j, z_k) \in \mathbb{N}_0$ durch

- $\delta(z_j, z_k) := 0$ falls $z_j = z_k$,
- $\delta(z_j, z_k) := 1$ falls $z_j, z_k \in E$ für ein $E \in \mathcal{E}_\ell$
- $\delta(z_j, z_k) := N$ für die kleinste Anzahl $N \geq 2$ an Elementen $E_1, \dots, E_N \in \mathcal{E}_\ell$ mit $z_j \in E_1$, $E_j \cap E_{j+1} \in \mathcal{K}_\ell$ für $j = 1, \dots, N-1$, und $z_k \in E_N$.

Wir definieren nun die Zahlen d_k durch

$$d_j := \min_{E \in \mathcal{E}_\ell} 2^{(2\delta(z_j, E) - \text{gen}(E))/2}, \quad \text{wobei} \quad \delta(z_j, E) := \min_{z_k \in \mathcal{N}_\ell \cap E} \delta(z_j, z_k). \quad (3.18)$$

- Wir beweisen zunächst die Abschätzung (3.13). Dazu wählen wir ein Element $E \in \mathcal{E}_\ell$ sowie Knoten $z_j, z_k \in \mathcal{N}_\ell \cap E$. Sei $E' \in \mathcal{E}_\ell$ ein Element für das $d_k = 2^{(2\delta(z_k, E') - \text{gen}(E'))/2}$ gilt. Definitionsgemäß ist dann $d_j \leq 2^{(2\delta(z_j, E') - \text{gen}(E'))/2}$ und $|\delta(z_k, E') - \delta(z_j, E')| \leq 1$, und es folgt

$$\frac{d_j}{d_k} \leq \frac{2^{(2\delta(z_j, E') - \text{gen}(E'))/2}}{2^{(2\delta(z_k, E') - \text{gen}(E'))/2}} \leq 2^{(\delta(z_j, E') - \delta(z_k, E'))} \leq 2 \leq \pi.$$

- Nun zeigen wir $d_j \leq C_{\text{diam}}^{-1} h_\ell(E)$ für $E \in \mathcal{E}_\ell$ und $z_j \in \mathcal{N}_\ell \cap E$: Es ist $\delta(z_j, E) = 0$, und mit Lemma 3.4 folgt daher

$$d_j \leq 2^{-\text{gen}(E)/2} \leq C_{\text{diam}}^{-1} |E|^{1/2} \leq C_{\text{diam}}^{-1} h_\ell(E).$$

- Wir zeigen nun die untere Abschätzung in (3.14) für beliebige $E \in \mathcal{E}_\ell$ und $z_j \in \mathcal{N}_\ell \cap E$. Wir wählen ein Element $E' \in \mathcal{E}_\ell$ mit $d_j = 2^{(2\delta(z_j, E') - \text{gen}(E'))/2}$. Es gilt nun $\text{gen}(E) \leq \text{gen}(E')$, denn aus $\text{gen}(E) > \text{gen}(E')$ würde

$$2^{(2\delta(z_j, E) - \text{gen}(E))/2} = 2^{-\text{gen}(E)/2} < 2^{-\text{gen}(E')/2} \leq 2^{(2\delta(z_j, E') - \text{gen}(E'))/2} = d_j$$

folgen - dies kann aber aufgrund der Wahl von E' nicht sein. Wir schließen also mit Lemma 3.4

$$\begin{aligned} d_j^2 &= 2^{2\delta(z_j, E') - \text{gen}(E')} = 2^{-\text{gen}(E)} 2^{2\delta(z_j, E') - |\text{gen}(E') - \text{gen}(E)|} \\ &\geq \left(C^{\text{diam}}\right)^{-2} h_\ell(E)^2 2^{2\delta(z_j, E') - |\text{gen}(E') - \text{gen}(E)|} \end{aligned}$$

Angenommen es gilt $\delta(z_j, E') = N$. Dann gibt es laut Definition einen Knoten $z_k \in \mathcal{E}_\ell \cap E'$ und Elemente $E_1, \dots, E_N$ sodass $z_j \in E_1$, $E_j \cap E_{j+1} \in \mathcal{K}_\ell$ für $j = 1, \dots, N-1$, und $z_k \in E_N$. Da das Gitter $\mathcal{E}_\ell$ γ -formregulär ist, ist die Anzahl der Elemente, die an einem Knoten anstossen können, beschränkt durch eine Konstante $C_7 > 0$, die nur von γ abhängt. Es gibt also n Elemente $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_n$ mit $n \leq N + 2C_7$ und $\tilde{E}_1 = E$, $\tilde{E}_j \cap \tilde{E}_{j+1} \in \mathcal{K}_\ell$ für $j = 1, \dots, n-1$ und $\tilde{E}_n = E'$. Lemma 3.11 (i) besagt außerdem $|\text{gen}(\tilde{E}_j) - \text{gen}(\tilde{E}_{j+1})| \leq 2$, woraus

$$|\text{gen}(E) - \text{gen}(E')| \leq \sum_{j=1}^{n-1} |\text{gen}(\tilde{E}_j) - \text{gen}(\tilde{E}_{j+1})| \leq 2(n-1)$$

folgt. Wir schließen

$$2^{2\delta(z_j, E') - |\text{gen}(E') - \text{gen}(E)|} \geq 2^{2N - 2(n-1)} \geq 2^{2-4C_7}$$

und daraus schließlich

$$d_j^2 \geq \left(C^{\text{diam}}\right)^{-2} 2^{2-4C_7} h_\ell(E)^2.$$

- Die Definition $C_6 := \max \left\{ C_{\text{diam}}^{-1}, \left(C^{\text{diam}}\right)^{-1} 2^{1-2C_7} \right\}$ schliesst den Beweis ab.

□

3.5 Approximationsresultate

Die später betrachteten Verfahren zur Approximation der Lösungen von Randintegralgleichungen sind optimal in dem Sinne, dass sie für ein fixes Gitter die bestmögliche Approximation finden (*Céas Lemma*). Es scheint daher sinnvoll, die Güte solcher Bestapproximationen in bestimmten Normen zu bestimmen. Des Weiteren benötigen wir oft Operatoren, die bestimmte Approximationseigenschaften besitzen. Wir betrachten zuerst die Approximationseigenschaften der L_2 -Projektion auf unstetige, stückweise Polynome.

3.21 Theorem (L_2 -Projektion auf $\mathcal{P}^p$). *Es sei $\Gamma \subseteq \partial\Gamma$, ein Gitter $\mathcal{E}_\ell$ auf Γ und $p \in \mathbb{N}$ gegeben. Für $u \in H^s(\Gamma)$, $0 \leq s \leq 1$, und $0 < r \leq 1$ gilt*

$$\begin{aligned} \|u - \pi_\ell^p u\|_{L_2(E)} &\leq C_{\text{apx}} \|h_\ell^s u\|_{H^s(E)}, \\ \|u - \pi_\ell^p u\|_{H^{-r}(\Gamma)} &\leq C_{\text{apx}} \|h_\ell^{s+r} u\|_{H^s(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Die Konstante hängt nur von Γ , der Formregularitätskonstante γ und s ab.

Beweis. Für die erste Abschätzung ist der Beweis für $p = 0$ in [Ste08a, Theorem 10.2] angegeben, und folgt für $p \in \mathbb{N}$ ganz einfach aus der Bestapproximationseigenschaft von π_ℓ^p . Der Beweis der zweiten Abschätzung folgt dann aus der ersten wie in [Ste08a, Corollary 10.3]. $\square$

Der Beweis der folgenden Aussage findet sich in [SZ90] oder [SS11, Theorem 4.3.28].

3.22 Theorem (Scott-Zhang). *Für $\Gamma \subseteq \partial\Gamma$, ein Gitter $\mathcal{E}_\ell$ auf Γ und $p \in \mathbb{N}$ existiert eine Projektion $J_\ell : L_2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^p(\mathcal{E}_\ell)$, sodass J_ℓ stetig ist in $H^s(\Gamma)$ für alle $0 \leq s \leq 1$. Ausserdem gilt für $E \in \mathcal{E}_\ell$*

$$\begin{aligned} \|u - J_\ell u\|_{L_2(E)} &\leq C \|h_\ell \nabla_\Gamma u\|_{L_2(\omega_\ell(E))} \\ \|\nabla_\Gamma(u - J_\ell u)\|_{L_2(E)} &\leq C \|\nabla_\Gamma u\|_{L_2(\omega_\ell(E))}. \end{aligned}$$

Der Operator J_ℓ kann so gewählt werden, dass für Funktionen $v \in H^1(\Gamma)$ mit $v|_{\partial\Gamma} \in \mathcal{S}^p(\mathcal{E}_\ell|_{\partial\Gamma})$ die Randwerte erhalten bleiben, d.h. $(J_\ell v)|_{\partial\Gamma} = v|_{\partial\Gamma}$. Dann ist der Operator allerdings nur mehr definiert und stetig in $H^s(\Gamma)$ für $1/2 < s \leq 1$. $\blacksquare$

Misst man nun den Approximationsfehler in einer gebrochenen Norm $\|\cdot\|_{H^s(\Gamma)}$ für $s \in (0, 1)$, so erwartet man Aussagen der Form

$$\|u - J_\ell u\|_{H^s(\Gamma)} \leq C \|h_\ell^{1-s} \nabla_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Für quasiuniforme Gitter, d.h. $h_\ell(E) \sim h_\ell$ für alle $E \in \mathcal{E}_\ell$ folgt dies einfach durch Anwenden des Interpolationssatzes 2.4. Im Folgenden werden exaktere Resultate der Interpolationstheorie verwendet, um dies auch für lokal quasi-uniforme Gitter zu zeigen.

3.23 Definition. Die lokal gemittelte Gitterweitenfunktion $\tilde{h}_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ ist für jeden Knoten $z \in \mathcal{N}_\ell$ definiert durch

$$\tilde{h}_\ell(z) = \max\{h_\ell(E) \mid E \in \mathcal{E}_\ell \text{ with } z \in \overline{E}\}. \quad (3.19)$$

Für lokal quasi-uniforme, formreguläre Gitter ist $\tilde{h}_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ lokal äquivalent zur Gitterweite $h_\ell \in \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$.

3.24 Lemma. *Es gilt*

$$C_1^{-1} \tilde{h}_\ell \leq h_\ell \leq C_1 \tilde{h}_\ell \quad \text{und} \quad |\nabla_\Gamma \tilde{h}_\ell| \leq C_2. \quad (3.20)$$

punktwise auf Γ . Die Konstante C_1 hängt nur von der Konstante in der Definition der lokalen Quasi-Uniformität ab, C_2 hängt zusätzlich von der Formregularitätskonstante σ_ℓ ab.

Beweis. Die erste Abschätzung $\tilde{h} \simeq h$ folgt unmittelbar. Für die zweite Ungleichung betrachten wir folgende Abschätzungen:

$$\|\nabla_\Gamma \tilde{h}\|_{L_\infty(E)}^2 \lesssim |E|^{-1} \|\nabla_\Gamma \tilde{h}\|_{L_2(E)}^2 \lesssim |E|^{-1} \rho_\ell(E)^{-2} \|\tilde{h}\|_{L_2(E)}^2 \lesssim |E|^{-1} \rho_\ell(E)^{-2} h_\ell(E)^2 |E|$$

Die erste Ungleichung folgt hier aus einem einfachen Skalierungsargument, die zweite folgt aus der inversen Ungleichung [GHS05, Proposition 2.9], und die letzte Ungleichung folgt aus der lokalen Quasi-Uniformität. $\square$

Wir leiten nun eine Abschätzung für die Interpolationsnorm zwischen H^1 und einem gewichteten H^1 -Raum her. Dazu definieren wir den Raum $H^1(\tilde{h}_\ell)$ als den Raum $H^1(\Gamma)$ mit der Norm

$$\|u\|_{H^1(\tilde{h}_\ell)}^2 := \|\tilde{h}_\ell u\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \|\tilde{h}_\ell \nabla_\Gamma u\|_{L_2(\Gamma)}^2.$$

Wir verzichten in der Ausführung dieses Resultates auf den zusätzlichen Index Γ .

3.25 Lemma. *Für $u \in H^1$ und $0 < \theta < 1$ gilt*

$$C_{\text{int}}^{-1} \|u\|_{[H^1(\tilde{h}_\ell), H^1]_\theta} \leq \|\tilde{h}_\ell^{1-\theta} \nabla_\Gamma u\|_{L_2} + \|\tilde{h}_\ell^{-\theta} u\|_{L_2}. \quad (3.21)$$

Die Konstante $C_{\text{int}} > 0$ hängt nur von θ und $|\Gamma|$ ab.

Beweis. Laut Definition ist

$$\|u\|_{[H^1(\tilde{h}_\ell), H^1]_\theta}^2 = \int_0^\infty t^{-2\theta} K(t, u)^2 \frac{dt}{t},$$

mit dem K -Funktional aus Abschnitt 2.3. Zuerst ersetzen wir K durch ein K_2 :

$$K(t, u)^2 = \left(\inf_{u=u_h+u_1} \|u_h\|_{H^1(\tilde{h}_\ell)} + t \|u_1\|_{H^1} \right)^2 \simeq \inf_{u=u_h+u_1} \|u_h\|_{H^1(\tilde{h}_\ell)}^2 + t^2 \|u_1\|_{H^1}^2 =: K_2(t, u)^2.$$

Nun wählen wir die Zerlegung

$$u(x) = u_h(x) + u_1(x) := \psi(x)u(x) + (1 - \psi(x))u(x) \quad \text{mit} \quad \psi(x) := \frac{t^2}{\tilde{h}_\ell^2(x) + t^2}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} K_2(t, u)^2 &\leq \int_\Gamma |\psi u|^2 \tilde{h}_\ell^2 + |\nabla_\Gamma(\psi u)|^2 \tilde{h}_\ell^2 + t^2 |(1 - \psi)u|^2 + t^2 |\nabla_\Gamma((1 - \psi)u)|^2 d\Gamma \\ &= \int_\Gamma |\psi u|^2 \tilde{h}_\ell^2 + t^2 |(1 - \psi)u|^2 d\Gamma + \int_\Gamma |\nabla_\Gamma(\psi u)|^2 \tilde{h}_\ell^2 + t^2 |\nabla_\Gamma((1 - \psi)u)|^2 d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Für den Integranden des letzten Integrals in (3.22) erhalten wir

$$\begin{aligned} |\nabla_\Gamma(\psi u)|^2 \tilde{h}_\ell^2 + t^2 |\nabla_\Gamma((1-\psi)u)|^2 &= |u \nabla_\Gamma \psi + \psi \nabla_\Gamma u|^2 \tilde{h}_\ell^2 + t^2 |u \nabla_\Gamma(1-\psi) + (1-\psi) \nabla_\Gamma u|^2 \\ &= \tilde{h}_\ell^2 |u \nabla_\Gamma \psi|^2 + t^2 u^2 |\nabla_\Gamma(1-\psi)|^2 + \tilde{h}_\ell^2 |\psi \nabla_\Gamma u|^2 + t^2 |(1-\psi) \nabla_\Gamma u|^2 \\ &\quad + 2\tilde{h}_\ell^2 u \psi \nabla_\Gamma \psi \cdot \nabla_\Gamma u + 2t^2 u(1-\psi) \nabla_\Gamma(1-\psi) \cdot \nabla_\Gamma u. \end{aligned}$$

Die letzte Zeile im obigen Ausdruck verschwindet, denn

$$2\tilde{h}_\ell^2 u \psi \nabla_\Gamma \psi \cdot \nabla_\Gamma u + 2t^2 u(1-\psi) \nabla_\Gamma(1-\psi) \cdot \nabla_\Gamma u = 2u(\tilde{h}_\ell^2 \psi - t^2(1-\psi)) \nabla_\Gamma \psi \cdot \nabla_\Gamma u$$

und es gilt $\tilde{h}_\ell^2 \psi - t^2(1-\psi) = 0$ laut Definition von ψ . Es ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} K_2(t, u)^2 &\leq \int_\Gamma |\psi u|^2 \tilde{h}_\ell^2 + t^2 |(1-\psi)u|^2 d\Gamma + \int_\Gamma \tilde{h}_\ell^2 |u \nabla_\Gamma \psi|^2 + t^2 u^2 |\nabla_\Gamma(1-\psi)|^2 d\Gamma \\ &\quad + \int_\Gamma \tilde{h}_\ell^2 |\psi \nabla_\Gamma u|^2 + t^2 |(1-\psi) \nabla_\Gamma u|^2 d\Gamma. \end{aligned}$$

Setzen wir die letzte Abschätzung in die Definition der Interpolationsnorm ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \|u\|_{[H^1(\tilde{h}_\ell), H^1]_\theta}^2 &\lesssim \int_0^\infty t^{-2\theta} \int_\Gamma |\psi u|^2 \tilde{h}_\ell^2 + t^2 |(1-\psi)u|^2 d\Gamma \frac{dt}{t} \\ &\quad + \int_0^\infty t^{-2\theta} \int_\Gamma \tilde{h}_\ell^2 |u \nabla_\Gamma \psi|^2 + t^2 u^2 |\nabla_\Gamma(1-\psi)|^2 d\Gamma \frac{dt}{t} \\ &\quad + \int_0^\infty t^{-2\theta} \int_\Gamma \tilde{h}_\ell^2 |\psi \nabla_\Gamma u|^2 + t^2 |(1-\psi) \nabla_\Gamma u|^2 d\Gamma \frac{dt}{t}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Wir schätzen nun jeden der drei Summanden separat ab. Dazu verwenden wir die Identität

$$|\psi u|^2 \tilde{h}_\ell^2 + t^2 |(1-\psi)u|^2 = u^2 (t^2 \tilde{h}_\ell^2) / (\tilde{h}_\ell^2 + t^2),$$

die Substitution $t = s \tilde{h}_\ell$ und den Satz von Fubini um den ersten Summanden wie folgt abzuschätzen:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{-2\theta} \int_\Gamma |\psi u|^2 \tilde{h}_\ell^2 + t^2 |(1-\psi)u|^2 d\Gamma \frac{dt}{t} &= \int_\Gamma u^2 \int_0^\infty t^{-2\theta} \frac{t^2 \tilde{h}_\ell^2}{\tilde{h}_\ell^2 + t^2} \frac{dt}{t} d\Gamma \\ &= \left(\int_0^\infty \frac{s^{-2\theta+1}}{s^2 + 1} ds \right) \left(\int_\Gamma u^2 \tilde{h}_\ell^{-2\theta+2} d\Gamma \right). \end{aligned}$$

Analog folgt für den dritten Summanden in (3.23)

$$\int_0^\infty t^{-2\theta} \int_\Gamma \tilde{h}_\ell^2 |\psi \nabla_\Gamma u|^2 + t^2 |(1-\psi) \nabla_\Gamma u|^2 d\Gamma \frac{dt}{t} = \left(\int_0^\infty \frac{s^{-2\theta+1}}{s^2 + 1} ds \right) \left(\int_\Gamma |\nabla_\Gamma u|^2 \tilde{h}_\ell^{-2\theta+2} d\Gamma \right).$$

Nun schätzen wir den zweiten Summanden in (3.23) ab. Es gilt

$$-\nabla_{\Gamma}(1 - \psi) = \nabla_{\Gamma}\psi = -\frac{2t^2\tilde{h}_{\ell}\nabla_{\Gamma}\tilde{h}_{\ell}}{(\tilde{h}_{\ell}^2 + t^2)^2}.$$

Zusammen mit der Substitution $t = s\tilde{h}_{\ell}$ und dem Satz von Fubini ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t^{-2\theta} \int_{\Gamma} \tilde{h}_{\ell}^2 |u \nabla_{\Gamma}\psi|^2 + t^2 u^2 |\nabla_{\Gamma}(1 - \psi)|^2 d\Gamma \frac{dt}{t} &= \int_{\Gamma} u^2 \int_0^{\infty} t^{-2\theta} \frac{4t^4 \tilde{h}_{\ell}^2 |\nabla_{\Gamma}\tilde{h}_{\ell}|^2}{(\tilde{h}_{\ell}^2 + t^2)^3} \frac{dt}{t} d\Gamma \\ &= 4 \left(\int_0^{\infty} \frac{s^{-2\theta+3}}{(s^2 + 1)^3} ds \right) \left(\int_{\Gamma} u^2 \tilde{h}_{\ell}^{-2\theta} |\nabla_{\Gamma}\tilde{h}_{\ell}|^2 d\Gamma \right) \end{aligned}$$

Aus Lemma 3.24 wissen wir, dass $|\nabla_{\Gamma}\tilde{h}_{\ell}| \simeq 1$. Insgesamt erhalten wir also

$$\|u\|_{[H^1(\tilde{h}_{\ell}), H^1]_{\theta}} \lesssim \|\tilde{h}_{\ell}^{1-\theta} u\|_{L_2} + \|\tilde{h}_{\ell}^{1-\theta} \nabla_{\Gamma} u\|_{L_2} + \|\tilde{h}_{\ell}^{-\theta} u\|_{L_2}.$$

Die Aussage $\tilde{h}_{\ell} \lesssim 1$ aus Lemma 3.24 schliesst den Beweis der Aussage (3.21) ab. □

3.26 Theorem. *Sei $0 \leq s < 1$. Setze*

- $\mathbb{P}_{\ell} = J_{\ell}$ die Scott-Zhang Projektion aus Theorem 3.22, oder
- $\mathbb{P}_{\ell} : H^s(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^p(\mathcal{E}_{\ell})$ eine $H^s(\Gamma)$ -stabile Projektion.

Dann gilt

$$\|(1 - \mathbb{P}_{\ell})g\|_{H^s(\Gamma)} \leq C_{\text{apx}} \min \{ \|h_{\ell}^{1-s} \nabla_{\Gamma} g\|_{L_2(\Gamma)}, \|h_{\ell}^{1-s} \nabla_{\Gamma}(1 - \mathbb{P}_{\ell})g\|_{L_2(\Gamma)} \} \quad (3.24)$$

für $g \in H^1(\Gamma)$ beliebig. Die Konstante $C_{\text{apx}} > 0$ hängt nur ab von $0 \leq s < 1$, von der Formregularitätskonstante γ , von der Operatornorm von $\mathbb{P}_{\ell}$ und vom Rand Γ .

Beweis. Laut Theorem 3.22 gilt für J_{ℓ} die Approximationseigenschaft

$$\|(1 - J_{\ell})g\|_{L_2(\Gamma)} \lesssim \|h_{\ell} \nabla_{\Gamma} g\|_{L_2(\Gamma)} \quad (3.25)$$

und die Stabilitätseigenschaft

$$\|\nabla_{\Gamma}(1 - J_{\ell})g\|_{L_2(\Gamma)} \lesssim \|\nabla_{\Gamma} g\|_{L_2(\Gamma)} \quad (3.26)$$

Dies ist gleichbedeutend zu

$$\|(1 - J_{\ell})g\|_{L_2} \lesssim \|g\|_{H^1(\tilde{h}_{\ell})} \quad \text{und} \quad \|(1 - J_{\ell})g\|_{H^1} \lesssim \|g\|_{H^1}$$

für alle $g \in H^1 = H^1(\tilde{h}_{\ell})$. Wir wenden das Interpolationstheorem auf die letzten beiden Ungleichungen an und benutzen (3.21), um

$$\|(1 - J_{\ell})g\|_{H^s} \lesssim \|g\|_{[H^1(\tilde{h}_{\ell}), H^1]_s} \lesssim \|\tilde{h}_{\ell}^{1-s} \nabla_{\Gamma} g\|_{L_2} + \|\tilde{h}_{\ell}^{-s} g\|_{L_2}$$

für alle $g \in H^1$ zu erhalten. Die letzte Abschätzung können wir nun auch zeigen, wenn $\mathbb{P}_\ell$ als $H^s(\Gamma)$ -stabile Projektion gewählt wurde. Wir bemerken $\mathbb{P}_\ell J_\ell g = J_\ell g$ und verwenden die Dreiecksungleichung und die Stabilität von $\mathbb{P}_\ell$, dies zeigt

$$\|(1 - \mathbb{P}_\ell)g\|_{H^s} \leq \|(1 - J_\ell)g\|_{H^s} + \|\mathbb{P}_\ell(1 - J_\ell)g\|_{H^s} \lesssim \|(1 - J_\ell)g\|_{H^s}$$

für alle $g \in H^1$. Es gilt weiters $(1 - \mathbb{P}_\ell)(1 - J_\ell) = (1 - \mathbb{P}_\ell)$ und $(1 - J_\ell)g \in H^1$, somit erhalten wir weiter

$$\|(1 - \mathbb{P}_\ell)g\|_{H^s} = \|(1 - \mathbb{P}_\ell)(1 - J_\ell)g\|_{H^s} \lesssim \|\tilde{h}_\ell^{1-s} \nabla_\Gamma (1 - J_\ell)g\|_{L_2} + \|\tilde{h}_\ell^{-s} (1 - J_\ell)g\|_{L_2}$$

für alle $g \in H^1$. Wegen $h_\ell \simeq \tilde{h}_\ell$ und den Abschätzungen (3.25)–(3.26) gilt

$$\|(1 - \mathbb{P}_\ell)g\|_{H^s} \lesssim \|\tilde{h}_\ell^{1-s} \nabla_\Gamma (1 - J_\ell)g\|_{L_2} + \|\tilde{h}_\ell^{-s} (1 - J_\ell)g\|_{L_2} \lesssim \|\tilde{h}_\ell^{1-s} \nabla_\Gamma g\|_{L_2}.$$

Wir verwenden ein weiteres Mal die Projektionseigenschaft $(1 - \mathbb{P}_\ell)^2 = (1 - \mathbb{P}_\ell)$ sowie $(1 - \mathbb{P}_\ell)g \in H^1$ und schließen

$$\|(1 - \mathbb{P}_\ell)g\|_{H^s} = \|(1 - \mathbb{P}_\ell)(1 - \mathbb{P}_\ell)g\|_{H^s} \lesssim \|\tilde{h}_\ell^{1-s} \nabla_\Gamma (1 - \mathbb{P}_\ell)g\|_{L_2}.$$

Die Kombination der letzten beiden Abschätzungen zeigt das Gewünschte. $\square$

Wir benötigen das folgende Resultat, dessen Beweis in [AFK⁺12, Proposition 8] zu finden ist.

3.27 Proposition. *Bezeichne $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ ein Gitter und $\mathcal{E}_\ell = \mathbf{refine}(\mathcal{E}_0)$ eine beliebige Verfeinerung. Mit der Scott-Zhang-Projektion J_ℓ auf $\mathcal{S}^p(\mathcal{E}_\ell)$ gilt für alle $E \in \mathcal{E}_\ell$*

$$\|(1 - \pi_\ell^{p-1}) \nabla_\Gamma g\|_{L_2(E)} \leq \|\nabla_\Gamma (1 - J_\ell)g\|_{L_2(E)} \leq C_{\text{dir}} \|(1 - \pi_\ell^{p-1}) \nabla_\Gamma g\|_{L_2(\omega_\ell(E))}. \quad (3.27)$$

Die Konstante $C_{\text{dir}} \geq 1$ hängt nur von Γ , p und $\mathcal{E}_0$ ab. $\blacksquare$

3.6 Inverse Ungleichungen

Folgende Inverse Ungleichung stammt aus [Geo08, Theorem 3.9] und ist eine Verallgemeinerung von [GHS05, Theorem 3.6].

3.28 Proposition. *Es sei $\Gamma \subseteq \partial\Omega$, $\mathcal{E}_\ell$ ein γ -formreguläres Gitter auf Γ und $\mathbf{p}_\ell$ eine Polynomgradverteilung auf $\mathcal{E}_\ell$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \|h_\ell^{1/2} \Psi_\ell\|_{L_2(\Gamma)} &\leq C_{\text{inv}} \|\Psi_\ell\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } \Psi_\ell \in \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell) \\ \left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell} \Psi_\ell \right\|_{L_2(\Gamma)} &\leq C_{\text{inv}} \|\Psi_\ell\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } \Psi_\ell \in \mathcal{P}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell) \text{ falls } \mathbf{p}_\ell \geq 1 \end{aligned}$$

mit einer Konstante $C_{\text{inv}} > 0$, die nur von der Formregularitätskonstante γ abhängt. $\blacksquare$

Wir benötigen auch eine inverse Ungleichung, die die H^1 -Seminorm durch die $H^{1/2}$ -Norm abschätzt. Der Beweis der folgenden Abschätzung ist eine Verfeinerung von [Geo08, Theorem 3.3].

3.29 Proposition. *Es sei $\Gamma \subseteq \partial\Omega$, $\mathcal{E}_\ell$ ein γ -formreguläres Gitter auf Γ und $\mathbf{p}_\ell$ eine Polynomgradverteilung auf $\mathcal{E}_\ell$. Dann gilt*

$$\left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell} \nabla_\Gamma G_\ell \right\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_{\text{inv}} \|G_\ell\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } G_\ell \in \mathcal{S}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell)$$

mit einer Konstanten $C_{\text{inv}} > 0$, die nur von der Formregularitätskonstante γ abhängt.

Beweis. Laut [Sch98, Theorem 4.76] gilt auf dem Referenzelement $\widehat{E}$ die inverse Ungleichung

$$\|\nabla(G_\ell \circ F_E)\|_{L_2(\widehat{E})} \lesssim p_E^2 \|G_\ell \circ F_E\|_{L_2(\widehat{E})}$$

für alle $G_\ell \in \mathcal{S}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell)$. Durch ein Skalierungsargument und eine Summe über die Elemente erhalten wir

$$\left\| \frac{h_\ell}{p_\ell^2} \nabla_\Gamma G_\ell \right\|_{L_2(\Gamma)} \lesssim \|G_\ell\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Es gilt auch $\|\nabla_\Gamma V_\ell\|_{L_2(\Gamma)} \leq \|V_\ell\|_{H^1(\Gamma)}$, sodass die Bildung des Gradienten $V_\ell \mapsto \nabla_\Gamma V_\ell$ eine stetige Abbildung zwischen den folgenden beiden Paaren von Räumen ist:

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell), \|\cdot\|_{H^1(\Gamma)}) &\rightarrow (\mathcal{P}^{\mathbf{p}_\ell-1}(\mathcal{E}_\ell), \|\cdot\|_{L_2(\Gamma)}) \\ (\mathcal{S}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell), \|\cdot\|_{L_2(\Gamma)}) &\rightarrow (\mathcal{P}^{\mathbf{p}_\ell-1}(\mathcal{E}_\ell), \|\cdot\|_{L_2(w_\ell)}), \end{aligned}$$

wobei die Gewichtsfunktion $w_\ell \in L_\infty(\Gamma)$ gegeben ist durch $w_\ell := h_\ell/p_\ell^2$. Die Stetigkeitskonstanten hängen dabei nicht von $\mathcal{E}_\ell$ oder $\mathbf{p}_\ell$ ab. Wenden wir nun das Interpolationstheorem 2.4 an, erhalten wir für $0 < \theta < 1$ die Stetigkeit in

$$\left[(\mathcal{S}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell), \|\cdot\|_{L_2(\Gamma)}), (\mathcal{S}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell), \|\cdot\|_{H^1(\Gamma)}) \right]_\theta \rightarrow \left[(\mathcal{P}^{\mathbf{p}_\ell-1}(\mathcal{E}_\ell), \|\cdot\|_{L_2(h_\ell/p_\ell^2)}), (\mathcal{P}^{\mathbf{p}_\ell-1}(\mathcal{E}_\ell), \|\cdot\|_{L_2(\Gamma)}) \right]_\theta,$$

Wir bezeichnen diese beiden Interpolationsräume kurz als $\mathcal{S}_\theta$ und $\mathcal{P}_\theta$. Es gilt also

$$\|\nabla_\Gamma V_\ell\|_{\mathcal{P}_\theta} \lesssim \|V_\ell\|_{\mathcal{S}_\theta}.$$

Die Normen in der letzten Abschätzung stammen nicht aus der Interpolation der entsprechenden Sobolevräume, sind jedoch zu solchen äquivalent: In Lemma 2.5 wählen wir $I = \pi_\ell$ als die $L_2(\Gamma)$ -orthogonale Projektion nach $\mathcal{P}^{\mathbf{p}_\ell-1}(\mathcal{E}_\ell)$ und erhalten

$$\|\nabla_\Gamma V_\ell\|_{\mathcal{P}_\theta} \simeq \|\nabla_\Gamma V_\ell\|_{[(L_2, \|\cdot\|_{L_2(w_\ell)}), (L_2, \|\cdot\|_{L_2})]_\theta}$$

Im zweiten Fall wählen wir $I = J_\ell$ als Scott-Zhang Operator [SZ90]. Dies ist eine L_2 - und H_1 -stabile Projektion. Mit Lemma 2.5 erhalten wir wieder

$$\|V_\ell\|_{\mathcal{S}_\theta} \simeq \|V_\ell\|_{[(L_2, \|\cdot\|_{L_2}), (H^1, \|\cdot\|_{H^1})]_\theta}.$$

Die Norm $\|\cdot\|_{[(L_2, \|\cdot\|_{L_2(w_\ell)}), (L_2, \|\cdot\|_{L_2})]_\theta}$ ist äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_{L_2(w_\ell^{1-\theta})}$, wobei die Konstanten nicht von ℓ abhängen [Tar07, Lemma 23.1]. Die Wahl $\theta = 1/2$ schliesst den Beweis ab. $\square$

Kapitel 4

Integraloperatoren

Zunächst führen wir in Kapitel 4.1 die Potentiale des Laplace-Operators und die dazugehörigen Randintegraloperatoren ein. Wir zitieren die benötigten Aussagen zur Regularität und Beschränktheit derselben. Das Hauptresultat dieses Kapitels, die inversen Ungleichungen für die Integraloperatoren, erläutern und beweisen wir im zweiten Kapitel. Dabei handelt es sich um Aussagen der Form

$$\left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell} \nabla_\Gamma V \Psi_\ell \right\|_{L_2(\Gamma)} \lesssim \|\Psi_\ell\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } \Psi_\ell \in \mathcal{P}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell).$$

Angemerkt sei an dieser Stelle, dass diese inversen Ungleichungen für quasi-uniforme Gitter ganz einfach durch Anwenden des Interpolationssatzes 2.4 und der Abbildungseigenschaften aus Theorem 4.2 gezeigt werden können. Die Beweise für lokal quasi-uniforme Gitter benötigen einige technische Resultate, die im Weiteren angegeben werden. Ähnliche Resultate werden in [Gan11] mit Wavelet-Techniken bewiesen, wobei jedoch Γ als $C^{1,1}$ gefordert wird und nur Räume niedrigster Ordnung betrachtet werden. Wir werden die inversen Ungleichungen in ihrer allgemeinsten Form explizit in der Netzweite und im Polynomgrad angeben.

Inverse Ungleichung beweist man typischerweise, indem man ein Skalierungsargument verwendet und auf den Referenzelementen ausnutzt, dass die *pull-backs* der diskreten Funktionen aus einem Raum sind, dessen Dimension unabhängig vom betrachteten Gitter beschränkt ist. Daher kann man Normäquivalenz verwenden, wobei die auftretenden Konstanten unabhängig vom Gitter beschränkt sind. Für Funktionen aus z.B. $V\mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$ ist dies nicht mehr möglich, da der Operator V nicht-lokal ist. Das bedeutet, dass zwar auf jedem Element $E \in \mathcal{E}_\ell$ die Funktion $V\Psi_\ell$ für ein $\Psi_\ell \in \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$ aus einem endlichdimensionalen Raum ist, jedoch ist dessen Dimension nicht mehr unabhängig vom Gitter beschränkt. Um dieses Problem in den Griff zu bekommen, bemerken wir zuerst, dass die klassischen Argumente auf sogenannte *Nahfeldterme* $V(\Psi_\ell|_E)$ anwendbar sind, sodass also nur noch die *Fernfeldterme* $V(\Psi_\ell - \Psi_\ell|_E)$ betrachtet werden müssen. Diese Terme sind aber, wie wir zeigen werden, lokal harmonisch, und erlauben daher eine Abschätzung durch eine *Caccioppoli*-Ungleichung, also eine inverse Ungleichung für Lösungen von PDEs.

4.1 Integraloperatoren für die Laplacegleichung

Im Folgenden bezeichnet G die Fundamentallösung des Laplaceoperators $-\Delta$ in 3D,

$$G(\mathbf{z}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{z}|}.$$

Alle folgenden Resultate gelten selbstverständlich auch in 2D, dort ist die Fundamentallösung des Laplaceoperators gegeben durch $G(\mathbf{z}) = -1/(2\pi) \log |\mathbf{z}|$. Für eine Funktion $v \in L_1(\partial\Omega)$ definiert man das *Einfachschichtpotential* $\tilde{V}$ und das *Doppelschichtpotential* $\tilde{K}$ in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$ durch

$$(\tilde{V}v)(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x} - \mathbf{y})v(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) \quad \text{und} \quad (\tilde{K}v)(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x} - \mathbf{y})v(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}).$$

Die Eigenschaften der Potentiale $\tilde{V}$ und $\tilde{K}$ sind [SS11, McL00, Ver84] entnommen und im folgenden Theorem zusammengefasst.

4.1 Theorem. *Sei Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet mit Rand $\Gamma := \partial\Omega$ und $v \in L_1(\Gamma)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) $\tilde{V}v, \tilde{K}v \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma)$.

(ii) $-\Delta\tilde{V}v(\mathbf{x}) = -\Delta\tilde{K}v(\mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma$.

(iii) Für $s \in [-1/2, 1/2]$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{V} &\in L(H^{-1/2+s}(\Gamma), H_{\text{loc}}^{1+s}(\mathbb{R}^d)), \\ \tilde{K} &\in L(H^{1/2+s}(\Gamma), H^{1+s}(\Omega)), \\ \tilde{K} &\in L(H^{1/2+s}(\Gamma), H_{\text{loc}}^{1+s}(\Omega^{\text{ext}})). \end{aligned}$$

(iv) Für $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ und $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ gelten die Sprungbedingungen

$$\begin{aligned} [\tilde{V}\phi] &= 0 \in H^{1/2}(\Gamma), \\ [\tilde{K}\psi] &= \psi \in H^{1/2}(\Gamma), \\ [\gamma_1^{\text{int}}\tilde{V}\phi] &= -\phi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad \text{und} \\ [\gamma_1^{\text{int}}\tilde{K}\psi] &= 0 \in H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

(v) Es gilt

$$(\tilde{K}1)(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathbf{x} \in \Omega^{\text{ext}} \\ -1 & \text{für } \mathbf{x} \in \Omega \\ -\frac{1}{2} & \text{für } \mathbf{x} \in \Gamma. \end{cases}$$

■

Vermöge des vorigen Theorems sowie den Eigenschaften des Spuoperators γ_0^{int} aus Theorem 2.7 und der Normalenableitung γ_1^{int} aus Theorem 2.9 definieren wir die Randintegraloperatoren

$$\begin{aligned} V &:= \gamma_0^{\text{int}}\tilde{V}, \\ K &:= \frac{1}{2} + \gamma_0^{\text{int}}\tilde{K}, \\ K' &:= -\frac{1}{2} + \gamma_1^{\text{int}}\tilde{V}, \\ W &:= -\gamma_1^{\text{int}}\tilde{K}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Man nennt V das Einfachschichtpotential, K das Doppelschichtpotential, K' das adjungierte Doppelschichtpotential und W den hypersingulären Integraloperator. Folgendes Theorem aus [Ver84] zeigt die Abbildungseigenschaften der Randintegraloperatoren.

4.2 Theorem. *Sei $\Gamma = \partial\Omega$ der Rand eines Lipschitz-Gebietes. Für alle $s \in [-1/2, 1/2]$ gilt dann*

$$\begin{aligned} V &\in L(H^{-1/2+s}(\Gamma), H^{1/2+s}(\Gamma)), \\ K &\in L(H^{1/2+s}(\Gamma), H^{1/2+s}(\Gamma)), \\ K' &\in L(H^{-1/2+s}(\Gamma), H^{-1/2+s}(\Gamma)), \\ W &\in L(H^{1/2+s}(\Gamma), H^{-1/2+s}(\Gamma)). \end{aligned}$$

Für $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$ gilt für alle $s \in [-1/2, 1/2]$ sogar

$$\begin{aligned} V &\in L(\tilde{H}^{-1/2+s}(\Gamma), H^{1/2+s}(\Gamma)), \\ W &\in L(\tilde{H}^{1/2+s}(\Gamma), H^{-1/2+s}(\Gamma)). \end{aligned}$$

■

Um lösbar schwache Formulierungen für die Gleichungen zu bekommen, die wir im Weiteren zu lösen beabsichtigen, benötigen wir zusätzlich zur Stetigkeit auch die Elliptizität der Randintegraloperatoren V und W . Die Aussagen folgen für $\Gamma = \partial\Omega$ aus [SS11, Theorem 3.5.3] und für $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$ aus [SS11, Theorem 3.5.9].

4.3 Theorem. *Es sei $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ der Rand oder Teil des Randes eines Lipschitzgebietes. Die Randintegraloperatoren $V \in L(\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma))$ und $W \in L(\tilde{H}^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma))$ sind elliptisch,*

$$\begin{aligned} \langle V\psi, \psi \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} &\gtrsim \|\psi\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } \psi \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma), \\ \langle Wv, v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)} &\gtrsim \|v\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } v \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

Insbesondere sind

$$\|\cdot\|_V^2 := \langle V\cdot, \cdot \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{und} \quad (4.2a)$$

$$\|\cdot\|_W^2 := \langle W\cdot, \cdot \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)} \quad (4.2b)$$

äquivalente Normen auf $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$ beziehungsweise $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$, und die Äquivalenzkonstante bezeichnen wir mit C_{eq} . ■

4.2 Inverse Ungleichungen für Integraloperatoren

Im Folgenden werden wir inverse Ungleichungen für die diskreten Räume $V\mathcal{P}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell)$, $K'\mathcal{P}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell)$, $W\mathcal{S}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell)$ und $K\mathcal{S}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell)$ herleiten. Folgendes Theorem stellt das Hauptresultat dieses Abschnittes dar. Der Beweis wird am Ende des Kapitels 4.2 geführt, nachdem wir alle nötigen Hilfsmittel gesammelt haben.

4.4 Theorem. *Es sei $\Gamma = \partial\Omega$ der Rand eines beschränkten, polyhedralen Lipschitzgebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\mathcal{E}_\ell$ ein lokal quasi-uniformes Gitter auf Γ , sowie $\mathbf{p}_\ell = (p_{\ell,E})_{E \in \mathcal{E}_\ell}$ eine lokal quasi-uniforme Polynomgradverteilung auf $\mathcal{E}_\ell$ mit $p_{\ell,E} \geq 1$ und $\beta > 0$. Dann existieren Konstanten $C_{\text{inv}}^V, C_{\text{inv}}^{K'}, C_{\text{inv}}^K, C_{\text{inv}}^W > 0$, sodass für alle $\psi \in L_2(\Gamma)$ und $v \in \tilde{H}^1(\Gamma)$ folgende Abschätzungen gelten:*

$$\left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell^\beta} \nabla_\Gamma V \psi \right\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_{\text{inv}}^V \left(\|\psi\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} + \left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell^\beta} \psi \right\|_{L_2(\Gamma)} \right), \quad (4.3a)$$

$$\left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell^\beta} K' \psi \right\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_{\text{inv}}^{K'} \left(\|\psi\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} + \left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell^\beta} \psi \right\|_{L_2(\Gamma)} \right), \quad (4.3b)$$

$$\left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell^\beta} \nabla_\Gamma K v \right\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_{\text{inv}}^K \left(\|v\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)} + \left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell^\beta} \nabla_\Gamma v \right\|_{L_2(\Gamma)} \right), \quad (4.3c)$$

$$\left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell^\beta} W v \right\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_{\text{inv}}^W \left(\|v\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)} + \left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell^\beta} \nabla_\Gamma v \right\|_{L_2(\Gamma)} \right). \quad (4.3d)$$

Im Falle $\beta = 0$ gelten obige Abschätzung für $p_{\ell,E} \geq 0$. Für $\Psi_\ell \in \mathcal{P}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell)$ und $V_\ell \in \mathcal{S}^{\mathbf{p}_\ell}(\mathcal{E}_\ell)$ gilt sogar

$$\left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell} \nabla_\Gamma V \Psi_\ell \right\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_{\text{inv}}^V \|\Psi_\ell\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)}, \quad (4.4a)$$

$$\left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell} (1/2 - K') \Psi_\ell \right\|_{L_2(\Gamma)} + \left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell} K' \Psi_\ell \right\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_{\text{inv}}^V \|\Psi_\ell\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)}, \quad (4.4b)$$

$$\left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell} \nabla_\Gamma (1/2 + K) V_\ell \right\|_{L_2(\Gamma)} + \left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell} \nabla_\Gamma K V_\ell \right\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_{\text{inv}}^K \|V_\ell\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}, \quad (4.4c)$$

$$\left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell} W V_\ell \right\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_{\text{inv}}^K \|V_\ell\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}, \quad (4.4d)$$

mit anderen Konstanten, die aber ebenfalls nur von γ und der Formregularitätskonstante von $\mathbf{p}_\ell$ abhängen. Diese Abschätzungen gelten auch ohne p_ℓ auf der linken Seite, dann hängen die Konstanten jedoch von $\mathbf{p}_\ell$ ab. Ist $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ nur ein Teil des Randes, so gelten obige Abschätzung für V und W ebenfalls. ■

Zunächst die notwendige Notation. Für ein $\delta > 0$ definieren wir eine Umgebung eines Elementes $E \in \mathcal{E}_\ell$ durch

$$E \subset U_E := \bigcup_{\mathbf{x} \in E} B_{2\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x}).$$

Die Formregularität der Gitter $\mathcal{E}_\ell$ erlaubt es, $\delta > 0$ und zusätzlich ein $M \in \mathbb{N}$ so zu wählen, sodass $U_E \cap \Gamma$ im Patch von E enthalten, ist, i.e.

$$U_E \cap \Gamma \subset \bigcup_{E' \in \omega_\ell(E)} \overline{E'}, \quad (4.5a)$$

und sodass die Überdeckung $\Gamma \subset \bigcup_{E \in \mathcal{E}_\ell} U_E$ lokal endlichen Overlap hat, i.e.

$$\#\{U_E \mid E \in \mathcal{E}_\ell \text{ and } \mathbf{x} \in U_E\} \leq M \text{ for all } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.5b)$$

Unabhängig von einem beliebigen Gitter $\mathcal{E}_\ell$ auf Γ ist es möglich, eine Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ und eine Funktion $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ zu wählen mit

$$\bigcup_{E \in \mathcal{E}_\ell} U_E \subset U \quad \text{und} \quad \varphi|_U = 1. \quad (4.6)$$

Im Folgenden bezeichnen wir für eine Funktion $\psi \in L_2(\Gamma)$ das Nah- und Fernfeld von $u = \tilde{V}\psi$ auf einem Element E durch

$$\begin{aligned} u_E^{\text{near}} &:= \tilde{V}(\psi \chi_{U_E \cap \Gamma}), \\ u_E^{\text{far}} &:= \tilde{V}(\psi \chi_{\Gamma \setminus U_E}). \end{aligned}$$

Hier ist χ_ω die charakteristische Funktion einer Menge $\omega \subset \Gamma$. Wir bemerken, dass $u_E^{\text{near}} + u_E^{\text{far}} = u$ für alle $E \in \mathcal{E}_\ell$ gilt. Für das Doppelschichtpotential gehen wir ähnlich vor: Es sei $\varphi_z \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ die Hutfunktion zum Knoten $z \in \mathcal{N}_\ell$, d.h. $\varphi_z(z') = \delta_{zz'}$ mit dem Kronecker-Delta. Für jedes Element $E \in \mathcal{E}_\ell$ definieren wir eine Funktion φ_E durch

$$\varphi_E := \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell \cap \omega_\ell(E)} \varphi_z.$$

Es gilt dann

$$\varphi_E|_{\Gamma \cap U_E} = 1, \quad \varphi_E|_{\Gamma \setminus \omega_\ell(\omega_\ell(E))} = 0, \quad \|\varphi_E\|_{L^\infty} = 1, \quad \text{and} \quad \|\nabla_\Gamma \varphi_E\|_{L^\infty} \simeq h_\ell(E)^{-1}. \quad (4.7)$$

Für eine Funktion $v \in H^1(\Gamma)$ teilen wir das Doppelschichtpotential $w = \tilde{K}v$ auf einem Element $E \in \mathcal{E}_\ell$ in Nah- und Fernfeld durch

$$w_E^{\text{near}} := \tilde{K}((v - c_E)\varphi_E) \quad \text{and} \quad w_E^{\text{far}} := \tilde{K}((v - c_E)(1 - \varphi_E)), \quad (4.8)$$

wobei die Konstante $c_E \in \mathbb{R}$ später gewählt wird. Wir bemerken die folgende Eigenschaft, die aufgrund von Theorem 4.1 (v) erfüllt ist: Es gilt

$$\begin{aligned} w + c_E &= w_E^{\text{near}} + w_E^{\text{far}} \quad \text{in } \Omega, \\ w &= w_E^{\text{near}} + w_E^{\text{far}} \quad \text{in } \Omega^{\text{ext}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

für alle $E \in \mathcal{E}_\ell$. Wir starten mit den inversen Ungleichungen für die Fernfeldanteile. In den folgenden zwei Lemmas benützen wir Resultate der Regularitätstheorie, um die zweite Ableitung des Fernfeldes lokal durch die erste Ableitung abzuschätzen.

4.5 Lemma (Caccioppoli-Ungleichung für $\tilde{V}$). *Es gilt $u_E^{\text{far}}|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$, $u_E^{\text{far}}|_{\Omega^{\text{ext}}} \in C^\infty(\Omega^{\text{ext}})$ und $u_E^{\text{far}}|_{U_E} \in C^\infty(U_E)$. Weiters gilt die Abschätzung*

$$\|D^2 u_E^{\text{far}}\|_{L_2(B_{\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x}))} \leq C_{\text{cacc}}^{\text{slp}} \frac{1}{h_\ell(E)} \|\nabla u_E^{\text{far}}\|_{L_2(B_{2\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x}))} \quad \text{für } \mathbf{x} \in E, \quad (4.10)$$

wobei die Konstante $C_{\text{cacc}}^{\text{slp}} > 0$ nur von der γ -Formregularität von $\mathcal{E}_\ell$ abhängt.

Beweis. Die Regularität von u_E^{far} auf Ω und Ω^{ext} folgt aus [SS11, Theorem 3.1.1]. Laut [SS11, Theorem 3.1.16] gilt für das Fernfeld $u_E^{\text{far}} \in H^1(\Omega) \times H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$, und laut [SS11, Proposition 3.1.7 und Theorem 3.3.1] löst es das Transmissionsproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u_E^{\text{far}} &= 0 && \text{in } \Omega \cup \Omega^{\text{ext}}, \\ [u_E^{\text{far}}] &= 0 && \text{in } H^{1/2}(\Gamma), \\ [\gamma_1 u_E^{\text{far}}] &= -\psi \chi_{\Gamma \setminus U_E} && \text{in } H^{-1/2}(\Gamma), \\ u_E^{\text{far}}(\mathbf{x}) &= \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|) && \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Hier bezeichnet $[\cdot]$ den Sprung über Γ . Für fixes $\mathbf{x}' \in E$ und eine Testfunktion $v \in \mathcal{D}(B_{2\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x}'))$ folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \langle u_E^{\text{far}}, -\Delta v \rangle &= - \int_{B_{2\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x}')} u_E^{\text{far}} \Delta v \, d\mathbf{x} \\ &= - \int_{B_{2\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x}') \cap \Omega} u_E^{\text{far}} \Delta v \, d\mathbf{x} - \int_{B_{2\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x}') \cap \Omega^{\text{ext}}} u_E^{\text{far}} \Delta v \, d\mathbf{x} \\ &= - \int_{B_{2\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x}') \cap \Omega} \Delta u_E^{\text{far}} v \, d\mathbf{x} - \langle \gamma_1^{\text{int}} u_E^{\text{far}}, v \rangle + \langle \gamma_1^{\text{int}} v, \gamma_0^{\text{int}} u_E^{\text{far}} \rangle \\ &\quad - \int_{B_{2\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x}') \cap \Omega^{\text{ext}}} \Delta u_E^{\text{far}} v \, d\mathbf{x} - \langle \gamma_1^{\text{ext}} u_E^{\text{far}}, v \rangle + \langle \gamma_1^{\text{ext}} v, \gamma_0^{\text{ext}} u_E^{\text{far}} \rangle \\ &= - \int_{B_{2\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x}') \cap (\Omega \cup \Omega^{\text{ext}})} \Delta u_E^{\text{far}} v \, d\mathbf{x} - \langle [\gamma_1 u_E^{\text{far}}], v \rangle + \langle \partial_{\mathbf{n}} v, [u_E^{\text{far}}] \rangle \end{aligned}$$

Der erste und dritte Term verschwinden aufgrund von (4.11). Wegen $\Gamma \cap B_{2\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x}') \subseteq U_E$ verschwindet auch der zweite Term, und es folgt $-\Delta u_E^{\text{far}} = 0$ auf $B_{2\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x}')$ im distributionellen Sinne. Aus dem Weylschen Lemma [Mor08, Theorem 2.3.1] folgt dann $u_E^{\text{far}} \in C^\infty(B_{2\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x}'))$.

Die Abschätzung (4.10) folgt nun aus [Mor08, Lemma 5.7.1]: Sind $B_r \subset B_{r+h}$ Kugeln mit den Radien $0 < r < r+h$ und $u \in H^1(B_{r+h})$, $u \in H^2(B_r)$ mit $\Delta u = f \in L_2(B_{r+h})$ auf B_{r+h} , dann garantiert besagtes Lemma die Abschätzung

$$\|D^2 u\|_{L^2(B_r)} \lesssim \|f\|_{L^2(B_{r+h})} + \frac{1}{h} \|\nabla u\|_{L^2(B_{r+h})} + \frac{1}{h^2} \|u\|_{L^2(B_{r+h})}$$

wobei die Konstante, die sich hinter $\lesssim$ versteckt, nur an der Dimension d des zugrundeliegenden Raumes hängt. Wir verwenden die letzte Abschätzung für $u = u_E^{\text{far}} - c_E$ mit $c_E = \int_{B_{2\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x})} u_E^{\text{far}}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}$, worauf eine Anwendungen der Poincaré-Ungleichung die Abschätzung (4.10) liefert. $\square$

Analog zum vorigen Resultat können wir die gleiche Aussage für das Fernfeld des Doppelschichtoperators zeigen.

4.6 Lemma (Caccioppoli-Ungleichung für $\tilde{K}$). *Es gilt $w_E^{\text{far}}|_{\Omega} \in C^\infty(\Omega)$, $w_E^{\text{far}}|_{\Omega^{\text{ext}}} \in C^\infty(\Omega^{\text{ext}})$ und $w_E^{\text{far}}|_{U_E} \in C^\infty(U_E)$. Weiters gilt die Abschätzung*

$$\|D^2 w_E^{\text{far}}\|_{L_2(B_{\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x}))} \leq C_{\text{cacc}}^{\text{slp}} \frac{1}{h_\ell(E)} \|\nabla w_E^{\text{far}}\|_{L_2(B_{2\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x}))} \quad \text{für } \mathbf{x} \in E, \quad (4.12)$$

wobei die Konstante $C_{\text{cacc}}^{\text{slp}} > 0$ die gleiche ist wie in Lemma 4.5.

Beweis. Laut [SS11] löst das Fernfeld $w_E^{\text{far}} \in H^1(\Omega) \times H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$ das Transmissionsproblem

$$\begin{aligned} -\Delta w_E^{\text{far}} &= 0 && \text{in } \Omega \cup \Omega^{\text{ext}}, \\ [w_E^{\text{far}}] &= (v - c_E)(1 - \varphi_E) && \text{auf } \Gamma, \\ [\gamma_1 w_E^{\text{far}}] &= 0 && \text{auf } \Gamma, \\ w_E^{\text{far}}(\mathbf{x}) &= \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|) && \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Im Gegensatz zum Transmissionsproblem, welches von $\tilde{V}$ gelöst wird, sind hier Sprung und Normalensprung über Γ vertauscht. Trotzdem ist $(1 - \varphi_E) = 0|_{\Gamma \cap U_E} = 0$, und wir können die selben Argumente wie im Beweis von Lemma (4.5) verwenden. $\square$

Die Lemmas 4.5 und 4.6 haben wir lokal auf Kugeln formuliert. Im folgenden Lemma benutzen wir Covering-Argumente, um diese Abschätzungen auf ein Element E hochzuziehen. Dies ist ebenfalls als inverse Ungleichung aufzufassen: laut dem Spursatz 2.8 müssten wir die Spur des Gradienten eigentlich durch die zweiten Ableitungen im Raum abschätzen. Diese können wir aber aufgrund der Lemmas 4.5 und 4.6 durch den Gradienten abschätzen, wobei wir h -Potenzen verlieren.

4.7 Lemma. *Für alle $E \in \mathcal{E}_\ell$ und $v_E^{\text{far}} \in \{u_E^{\text{far}}, w_E^{\text{far}}\}$ gilt*

$$\|h_\ell^{1/2} \nabla v_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)}^2 \leq C \|\nabla v_E^{\text{far}}\|_{L_2(U_E)}^2 \quad (4.14)$$

mit $C := C_{\text{far}}^{\text{slp}}$ im Falle $v_E^{\text{far}} = u_E^{\text{far}}$ und $C := C_{\text{far}}^{\text{dlp}}$ im Falle $v_E^{\text{far}} = w_E^{\text{far}}$. Die Konstante $C > 0$ hängt nur von Γ und der γ -Formregularität von $\mathcal{E}_\ell$ ab.

Beweis. Es ist $\mathcal{F} := \{\overline{B_\delta(\mathbf{x})} \mid \mathbf{x} \in E\}$ eine Menge von abgeschlossenen Kugeln mit $\sup_{B \in \mathcal{F}} \text{diam}(B) = \delta < \infty$, und E ist die Menge ihrer Mittelpunkte. Laut Besicovitch's Covering Theorem [EG92, 1.5.2] existieren eine Konstante N_d , die nur von der Raumdimension d abhängt, sowie paarweise disjunkte, abzählbare Teilmengen $\mathcal{G}_j \subset \mathcal{F}$ für $j = 1, \dots, N_d$ mit

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{N_d} \bigcup_{B \in \mathcal{G}_j} B.$$

Ausserdem gibt es eine Konstante $\hat{N}_d$, sodass nur $\hat{N}_d$ viele Elemente aus $\hat{\mathcal{G}}_j := \{B_{2\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x}) \mid B_{\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x}) \in \mathcal{G}_j\}$ sich überlappen. Für $B := B_{\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x})$ und $\hat{B} := B_{2\delta h_\ell(E)}(\mathbf{x})$ folgt mit (2.2) und (4.10) bzw. (4.12)

$$\begin{aligned} \|\nabla v_E^{\text{far}}\|_{L_2(B \cap E)}^2 &\lesssim \frac{1}{h_\ell(E)} \|\nabla v_E^{\text{far}}\|_{L_2(B)}^2 + \|\nabla v_E^{\text{far}}\|_{L_2(B)} \|D^2 v_E^{\text{far}}\|_{L_2(B)} \\ &\lesssim \frac{1}{h_\ell(E)} \left(\|\nabla v_E^{\text{far}}\|_{L_2(B)}^2 + \|\nabla v_E^{\text{far}}\|_{L_2(\hat{B})}^2 \right). \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\|\nabla v_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)}^2 \leq \sum_{i=1}^{N_d} \sum_{B \in \mathcal{G}_i} \|\nabla v_E^{\text{far}}\|_{L_2(B \cap E)}^2 \lesssim \frac{1}{h_\ell(E)} \sum_{i=1}^{N_d} \sum_{B \in \hat{\mathcal{G}}_i} \|\nabla v_E^{\text{far}}\|_{L_2(\hat{B})}^2 \leq \frac{N_d \hat{N}_d}{h_\ell(E)} \|\nabla v_E^{\text{far}}\|_{L_2(U_E)}^2,$$

woraus (4.14) folgt. $\square$

Wir wenden uns nun den Nahfeldanteilen zu.

4.8 Lemma. Für jedes Element $E \in \mathcal{E}_\ell$ sei eine Funktion $\Psi_\ell^E \in \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$ mit $\text{supp}(\Psi_\ell^E) \subset \omega_\ell(E)$ gegeben. Dann gilt

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \frac{1}{p_{\ell,E}^{2\beta}} \|\nabla \tilde{V} \Psi_\ell^E\|_{L_2(U_E)}^2 \leq C_8 \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \frac{1}{p_{\ell,E}^{2\beta}} \|h_\ell^{1/2} \Psi_\ell^E\|_{L_2(\omega_\ell(E))}^2,$$

wobei C_8 nur von der γ -Formregularität von $\mathcal{E}_\ell$ abhängt.

Beweis. Sei $E \in \mathcal{E}_\ell$ beliebig, aber fix. In $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma$ gilt

$$\nabla \tilde{V}(\Psi_\ell^E)(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{E' \in \omega_\ell(E)} \Psi_\ell^E(E') \int_{E'} \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\Gamma(\mathbf{y}),$$

wobei $\Psi_\ell^E(E') = \Psi_\ell^E|_{E'}$ eine Konstante ist. Die Anzahl der Elemente in $\omega_\ell(E)$ ist aufgrund der γ -Formregularität des Gitters $\mathcal{E}_\ell$ uniform beschränkt und wir erhalten

$$|\nabla \tilde{V}(\Psi_\ell^E)|^2 \lesssim \sum_{E' \in \omega_\ell(E)} |\Psi_\ell^E(E')|^2 \left(\int_{E'} \left| \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right| d\Gamma(\mathbf{y}) \right)^2.$$

Aufgrund der Formregularität gibt es eine Konstante $c > 0$, sodass für jedes $E' \in \omega_\ell(E)$ gilt, dass $U_E \subset B_{ch_\ell(E)}(b_{E'})$, wobei $B_{ch_\ell(E)}(b_{E'})$ die Kugel mit Radius $ch_\ell(E)$ mit Mittelpunkt im Schwerpunkt $b_{E'}$ von E' ist. Wir integrieren über U_E und erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{U_E} |\nabla \tilde{V}(\Psi_\ell^E)|^2 d\mathbf{x} &\lesssim \sum_{E' \in \omega_\ell(E)} |\Psi_\ell^E(E')|^2 \int_{U_E} \left(\int_{E'} \left| \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right| d\Gamma(\mathbf{y}) \right)^2 d\mathbf{x} \\ &\lesssim \sum_{E' \in \omega_\ell(E)} |\Psi_\ell^E(E')|^2 \int_{B_{ch_\ell(E)}(b_{E'})} \left(\int_{B_{ch_\ell(E)}(b_{E'}) \cap \Gamma_{E'}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\Gamma(\mathbf{y}) \right)^2 d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

wobei $\Gamma_{E'}$ die von E' aufgespannte Hyperebene ist. Durch Skalierungsargumente erhalten wir

$$\int_{U_E} |\nabla \tilde{V}(\Psi_\ell^E)|^2 d\mathbf{x} \lesssim \sum_{E' \in \omega_\ell(E)} |\Psi_\ell^E(E')|^2 h_\ell(E)^3 \int_{B_1(\mathbf{0})} \left(\int_{B_1(\mathbf{0}) \cap \mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\Gamma(\mathbf{y}) \right)^2 d\mathbf{x}$$

Wir bemerken

$$\int_{B_1(\mathbf{0})} \left(\int_{B_1(\mathbf{0}) \cap \mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\Gamma(\mathbf{y}) \right)^2 d\mathbf{x} < \infty$$

und erhalten somit

$$\int_{U_E} |\nabla \tilde{V}(\Psi_\ell^E)|^2 d\mathbf{x} \lesssim \sum_{E' \in \omega_\ell(E)} |\Psi_\ell^E(E')|^2 h_\ell(E)^3 \lesssim \|h_\ell^{1/2} \Psi_\ell^E\|_{L_2(\omega_\ell(E))}^2.$$

Multiplikation mit $p_{\ell,E}^{-2\beta}$ und die Summe über alle $E \in \mathcal{E}_\ell$ zeigt die gewünschte Abschätzung. $\square$

4.9 Lemma (Nahfeld von $\tilde{V}$). *Es gilt $u_E^{\text{near}}|_\Gamma \in H^1(\Gamma)$, $u_E^{\text{near}}|_\Omega \in H^1(\Omega)$ und*

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell^\beta} \nabla \Gamma \gamma_0^{\text{int}} u_E^{\text{near}} \right\|_{L_2(E)}^2 \leq C_{\text{near}}^{\text{slp}} \left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell^\beta} \psi \right\|_{L_2(\Gamma)}^2. \quad (4.15)$$

Ausserdem gilt

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \frac{1}{p_{\ell,E}^{2\beta}} \|\nabla u_E^{\text{near}}\|_{L_2(U_E)}^2 \leq C_{\text{near}}^{\text{slp}} \left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell^\beta} \psi \right\|_{L_2(\Gamma)}^2. \quad (4.16)$$

Die Konstante $C_{\text{near}}^{\text{slp}} > 0$ hängt nur von Γ und der γ -Formregularität von $\mathcal{E}_\ell$ und $\mathbf{p}_\ell$ ab.

Beweis. Laut [Ver84] ist $V \in L(L_2(\Gamma), H^1(\Gamma))$. Für fixes $E \in \mathcal{E}_\ell$ gilt daher

$$\|\nabla \Gamma \gamma_0^{\text{int}} u_E^{\text{near}}\|_{L_2(E)} \leq \|V(\psi \chi_{U_E \cap \Gamma})\|_{H^1(\Gamma)} \lesssim \|\psi \chi_{U_E \cap \Gamma}\|_{L_2(\Gamma)} = \|\psi\|_{L_2(U_E \cap \Gamma)}.$$

Wir summieren über $\mathcal{E}_\ell$, verwenden die Eigenschaft (4.5b) und kommen schließlich zu

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^\beta \nabla \Gamma \gamma_0^{\text{int}} u_E^{\text{near}}\|_{L_2(E)}^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} |E| p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\nabla \Gamma \gamma_0^{\text{int}} u_E^{\text{near}}\|_{L_2(E)}^2 \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} |E| p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\psi\|_{L_2(U_E \cap \Gamma)}^2 \simeq \|h_\ell^{1/2} p_\ell^\beta \psi\|_{L_2(\Gamma)}^2, \end{aligned}$$

Dies zeigt (4.15).

Nun wenden wir uns (4.16) zu. Es bezeichnet π_ℓ die $L_2(\Gamma)$ -Orthogonalprojektion auf $\mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$. Wir schreiben $u_E^{\text{far}} = \tilde{V}(\pi_\ell(\psi \chi_{U_E \cap \Gamma})) + \tilde{V}(\psi \chi_{U_E \cap \Gamma} - \pi_\ell(\psi \chi_{U_E \cap \Gamma}))$. Aus $\text{supp}(\psi \chi_{U_E \cap \Gamma}) \subset \omega_\ell(E)$ folgt $\text{supp}(\pi_\ell(\psi \chi_{U_E \cap \Gamma})) \subset \omega_\ell(E)$, wodurch wir Lemma 4.8 mit $\Psi_\ell^E = \pi_\ell(\psi \chi_{U_E \cap \Gamma})$ anwenden können. So kommen wir zu

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\nabla \tilde{V}(\pi_\ell(\psi \chi_{U_E \cap \Gamma}))\|_{L_2(U_E)}^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} p_{\ell,E}^{-2\beta} \|h_\ell^{1/2} \pi_\ell(\psi \chi_{U_E \cap \Gamma})\|_{L_2(\omega_\ell(E))}^2 \lesssim \|h_\ell^{1/2} p_\ell^\beta \psi\|_{L_2(\Gamma)}^2,$$

wobei wir im letzten Schritt die lokale Stabilität von π_ℓ ausgenützt haben. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir dann

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\nabla u_E^{\text{near}}\|_{L_2(U_E)}^2 \lesssim \|h_\ell^{1/2} p_\ell^\beta \psi\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\nabla \tilde{V}(\psi \chi_{U_E \cap \Gamma} - \pi_\ell(\psi \chi_{U_E \cap \Gamma}))\|_{L_2(U_E)}^2, \quad (4.17)$$

und es reicht, die Summe auf der rechten Seite durch $\|h_\ell^{1/2} p_\ell^\beta \psi\|_{L_2(\Gamma)}^2$ abzuschätzen. Laut Theorem 3.21 gilt für $v \in H^{1/2}(\Gamma)$, dass $\|v - \pi_\ell v\|_{L_2(\Gamma)}^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E) \|v\|_{H^{1/2}(E)}^2$. Daraus folgt unmittelbar

$$\|h_\ell^{-1/2}(v - \pi_\ell v)\|_{L_2(\Gamma)}^2 = \|h_\ell^{-1/2}v - \pi_\ell(h_\ell^{-1/2}v)\|_{L_2(\Gamma)}^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|v\|_{H^{1/2}(E)}^2 \leq \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2.$$

Daher gilt für $\text{supp}(w) \subset \omega_\ell(E)$

$$\begin{aligned} \|(w - \pi_\ell w)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &= \sup_{\substack{v \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \\ \|v\|=1}} \langle w - \pi_\ell w, v - \pi_\ell v \rangle \\ &\lesssim \|h_\ell^{1/2}(w - \pi_\ell w)\|_{L_2(\omega_\ell(E))} \sup_{\substack{v \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \\ \|v\|=1}} \|h_\ell^{-1/2}(v - \pi_\ell v)\|_{L_2(\Gamma)} \\ &\lesssim \|h_\ell^{1/2}w\|_{L_2(\omega_\ell(E))}. \end{aligned}$$

Laut Theorem 4.1 gilt $\tilde{V} \in L(H^{-1/2}(\Gamma), H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d))$. Benützen wir die Funktion φ aus (4.6) und Theorem 2.1, so folgt schließlich

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\nabla \tilde{V}(\psi \chi_{\Gamma \cap U_E} - \pi_\ell(\psi \chi_{\Gamma \cap U_E}))\|_{L_2(U_E)}^2 &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\psi \chi_{\Gamma \cap U_E} - \pi_\ell(\psi \chi_{\Gamma \cap U_E})\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} p_{\ell,E}^{-2\beta} \|h_\ell^{1/2} \psi\|_{L_2(\omega_\ell(E))}^2 \\ &\lesssim \|h_\ell^{1/2} p_\ell^\beta \psi\|_{L_2(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Abschätzung (4.17) erhalten wir das Gewünschte. $\square$

4.10 Lemma (Fernfeld von $\tilde{V}$). *Für eine Funktion $\psi \in L_2(\Gamma)$ gilt*

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma \gamma_0^{\text{int}} u_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)}^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla u_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)}^2 \leq C_9 \left(\|\psi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|h_\ell^{1/2} p_\ell^\beta \psi\|_{L_2(\Gamma)}^2 \right),$$

wobei die Konstante C_9 nur von Γ , der γ -Formregularität von $\mathcal{E}_\ell$ und $\mathbf{p}_\ell$, U und φ aus (4.6) abhängt.

Beweis. Die lokale Fernfeldabschätzung (4.14) aus Lemma 4.7 und die Dreiecksungleichung zeigen

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla u_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)}^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\nabla u_E^{\text{far}}\|_{L_2(U_E)}^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|\nabla \tilde{V} \psi\|_{L_2(U_E)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\nabla u_E^{\text{near}}\|_{L_2(U_E)}^2. \quad (4.18)$$

Der erste Term auf der rechten Seite wird durch die Stabilität von $\tilde{V}$ aus Theorem 4.1, die Overlap-Eigenschaft (4.5b) und Theorem 2.1 abgeschätzt:

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|\nabla \tilde{V} \psi\|_{L_2(U_E)}^2 \lesssim \|\nabla \tilde{V} \psi\|_{L_2(U)}^2 \lesssim \|\psi\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2.$$

Hier ist $U \subset \mathbb{R}^3$ mit $\bigcup_{E \in \mathcal{E}_\ell} U_E \subseteq U$ aus (4.6), welches unabhängig von ℓ gewählt werden kann. Den zweiten Term in (4.18) schätzen wir mit (4.16) ab. $\square$

4.11 Lemma. *Für $\psi \in L_2(\Gamma)$ und $v \in H^1(\Gamma)$ gilt $\gamma_1^{\text{int}} u_E^{\text{far}} \in L_2(\Gamma)$ sowie $\gamma_1^{\text{int}} w_E^{\text{far}} \in L_2(\Gamma)$. Ausserdem gilt*

$$\begin{aligned} \|\gamma_1^{\text{int}} u_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)} &= \|\partial_{\mathbf{n}} u_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)} \\ \|\gamma_1^{\text{int}} w_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)} &= \|\partial_{\mathbf{n}} w_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)} \end{aligned} \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}_\ell. \quad (4.19)$$

Beweis. Laut Theorem 4.2 gilt $K'\phi \in L_2(\partial\Omega)$ für $\phi \in L_2(\Gamma)$. Da $K' = -1/2 + \gamma_1^{\text{int}}\tilde{V}$, muss also auch $\gamma_1^{\text{int}}u_E^{\text{far}} = \gamma_1^{\text{int}}\tilde{V}(\psi\chi_{\Gamma\setminus U_E}) \in L_2(\partial\Omega)$ sein.

Analog gilt für $v \in H^1(\Gamma)$, dass $Wv \in L_2(\Gamma)$ ist. Es ist aber $\gamma_1^{\text{int}}w_E^{\text{far}} = \gamma_1^{\text{int}}\tilde{K}((v - c_E)(1 - \varphi_E))$, und $(v - c_E)(1 - \varphi_E) \in H^1(\Gamma)$. Im Weiteren beweisen wir die Aussage für u_E^{far} , die Aussage für w_E^{far} folgt genauso.

Wir wählen eine Funktion η , sodass $u_E^{\text{far}}\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ und $\eta = 1$ in einer Umgebung von E gilt. Für beliebiges $v \in H^1(\Omega)$ ist

$$\begin{aligned} \langle \gamma_1(u_E^{\text{far}}\eta), v \rangle &= \int_{\Omega} \nabla(u_E^{\text{far}}\eta) \nabla v + \int_{\Omega} \Delta(u_E^{\text{far}}\eta) v \\ &= \int_{\Omega} \eta \nabla u_E^{\text{far}} \nabla v + \int_{\Omega} u_E^{\text{far}} \nabla \eta \nabla v + 2 \int_{\Omega} \nabla u_E^{\text{far}} \nabla \eta v + \int_{\Omega} u_E^{\text{far}} \Delta \eta v \\ &= \int_{\Omega} \nabla u_E^{\text{far}} \nabla (\eta v) + \int_{\Omega} \Delta u_E^{\text{far}} \eta + \int_{\Omega} \nabla \eta \nabla (u_E^{\text{far}} v) + \int_{\Omega} u_E^{\text{far}} \Delta \eta v \\ &= \langle \gamma_1 u_E^{\text{far}}, \eta v \rangle + \langle \partial_{\mathbf{n}} \eta, u_E^{\text{far}} v \rangle. \end{aligned}$$

Aus $\gamma_1^{\text{int}}u_E^{\text{far}} \in L_2(\Gamma)$ und $\partial_{\mathbf{n}}\eta \in L_2(\Gamma)$ folgt dann

$$(\gamma_1(u_E^{\text{far}}\eta), v)_{L_2(\Gamma)} = (\gamma_1 u_E^{\text{far}}, \eta v)_{L_2(\Gamma)} + (\partial_{\mathbf{n}}\eta, u_E^{\text{far}} v)_{L_2(\Gamma)} \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega).$$

Der Raum $H^{1/2}(\Gamma)$ ist der Raum der Spuren der Funktionen aus $H^1(\Omega)$, und $H^{1/2}(\Gamma)$ ist dicht in $L_2(\Gamma)$, sodass die letzte Gleichheit auch für $v \in L_2(\Gamma)$ mit $\text{supp}(v) \subset E$ richtig ist. In diesem Fall vereinfacht sie sich zu

$$(\gamma_1(u_E^{\text{far}}\eta), v)_{L_2(E)} = (\gamma_1 u_E^{\text{far}}, v)_{L_2(E)} \quad \text{für alle } v \in L_2(E).$$

Aus Theorem 2.9 wissen wir, dass $\gamma_1(u_E^{\text{far}}\eta) = \partial_{\mathbf{n}}(u_E^{\text{far}}\eta)$, und aufgrund der speziellen Gestalt von η schließen wir $\partial_{\mathbf{n}}(u_E^{\text{far}}\eta) = \partial_{\mathbf{n}}(u_E^{\text{far}})$ auf E . Es folgt also

$$(\partial_{\mathbf{n}}u_E^{\text{far}}, v)_{L_2(E)} = (\gamma_1(u_E^{\text{far}}\eta), v)_{L_2(E)} = (\gamma_1 u_E^{\text{far}}, v)_{L_2(E)} \quad \text{für alle } v \in L_2(E),$$

womit der Beweis abgeschlossen ist. $\square$

Inverse Ungleichungen für W und K

Nun wenden wir uns den entsprechenden Abschätzungen für das Doppelschichtpotential K zu. Zunächst führen wir eine Poincaré Ungleichung auf Elementpatches an.

4.12 Lemma (Poincaré Ungleichung auf Patches). *Es sei $v \in H^1(\Gamma)$. Für jedes $E \in \mathcal{E}_\ell$ gibt es eine Zahl $c_E \in \mathbb{R}$, sodass*

$$\|v - c_E\|_{L_2(\omega_\ell^2(E))} \leq C_{10} \|h_\ell \nabla_\Gamma v\|_{L_2(\omega_\ell^2(E))}, \quad (4.20a)$$

$$\|(v - c_E)\varphi_E\|_{H^1(\Gamma)} \leq C_{10} \|\nabla_\Gamma v\|_{L_2(\omega_\ell^2(E))}, \quad (4.20b)$$

$$\|(v - c_E)\varphi_E\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C_{10} \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma v\|_{L_2(\omega_\ell^2(E))} \quad (4.20c)$$

wobei die Konstante C_{10} nur von der γ -Formregularität von $\mathcal{E}_\ell$ abhängt.

Beweis. Die Abschätzung (4.20a) folgt aus einer klassischen Poincaré-Ungleichung die mit [DS80, Theorem 7.1] auf einen Patch verallgemeinert werden kann. Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} \|\nabla_\Gamma((v - c_E)\varphi_E)\|_{L_2(\Gamma)} &\leq \|(v - c_E)\nabla_\Gamma\varphi_E\|_{L_2(\Gamma)} + \|\varphi_E\nabla_\Gamma(v - c_E)\|_{L_2(\Gamma)} \\ &\leq \|\nabla_\Gamma\varphi_E\|_{L_\infty(\Gamma)}\|v - c_E\|_{L_2(\omega_\ell^2(E))} + \|\varphi_E\|_{L_\infty(\Gamma)}\|\nabla_\Gamma v\|_{L_2(\omega_\ell^2(E))} \\ &\lesssim \|\nabla_\Gamma v\|_{L_2(\omega_\ell^2(E))}, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Abschätzung bereits (4.20a) und die Eigenschaften (4.7) der Funktion φ_E verwendet haben. Wegen

$$\|(v - c_E)\varphi_E\|_{H^1(\Gamma)}^2 = \|(v - c_E)\varphi_E\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \|\nabla_\Gamma((v - c_E)\varphi_E)\|_{L_2(\Gamma)}^2,$$

zeigt dies (4.20b).

Nun widmen wir uns (4.20c). Mit Proposition 2.3 können wir $H^{1/2}(\Gamma)$ als Interpolationsraum zwischen $L_2(\Gamma)$ und $H^1(\Gamma)$ schreiben. Theorem 2.2 besagt dann $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \lesssim \|\cdot\|_{L_2(\Gamma)}\|\cdot\|_{H^1(\Gamma)}$, und wir schließen

$$\begin{aligned} \|(v - c_E)\varphi_E\|_{H^{1/2}(\Gamma)} &\lesssim \|(v - c_E)\varphi_E\|_{L_2(\Gamma)}^{1/2} \|(v - c_E)\varphi_E\|_{H^1(\Gamma)}^{1/2} \\ &\lesssim \|h_\ell\nabla_\Gamma v\|_{L_2(\omega_\ell^2(E))}^{1/2} \|\nabla_\Gamma v\|_{L_2(\omega_\ell^2(E))}^{1/2} \\ &\simeq \|h_\ell^{1/2}\nabla_\Gamma v\|_{L_2(\omega_\ell^2(E))}. \end{aligned}$$

□

4.13 Lemma (Nahfeld von $\tilde{K}$). *Es sei $v \in H^1(\Gamma)$. Dann gilt für das Nahfeld w_E^{near} von $w = \tilde{K}v$ die Abschätzung*

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\nabla_\Gamma \gamma_0^{\text{int}} w_E^{\text{near}}\|_{L_2(E)}^2 \leq C_{\text{near}}^{\text{dlp}} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma v\|_{L_2(\Gamma)}^2. \quad (4.21)$$

Weiters gilt

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} p_{\ell,E}^{-2\beta} \left(\|\nabla w_E^{\text{near}}\|_{L_2(U_E \cap \Omega)}^2 + \|\nabla w_E^{\text{near}}\|_{L_2(U_E \cap \Omega^{\text{ext}})}^2 \right) \leq C_{\text{near}}^{\text{dlp}} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma v\|_{L_2(\Gamma)}^2. \quad (4.22)$$

Die Konstante $C_{\text{near}}^{\text{dlp}}$ hängt nur von Γ und der Formregularitätskonstanten von $\mathcal{E}_\ell$ und $\mathbf{p}_\ell$ ab.

Beweis. Mit Theorem 4.2 folgt, dass $\gamma_0^{\text{int}} \tilde{K} = K - \frac{1}{2} : H^1(\Gamma) \rightarrow H^1(\Gamma)$ stetig ist. Unter Beachtung von $\|\varphi_E\|_{L_\infty(\omega_\ell(E))} \simeq 1$ und $\|\nabla_\Gamma \varphi_E\|_{L_\infty(\omega_\ell(E))}^2 \simeq h_\ell(E)^{-2}$ folgt

$$\|\nabla_\Gamma \gamma_0^{\text{int}} w_E^{\text{near}}\|_{L_2(E)}^2 \leq \|\nabla_\Gamma \gamma_0^{\text{int}} w_E^{\text{near}}\|_{L_2(\Gamma)}^2 \lesssim \|(v - c_E)\varphi_E\|_{H^1(\omega_\ell(E))}^2 \lesssim \|\nabla_\Gamma v\|_{L_2(\omega_\ell^2(E))}^2,$$

wobei im letzten Schritt (4.20b) verwendet wurde. Multiplikation mit $h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta}$ und Summation über alle $E \in \mathcal{E}_\ell$ schliesst zunächst den Beweis der Abschätzung (4.21) ab, wobei die Formregularität von $\mathbf{p}_\ell$ und $\mathcal{E}_\ell$ eingeht.

Nun zu Abschätzung (4.22). Laut Theorem 4.1 (iii) gilt $\tilde{K} \in L(H^{1/2}(\Gamma), H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}}))$ und $\tilde{K} \in L(H^{1/2}(\Gamma), H^1(\Omega))$. Wir benützen die Definition von U und φ aus (4.6) zusammen mit Theorem 2.1, wodurch sich

$$\|\nabla w_E^{\text{near}}\|_{L_2(U_E \cap \Omega)}^2 + \|\nabla w_E^{\text{near}}\|_{L_2(U_E \cap \Omega^{\text{ext}})}^2 \lesssim \|(v - c_E)\varphi_E\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \lesssim \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma v\|_{L_2(\omega_\ell^2(E))}^2$$

schließen lässt - in der letzten Abschätzung wurde (4.20c) verwendet. Multiplikation mit $p_{\ell,E}^{-2\beta}$ und Aufsummieren über $E \in \mathcal{E}_\ell$ liefert (4.22), wobei die Formregularität von $\mathbf{p}_\ell$ und $\mathcal{E}_\ell$ eingeht. $\square$

4.14 Lemma (Fernfeld von $\tilde{K}$). *Es sei $v \in H^1(\Gamma)$. Dann gilt für das Fernfeld w_E^{far} von $w = \tilde{K}v$ die Abschätzung*

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma \gamma_0^{\text{int}} w_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)}^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma w_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)}^2 \leq C_{11} \left(\|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma v\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \right),$$

wobei die Konstante C_{11} nur von Γ , der γ -Formregularität von $\mathcal{E}_\ell$ und $\mathbf{p}_\ell$ sowie U und φ aus (4.6) abhängt.

Beweis. Die lokale Fernfeldabschätzung aus Lemma 4.7 zeigt

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla w_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)}^2 &\leq C_{\text{far}}^{\text{dlp}} \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\nabla w_E^{\text{far}}\|_{L_2(U_E)}^2 \\ &= C_{\text{far}}^{\text{dlp}} \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\nabla w_E^{\text{far}}\|_{L_2(U_E \cap \Omega)}^2 + C_{\text{far}}^{\text{dlp}} \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\nabla w_E^{\text{far}}\|_{L_2(U_E \cap \Omega^{\text{ext}})}^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Es gilt $w_E^{\text{far}} = \tilde{K}(g - c_E) - w_E^{\text{near}}$, die Dreiecksungleichung liefert somit

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla w_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)}^2 &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \left(\|\nabla \tilde{K}(v - c_E)\|_{L_2(U_E \cap \Omega)}^2 + \|\nabla \tilde{K}(v - c_E)\|_{L_2(U_E \cap \Omega^{\text{ext}})}^2 \right) \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} p_{\ell,E}^{-2\beta} \left(\|\nabla w_E^{\text{near}}\|_{L_2(U_E \cap \Omega)}^2 + \|\nabla w_E^{\text{near}}\|_{L_2(U_E \cap \Omega^{\text{ext}})}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die zweite Summe auf der rechten Seite kann mit Abschätzung (4.22) aus Lemma 4.13 gegen $C_{\text{near}}^{\text{dlp}} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma v\|_{L_2(\Gamma)}^2$ abgeschätzt werden.

Um die erste Summe abzuschätzen, gehen wir so vor: Laut 4.1 gilt $\tilde{K} \in L(H^{1/2}(\Gamma), H^1(\Omega))$ sowie $\tilde{K} \in L(H^{1/2}(\Gamma), H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}}))$. Ausserdem werden wegen (4.9) in Ω die Identität $\nabla \tilde{K}c = \nabla(-c) = 0$ und in Ω^{ext} die Identität $\nabla \tilde{K}c = \nabla 0 = 0$ erfüllt. Dies führt zu

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \left(\|\nabla \tilde{K}(v - c_E)\|_{L_2(U_E \cap \Omega)}^2 + \|\nabla \tilde{K}(v - c_E)\|_{L_2(U_E \cap \Omega^{\text{ext}})}^2 \right) \\ = \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \left(\|\nabla \tilde{K}v\|_{L_2(U_E \cap \Omega)}^2 + \|\nabla \tilde{K}v\|_{L_2(U_E \cap \Omega^{\text{ext}})}^2 \right) \lesssim \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt wieder die Menge U und die Funktion φ aus 4.6 sowie Theorem 2.1 verwendet haben. $\square$

Beweis von Theorem 4.4. Wir zeigen zunächst die Abschätzungen (4.3a)-(4.3d) für den Fall $\Gamma = \partial\Omega$. Den Fall, das Γ eine echte Teilmenge von $\partial\Omega$ ist, werden wir am Ende des Beweises auf den ersten Fall zurückführen. Danach werden wir klassische inverse Ungleichungen anwenden, um die Aussagen für diskrete Funktion zu verschärfen.

- Wir zeigen zuerst (4.3a). Wir schreiben das Quadrat der linken Seite als Summe über die Elemente und teilen auf jedem Element $E \in \mathcal{E}_\ell$ in Nah- und Fernfeld $\tilde{V}\psi = u_E^{\text{far}} + u_E^{\text{near}}$:

$$\begin{aligned} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma V\psi\|_{L_2(\Gamma)}^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma V\psi\|_{L_2(E)}^2 \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma \gamma_0^{\text{int}} u_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma \gamma_0^{\text{int}} u_E^{\text{near}}\|_{L_2(E)}^2. \end{aligned}$$

Anwenden der Lemmata 4.9 und 4.10 zeigt nun (4.3a).

- Nun zeigen wir (4.3b): Wir schreiben das Quadrat der linken Seite als Summe über die Elemente und teilen auf jedem Element $E \in \mathcal{E}_\ell$ in Nah- und Fernfeld:

$$\|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} K'\psi\|_{L_2(\Gamma)}^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta} \|K'(\psi \chi_{U_E \cap \Gamma})\|_{L_2(E)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta} \|K'(\psi \chi_{\Gamma \setminus U_E})\|_{L_2(E)}^2 \quad (4.25)$$

Aus $K' : L(L_2(\Gamma), L_2(\Gamma))$ folgt für den Nahfeldanteil in (4.25)

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta} \|K'(\psi \chi_{U_E \cap \Gamma})\|_{L_2(E)}^2 &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta} \|K'(\psi \chi_{U_E \cap \Gamma})\|_{L_2(\Gamma)}^2 \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\psi\|_{L_2(U_E \cap \Gamma)}^2 \lesssim \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \psi\|_{L_2(\Gamma)}^2, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Abschätzung die Overlap-Eigenschaft 4.5b und die lokale Quasi-Uniformität von $\mathcal{E}_\ell$ und $\mathbf{p}_\ell$ verwendet haben.

Aus $K' = -1/2 + \gamma_1^{\text{int}} \tilde{V}$ folgt zunächst $K'(\psi \chi_{\Gamma \setminus U_E})|_E = \gamma_1^{\text{int}} u_E^{\text{far}}$. Für den Fernfeldanteil in (4.25) gilt mit Lemma 4.11

$$\|K'(\psi \chi_{\Gamma \setminus U_E})\|_{L_2(E)} = \|\gamma_1^{\text{int}} u_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)} = \|\partial_{\mathbf{n}} u_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)} \leq \|\nabla u_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)}.$$

Wir erhalten somit

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta} \|K'(\psi \chi_{\Gamma \setminus U_E})\|_{L_2(E)}^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\nabla u_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)}^2,$$

und können weiter Lemma 4.10 abschätzen.

- Nun zeigen wir (4.3c): Es gilt $K = \frac{1}{2} + \gamma_0^{\text{int}} \tilde{K}$ in $H^{1/2}(\Gamma)$. Da laut den Abbildungseigenschaften 4.2 $K : L(H^1(\Gamma), H^1(\Gamma))$ gilt, ist $\gamma_0^{\text{int}} \tilde{K}v \in H^1(\Gamma)$. Es zeigt sich

$$\begin{aligned} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma K v\|_{L_2(\Gamma)} &= \left\| h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma \left(\frac{1}{2} + \gamma_0^{\text{int}} \tilde{K} \right) v \right\|_{L_2(\Gamma)} \\ &\leq \frac{1}{2} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma v\|_{L_2(\Gamma)} + \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma \gamma_0^{\text{int}} \tilde{K} v\|_{L_2(\Gamma)} \end{aligned}$$

Für eine Konstante c gilt $\nabla_\Gamma c = 0$ und wegen Theorem 4.1 (v) auch $\gamma_0^{\text{int}} \tilde{K} c = -c$. Ausserdem gilt $\gamma_0^{\text{int}} \tilde{K}(g - c_E) = w_E^{\text{near}} + w_E^{\text{far}}$. Wir nutzen diese Identitäten aus und erhalten für den zweiten Term in der letzten Abschätzung

$$\begin{aligned} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma \gamma_0^{\text{int}} \tilde{K} v\|_{L_2(\Gamma)}^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\nabla_\Gamma \gamma_0^{\text{int}} \tilde{K}(g - c_E)\|_{L_2(E)}^2 \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\nabla_\Gamma \gamma_0^{\text{int}} w_E^{\text{near}}\|_{L_2(E)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\nabla_\Gamma \gamma_0^{\text{int}} w_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)}^2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Der erste Term wird mit Lemma 4.13 beschränkt,

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\nabla_\Gamma \gamma_0^{\text{int}} w_E^{\text{near}}\|_{L_2(E)}^2 \leq C_{\text{near}}^{\text{dlp}} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma v\|_{L_2(\Gamma)}^2,$$

der zweite Term mit Lemma 4.14. Insgesamt erhalten wir also

$$\|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma K v\|_{L_2(\Gamma)}^2 \lesssim \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma v\|_{L_2(\Gamma)}^2.$$

- Nun zeigen wir (4.3d): Wir schreiben das Quadrat der linken Seite als Summe über die Elemente. Anschließend nutzen wir die Tatsache, dass wegen Theorem 4.1 (v) Konstanten im Kern von $W = -\gamma_1^{\text{int}} \tilde{K}$ liegen und teilen auf jedem Element in Nah- und Fernfeld:

$$\|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} W v\|_{L_2(\Gamma)}^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta} \|W(v - c_E) \varphi_E\|_{L_2(E)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta} \|W(v - c_E)(1 - \varphi_E)\|_{L_2(E)}^2. \quad (4.27)$$

Laut Theorem 4.2 ist $W \in L(H^1(\Gamma), L_2(\Gamma))$, woraus wir

$$\|W(g - c_E) \varphi_E\|_{L_2(E)}^2 \lesssim \|(g - c_E) \varphi_E\|_{H^1(\Gamma)}^2 \lesssim \|\nabla_\Gamma v\|_{L_2(\omega_\ell^2(E))}^2$$

schließen. Multiplikation mit $h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta}$ und Summation über $E \in \mathcal{E}_\ell$ liefert

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta} \|W(g - c_E) \varphi_E\|_{L_2(E)}^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_\ell(E) p_{\ell,E}^{-2\beta} \|\nabla_\Gamma v\|_{L_2(\omega_\ell^2(E))}^2 \lesssim \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma v\|_{L_2(\Gamma)}^2,$$

wobei wir die Formregularität des Gitters $\mathcal{E}_\ell$ und die lokale Quasi-Uniformität von $\mathbf{p}_\ell$ ausgenutzt haben. Für den zweiten Term auf der rechten Seite von (4.27) ist wegen $W = \gamma_1^{\text{int}} \tilde{K}$

$$\|W(v - c_E)(1 - \varphi_E)\|_{L_2(E)}^2 = \|\gamma_1^{\text{int}} w_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)}^2 = \|\partial_{\mathbf{n}} w_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)}^2 \leq \|\nabla w_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)}^2.$$

Lemma 4.14 liefert somit

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} W(v - c_E)(1 - \varphi_E)\|_{L_2(E)}^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla w_E^{\text{far}}\|_{L_2(E)}^2 \lesssim \|h_\ell^{1/2} p_\ell^{-\beta} \nabla_\Gamma v\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2.$$

Um die Aussagen für diskrete Funktionen zu zeigen, wenden wir auf (4.3a)-(4.3b) die inversen Ungleichungen aus Proposition (3.28) an - gleichermassen schließen wir auf die inversen Abschätzungen für K und W für diskrete Funktionen, indem wir auf (4.3c)-(4.3d) die inverse Abschätzung (3.29) anwenden. Nun wenden wir uns dem Fall $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$ zu. Für eine Funktion $\psi \in L_2(\Gamma)$ ist die Fortsetzung durch 0, $\widehat{\psi}$, im Raum $L_2(\partial\Omega)$, und $\|\psi\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} = \|\widehat{\psi}\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}$. Wir denken uns das Gitter $\mathcal{E}_\ell$ auf $\partial\Omega$ fortgesetzt und erhalten mit dem bisher Gezeigten

$$\begin{aligned} \left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell^\beta} \nabla_\Gamma V \psi \right\|_{L_2(\Gamma)} &\leq \left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell^\beta} \nabla_\Gamma V \psi \right\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C_{\text{inv}}^V \left(\|\widehat{\psi}\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} + \left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell^\beta} \widehat{\psi} \right\|_{L_2(\partial\Omega)} \right) \\ &= C_{\text{inv}}^V \left(\|\psi\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} + \left\| \frac{h_\ell^{1/2}}{p_\ell^\beta} \psi \right\|_{L_2(\Gamma)} \right) \end{aligned}$$

Die Ungleichung für W können wir analog verallgemeinern. Damit haben wir also alle Ungleichungen für V und W auch für $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ gezeigt. $\square$

Kapitel 5

h -Adaptivität für die schwach singuläre Integralgleichung

Gegenstand der Betrachtungen dieses Kapitels ist die so genannte *schwach-singuläre* Integralgleichung

$$V\phi = f \tag{5.1}$$

mit dem Einfachschichtpotential V aus (4.1). Hier ist $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ gegeben, gesucht wird $\phi \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Wir betrachten zunächst die zugehörigen Variationsformulierungen, deren eindeutige Lösbarkeit durch das Lemma von Lax-Milgram [SS11, Lemma 2.1.51] folgen. Die benötigten Voraussetzungen, um dieses Lemma anwenden zu können, finden sich in Theorem 4.3. Wir werden im Folgenden immer nur die Gleichung (5.1) betrachten, die erklärenden Worte am Anfang dieses Kapitels treffen aber natürlich auch auf die hyper-singuläre Gleichung aus Kapitel 6 zu. Im Wesentlichen beantwortet dieses Kapitel die Frage nach der Konvergenz und der Quasioptimalität von adaptiven Algorithmen zur numerischen Lösung von (5.1).

Die in dieser Arbeit betrachteten Algorithmen haben typischerweise die Form

$$\boxed{\text{solve}} \rightarrow \boxed{\text{estimate}} \rightarrow \boxed{\text{mark}} \rightarrow \boxed{\text{refine}} \tag{5.2}$$

Wir beschreiben zunächst kurz die Funktionen der einzelnen Module:

solve Dieses Modul berechnet zu einem gegebenen Gitter $\mathcal{E}_\ell$ eine Approximation Φ_ℓ an ϕ . Typischerweise wird das die Galerkinapproximation von ϕ sein.

estimate Wir nehmen an, ein Fehlerschätzer $\tau_\ell^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \tau_\ell(E)^2$ steht zu unserer Verfügung, der den Beitrag des Fehlers $|||\phi - \Phi_\ell|||$ lokal auf allen Elementen E schätzt.

mark Basierend auf den Indikatoren $\tau_\ell(E)$ wählt dieses Modul eine Teilmenge $\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{E}_\ell$ von Elementen, die im letzten Modul verfeinert werden.

refine Ausgehend von der Menge $\mathcal{M}_\ell$, die im vorigen Modul ausgewählt wurde, bestimmen wir ein lokal verfeinertes Gitter $\mathcal{E}_{\ell+1}$ und starten den Algorithmus von Neuem.

Für die Wahl der Indikatoren τ_ℓ werden wir zwei strukturell verschiedene Ansätze benutzen. Zum einen betrachten wir die $h - h/2$ -Strategie, die darauf beruht, den Energiefehler einer diskreten Approximation

Φ_ℓ der exakten Lösung ϕ von (5.1) durch den Ansatz

$$|||\phi - \Phi_\ell||| \approx |||\widehat{\Phi}_\ell - \Phi_\ell|||$$

zu schätzen. Hier ist $\widehat{\Phi}_\ell$ eine *bessere* Approximation an ϕ als Φ_ℓ es war. Was wir genau damit meinen, werden wir weiter unten in Abschnitt 5.3 formulieren. Es stellt sich heraus, dass diese Fehlerschätzer immer effizient sind, das bedeutet, dass sie den wahren Fehler nicht überschätzen. Die Zuverlässigkeit, also die Eigenschaft eines Schätzers, den wahren Fehler nicht zu unterschätzen, ist bei $h - h/2$ -Schätzern äquivalent zur sogenannten *Saturationsannahme* (5.15), die wir explizit als wahr voraussetzen werden. Für Randintegralgleichung ist die Energienorm $|||\cdot|||$ äquivalent zu einer (negativen) Sobolevnorm gebrochener Ordnung. Laut den Definitionen der Sobolevräume solcher Art aus Kapitel 2 ist die Energienorm eine *nicht-lokale* Norm, wodurch man in erster Instanz den Beitrag eines Elements zum Gesamtfehler nicht bestimmen kann. Durch sogenannte Lokalisierungstechniken, die auf Approximationsaussagen und Bestapproximationseigenschaften beruhen, kann man äquivalente, lokale Fehlerschätzer herleiten, die global äquivalent zum $h - h/2$ -Fehler in der Energienorm sind. Wir halten uns dabei an [FLP08] und in Kapitel 6 an [EFGP12].

Die zweite Art von Fehlerschätzern, die wir betrachten wollen, sind sogenannte *residuale Fehlerschätzer*. Dabei wird das zum Galerkinfehler äquivalente Residuum $V\Phi_\ell - f$ geschätzt. Laut den Abbildungseigenschaften der Randintegraloperatoren (4.1) hat dies wieder in einem Sobolevraum mit gebrochenem Index zu geschehen, was erneut den Einsatz von Lokalisierungstechniken nötig macht, die sich nun durch Orthogonalitätseigenschaften herleiten lassen. Wir halten uns dabei an [CMS01] und in Kapitel 6 an [CMPS04]. Wie man schon aus der FEM weiss, sind Fehlerschätzer dieser Bauart strukturell immer zuverlässig, siehe dazu auch [Ver96].

Eine weitere Unterscheidung treffen wir abhängig von der rechten Seite von (5.1). Hat die rechte Seite die Form $(K + 1/2)f$ für gegebenes f , so werden wir auch f durch eine diskrete Funktion approximieren, bevor wir die Galerkinlösung berechnen. Dies hat den Vorteil, dass black-box artige Verfahren wie z.B. H-Matrizen, Fast-Multipolverfahren oder ACA verwendet werden können, um auch das Doppelschichtpotential K schnell zu berechnen. Schnelle Verfahren für die Auswertung von Kf gibt es selbstverständlich, siehe dazu die Arbeiten [Sch94, CvPS09]. Wir verfolgen aber den Ansatz, dass ja bereits die Galerkinmatrix zum Einfachschichtpotential V durch ein schnelles Verfahren aufgestellt werden muss. Das Verfahren, dass dabei verwendet wird, wollen wir auch für K verwenden. Dies ermöglichen wir aber gerade dadurch, dass wir f durch eine diskrete Funktion ersetzen. Die Approximation der Daten führt zu einem weiteren Fehler, den wir *Datenoszillation* osc_ℓ nennen wollen. Approximieren wir die rechte Seite also, so werden wir den Fehler osc_ℓ ebenfalls in unseren Fehlerindikator miteinbeziehen müssen.

Für die Markierung der Elemente in Modul mark benutzen wir zwei verschiedene Strategien. Die erste, vorgeschlagen in der Arbeit [Dör96], in der Konvergenz einer adaptiven Finite-Element Methode für das Poissonproblem gezeigt wird, beruht darauf, eine Menge an Elementen $\mathcal{M}_\ell$ kleinster Kardinalität zur Markierung auszuwählen, sodass die Summe der lokalen Fehler auf Elementen aus $\mathcal{M}_\ell$ einen fixen prozentualen Beitrag zum Gesamtfehler liefert. Die zweite Strategie ist eine sogenannte *separierte* Strategie. Falls der Fehlerindikator eine Summe aus zwei Grössen ist (zum Beispiel Fehlerschätzer und Datenoszillationen), so markieren wir, abhängig davon, welcher Teil größer ist, nur mit dem einen beziehungsweise dem anderen Teil. Wir werden weiter unten noch auf die Notwendigkeit dieser Markierungsstrategie eingehen.

Für die lokale Verfeinerung im letzten Schritt verwenden wir den NVB-Algorithmus **refine** 3.6 aus Kapitel 3.2. Das erste Problem, dass wir betrachten wollen, ist die Frage nach der Konvergenz

$$|||\phi - \Phi_\ell||| \rightarrow 0$$

der adaptiven Algorithmen. Wir benutzen dazu das Konzept Fehlerschätzerreduktion aus [AFLP12]. Die Idee dabei ist, eine Abschätzung der Form

$$\tau_{\ell+1} \leq \widehat{\kappa} \tau_{\ell} + o(1) \quad (5.3)$$

mit einem $0 < \widehat{\kappa} < 1$ zu zeigen. Eine simple Rechnung zeigt dann, dass $\tau_{\ell} \rightarrow 0$ gilt. Unter der Annahme, dass der Fehlerschätzer zuverlässig ist, folgt daraus auch die Konvergenz der diskreten Lösungen gegen die exakte Lösung. Die Nullfolge in (5.3), die wir nur kurz als $o(1)$ geschrieben haben, wird die Norm der Differenz zweier diskreter Lösungen $\|\Phi_{\ell} - \Phi_{\ell+1}\|$ und gegebenenfalls der approximierten Daten sein. Um sicherzustellen, dass ein solcher Term auch tatsächlich eine Nullfolge ist, werden wir uns in Kapitel 5.2 zunächst mit der *a-priori* Konvergenz der adaptiven Algorithmen auseinandersetzen. Wir stützen uns dabei auf ein Resultat aus der Arbeit [BV84], in dem gezeigt wird, dass die Bestapproximation zu geschachtelten Unterräumen eines Hilbertraumes immer konvergiert; klarerweise wissen wir a-priori nichts über diesen Grenzwert, ausser seine Existenz. Trotzdem können wir daraus schliessen, dass die Norm der Differenz zweier Galerkinlösungen gegen 0 konvergiert.

Für adaptive Algorithmen, die auf der $h - h/2$ -Strategie basieren, ist die Konvergenz der Verfahren zur Zeit State of the Art.

Für adaptive Verfahren, die residuale Fehlerschätzer verwenden, ist es jedoch möglich, quasi-optimale Konvergenzaussagen zu erhalten. Ausgehend von der Fehlerschätzerreduktion (5.3) ist es möglich, eine sogenannte *Kontraktionsgröße* zu definieren. Dies ist eine Grösse $\Delta_{\ell} \simeq \tau_{\ell}$, die in jedem Schritt des Algorithmus kontrahierend ist, d.h.

$$\Delta_{\ell+1} \leq \kappa \Delta_{\ell} \quad (5.4)$$

gilt mit einem $0 < \kappa < 1$. Insbesondere folgt aus (5.4) die Konvergenz des adaptiven Algorithmus. Die Idee, eine Kontraktionsgröße zu betrachten, stammt aus der Arbeit [MN05]. Dort wird Konvergenz einer AFEM bewiesen indem gezeigt wird, dass die Summe aus Galerkinfehler und Oszillationen eine Kontraktionsgröße bildet. In der Arbeit [CKNS08] wird gezeigt, dass für ein AFEM die Summe aus Galerkinfehler und Fehlerschätzer kontrahierend ist, und diesem Zugang werden wir im Weiteren folgen. Die Kontraktionsgröße wird also üblicherweise eine Summe aus Galerkinfehler und Fehlerschätzer

$$\|\phi - \Phi_{\ell}\|^2 + \lambda \tau_{\ell}^2$$

sein. Der Galerkinfehler $\|\phi - \Phi_{\ell}\|$ an sich ist keine Kontraktion, denn es kann der Fall $\Phi_{\ell+1} = \Phi_{\ell}$ auftreten. Wenn das geschieht, so folgern wir aus (5.3), dass zumindest der Fehlerschätzer eine Kontraktion ist, denn in diesem Fall ist der Term, den wir als Nullfolge geschrieben haben, wirklich 0. Es verblüfft also nicht, dass eine solche Grösse tatsächlich in jedem Schritt kontrahierend sein kann.

Ausgehend von der Kontraktionsgröße Δ_{ℓ} ist es möglich, die Optimalität der Markierungsstrategie zu zeigen, die bisher auf die Abschätzungen (5.3) und (5.4) geführt hat. Genauer gesagt meinen wir damit, dass es eine Konstante $0 < \theta_{\star} < 1$ gibt, sodass für ein beliebiges Gitter $\mathcal{E}_{\star} \supseteq \mathcal{E}_{\ell}$ und beliebiges $0 < \theta < \theta_{\star}$ ein $0 < \kappa_{\star} < 1$ existiert, sodass das Folgende gilt:

$$\tau_{\star}^2 \leq \kappa_{\star} \tau_{\ell}^2 \implies \theta \tau_{\ell}^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{R}_{\ell}} \tau_{\ell}(E)^2 \quad (5.5)$$

Auch dies scheint eine Eigenschaft zu sein, die heuristisch erfüllt sein muss, um einen optimalen Algorithmus zu erhalten.

Wir müssen uns noch darauf einigen, was wir unter Quasioptimalität verstehen wollen. In dieser Arbeit meinen wir damit das Folgende: Wenn es, ausgehend von einem groben Gitter $\mathcal{E}_0$ und einer Zahl $s > 0$, eine beliebige Folge von Gitter $(\mathcal{E}_\ell)_\ell$ gibt, sodass $\tau_\ell = \mathcal{O}(N^{-s})$ ist, dann soll auch der adaptive Algorithmus eine Folge von Gittern liefern, für die die berechneten Fehlerschätzer die Rate $\mathcal{O}(N^{-s})$ haben. In Anbetracht der Abschätzung für den Netzabschluss aus Lemma 3.14 müssen wir also eine Abschätzung für $\#\mathcal{M}_\ell$ herleiten, und dafür wird uns (5.5) helfen. Die Definition der Approximationsklasse erlaubt es uns nämlich, ein Gitter zu wählen, für das wir die linke Seite von (5.5) sicherstellen können, und daher haben ist auch die rechte Seite erfüllt. Wir wählen aber $\#\mathcal{M}_\ell$ gerade als die Menge geringster Kardinalität mit dieser Eigenschaft - daher bekommen wir also eine Abschätzung für $\#\mathcal{M}_\ell$.

Wir geben nun die zu lösenden Variationsformulierungen und die dazugehörigen Galerkinverfahren an.

5.1 Proposition (Schwach singuläre Integralgleichung). *Es bezeichnet Ω ein Lipschitzgebiet und $\Gamma \subseteq \partial\Omega$. Für gegebenes $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ existiert eine schwache Lösung $\phi \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$ des Variationsproblems*

$$\langle V\phi, \psi \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} = \langle f, \psi \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } \psi \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma), \quad (5.6)$$

wobei V das Einfachschichtpotential aus (4.1) ist. ■

5.2 Proposition (Dirichletproblem). *Es bezeichnet Ω ein Lipschitzgebiet und $\Gamma = \partial\Omega$. Für gegebenes $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ existiert eine schwache Lösung $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ des Variationsproblems*

$$\langle V\phi, \psi \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)} = \langle (1/2 + K)f, \psi \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } \psi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (5.7)$$

wobei V das Einfachschichtpotential und K das Doppelschichtpotential aus (4.1) sind. ■

Nun ersetzen wir in den Variationsformulierungen (5.6) und (5.7) die unendlichdimensionalen Test- und Ansatzräume durch diskrete Räume. Analog zum Beweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen ϕ von (5.6) beziehungsweise (5.7) beweist man die eindeutige Lösbarkeit im Fall diskreter Räume.

5.3 Proposition (Galerkinverfahren für die schwach singuläre Integralgleichung). *Es existiert eine eindeutige Galerkinlösung $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$*

$$\langle V\Phi_\ell, \Psi_\ell \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} = \langle f, \Psi_\ell \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } \Psi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell). \quad (5.8)$$
■

Analog könnten Galerkinverfahren für das Dirichletproblem 5.2 erstellt werden. Die Berechnung der rechten Seite benötigt dann jedoch die Auswertung des Doppelschichtpotentials, wofür Methoden aus [CvPS09, SS11, Sch98] verwendet werden. Für den Einsatz anderer schneller Methoden, wie zum Beispiel hierarchischer Matrizen oder der Fast-Multipol-Methode, ist es sinnvoll die Daten f der rechten Seite durch diskrete Funktionen zu approximieren.

5.4 Proposition (Galerkinverfahren für das Dirichletproblem). *Bezeichne mit $\mathbb{P}_\ell : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^{p+1}(\mathcal{E}_\ell)$ eine $H^{1/2}(\Gamma)$ -stetige Projektion. Es existieren eindeutige Galerkinlösungen $\Phi_\ell^{\text{ex}} \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$ und $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$*

$$\langle V\Phi_\ell^{\text{ex}}, \Psi_\ell \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} = \langle (K + 1/2)f, \Psi_\ell \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)}, \quad \text{für alle } \Psi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell) \quad (5.9)$$

$$\langle V\Phi_\ell, \Psi_\ell \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} = \langle (K + 1/2)\mathbb{P}_\ell f, \Psi_\ell \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } \Psi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell). \quad (5.10)$$
■

5.1 Adaptiver Algorithmus

Die adaptiven Algorithmen, die im Folgenden angewendet werden sollen, werden nun abstrakt angeführt. In der Einleitung zu diesem Kapitel haben wir die einzelnen Teile bereits angesprochen. Es folgt also nun eine saubere Definition. Wir bemerken, dass mit ϕ die exakte Lösung und Φ_ℓ die Galerkinlösung eines *beliebigen* Problems gemeint ist, auch wenn in den folgenden Abschnitten diese Notation explizit für die schwach singuläre Gleichung verwendet wird. Alles, was also in diesem Abschnitt 5.1 gesagt wird, bezieht sich auf ein beliebiges Problem, das in das Framework von Galerkinverfahren passt.

Die Fehlerindikatoren τ_ℓ , welche die Algorithmen steuern werden, schreiben wir als Summe von lokalen Größen,

$$\tau_\ell := \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \tau_\ell(E)^2 \right)^{1/2},$$

wobei $\tau_\ell(E)$ für jedes Element $E \in \mathcal{E}_\ell$ eine berechenbare Größe ist. Besteht τ_ℓ aus zwei Summanden, so schreiben wir

$$\tau_\ell := \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \tau_{1,\ell}(E)^2 + \tau_{2,\ell}(E)^2 \right)^{1/2}.$$

Typischerweise wird $\tau_{1,\ell}$ ein Fehlerschätzer und $\tau_{2,\ell}$ die zugehörige Datenoszillation sein. Die folgenden Eigenschaften eines Schätzers τ_ℓ werden sich als wichtig erweisen.

5.5 Definition. Es bezeichne $||| \cdot |||$ eine der Energienormen aus (4.2). Wir nennen einen Fehlerschätzer τ_ℓ für den Fehler $|||\phi - \Phi_\ell|||$ zuverlässig, wenn

$$|||\phi - \Phi_\ell||| \leq C_{\text{rel}} \tau_\ell,$$

und effizient, wenn

$$\tau_\ell \leq C_{\text{eff}} |||\phi - \Phi_\ell|||$$

mit Konstanten $C_{\text{rel}}, C_{\text{eff}} > 0$ gilt.

Wir werden nun die beiden Algorithmen anführen, die wir im Folgenden verwenden werden.

5.6 Algorithmus (solve-combined). *Input-Parameter:* Grobes Gitter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$, *Parameter* $0 < \theta < 1$, *Zähler* $\ell := 0$.

- (i) Berechne die Galerkinlösung Φ_ℓ auf $\mathcal{E}_\ell$.
- (ii) Berechne die Verfeinerungsindikatoren $\tau_\ell(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}_\ell$.
- (iii) Wähle eine kleinste Menge $\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{E}_\ell$ mit

$$\sum_{E \in \mathcal{M}_\ell} \tau_\ell(E)^2 \geq \theta \tau_\ell^2. \quad (5.11)$$

(iv) Verfeinere die markierten Elemente: $\mathcal{E}_{\ell+1} = \mathbf{refine}(\mathcal{E}_\ell, \mathcal{M}_\ell)$.

(v) Setze $\ell \mapsto \ell + 1$ und gehe zu (i).

5.7 Algorithmus (solve-separate). *Input-Parameter:* Grobes Gitter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$, *Parameter* $0 < \theta_1, \theta_2, \vartheta < 1$, Zähler $\ell := 0$.

(i) Berechne die Galerkinlösung Φ_ℓ auf $\mathcal{E}_\ell$.

(ii) Berechne die Verfeinerungsindikatoren $\tau_\ell(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}_\ell$.

(iii) Gilt $\tau_{2,\ell}^2 \leq \vartheta \tau_{1,\ell}^2$, dann wähle eine kleinste Menge $\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{E}_\ell$ mit

$$\sum_{E \in \mathcal{M}_\ell} \tau_{1,\ell}(E)^2 \geq \theta_1 \tau_{1,\ell}^2. \quad (5.12)$$

(iv) Gilt $\tau_{2,\ell}^2 > \vartheta \tau_{1,\ell}^2$, dann wähle eine kleinste Menge $\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{E}_\ell$ mit

$$\sum_{E \in \mathcal{M}_\ell} \tau_{2,\ell}(E)^2 \geq \theta_2 \tau_{2,\ell}^2. \quad (5.13)$$

(v) Verfeinere die markierten Elemente: $\mathcal{E}_{\ell+1} = \mathbf{refine}(\mathcal{E}_\ell, \mathcal{M}_\ell)$.

(vi) Setze $\ell \mapsto \ell + 1$ und gehe zu (i).

Man zeigt leicht, dass die kombinierte Markierungsstrategie (5.11) von Dörfler stärker ist als die separate Markierungsstrategie (5.12), (5.13).

5.8 Proposition. *Die Markierungsstrategie (5.12)–(5.13) impliziert die Markierungsstrategie (5.11) mit $\theta := \min \{ \theta_1(1 + \vartheta)^{-1}, \theta_2(1 + \vartheta^{-1})^{-1} \} < 1$ für $\tau_\ell^2 = \tau_{1,\ell}^2 + \tau_{2,\ell}^2$.*

Beweis. Ist $\tau_{2,\ell}^2 \leq \vartheta \tau_{1,\ell}^2$, dann sehen wir

$$\tau_\ell^2 = \tau_{1,\ell}^2 + \tau_{2,\ell}^2 \leq (1 + \vartheta) \tau_{1,\ell}^2 \leq (1 + \vartheta) \theta_1^{-1} \tau_{1,\ell}(\mathcal{M}_\ell)^2 \leq (1 + \vartheta) \theta_1^{-1} \tau_\ell(\mathcal{M}_\ell)^2.$$

Im Fall $\tau_{2,\ell}^2 > \vartheta \tau_{1,\ell}^2$ sehen wir

$$\tau_\ell^2 = \tau_{1,\ell}^2 + \tau_{2,\ell}^2 \leq (1 + \vartheta^{-1}) \tau_{2,\ell}^2 \leq (1 + \vartheta^{-1}) \theta_2^{-1} \tau_{2,\ell}(\mathcal{M}_\ell)^2 \leq (1 + \vartheta^{-1}) \theta_2^{-1} \tau_\ell(\mathcal{M}_\ell)^2,$$

wodurch das Gewünschte gezeigt ist. □

5.2 A-priori Konvergenz des adaptiven Algorithmus

Die Algorithmen 5.6 und 5.7 konvergieren unter bestimmten Voraussetzungen an ihre Bestandteile *a-priori*. Dies wurde schon in [BV84] erkannt, wo auch der Beweis des folgenden Lemmas zu finden ist.

5.9 Lemma (A-priori Konvergenz der Galerkinlösungen). *Gegeben sei ein Hilbertraum $(H, \|\cdot\|)$ und eine Folge von abgeschlossenen, geschachtelten Unterräumen $X_\ell \subseteq H$, das heißt $X_\ell \subset X_{\ell+1}$. Für $u \in H$ sei U_ℓ die Bestapproximation bezüglich X_ℓ ,*

$$\|u - U_\ell\| = \min_{V_\ell \in X_\ell} \|u - V_\ell\|.$$

Dann existiert der Limes $\lim_{\ell \rightarrow \infty} U_\ell \in H$ und es gilt $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|U_{\ell+1} - U_\ell\| = 0$. ■

Es sei bemerkt, dass Lemma 5.9 *nicht* die Konvergenz des adaptiven Algorithmus gegen die exakte Lösung u zeigt. Dies wird erst durch die sogenannte *Fehlerschätzerreduktion* sicher gestellt. Wir werden Lemma 5.9 aber nur verwenden, um zu zeigen, dass die zusätzlichen Terme in den Schätzerreduktionsaussagen Nullfolgen sind.

5.10 Lemma (A-priori Konvergenz der Datenapproximation in $H^{1/2}(\Gamma)$). *Es gelte $\mathcal{S}^{p+1}(\mathcal{E}_\ell) \subseteq \mathcal{S}^{p+1}(\mathcal{E}_{\ell+1})$ und $f \in H^1(\Gamma)$. Ist $\mathbb{P}_\ell : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^{p+1}(\mathcal{E}_\ell)$ die $H^{1/2}(\Gamma)$ -orthogonale Projektion, dann existiert der Limes $f_\infty = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\ell f$ in $H^{1/2}(\Gamma)$. Im Fall $p = 0$ existiert der Limes $f_\infty = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \Pi_\ell f$ in $H^{1/2}(\Gamma)$. Hier bezeichnet Π_ℓ die $L_2(\Gamma)$ -orthogonale Projektion auf $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$, siehe Abschnitt 3.4.*

Beweis. Falls $\mathbb{P}_\ell$ die $H^{1/2}(\Gamma)$ -orthogonale Projektion ist, kann unmittelbar Lemma 5.9 angewendet werden.

Sei nun $p = 0$, und $f \in H^1(\Gamma)$ werde mit der $L_2(\Gamma)$ -orthogonalen Projektion $\Pi_\ell : L_2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ approximiert. Laut Lemma 5.9 existiert der Limes $f_\infty = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \Pi_\ell f$ in $L_2(\Gamma)$. Laut Theorem 3.20, ist Π_ℓ stabil in $H^1(\Gamma)$, daher ist die Folge $\Pi_\ell f$ uniform beschränkt in $H^1(\Gamma)$, besitzt also eine in $H^1(\Gamma)$ schwach konvergente Teilfolge $\Pi_{\ell_k} f$, deren Limes wir mit $\tilde{f}_\infty$ bezeichnen wollen. Da die Einbettung $H^1(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$ kompakt ist, konvergiert die Folge $\Pi_{\ell_k} f$ stark in L_2 gegen $\tilde{f}_\infty$, und es folgt $f_\infty = \tilde{f}_\infty$. Mit dem selben Argument hat jede Teilfolge von $\Pi_\ell f$ eine Teilfolge, die schwach in $H^1(\Gamma)$ gegen f_∞ konvergiert, daher konvergiert die ursprüngliche Folge Π_ℓ schwach gegen f_∞ , wegen der kompakten Einbettung $H^1(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma)$ auch stark in $H^{1/2}(\Gamma)$. ■

Wie wir schon oft erwähnt haben, wird sich herausstellen, dass die Folge der Fehlerschätzer τ_ℓ bis auf eine gewisse Nullfolge immer eine Kontraktion ist. Um daraus die Konvergenz der Fehlerschätzer gegen 0 sicherzustellen, benutzen wir das folgende Lemma. Der Beweis ist in [AFLP12, Lemma 2.3] zu finden.

5.11 Lemma (Schätzerreduktion impliziert Schätzerkonvergenz). *Angenommen, die Folge der Fehlerschätzer $(\tau_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ erfüllt die Schätzerreduktion*

$$\tau_{\ell+1} \leq q\tau_\ell + \alpha_\ell \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $0 < q < 1$ und $(\alpha_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ eine nichtnegative Nullfolge ist. Dann gilt $\tau_\ell \rightarrow 0$. ■

5.3 $h - h/2$ -Fehlerschätzer und Konvergenz

Wir beschreiben zunächst $h - h/2$ -Schätzer, die den Diskretisierungsfehler von (5.8) und (5.10) messen. Ist $\mathcal{E}_\ell$ ein Gitter, so bezeichnen wir ab nun mit

$$\hat{\mathcal{E}}_\ell = \text{refine}(\mathcal{E}_\ell)$$

das uniform verfeinerte Gitter, das heißt, alle Kanten aus $\mathcal{E}_\ell$ werden geteilt. Das folgende Resultat findet sich in [FLP08, Theoreme 3.2 und 3.4] für den Fall von Elementen niedrigster Ordnung. Der Beweis für höheren Polynomgrad lässt sich jedoch wortwörtlich übertragen, siehe [EFLFP09] für den 2D Fall, weswegen wir ihn hier nicht anführen.

5.12 Lemma ($h - h/2$ -Schätzer für das Einfachschichtpotential). *Es bezeichne Φ_ℓ die Galerkinlösung der schwach singulären Gleichung (5.8) oder des Dirichletproblems (5.10). Für die schwach singuläre Gleichung (5.8) bezeichnet $\widehat{\Phi}_\ell \in \mathcal{P}^p(\widehat{\mathcal{E}}_\ell)$ die Galerkinlösung*

$$\langle V\widehat{\Phi}_\ell, \widehat{\Psi}_\ell \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} = \langle f, \widehat{\Psi}_\ell \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } \widehat{\Psi}_\ell \in \mathcal{P}^p(\widehat{\mathcal{E}}_\ell).$$

Für das Dirichletproblem (5.10) bezeichnet $\widehat{\Phi}_\ell \in \mathcal{P}^p(\widehat{\mathcal{E}}_\ell)$ die Galerkinlösung

$$\langle V\widehat{\Phi}_\ell, \widehat{\Psi}_\ell \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} = \langle (K + 1/2)\mathbb{P}_\ell f, \widehat{\Psi}_\ell \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } \widehat{\Psi}_\ell \in \mathcal{P}^p(\widehat{\mathcal{E}}_\ell).$$

Definiere die $h - h/2$ -Fehlerschätzer

$$\begin{aligned} \eta_\ell &:= \|\widehat{\Phi}_\ell - \Phi_\ell\|_V & \widetilde{\eta}_\ell &:= \|(1 - \pi^p)\widehat{\Phi}_\ell\|_V \\ \mu_\ell &:= \|h_\ell^{1/2}(\widehat{\Phi}_\ell - \Phi_\ell)\|_{L_2} & \widetilde{\mu}_\ell &:= \|h_\ell^{1/2}(1 - \pi^p)\widehat{\Phi}_\ell\|_{L_2}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Dann sind alle Fehlerschätzer äquivalent,

$$\widetilde{\mu}_\ell \simeq \mu_\ell \simeq \widetilde{\eta}_\ell \simeq \eta_\ell,$$

wobei die Äquivalenzkonstanten nur von der Konstante C_{apx} aus Lemma 3.21, der Konstante C_{inv} aus Proposition 3.28 und der Äquivalenzkonstante C_{eq} aus Theorem 4.3 abhängen. $\blacksquare$

Wir bemerken nun, dass die Fehlerschätzer aus dem vorigen Theorem im Falle der schwach singulären Gleichung (5.8) allesamt effizient und, unter der sogenannten *Saturationsannahme*, zuverlässig sind. Dies wird ebenfalls in [FLP08, Proposition 1.1] bewiesen.

5.13 Lemma. *Im Falle der schwach singulären Gleichung (5.8) sind alle Fehlerschätzer aus (5.14) effizient, und unter der Saturationsannahme*

$$\|\phi - \widehat{\Phi}_\ell\|_V \leq C_{\text{sat}} \|\phi - \Phi_\ell\|_V \quad (5.15)$$

mit $C_{\text{sat}} \in (0, 1)$ sind alle Fehlerschätzer zuverlässig. $\blacksquare$

Der Beweis des vorigen Theorems benützt die Galerkinorthogonalität. Da ein datengestörtes Galerkinverfahren (5.10) für das Dirichletproblem nicht die exakte rechte Seite sieht, ist die Galerkinorthogonalität nicht vorhanden, und man muss anders vorgehen. Es kommen sogenannte Datenoszillationen ins Spiel, die den Fehler messen, der durch die Approximation der Dirichletdaten entsteht.

5.14 Lemma. *Sei $f \in H^1(\Gamma)$ das Datum der rechten Seite von (5.7) und $(\mathcal{E}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Gittern, die durch den Algorithmus `refine` erzeugt wird. Definiere die Oszillationen*

$$\text{osc}_\ell := \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma (1 - \mathbb{P}_\ell) f\|_{L_2(\Gamma)}. \quad (5.16)$$

Mit $\tau_\ell \in \{\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell\}$ gilt dann die Effizienz

$$C_{\text{eff}}^{-1} \tau_\ell \leq |||\phi - \Phi_\ell|||_V + \text{osc}_\ell. \quad (5.17)$$

Bezeichnet $\hat{\Phi}_\ell^{\text{ex}}$ die Galerkinlösung des exakten Problems (5.9) auf $\mathcal{P}^p(\hat{\mathcal{E}}_\ell)$, so gilt unter der Saturationsannahme

$$|||\phi - \hat{\Phi}_\ell^{\text{ex}}|||_V \leq C_{\text{sat}} |||\phi - \Phi_\ell^{\text{ex}}|||_V \quad (5.18)$$

mit $C_{\text{sat}} \in (0, 1)$ auch die Zuverlässigkeit

$$C_{\text{rel}}^{-1} |||\phi - \Phi_\ell|||_V \leq \tau_\ell + \text{osc}_\ell. \quad (5.19)$$

Die Konstante C_{eff} hängt nur von der Konstante C_{apx} aus Theorem 3.26 und der Stabilitätskonstante von $V : \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ ab, die Konstante C_{rel} nur von C_{sat} und C_{apx} .

Beweis. Laut Lemma 5.12 genügt es, die Zuverlässigkeit und Effizienz für η_ℓ zu zeigen. Wir schätzen den Fehlerschätzer durch

$$\begin{aligned} \eta_\ell &= |||\Phi_\ell - \hat{\Phi}_\ell|||_V \leq |||\Phi_\ell - \hat{\Phi}_\ell^{\text{ex}}|||_V + |||\hat{\Phi}_\ell^{\text{ex}} - \hat{\Phi}_\ell|||_V \\ &\leq |||\Phi_\ell - \Phi_\ell^{\text{ex}}|||_V + |||\Phi_\ell^{\text{ex}} - \hat{\Phi}_\ell^{\text{ex}}|||_V + |||\hat{\Phi}_\ell^{\text{ex}} - \hat{\Phi}_\ell|||_V \end{aligned}$$

ab. Die Stabilität der Galerkinprojektionen beschränkt den ersten und dritten Term, und wir erhalten mit Theorem 3.26

$$\eta_\ell \lesssim \|f - \mathbb{P}_\ell f\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + |||\Phi_\ell^{\text{ex}} - \hat{\Phi}_\ell^{\text{ex}}|||_V \lesssim \text{osc}_\ell + |||\Phi_\ell^{\text{ex}} - \hat{\Phi}_\ell^{\text{ex}}|||_V.$$

Wir können Φ_ℓ^{ex} und $\hat{\Phi}_\ell^{\text{ex}}$ auch im Rahmen der schwach singulären Gleichung (5.8) lösen (wir wählen einfach die richtige rechte Seite), und aus Lemma 5.13 erhalten wir dann die Effizienz $|||\Phi_\ell^{\text{ex}} - \hat{\Phi}_\ell^{\text{ex}}|||_V \leq |||\phi - \Phi_\ell^{\text{ex}}|||_V$. Die Bestapproximationseigenschaft der Galerkinprojektionen besagt $|||\phi - \Phi_\ell^{\text{ex}}|||_V \leq |||\phi - \Phi_\ell|||_V$, wodurch die Effizienz (5.17) gezeigt ist. Um die Zuverlässigkeit (5.19) zu zeigen, gehen wir folgendermassen vor: Da wir die Saturationsannahme (5.18) für die Galerkinlösungen mit nicht-gestörter rechter Seite angenommen haben, gilt die Zuverlässigkeit $|||\phi - \Phi_\ell^{\text{ex}}|||_V \lesssim |||\hat{\Phi}_\ell^{\text{ex}} - \Phi_\ell^{\text{ex}}|||_V$ aus Lemma 5.13. Damit schließen wir

$$|||\phi - \Phi_\ell|||_V \leq |||\phi - \Phi_\ell^{\text{ex}}|||_V + |||\Phi_\ell^{\text{ex}} - \Phi_\ell|||_V \lesssim |||\hat{\Phi}_\ell^{\text{ex}} - \Phi_\ell^{\text{ex}}|||_V + |||\Phi_\ell^{\text{ex}} - \Phi_\ell|||_V.$$

Da Φ_ℓ^{ex} die Galerkinapproximation von $\hat{\Phi}_\ell^{\text{ex}}$ ist, gilt $|||\hat{\Phi}_\ell^{\text{ex}} - \Phi_\ell^{\text{ex}}|||_V \leq |||\hat{\Phi}_\ell^{\text{ex}} - \Phi_\ell|||_V$, und wir schätzen weiter ab

$$\begin{aligned} |||\phi - \Phi_\ell|||_V &\lesssim |||\hat{\Phi}_\ell^{\text{ex}} - \Phi_\ell|||_V + |||\Phi_\ell^{\text{ex}} - \Phi_\ell|||_V \\ &\leq |||\Phi_\ell - \hat{\Phi}_\ell|||_V + |||\hat{\Phi}_\ell - \hat{\Phi}_\ell^{\text{ex}}|||_V + |||\Phi_\ell^{\text{ex}} - \Phi_\ell|||_V. \end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist η_ℓ , die letzten beiden Terme sind wegen der Stabilität der Galerkinprojektion beschränkt durch $\|f - \mathbb{P}_\ell f\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \text{osc}_\ell$, wobei Theorem 3.26 verwendet wurde. $\square$

Wir führen nun zwei Algorithmen an, in denen der Fehler durch die $h - h/2$ -Strategie gemessen wird. Im Falle der schwach singulären Gleichung geschieht dies durch den Einsatz der Schätzer μ_ℓ oder $\tilde{\mu}_\ell$. Wollen wir das Dirichletproblem lösen, so müssen wir zusätzlich die Oszillationen osc_ℓ aus (5.16) berücksichtigen.

5.15 Algorithmus (`solve-hh2-weaksing` zur Lösung der schwach singulären Gleichung). Gegeben sei ein grobes Gitter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ auf $\Gamma \subseteq \partial\Omega$, ein Parameter $0 < \theta < 1$ und $p \in \mathbb{N}_0$. Wir verwenden Algorithmus `solve-combined` 5.6 mit Inputparameter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ und θ und

- Φ_ℓ ist die Galerkinlösung der schwach singulären Integralgleichung (5.8),
- $\tau_\ell(E)^2 = \mu_\ell(E)^2$ oder $\tau_\ell(E)^2 = \tilde{\mu}_\ell(E)^2$ mit den Schätzern aus (5.14).

5.16 Algorithmus (`solve-hh2-dirichlet` zur Lösung des Dirichletproblems). Gegeben sei ein grobes Gitter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ auf $\Gamma = \partial\Omega$, ein Parameter $0 < \theta < 1$ und $p \in \mathbb{N}_0$. Wir wählen $\mathbb{P}_\ell : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^{p+1}(\mathcal{E}_\ell)$ als $H^{1/2}(\Gamma)$ -orthogonale Projektion. Im Fall $p = 0$ kann auch $\mathbb{P}_\ell := \Pi_\ell$ gewählt werden. Wir verwenden Algorithmus `solve-combined` 5.6 mit Inputparameter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ und θ und

- Φ_ℓ ist die Galerkinlösung des Dirichletproblems mit gestörter rechter Seite (5.10),
- $\tau_\ell(E)^2 = \mu_\ell(E)^2 + \text{osc}_\ell(E)^2$ oder $\tau_\ell(E)^2 = \tilde{\mu}_\ell(E)^2 + \text{osc}_\ell(E)^2$ mit den Schätzern aus (5.14) und den Oszillationen aus (5.16).

Wir zeigen nun Konvergenzaussagen für die $h - h/2$ -Strategie. Wir betrachten zunächst die schwach singuläre Integralgleichung (5.6).

5.17 Lemma (Konvergenz von `solve-hh2-weaksing`). Für Algorithmus 5.15, `solve-hh2-weaksing` gilt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \tau_\ell = 0.$$

Unter der Saturationsannahme (5.15) gilt insbesondere Konvergenz $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|\phi - \Phi_\ell\| = 0$.

Beweis. Der Beweis für den Fall niedrigster Ordnung, das heißt $p = 0$, ist in [AFLP12, Theorem 4.1 (ii)] zu finden und kann wortwörtlich auf den Fall höhere Polynomgrade übertragen werden. $\square$

Folgendes Theorem liefert die Konvergenz des adaptiven Algorithmus 5.16 für das Dirichletproblem mit Datenapproximation.

5.18 Lemma (Schätzerreduktion von `solve-hh2-dirichlet`). Für Algorithmus 5.16, `solve-hh2-dirichlet`, gilt

$$\tau_{\ell+1}^2 \leq \hat{\kappa} \tau_\ell^2 + C_{\text{red}} \left(\|\hat{\Phi}_{\ell+1} - \hat{\Phi}_\ell\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|\mathbb{P}_{\ell+1}f - \mathbb{P}_\ell f\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \right)$$

mit einer Konstante $0 < \hat{\kappa} < 1$, die nur von θ abhängt. Die Konstante $C_{\text{red}} > 0$ hängt nur von θ , $\mathcal{E}_0$, $\partial\Omega$ und p ab. Es ist

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \tau_\ell = 0,$$

und unter der Saturationsannahme (5.15) gilt insbesondere Konvergenz $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|\phi - \Phi_\ell\| = 0$.

Beweis. Wir zeigen die Aussage für $\tau_\ell = \tilde{\mu}_\ell$. Auf jedem Element $E \in \mathcal{E}_{\ell+1}$ gilt

$$\|(1 - \pi_{\ell+1}^p)(\widehat{\Phi}_{\ell+1} - \widehat{\Phi}_\ell)\|_{L_2(E)} \leq \|\widehat{\Phi}_{\ell+1} - \widehat{\Phi}_\ell\|_{L_2(E)}.$$

Wir können dadurch $\tau_{\ell+1}$ abschätzen und erhalten

$$\begin{aligned} \tau_{\ell+1}^2 &= \|h_{\ell+1}^{1/2}(1 - \pi_{\ell+1}^p)\widehat{\Phi}_{\ell+1}\|_{L_2}^2 + \|h_{\ell+1}^{1/2}\nabla_\Gamma(f - \mathbb{P}_{\ell+1}f)\|_{L_2}^2 \\ &\leq (\|h_{\ell+1}^{1/2}(1 - \pi_{\ell+1}^p)\widehat{\Phi}_\ell\|_{L_2} + \|h_{\ell+1}^{1/2}(1 - \pi_{\ell+1}^p)(\widehat{\Phi}_{\ell+1} - \widehat{\Phi}_\ell)\|_{L_2})^2 + \|h_{\ell+1}^{1/2}\nabla_\Gamma(f - \mathbb{P}_{\ell+1}f)\|_{L_2}^2 \\ &= (\|h_{\ell+1}^{1/2}(1 - \pi_{\ell+1}^p)\widehat{\Phi}_\ell\|_{L_2} + \|h_{\ell+1}^{1/2}(\widehat{\Phi}_{\ell+1} - \widehat{\Phi}_\ell)\|_{L_2})^2 + \|h_{\ell+1}^{1/2}\nabla_\Gamma(f - \mathbb{P}_{\ell+1}f)\|_{L_2}^2, \end{aligned}$$

Die Youngsche Ungleichung für $\delta > 0$ und die inverse Abschätzung aus Lemma 3.28 zeigen

$$\tau_{\ell+1}^2 \leq (1 + \delta)\|h_{\ell+1}^{1/2}(1 - \pi_{\ell+1}^p)\widehat{\Phi}_\ell\|_{L_2}^2 + C_{\text{inv}}^2(1 + \delta^{-1})\|\widehat{\Phi}_{\ell+1} - \widehat{\Phi}_\ell\|_{H^{-1/2}}^2 + \|h_{\ell+1}^{1/2}\nabla_\Gamma(f - \mathbb{P}_{\ell+1}f)\|_{L_2}^2.$$

Den Oszillationsterm können wir durch die inverse Abschätzung aus Lemma 3.29 genauso behandeln,

$$\begin{aligned} \|h_{\ell+1}^{1/2}\nabla_\Gamma(f - \mathbb{P}_{\ell+1}f)\|_{L_2}^2 &\leq (\|h_{\ell+1}^{1/2}\nabla_\Gamma(f - \mathbb{P}_\ell f)\|_{L_2} + \|h_{\ell+1}^{1/2}\nabla_\Gamma(\mathbb{P}_{\ell+1}f - \mathbb{P}_\ell f)\|_{L_2})^2 \\ &\leq (1 + \delta)\|h_{\ell+1}^{1/2}\nabla_\Gamma(f - \mathbb{P}_\ell f)\|_{L_2}^2 + C_{\text{inv}}^2(1 + \delta^{-1})\|\mathbb{P}_{\ell+1}f - \mathbb{P}_\ell f\|_{H^{1/2}}^2, \end{aligned}$$

sodass wir schließlich zu

$$\begin{aligned} \tau_{\ell+1}^2 &\leq (1 + \delta) \left[\|h_{\ell+1}^{1/2}(1 - \pi_{\ell+1}^p)\widehat{\Phi}_\ell\|_{L_2}^2 + \|h_{\ell+1}^{1/2}\nabla_\Gamma(f - \mathbb{P}_\ell f)\|_{L_2}^2 \right] \\ &\quad + C_{12}^2(1 + \delta^{-1}) \left[\|\widehat{\Phi}_{\ell+1} - \widehat{\Phi}_\ell\|_{H^{-1/2}}^2 + \|\mathbb{P}_{\ell+1}f - \mathbb{P}_\ell f\|_{H^{1/2}}^2 \right] \end{aligned}$$

gelangen, wobei C_{12} von den Konstanten der inversen Ungleichungen 3.28 und 3.29 abhängt. Wir betrachten den ersten Term auf jedem Element $E \in \mathcal{E}_\ell$,

$$\Delta(E) := \|h_{\ell+1}^{1/2}(1 - \pi_{\ell+1}^p)\widehat{\Phi}_\ell\|_{L_2(E)}^2 + \|h_{\ell+1}^{1/2}\nabla_\Gamma(f - \mathbb{P}_\ell f)\|_{L_2(E)}^2 \quad \text{für } E \in \mathcal{E}_\ell.$$

Ist $E \in \mathcal{M}_\ell$, so gilt $h_{\ell+1}|_E \leq qh_\ell|_E$ und

$$\|(1 - \pi_{\ell+1}^p)\widehat{\Phi}_\ell\|_{L_2(E)} \leq \|(1 - \pi_\ell^p)\widehat{\Phi}_\ell\|_{L_2(E)},$$

und wir erhalten

$$\Delta(\mathcal{M}_\ell) \leq q\tau_\ell(\mathcal{M}_\ell)^2. \tag{5.20}$$

Sollte jedoch $E \in \mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell$ sein, so können wir durch

$$\Delta(E) \leq \|h_\ell^{1/2}(1 - \pi_\ell^p)\widehat{\Phi}_\ell\|_{L_2(E)}^2 + \|h_\ell^{1/2}\nabla_\Gamma(g - \mathbb{P}_\ell g)\|_{L_2(E)}^2 = \tau_\ell(E)^2,$$

schließen. Aus dieser Abschätzung erhalten wir nun $\Delta(\mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell) \leq \tau_\ell(\mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell)^2$. Zusammen mit (5.20) erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{E}_\ell) &= \Delta(\mathcal{M}_\ell) + \Delta(\mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell) \leq q\tau_\ell(\mathcal{M}_\ell)^2 + \tau_\ell(\mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell)^2 = \tau_\ell^2 + (q - 1)\tau_\ell(\mathcal{M}_\ell)^2 \\ &\leq (1 + (q - 1)\theta)\tau_\ell^2, \end{aligned}$$

sodass also für alle $\delta > 0$ gilt, dass

$$\tau_{\ell+1}^2 \leq (1 + \delta)(1 + (q - 1)\theta)\tau_\ell^2 + C_{12}^2(1 + \delta^{-1}) \left[\|\widehat{\Phi}_{\ell+1} - \widehat{\Phi}_\ell\|_{H^{-1/2}}^2 + \|\mathbb{P}_{\ell+1}g - \mathbb{P}_\ell g\|_{H^{1/2}}^2 \right].$$

Mit δ klein genug definieren wir $\widehat{\kappa} := (1 + \delta)(1 + (q - 1)\theta) < 1$. Dies zeigt zunächst die Schätzerreduktion. Um Lemma 5.11 anwenden zu können, bleibt also zu zeigen, dass die letzten beiden Terme der rechten Seite eine Nullfolge bilden. Zunächst gilt wegen der a-priori Konvergenz der Daten aus Lemma 5.10, dass $\mathbb{P}_\ell f \rightarrow f_\infty$ in $H^{1/2}(\Gamma)$ existiert, somit ist der letzte Term bereits eine Nullfolge. Mit $\widehat{\Phi}_{\infty,\ell}^{\text{ex}} \in \mathcal{P}^p(\widehat{\mathcal{E}}_\ell)$ bezeichnen wir die Galerkinlösung des Dirichletproblems (5.9) mit rechter Seite f_∞ . Weil $\mathcal{P}^p(\widehat{\mathcal{E}}_\ell) \subseteq \mathcal{P}^p(\widehat{\mathcal{E}}_{\ell+1})$ gilt, folgt mit Lemma 5.9, dass $\widehat{\Phi}_{\infty,\ell}^{\text{ex}} \rightarrow \phi_\infty$ in $H^{-1/2}(\Gamma)$. Es ist

$$\|\phi_\infty - \widehat{\Phi}_\ell\|_V \leq \|\phi_\infty - \widehat{\Phi}_{\infty,\ell}^{\text{ex}}\|_V + \|\widehat{\Phi}_{\infty,\ell}^{\text{ex}} - \widehat{\Phi}_\ell\|_V,$$

und der erste Term der rechten Seite geht damit gegen 0. Der zweite Term geht wegen der Stabilität der Galerkinmethode und der a-priori Konvergenz der Daten ebenfalls gegen 0,

$$\|\widehat{\Phi}_{\infty,\ell}^{\text{ex}} - \widehat{\Phi}_\ell\|_V \lesssim \|(1/2 + K)(f_\infty - \mathbb{P}_\ell f)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \|f_\infty - \mathbb{P}_\ell f\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \rightarrow 0.$$

Damit bildet auch der erste Term in der Schätzerreduktion eine Nullfolge. Lemma 5.11 besagt daher, dass $\tau_\ell \rightarrow 0$ für $\ell \rightarrow \infty$. $\square$

5.4 Gewichteter residualer Fehlerschätzer und Konvergenz

Die $h - h/2$ -Schätzer aus dem letzten Kapitel sind nur unter der Saturationsannahme (5.15) zuverlässig. Da diese Annahme bisher nur für die FEM bewiesen ist [DN02], sind die Konvergenzaussagen für die $h - h/2$ -Schätzer also gewissermassen unvollständig.

Das Residuum $V\Phi_\ell - f$ ist jedoch berechenbar, und wie man aus der FEM weiss, sind Fehlerschätzer, die darauf aufbauen, strukturell immer zuverlässig. Wir haben hier aber, wie bereits bei der $h - h/2$ -Strategie, das Problem, dass wir das Residuum ebenfalls in einer gebrochenen Norm, nämlich $H^{1/2}(\Gamma)$ messen müssen. Um also lokale Beiträge zu erhalten, ist eine Lokalisierung dieser Norm vonnöten. In [CMS01, Corollary 4.2] wird die Zuverlässigkeit des folgenden gewichteten Residualschätzers bewiesen.

5.19 Lemma (Zuverlässigkeit des gewichteten Residualschätzers). *Ist $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$ die Galerkinlösung der schwach singulären Integralgleichung (5.8), dann definieren wir*

$$\rho_\ell(E) := \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma(V\Phi_\ell - f)\|_{L_2(E)}. \quad (5.21)$$

Es gilt das Folgende: Es existiert eine Konstante C_{rel} , die nur von Γ , $\partial\Omega$ und der Form der Elemente und Elementpatches (nicht aber von ihrer Größe) abhängt, sodass

$$C_{\text{rel}}^{-2} \|\phi - \Phi_\ell\|_V^2 \leq \rho_\ell^2 := \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \rho_\ell(E)^2.$$

■

Analog zu den $h - h/2$ -Schätzern beruht der Beweis des letzten Lemmas auf der Galerkinorthogonalität. Wir müssen also im Falle von approximierten Dirichletdaten wieder Datenoszillationen einbauen.

5.20 Lemma (Zuverlässigkeit für den gewichteten Residualschätzer mit Datenapproximation). *Sei $f \in H^1(\Gamma)$ das Datum der rechten Seite des Dirichletproblems (5.7) und $(\mathcal{E}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Gittern, die durch den Algorithmus **refine** erzeugt wird. Ist $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$ die Galerkinlösung des gestörten Dirichletproblems (5.10), dann definieren wir Schätzer und Oszillationen durch*

$$\rho_\ell(E) := \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma (V \Phi_\ell - (1/2 + K) \mathbb{P}_\ell f)\|_{L_2(E)} \quad \text{und} \quad \text{osc}_\ell(E) := \|h_\ell^{1/2} (1 - \pi_\ell^p) \nabla_\Gamma f\|_{L_2(E)}. \quad (5.22)$$

Weiters definieren wir den ungestörten Fehlerschätzer durch

$$\rho_{\text{ex},\ell}^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \rho_{\text{ex},\ell}(E)^2 \quad \text{mit} \quad \rho_{\text{ex},\ell}^2(E) = \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma (V \Phi_\ell^{\text{ex}} - (K + 1/2)f)\|_{L_2(\Gamma)}^2, \quad (5.23)$$

wobei Φ_ℓ^{ex} die Galerkinlösung (5.9) zum ungestörten Dirichletproblem bezeichnet. Es gelten folgende Abschätzungen:

$$C_{\text{ex}}^{-1} (\|\phi - \Phi_\ell^{\text{ex}}\|_V + \text{osc}_\ell) \leq \|\phi - \Phi_\ell\|_V + \text{osc}_\ell \leq C_{\text{ex}} (\|\phi - \Phi_\ell^{\text{ex}}\|_V + \text{osc}_\ell) \quad (5.24a)$$

$$C_{\text{ex}}^{-1} \left(\sum_{E \in \mathcal{M}_\ell} \rho_{\text{ex},\ell}(E)^2 + \text{osc}_\ell^2 \right) \leq \sum_{E \in \mathcal{M}_\ell} \rho_\ell(E)^2 + \text{osc}_\ell^2 \leq C_{\text{ex}} \left(\sum_{E \in \mathcal{M}_\ell} \rho_{\text{ex},\ell}(E)^2 + \text{osc}_\ell^2 \right), \quad (5.24b)$$

wobei $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{E}_\ell$ eine beliebige Teilmenge ist. Die Konstante $C_{\text{ex}} \geq 1$ hängt nur von Γ , von p und von $\mathcal{E}_0$ ab. Insbesondere ist der gewichtete Residualschätzer zuverlässig,

$$C_{\text{rel}}^{-2} \|\phi - \Phi_\ell\|_V^2 \leq \rho_\ell^2 + \text{osc}_\ell^2, \quad (5.25)$$

wobei die Konstante C_{rel} nur von Γ , $\partial\Omega$, von p und von $\mathcal{E}_0$ abhängt.

Beweis. Der Operator $\mathbb{P}_\ell$ wurde als $H^{1/2}(\Gamma)$ -stabile Projektion vorausgesetzt. Zusammen mit der Stabilität und Linearität des Galerkinverfahrens und dem Approximationssatz 3.26 folgt

$$\|\Phi_\ell^{\text{ex}} - \Phi_\ell\|_V \lesssim \|f - \mathbb{P}_\ell f\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \|f - J_\ell f\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma (1 - J_\ell) f\|_{L_2(\Gamma)}, \quad (5.26)$$

wobei $J_\ell : L_2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^p(\mathcal{E}_\ell)$ der Scott-Zhang Operator ist. Aufgrund von Proposition 3.27 ist die rechte Seite durch osc_ℓ beschränkt, und zusammen mit der Dreiecksungleichung folgen die Abschätzungen in (5.24a).

Nun zeigen wir (5.24b).

$$\sum_{E \in \mathcal{M}_\ell} \rho_{\text{ex},\ell}(E)^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{M}_\ell} \rho_\ell(E)^2 + \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma V(\Phi_\ell - \Phi_\ell^{\text{ex}})\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma (K + 1/2)(1 - \mathbb{P}_\ell) f\|_{L_2(\Gamma)}^2$$

Den mittleren Term auf der rechten Seite schätzen wir mit der inversen Ungleichung (4.3a) für V und (5.26) ab, während wir für den letzten Term die Dreiecksungleichung, die inverse Ungleichung (4.3c) für K und den Approximationssatz 3.26 verwenden. Dies liefert

$$\begin{aligned} \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma V(\Phi_\ell - \Phi_\ell^{\text{ex}})\|_{L_2(\Gamma)}^2 &\lesssim \|\Phi_\ell - \Phi_\ell^{\text{ex}}\|_V^2 \lesssim \text{osc}_\ell^2 \\ \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma (K + 1/2)(1 - \mathbb{P}_\ell) f\|_{L_2(\Gamma)}^2 &\lesssim \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma (1 - \mathbb{P}_\ell) f\|_{L_2(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Den rechten Term der zweiten Zeile schätzen wir mit der inversen Ungleichung 3.29 ab und erhalten

$$\begin{aligned}
\|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma (1 - \mathbb{P}_\ell) f\|_{L_2(\Gamma)} &\leq \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma (1 - J_\ell) f\|_{L_2(\Gamma)} + \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma (J_\ell - \mathbb{P}_\ell) f\|_{L_2(\Gamma)} \\
&\lesssim \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma (1 - J_\ell) f\|_{L_2(\Gamma)} + \|(J_\ell - \mathbb{P}_\ell) f\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\
&\leq \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma (1 - J_\ell) f\|_{L_2(\Gamma)} + \|(1 - J_\ell) f\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|(1 - \mathbb{P}_\ell) f\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\
&\lesssim \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma (1 - J_\ell) f\|_{L_2(\Gamma)},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt wie in (5.26) argumentiert haben. Erneut zeigt Proposition 3.27, dass die rechte Seite durch osc_ℓ beschränkt ist. Somit gilt die erste Abschätzung in (5.24b), die zweite Abschätzung folgt analog.

Die Zuverlässigkeit (5.25) sieht man nun folgendermassen ein: Mit der Dreiecksungleichung, der Zuverlässigkeit aus Lemma 5.19 für $\rho_{\text{ex},\ell}$, der Abschätzung (5.26) und der ersten Abschätzung in (5.24b) gilt

$$|||\phi - \Phi_\ell|||_V \leq |||\phi - \Phi_\ell^{\text{ex}}|||_V + |||\Phi_\ell - \Phi_\ell^{\text{ex}}|||_V \lesssim \rho_{\text{ex},\ell} + \text{osc}_\ell \lesssim \rho_\ell + \text{osc}_\ell,$$

womit (5.25) gezeigt ist. □

Wir führen nun drei Algorithmen an, in denen der Fehler durch den gewichteten Residualschätzer gemessen wird. Im Falle der schwach singulären Integralgleichung geschieht dies durch den Schätzer ρ_ℓ , im Falle des Dirichletproblems werden wir, wie bereits im $h - h/2$ -Fall, die Datenapproximation durch Oszillationen steuern.

5.21 Algorithmus (*solve-res-weaksing* zur Lösung der schwach singulären Gleichung). *Gegeben sei ein grobes Gitter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ auf $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ ein Parameter $0 < \theta < 1$ und $p \in \mathbb{N}_0$. Wir verwenden Algorithmus solve-combined 5.6 mit Inputparameter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ und θ und*

- Φ_ℓ ist die Galerkinlösung der schwach singulären Integralgleichung (5.8),
- $\tau_\ell(E)^2 = \rho_\ell(E)^2$ mit dem Schätzer aus (5.21).

5.22 Algorithmus (*solve-res-dirichlet* zur Lösung des Dirichletproblems). *Gegeben sei ein grobes Gitter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ auf $\Gamma \subseteq \partial\Omega$, ein Parameter $0 < \theta < 1$ und $p \in \mathbb{N}_0$. Wir wählen $\mathbb{P}_\ell : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow S^{p+1}(\mathcal{E}_\ell)$ als $H^{1/2}(\Gamma)$ -orthogonale Projektion. Im Fall $p = 0$ kann auch $\mathbb{P}_\ell := \Pi_\ell$ gewählt werden. Wir verwenden Algorithmus solve-combined 5.6 mit Inputparameter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ und θ und*

- Φ_ℓ ist die Galerkinlösung des Dirichletproblems (5.9),
- $\tau_\ell(E)^2 = \rho_\ell(E)^2 + \text{osc}_\ell(E)^2$ mit Schätzer und Oszillationen aus (5.22).

5.23 Algorithmus (*solve-separate-res-dirichlet* zur Lösung des Dirichletproblems). *Gegeben sei ein grobes Gitter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ auf $\Gamma \subseteq \partial\Omega$, ein Parameter $0 < \theta < 1$ und $p \in \mathbb{N}_0$. Wir wählen $\mathbb{P}_\ell : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow S^{p+1}(\mathcal{E}_\ell)$ als $H^{1/2}(\Gamma)$ -orthogonale Projektion. Im Fall $p = 0$ kann auch $\mathbb{P}_\ell := \Pi_\ell$ gewählt werden. Wir verwenden Algorithmus solve-separate 5.7 mit Inputparameter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ und θ und*

- Φ_ℓ ist die Galerkinlösung des Dirichletproblems (5.9),

- $\tau_\ell(E)^2 = \rho_\ell(E)^2 + \text{osc}_\ell(E)^2$ mit Schätzer und Oszillationen aus (5.22).

Wir zeigen nun die Schätzerreduktion für die drei angeführten Algorithmen. Für `solve-res-weaksing` und `solve-res-dirichlet` müssen wir dazu die Schätzer betrachten, für den Algorithmus `solve-separate-res-dirichlet` können wir uns mit Hilfe von Proposition 5.8 auf die Aussage für `solve-res-dirichlet` zurückziehen.

5.24 Lemma. *Für Algorithmus 5.21, `solve-res-weaksing`, gilt*

$$\rho_{\ell+1}^2 \leq \widehat{\kappa} \rho_\ell^2 + C_{\text{red}} \|\Phi_{\ell+1} - \Phi_\ell\|_V^2.$$

Die Konstante $0 < \widehat{\kappa} < 1$ hängt nur von $0 < \theta < 1$ ab, die Konstante C_{red} zusätzlich von p , $\mathcal{E}_0$ und Γ . Insbesondere gilt Konvergenz des adaptiven Algorithmus,

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \rho_\ell = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|\phi - \Phi_\ell\|_V = 0.$$

Beweis. Anwenden der Dreiecksungleichung und der Young'schen Ungleichung liefert für $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \rho_{\ell+1}^2 &= \|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla_\Gamma(V\Phi_{\ell+1} - f)\|_{L_2(\Gamma)}^2 \\ &\leq (\|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla_\Gamma(V\Phi_\ell - f)\|_{L_2(\Gamma)} + \|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla_\Gamma V(\Phi_{\ell+1} - \Phi_\ell)\|_{L_2(\Gamma)})^2 \\ &\leq (1 + \delta) \|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla_\Gamma(V\Phi_\ell - f)\|_{L_2(\Gamma)}^2 + (1 + \delta^{-1}) \|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla_\Gamma V(\Phi_{\ell+1} - \Phi_\ell)\|_{L_2(\Gamma)}^2. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Den ersten Term betrachten wir elementweise:

$$\|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla_\Gamma(V\Phi_\ell - f)\|_{L_2(\Gamma)}^2 = \sum_{E \in \mathcal{M}_\ell} \|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla_\Gamma(V\Phi_\ell - f)\|_{L_2(E)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell} \|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla_\Gamma(V\Phi_\ell - f)\|_{L_2(E)}^2.$$

Für markierte Elemente $E \in \mathcal{M}_\ell$ gilt $h_{\ell+1}|_E \leq q h_\ell|_E$ mit $q = 2^{-1/2} < 1$, da E zumindest geteilt wird. Elemente $E \in \mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell$ erfüllen zumindest $h_{\ell+1}|_E \leq h_\ell|_E$, sodass wir also

$$\|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla_\Gamma(V\Phi_\ell - f)\|_{L_2(E)}^2 \leq \begin{cases} q \rho_\ell(E)^2 & \text{für } E \in \mathcal{M}_\ell, \\ \rho_\ell(E)^2 & \text{für } E \in \mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell \end{cases}$$

erhalten. Aufgrund der Markierungsstrategie (5.11) gilt

$$\begin{aligned} \|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla_\Gamma(V\Phi_\ell - f)\|_{L_2(\Gamma)}^2 &\leq q \sum_{E \in \mathcal{M}_\ell} \rho_\ell(E)^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell} \rho_\ell(E)^2 = \rho_\ell^2 - (1 - q) \sum_{E \in \mathcal{M}_\ell} \rho_\ell(E)^2 \\ &\leq (1 - \theta(1 - q)) \rho_\ell^2. \end{aligned}$$

Wir setzen die letzte Abschätzung in (5.27) ein und erhalten

$$\rho_{\ell+1}^2 \leq (1 + \delta)(1 - \theta(1 - q)) \rho_\ell^2 + (1 + \delta^{-1}) \|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla_\Gamma V(\Phi_{\ell+1} - \Phi_\ell)\|_{L_2(\Gamma)}^2.$$

Nun wählen wir $\delta > 0$ klein genug, sodass $\widehat{\kappa} = (1 + \delta)(1 - (1 - q)\theta) < 1$. Zusammen mit der inversen Abschätzung für V aus (4.4a) und der Normäquivalenz $\|\cdot\|_V \simeq \|\cdot\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)}$ schließen wir auf die Schätzerreduktion

$$\rho_{\ell+1}^2 \leq \widehat{\kappa} \rho_\ell^2 + C_{\text{red}} \|\Phi_{\ell+1} - \Phi_\ell\|_V^2.$$

Laut Lemma 5.9 ist der letzte Term dann eine Nullfolge, und wir schließen gemeinsam mit der Zuverlässigkeit von ρ_ℓ und Lemma 5.11 auf $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \rho_\ell = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|\phi - \Phi_\ell\|_V = 0$, was zu zeigen war. $\square$

5.25 Lemma. *Für den Algorithmus 5.22, solve-res-dirichlet, gilt*

$$\tau_{\ell+1}^2 \leq \hat{\kappa} \tau_\ell^2 + C_{\text{red}} \left(\|(\mathbb{P}_{\ell+1} - \mathbb{P}_\ell)f\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|\Phi_{\ell+1} - \Phi_\ell\|_V^2 \right)$$

Die Konstante $0 < \hat{\kappa} < 1$ hängt nur von $0 < \theta < 1$ ab, die Konstante C_{red} zusätzlich von p , $\mathcal{E}_0$ und Γ . Insbesondere gilt Konvergenz des adaptiven Algorithmus,

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \tau_\ell = \lim_{\ell \rightarrow \infty} (\rho_\ell + \text{osc}_\ell) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|\phi - \Phi_\ell\|_V = 0.$$

Beweis. Wir benützen die Abkürzung $f_\ell := (1/2 + K)\mathbb{P}_\ell f$. Iteratives Anwenden der Dreiecksungleichung und der Youngschen Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} \tau_{\ell+1}^2 &\leq (1 + \delta) \|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla_\Gamma (V\Phi_\ell - f_\ell)\|_{L_2(\Gamma)}^2 + (1 + \delta^{-1})(1 + \tilde{\delta}) \|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla_\Gamma (f_{\ell+1} - f_\ell)\|_{L_2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + (1 + \delta^{-1})(1 + \tilde{\delta}^{-1}) \|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla_\Gamma V(\Phi_{\ell+1} - \Phi_\ell)\|_{L_2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + (1 + \delta) \|h_{\ell+1}^{1/2} (1 - \pi_{\ell+1}^p) \nabla_\Gamma f\|_{L_2(\Gamma)}^2 \end{aligned} \quad (5.28)$$

mit beliebigen $\delta, \tilde{\delta} > 0$. Wir betrachten den ersten und den vierten Term auf der rechten Seite gemeinsam. Der Operator $\pi_{\ell+1}^p$ ist die Bestapproximation in L_2 , und wie im Beweis von Lemma 5.24 erhalten wir dann

$$\|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla_\Gamma (V\Phi_\ell - f_\ell)\|_{L_2(E)}^2 + \|h_{\ell+1}^{1/2} (1 - \pi_{\ell+1}^p) \nabla_\Gamma f\|_{L_2(E)}^2 \leq \begin{cases} q\tau_\ell(E)^2 & \text{für } E \in \mathcal{M}_\ell \\ \tau_\ell(E)^2 & \text{für } E \in \mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell \end{cases}$$

mit $0 < q < 1$. Argumentieren wir wieder wie im Beweis von Lemma 5.24, erhalten wir mit der Dörfler-Markierung

$$\|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla_\Gamma (V\Phi_\ell - f_\ell)\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \|h_{\ell+1}^{1/2} (1 - \pi_{\ell+1}^p) \nabla_\Gamma f\|_{L_2(\Gamma)}^2 \leq (1 - \theta(1 - q)) \tau_\ell^2. \quad (5.29)$$

Ausserdem gilt mit der Dreiecksungleichung, der inversen Ungleichung aus Theorem 4.4 für K sowie der inversen Abschätzung aus Proposition 3.29

$$\|h_{\ell+1}^{1/2} \nabla_\Gamma (f_{\ell+1} - f_\ell)\|_{L_2(\Gamma)} \leq \max \{C_{\text{inv}}, 2C_{\text{inv}}^K\} \|(\mathbb{P}_{\ell+1} - \mathbb{P}_\ell)f\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \quad (5.30)$$

Wir setzen (5.29) und (5.30) in (5.28) ein, wenden die inverse Ungleichung aus Theorem 4.4 für V und Normäquivalenz $\|\cdot\|_V \simeq \|\cdot\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ an und erhalten

$$\begin{aligned} \tau_{\ell+1}^2 &\leq (1 + \delta) (1 - \theta(1 - q)) \tau_\ell^2 \\ &\quad + \tilde{C}^2 (1 + \delta^{-1})(1 + \tilde{\delta}) \|(\mathbb{P}_{\ell+1} - \mathbb{P}_\ell)f\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \\ &\quad + (C_{\text{eq}} C_{\text{inv}}^V)^2 (1 + \delta^{-1})(1 + \tilde{\delta}^{-1}) \|\Phi_{\ell+1} - \Phi_\ell\|_V^2, \end{aligned}$$

wobei wir $\tilde{C} := \max \{C_{\text{inv}}, 2C_{\text{inv}}^K\}$ gesetzt haben. Wir wählen $\delta > 0$ so, dass $(1 + \delta)(1 - \theta(1 - q)) < 1$ ist, demnach gilt die Schätzerreduktion. Um Lemma 5.11 anwenden zu können, bleibt also zu zeigen, dass die letzten beiden Terme der rechten Seite der Schätzerreduktion eine Nullfolge bilden. Zunächst gilt wegen

der a-priori Konvergenz der Daten aus Lemma 5.10, dass $\mathbb{P}_\ell f \rightarrow f_\infty$ in $H^{1/2}(\Gamma)$ existiert, somit ist der zweite Term bereits eine Nullfolge,

$$\|(\mathbb{P}_{\ell+1} - \mathbb{P}_\ell)f\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \rightarrow 0.$$

Wir betrachten den letzten Term: mit $\Phi_{\infty,\ell}^{\text{ex}} \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$ bezeichnen wir die Galerkinlösung des Dirichletproblems (5.9) mit rechter Seite f_∞ . Weil $\mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell) \subseteq \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_{\ell+1})$ gilt, folgt mit Lemma 5.9

$$\Phi_{\infty,\ell}^{\text{ex}} \rightarrow \phi_\infty \quad \text{in } H^{-1/2}(\Gamma).$$

Ausserdem gilt wegen der Stabilität der Galerkinmethode und der a-priori Konvergenz der Daten

$$\|\Phi_{\infty,\ell}^{\text{ex}} - \Phi_\ell\|_V \lesssim \|(1/2 + K)(f_\infty - \mathbb{P}_\ell f)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \lesssim \|f_\infty - \mathbb{P}_\ell f\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \rightarrow 0.$$

Aus diesen beiden Beobachtungen folgt unmittelbar

$$\|\phi_\infty - \Phi_\ell\|_V \leq \|\phi_\infty - \Phi_{\infty,\ell}^{\text{ex}}\|_V + \|\Phi_{\infty,\ell}^{\text{ex}} - \Phi_\ell\|_V \rightarrow 0$$

sodass also $\|\Phi_{\ell+1} - \Phi_\ell\|_V \rightarrow 0$. Lemma 5.11 besagt schließlich, dass $\tau_\ell \rightarrow 0$ für $\ell \rightarrow \infty$ und durch die Zuverlässigkeit (5.25) gilt daher auch $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|\phi - \Phi_\ell\|_V = 0$. $\square$

5.26 Lemma. *Für den Algorithmus 5.23, solve-separate-res-dirichlet, gilt*

$$\tau_{\ell+1}^2 \leq \widehat{\kappa} \tau_\ell^2 + C_{\text{red}} \left(\|(\mathbb{P}_{\ell+1} - \mathbb{P}_\ell)f\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|\Phi_{\ell+1} - \Phi_\ell\|_V^2 \right)$$

Die Konstante $0 < \widehat{\kappa} < 1$ hängt nur von $0 < \theta_1, \theta_2, \vartheta < 1$ ab, die Konstante C_{red} zusätzlich von p , $\mathcal{E}_0$ und Γ . Insbesondere gilt Konvergenz des adaptiven Algorithmus,

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \tau_\ell = \lim_{\ell \rightarrow \infty} (\rho_\ell + \text{osc}_\ell) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|\phi - \Phi_\ell\|_V = 0.$$

Beweis. Da die separate Markierungsstrategie von Algorithmus 5.23 laut Proposition 5.8 die Dörflermarkierung (5.11) nach sich zieht, folgt dies unmittelbar aus Lemma 5.25. $\square$

Es stellt sich als schwierig heraus, eine Kontraktionsgröße für den Algorithmus 5.22 **solve-res-dirichlet** zu bekommen, siehe dazu die Diskussion vor Theorem 5.29.

Für den Algorithmus 5.23 **solve-separate-res-dirichlet** ist dies aber möglich, wenn wir die Kontraktionsgröße mit der Galerkinlösung der exakten rechten Seite f definieren. Der Fehlerschätzer, den wir dazu betrachten müssen, ist der Folgende. Wir bemerken, dass dieser Schätzer nur von theoretischem Interesse ist und in einem adaptiven Algorithmus nicht berechnet werden muss.

5.27 Lemma. *Wir verwenden Algorithmus 5.23, solve-separate-res-dirichlet. In jedem Schritt betrachten wir zusätzlich*

$$\tau_{\text{ex},\ell}(E)^2 = \rho_{\text{ex},\ell}(E^2) + \text{osc}_\ell(E)^2,$$

wobei $\rho_{\text{ex},\ell}$ der Schätzer aus (5.23) ist und osc_ℓ in (5.22) definiert wurde. Dann gilt das Folgende: Die separierte Markierungsstrategie (5.12) und (5.13) für τ_ℓ impliziert Dörflermarkierung für $\tau_{\text{ex},\ell}$

$$\theta \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \tau_{\text{ex},\ell}(E)^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{M}_\ell} \tau_{\text{ex},\ell}(E)^2, \quad (5.31)$$

wobei $0 < \theta < 1$ von $\theta_1, \theta_2, \vartheta$ und C_{ex} abhängt. Ausserdem gilt die Schätzerreduktion

$$\tau_{\text{ex},\ell+1}^2 \leq \widehat{\kappa} \tau_{\text{ex},\ell}^2 + C_{\text{red}} \|\Phi_{\ell+1}^{\text{ex}} - \Phi_{\ell}^{\text{ex}}\|_V^2. \quad (5.32)$$

Die Konstante $0 < \widehat{\kappa} < 1$ hängt nur von $\theta_1, \theta_2, \vartheta$ und C_{ex} ab, die Konstante C_{red} zusätzlich von $p, \mathcal{E}_0$ und Γ .

Beweis. Im Fall $\text{osc}_{\ell}^2 \leq \vartheta \rho_{\ell}^2$ ist wegen (5.24b)

$$\tau_{\text{ex},\ell}^2 \leq C_{\text{ex}} \tau_{\ell}^2 \leq C_{\text{ex}} (1 + \vartheta) \rho_{\ell}^2. \quad (5.33)$$

Die Markierungsstrategie (5.12) und (5.24b) liefern

$$\theta_1 \rho_{\ell}^2 \leq \rho_{\ell}(\mathcal{M}_{\ell})^2 \leq C_{\text{ex}} (\rho_{\text{ex},\ell}(\mathcal{M}_{\ell})^2 + \text{osc}_{\ell}^2) \leq C_{\text{ex}} \tau_{\text{ex},\ell}(\mathcal{M}_{\ell})^2 + C_{\text{ex}} \vartheta \rho_{\ell}^2,$$

wodurch wir

$$(\theta_1 - C_{\text{ex}} \vartheta) \rho_{\ell}^2 \leq C_{\text{ex}} \tau_{\text{ex},\ell}(\mathcal{M}_{\ell})^2$$

erhalten. Setzen wir dies in die Gleichung (5.33) ein, sehen wir

$$C_{\text{ex}}^{-2} (\theta_1 - C_{\text{ex}} \vartheta) (1 + \vartheta)^{-1} \tau_{\text{ex},\ell}^2 \leq \tau_{\text{ex},\ell}(\mathcal{M}_{\ell})^2,$$

und für genügend kleines $\vartheta > 0$ erhalten wir $C_{\text{ex}}^{-2} (\theta_1 - C_{\text{ex}} \vartheta) (1 + \vartheta)^{-1} \in (0, 1)$. Ist andererseits $\text{osc}_{\ell}^2 > \vartheta \rho_{\ell}^2$, dann ist aufgrund von (5.13)

$$\begin{aligned} \theta_2 \tau_{\text{ex},\ell}^2 &\leq \theta_2 C_{\text{ex}} (\rho_{\ell}^2 + \text{osc}_{\ell}^2) \leq \theta_2 C_{\text{ex}} (1 + \vartheta^{-1}) \text{osc}_{\ell}^2 \\ &\leq C_{\text{ex}} (1 + \vartheta^{-1}) \text{osc}_{\ell}(\mathcal{M}_{\ell})^2 \leq C_{\text{ex}} (1 + \vartheta^{-1}) \tau_{\text{ex},\ell}(\mathcal{M}_{\ell})^2. \end{aligned}$$

Wir schließen also

$$\theta_2 C_{\text{ex}}^{-1} (1 + \vartheta^{-1})^{-1} \tau_{\text{ex},\ell}^2 \leq \tau_{\text{ex},\ell}(\mathcal{M}_{\ell})^2$$

und es ist $\theta_2 C_{\text{ex}}^{-1} (1 + \vartheta^{-1})^{-1} \in (0, 1)$. Mit $\theta := \min \{C_{\text{ex}}^{-2} (\theta_1 - C_{\text{ex}} \vartheta) (1 + \vartheta)^{-1}, \theta_2 C_{\text{ex}}^{-1} (1 + \vartheta^{-1})^{-1}\} < 1$ erhalten wir dann (5.31). Die Schätzerreduktion von $\tau_{\text{ex},\ell}$ folgt dann genauso wie in den Beweisen der Lemmata 5.24 und 5.25. $\square$

5.5 Gewichteter residualer Fehlerschätzer und Quasioptimalität

Zunächst bestimmen wir eine Kontraktionsgröße für den gewichteten Residualschätzer im Falle der schwach singulären Integralgleichung.

5.28 Theorem (Kontraktion für schwach singuläre Integralgleichung). *Für Algorithmus 5.21, solve-res-weaksing, gilt das Folgende: Es existieren Konstanten $0 < \lambda, \kappa < 1$, sodass der Quasi-Fehler in jedem Schritt eine Kontraktion ist, d.h.:*

$$\Delta_{\ell+1} \leq \kappa \Delta_{\ell} \quad \text{mit } \Delta_{\ell} := \|\phi - \Phi_{\ell}\|_V^2 + \lambda \rho_{\ell}^2 \simeq \rho_{\ell}^2.$$

Die Konstanten λ und κ hängen nur vom Adaptivitätsparameter θ , von $\mathcal{E}_0$, von Γ und von p ab. Insbesondere folgt daraus $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|\phi - \Phi_{\ell}\|_V = 0 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \rho_{\ell}$.

Beweis. Aufgrund der Schachtelung $\mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell) \subseteq \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_{\ell+1})$ und der Galerkinorthogonalität

$$\langle\langle \phi - \Phi_{\ell+1}, \Psi_{\ell+1} \rangle\rangle = 0 \quad \text{for all } \Psi_{\ell+1} \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_{\ell+1}),$$

gilt

$$\|\phi - \Phi_{\ell+1}\|_V^2 = \|\phi - \Phi_\ell\|_V^2 - \|\Phi_{\ell+1} - \Phi_\ell\|_V^2.$$

Die Fehlerschätzerreduktion aus Lemma 5.24 lautet

$$\rho_{\ell+1}^2 \leq \widehat{\kappa} \rho_\ell^2 + C_{\text{red}} \|\Phi_{\ell+1} - \Phi_\ell\|_V^2. \quad (5.34)$$

Wir addieren die Galerkinorthogonalität und die Fehlerschätzerreduktion, wobei wir die zweite mit einem $0 < \lambda < 1$ gewichten, welches $\lambda C_{\text{red}} < 1$ erfüllt, und erhalten

$$\begin{aligned} \Delta_{\ell+1} &= \|\phi - \Phi_{\ell+1}\|_V^2 + \lambda \rho_{\ell+1}^2 \leq \|\phi - \Phi_\ell\|_V^2 + \lambda \widehat{\kappa} \rho_\ell^2 + (\lambda C_{\text{red}} - 1) \|\Phi_{\ell+1} - \Phi_\ell\|_V^2 \\ &\leq \|\phi - \Phi_\ell\|_V^2 + \lambda \widehat{\kappa} \rho_\ell^2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$, spalten einen Teil des Galerkinfehlers ab und benutzen die Zuverlässigkeit von ρ_ℓ aus Lemma 5.19,

$$\|\phi - \Phi_\ell\|_V^2 + \lambda \widehat{\kappa} \rho_\ell^2 \leq (1 - \lambda \varepsilon) \|\phi - \Phi_\ell\|_V^2 + \lambda (\widehat{\kappa} + C_{\text{rel}}^2 \varepsilon) \rho_\ell^2 \leq \kappa \Delta_\ell, \quad (5.36)$$

wobei $\kappa := \max\{1 - \lambda \varepsilon, \widehat{\kappa} + C_{\text{rel}}^2 \varepsilon\}$ ist. Da $\lambda > 0$ und $0 < \widehat{\kappa} < 1$ gilt, können wir $\varepsilon > 0$ klein genug wählen, um $0 < \kappa < 1$ zu erhalten. Die Kombination von (5.35) und (5.36) liefert die Kontraktionseigenschaft. $\square$

Im Falle des Dirichletproblems beinhaltet die Schätzerreduktion aus Lemma 5.25 den Term $\|\mathbb{P}_{\ell+1} f - \mathbb{P}_\ell f\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$, der dann auch in der Kontraktionsgröße auftauchen würde. Das Problem dabei ist, dass wir im Allgemeinen keine Orthogonalitätseigenschaften von $\mathbb{P}_\ell$ zur Verfügung haben, um einen solchen Term zu kontrollieren. Wir gehen deshalb anders vor und verwenden die Kontraktionseigenschaft von $\tau_{\text{ex},\ell}$ aus Lemma 5.27, das solche Terme nicht beinhaltet. Der Beweis der folgenden Aussage überträgt sich wortwörtlich von Lemma 5.28.

5.29 Theorem (Kontraktion für Dirichletproblem). *Für Algorithmus 5.23, solve-separate-res-dirichlet, gilt das Folgende: Es existieren Konstanten $0 < \lambda, \kappa < 1$, sodass der Quasi-Fehler des ungestörten Problems in jedem Schritt eine Kontraktion ist, d.h.:*

$$\Delta_{\text{ex},\ell+1} \leq \kappa \Delta_{\text{ex},\ell} \quad \text{mit } \Delta_{\text{ex},\ell} := \|\phi - \Phi_\ell^{\text{ex}}\|_V^2 + \lambda \tau_{\text{ex},\ell}^2 \simeq \tau_{\text{ex},\ell}^2.$$

Die Konstanten λ und κ hängen nur vom Adaptivitätsparameter θ , von $\mathcal{E}_0$, von Γ , von p und von C_{ex} ab. $\blacksquare$

Wir zeigen nun die diskrete lokale Zuverlässigkeit für den gewichteten Residualschätzer.

5.30 Lemma (Diskrete lokale Zuverlässigkeit). *Für ein beliebiges grobes Gitter $\mathcal{E}_0$ seien zwei Verfeinerungen $\mathcal{E}_\star = \text{refine}(\mathcal{E}_0)$ und $\mathcal{E}_\ell = \text{refine}(\mathcal{E}_0)$ gegeben, sodass $\mathcal{E}_\star$ feiner ist als $\mathcal{E}_\ell$, $\mathcal{E}_\star = \text{refine}(\mathcal{E}_\ell)$. Es bezeichnen $\Phi_\star \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\star)$ und $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$ die Galerkinlösungen der schwach singulären Integralgleichung (5.8). Für die verfeinerten Elementen $\mathcal{R}_\ell = \mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{E}_\star$ gilt*

$$\#\omega(\mathcal{R}_\ell) \leq C'_{\text{dlr}} \#\mathcal{R}_\ell$$

und

$$\|\Phi_\ell - \Phi_\star\|_V \leq C_{\text{dlr}} \left(\sum_{E \in \omega(\mathcal{R}_\ell)} \rho_\ell(E)^2 \right)^{1/2}, \quad (5.37)$$

wobei $\rho_\ell(E)$ wie in (5.21) definiert ist. Die Konstanten $C_{\text{dlr}}, C'_{\text{dlr}} > 0$ hängen nur von p, Γ und $\mathcal{E}_0$ ab. Die Aussage gilt auch mit den Galerkinlösungen $\Phi_\star^{\text{ex}}$ und Φ_ℓ^{ex} des Dirichletproblems (5.9) und $\rho_{\text{ex},\ell}$ aus (5.22).

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur im Falle der schwach singulären Gleichung, da man für das Dirichletproblem analog argumentieren kann. Die Abschätzung $\#\omega(\mathcal{R}_\ell) \leq C'_{\text{dlr}} \#\mathcal{R}_\ell$ gilt, da wir aufgrund von Lemma 3.4 mit γ -formregulären Gittern arbeiten. Daher ist die Anzahl der Elemente in einem Patch uniform beschränkt. Wir zeigen nun (5.37). Aus $\Phi_\star - \Phi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\star)$ folgt

$$\|\Phi_\star - \Phi_\ell\|_V^2 \lesssim \langle V(\Phi_\star - \Phi_\ell), \Phi_\star - \Phi_\ell \rangle = \langle f - V\Phi_\ell, \Phi_\star - \Phi_\ell \rangle.$$

Mit $\eta_z \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ bezeichnen wir die Hutfunktion für den Knoten $z \in \mathcal{N}_\ell$. Die Menge aller Knoten, die in den verfeinerten Elementen liegen, bezeichnen wir mit $\mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}} := \mathcal{N}_\ell \cap \left(\bigcup \mathcal{R}_\ell \right)$. Zusätzlich definieren wir die Schicht an Elementen, die um die verfeinerten Elemente liegen, als $S_\ell := \omega(\mathcal{R}_\ell) \setminus \mathcal{R}_\ell$. Wir haben also eine disjunkte Zerlegung

$$\omega(\mathcal{R}_\ell) = \mathcal{R}_\ell \dot{\cup} S_\ell \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_\ell = \mathcal{R}_\ell \dot{\cup} (\mathcal{E}_\ell \setminus \omega(\mathcal{R}_\ell)) \dot{\cup} S_\ell$$

Nun definieren wir den Operator $m_\ell : \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\star) \rightarrow \mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$ elementweise auf $\mathcal{E}_\ell$ durch

$$m_\ell(\Psi_\star)|_E := \begin{cases} 0 & \text{for } E \in \mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{E}_\star, \\ \Psi_\star|_E & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \langle f - V\Phi_\ell, \Psi_\star \rangle_\Gamma &= \langle f - V\Phi_\ell, (1 - m_\ell)\Psi_\star \rangle_\Gamma \\ &= \left\langle \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}}} \eta_z (f - V\Phi_\ell), (1 - m_\ell)\Psi_\star \right\rangle_\Gamma \\ &= \left\langle \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}}} \eta_z (f - V\Phi_\ell), \Psi_\star \right\rangle_\Gamma - \left\langle \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}}} \eta_z (f - V\Phi_\ell), \Psi_\star|_{\bigcup S_\ell} \right\rangle_\Gamma. \end{aligned}$$

Die erste Gleichheit folgt aus der Galerkin-Orthogonalität auf $\mathcal{P}^p(\mathcal{E}_\ell)$, die zweite Gleichheit aus $\text{supp}((1 - m_\ell)\Psi_\star) \subseteq \mathcal{R}_\ell$. Die dritte Gleichheit folgt aus der Definition von m_ℓ . Wir schließen

$$\begin{aligned} \langle f - V\Phi_\ell, \Psi_\star \rangle_\Gamma &\leq \left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}}} \eta_z (f - V\Phi_\ell) \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|\Psi_\star\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\quad + \|h_\ell^{-1/2} \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}}} \eta_z (f - V\Phi_\ell)\|_{L^2(\Gamma)} \|h_\star^{1/2} \Psi_\star\|_{L^2(\bigcup S_\ell)} \\ &\leq \left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}}} \eta_z (f - V\Phi_\ell) \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|\Psi_\star\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\quad + \|h_\ell^{-1/2} \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}}} \eta_z (f - V\Phi_\ell)\|_{L^2(\Gamma)} \|h_\star^{1/2} \Psi_\star\|_{L^2(\Gamma)} \end{aligned} \quad (5.38)$$

wobei wir $h_\ell = h_\star$ auf S_ℓ ausnutzen. Die inverse Ungleichung aus Proposition 3.28 liefert

$$\langle f - V\Phi_\ell, \Psi_\star \rangle_\Gamma \lesssim \left(\left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}}} \eta_z(f - V\Phi_\ell) \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|h_\ell^{-1/2} \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}}} \eta_z(f - V\Phi_\ell)\|_{L^2(\Gamma)} \right) \|\Psi_\star\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

Der erste Term auf der rechten Seite kann analog zu [CMS01] abgeschätzt werden: Zuerst zerlegen wir die Menge der Knoten $\mathcal{N}_\ell = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{N}_\ell^i$, wobei die $\mathcal{N}_\ell^i$ paarweise disjunkt sind und $\text{supp}(\eta_{z_1}) \cap \text{supp}(\eta_{z_2}) = \emptyset$ für alle $z_1 \in \mathcal{N}_\ell^i, z_2 \in \mathcal{N}_\ell^j$ mit $i \neq j$ gilt. Mit $\omega_z := \text{supp}(\eta_z)$ folgt aus [CMS01, Lemma 2.1]

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}}} \eta_z(f - V\Phi_\ell) \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 &\lesssim \sum_{i=1}^m \left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}} \cap \mathcal{N}_\ell^i} \eta_z(f - V\Phi_\ell) \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \\ &\lesssim \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}}} \|\eta_z(f - V\Phi_\ell)\|_{H^{1/2}(\omega_z)}^2. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Analog zu [CMS01, Theorem 3.2] erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\eta_z(f - V\Phi_\ell)\|_{H^{1/2}(\omega_z)}^2 &\leq \|\eta_z(f - V\Phi_\ell)\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \\ &\lesssim \|\eta_z(f - V\Phi_\ell)\|_{L^2(\omega_z)} \|\eta_z(f - V\Phi_\ell)\|_{H^1(\omega_z)} \\ &\lesssim h_\ell(1 + h_\ell^2)^{1/2} \|\nabla_\Gamma(\eta_z(f - V\Phi_\ell))\|_{L^2(\omega_z)}^2, \end{aligned} \quad (5.40)$$

wobei die letzte Abschätzung aus der Friedrichs'schen Ungleichung folgt. Aus $\langle V(\Phi_\star - \Phi_\ell), \chi_E \rangle = 0$ für $\chi_E \in \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ und Poincaré's Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\nabla(\eta_z(f - V\Phi_\ell))\|_{L^2(\omega_z)} &\leq \|(\nabla\eta_z)(f - V\Phi_\ell)\|_{L^2(\omega_z)} + \|\eta_z\nabla(f - V\Phi_\ell)\|_{L^2(\omega_z)} \\ &\lesssim \|h_\ell^{-1}(f - V\Phi_\ell)\|_{L^2(\omega_z)} + \|\nabla(f - V\Phi_\ell)\|_{L^2(\omega_z)} \\ &\lesssim \|\nabla(f - V\Phi_\ell)\|_{L^2(\omega_z)}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Die Abschätzungen (5.39)–(5.41) ergeben

$$\left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}}} \eta_z(f - V\Phi_\ell) \right\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \lesssim \|h_\ell^{1/2} \nabla(f - V\Phi_\ell)\|_{L^2(\omega(\mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}}))}^2 \quad (5.42)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite von (5.38) wird analog abgeschätzt,

$$\begin{aligned} \|h_\ell^{-1/2} \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}}} \eta_z(f - V\Phi_\ell)\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\lesssim \sum_{i=1}^m \left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}} \cap \mathcal{N}_\ell^i} h_\ell^{-1/2} \eta_z(f - V\Phi_\ell) \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\lesssim \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}}} \text{diam}(\omega_z)^{-1} \|\eta_z(f - V\Phi_\ell)\|_{L^2(\omega_z)}^2 \\ &\lesssim \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}}} \|h_\ell^{1/2} \nabla(\eta_z(f - V\Phi_\ell))\|_{L^2(\omega_z)}^2. \end{aligned}$$

Aus (5.41) folgt

$$\|h_\ell^{-1/2} \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell^{\mathcal{R}}} \eta_z(f - V\Phi_\ell)\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim \|h_\ell^{1/2} \nabla(f - V\Phi_\ell)\|_{L^2(\omega(\mathcal{R}_\ell))}. \quad (5.43)$$

Wir setzen $\Psi_\star = \Phi_\star - \Phi_\ell$. Einsetzen von (5.42) und (5.43) in (5.38) liefert dann

$$\|\Phi_\star - \Phi_\ell\|_V^2 = \langle f - V\Phi_\ell, \Psi_\star \rangle \lesssim \|h_\ell^{1/2} \nabla(f - V\Phi_\ell)\|_{L^2(\omega(\mathcal{R}_\ell))} \|\Phi_\star - \Phi_\ell\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)}.$$

□

Die Kontraktionseigenschaften aus den Theoremen 5.28 und 5.29 stellen unter gegebenen Markierungsstrategien sicher, dass die Größen Δ_ℓ kontrahierend sind. Es ist heuristisch klar, dass für einen effizienten Algorithmus auch die umgekehrte Aussage gelten muss, denn sonst wären die Markierungsstrategien eine schlechte Wahl. Wir formulieren dies Heuristik in den folgenden beiden Lemmata.

5.31 Lemma (Optimalität des Dörfler-Markings für schwach singuläre Gleichung). *Es gibt eine Konstante $0 < \theta_\star < 1$, sodass das Folgende gilt: Für jede Verfeinerung $\mathcal{E}_\star$ von $\mathcal{E}_\ell$, d.h. $\mathcal{E}_\star = \text{refine}(\mathcal{E}_\ell)$, gilt*

$$\rho_\star^2 \leq \kappa_\star \rho_\ell^2 \implies \theta \rho_\ell^2 \leq \sum_{E \in \omega(\mathcal{R}_\ell)} \rho_\ell(E)^2$$

für alle $0 < \theta < \theta_\star$ und $\kappa_\star := \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\theta}{\theta_\star}\right) \in (0, 1/2)$. Die Konstante $\theta_\star$ hängt von Γ , $\mathcal{E}_0$ und p ab.

Beweis. Auf $\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star$ gilt $h_\ell = h_\star$. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star} \rho_\ell(E)^2 &= \|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma(V\Phi_\ell - f)\|_{L_2(\cup \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)}^2 \\ &\leq 2\|h_\star^{1/2} \nabla_\Gamma V(\Phi_\ell - \Phi_\star)\|_{L_2(\cup \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)}^2 + 2 \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star} \rho_\star(E)^2 \\ &\leq 2(C_{\text{inv}}^V C_{\text{eq}})^2 \|\Phi_\ell - \Phi_\star\|_V^2 + 2 \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star} \rho_\star(E)^2 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die inverse Ungleichung aus Theorem 4.4 für V und Normäquivalenz $\|\cdot\|_V \simeq \|\cdot\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)}$ angewendet haben. Wir schließen

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star} \rho_\ell(E)^2 - 2 \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star} \rho_\star(E)^2 \leq 2(C_{\text{inv}}^V C_{\text{eq}})^2 \|\Phi_\ell - \Phi_\star\|_V^2, \quad (5.44)$$

dies führt schließlich auf

$$\begin{aligned} \rho_\ell^2 - 2\rho_\star^2 &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{E}_\star} \rho_\ell(E)^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star} \rho_\ell(E)^2 - 2 \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star} \rho_\star(E)^2 \\ &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{E}_\star} \rho_\ell(E)^2 + 2(C_{\text{inv}}^V C_{\text{eq}})^2 \|\Phi_\ell - \Phi_\star\|_V^2 \\ &\leq (1 + 2(C_{\text{inv}}^V C_{\text{eq}} C_{\text{dlr}})^2) \sum_{E \in \omega(\mathcal{R}_\ell)} \rho_\ell(E)^2, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Abschätzung die diskrete lokale Zuverlässigkeit aus Lemma 5.30 verwendet haben. Aufgrund der Wahl von $\kappa_\star$ gilt

$$(1 - 2\kappa_\star)\rho_\ell^2 = \rho_\ell^2 - 2\kappa_\star\rho_\ell^2 \leq \rho_\ell^2 - 2\rho_\star^2 \leq (1 + 2(C_{\text{inv}}^V C_{\text{eq}} C_{\text{dlr}})^2) \sum_{E \in \omega(\mathcal{R}_\ell)} \rho_\ell(E)^2.$$

Setzen wir

$$\theta_\star := \frac{1}{1 + 2(C_{\text{inv}}^V C_{\text{eq}} C_{\text{dlr}})^2}$$

dann gilt $0 < \theta_\star < 1$ und wir erhalten das Gewünschte. $\square$

5.32 Lemma (Optimalität der separaten Markierung für Dirichletproblem). *Für beliebiges $1 < \theta_2 < 0$ gibt es Konstanten $0 < \theta_{\star,1}, \vartheta_\star < 1$, sodass das Folgende gilt: Für jede Verfeinerung $\mathcal{E}_\star$ von $\mathcal{E}_\ell$, d.h. $\mathcal{E}_\star = \text{refine}(\mathcal{E}_\ell)$, gilt*

$$\tau_{\text{ex},\star}^2 \leq \kappa_\star \tau_{\text{ex},\ell}^2 \implies \begin{cases} \sum_{E \in \omega(\mathcal{R}_\ell)} \rho_\ell(E)^2 \geq \theta_1 \rho_\ell^2 & \text{falls } \text{osc}_\ell^2 \leq \vartheta \rho_\ell^2 \\ \sum_{E \in \omega(\mathcal{R}_\ell)} \text{osc}_\ell(E)^2 \geq \theta_2 \text{osc}_\ell^2 & \text{falls } \text{osc}_\ell^2 > \vartheta \rho_\ell^2. \end{cases} \quad (5.45)$$

für alle $\theta_1 \in (0, \theta_{\star,1})$, $\vartheta \in (0, \vartheta_\star)$ und $\kappa_\star = \frac{1-\theta_2}{C_{\text{ex}}(1+\vartheta-1)}$.

Beweis. Auf $\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star$ gilt $h_\ell = h_\star$, woraus mit Bestapproximationseigenschaft von π^p für die Oszillationsterme

$$\|h_\star^{1/2}(1 - \pi_\star^p)\nabla_\Gamma f\|_{L_2(\cup \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)}^2 = \|h_\ell^{1/2}(1 - \pi_\ell^p)\nabla_\Gamma f\|_{L_2(\cup \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)}^2$$

folgt. Es gilt daher

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star} \tau_{\text{ex},\ell}(E)^2 &= \|h_\ell^{1/2}\nabla_\Gamma(V\Phi_\ell^{\text{ex}} - f)\|_{L_2(\cup \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)}^2 + \|h_\star^{1/2}(1 - \pi_\star^p)\nabla_\Gamma f\|_{L_2(\cup \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)}^2 \\ &\leq 2\|h_\star^{1/2}\nabla_\Gamma V(\Phi_\ell^{\text{ex}} - \Phi_\star^{\text{ex}})\|_{L_2(\cup \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)}^2 \\ &\quad + 2\|h_\star^{1/2}\nabla_\Gamma(V\Phi_\star^{\text{ex}} - f)\|_{L_2(\cup \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)}^2 + \text{osc}_\star(\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)^2, \end{aligned}$$

und wir erhalten mit der inversen Abschätzung (4.3a) und Normäquivalenz

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star} \tau_{\text{ex},\ell}(E)^2 - 2 \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star} \tau_{\text{ex},\star}(E)^2 \leq 2(C_{\text{inv}}^V C_{\text{eq}})^2 \|\Phi_\ell^{\text{ex}} - \Phi_\star^{\text{ex}}\|_V^2.$$

Die letzte Abschätzung entspricht gerade (5.44) im Beweis von Lemma 5.31, wodurch wir weiter vorgehen können wie dort und schließlich die Optimalität der Dörfler-Markierung

$$\tau_{\text{ex},\star}^2 \leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\theta}{\theta_\star}\right) \tau_{\text{ex},\ell}^2 \implies \theta \tau_{\text{ex},\ell}^2 \leq \sum_{E \in \omega(\mathcal{R}_\ell)} \tau_{\text{ex},\ell}(E)^2 \quad (5.46)$$

für alle $0 < \theta < \theta_*$ erhalten. Sei nun $\theta_2 \in (0, 1)$ beliebig, aber fest. Wir wählen $\vartheta_* \in (0, 1)$ so klein, dass

$$\vartheta_* < \frac{\theta_*}{2} C_{\text{ex}}^{-2} \quad \text{und} \quad \kappa := \frac{1 - \theta_2}{C_{\text{ex}}(1 + \vartheta_*^{-1})} \in (0, \frac{1}{4}).$$

Aus (5.46) erhalten wir durch diese Wahl von κ

$$\tau_{\text{ex},*}^2 \leq \kappa \tau_{\text{ex},\ell}^2 \implies \theta \tau_{\text{ex},\ell}^2 \leq \sum_{E \in \omega(\mathcal{R}_\ell)} \tau_{\text{ex},\ell}(E)^2 \quad (5.47)$$

mit einem θ , welches $\theta_*/2 \leq \theta < \theta_*$ erfüllt. Wir setzen

$$\theta_{*,1} := C_{\text{ex}}^{-2} \theta - \vartheta_*$$

und bemerken $\theta_{*,1} \in (0, 1)$.

Nun sei $\vartheta \leq \vartheta_*$ und $\theta_1 \leq \theta_{*,1}$. Wir definieren

$$\kappa_* := \frac{1 - \theta_2}{C_{\text{ex}}(1 + \vartheta^{-1})},$$

und wegen $\vartheta < \vartheta_*$ gilt auch $\kappa_* < \kappa$. Wir können nun (5.45) zeigen. Dazu sei also $\tau_{\text{ex},*}^2 \leq \kappa_* \tau_{\text{ex},\ell}^2$. Da $\kappa_* < \kappa$ gilt, erhalten wir aus (5.47)

$$\theta \tau_{\text{ex},\ell}^2 \leq \sum_{E \in \omega(\mathcal{R}_\ell)} \tau_{\text{ex},\ell}(E)^2. \quad (5.48)$$

Ist die Bedingung $\text{osc}_\ell^2 \leq \vartheta \rho_\ell^2$ erfüllt, so liefert zweimalige Anwendung von (5.24b) und (5.48)

$$\theta \rho_\ell^2 \leq C_{\text{ex}} \theta \tau_{\text{ex},\ell}^2 \leq C_{\text{ex}} \sum_{E \in \omega(\mathcal{R}_\ell)} \tau_{\text{ex},\ell}(E)^2 \leq C_{\text{ex}}^2 \left(\sum_{E \in \omega(\mathcal{R}_\ell)} \rho_\ell(E)^2 + \text{osc}_\ell^2 \right) \leq C_{\text{ex}}^2 \left(\sum_{E \in \omega(\mathcal{R}_\ell)} \rho_\ell(E)^2 + \vartheta \rho_\ell^2 \right),$$

woraus wir

$$(C_{\text{ex}}^{-2} \theta - \vartheta) \rho_\ell^2 \leq \sum_{E \in \omega(\mathcal{R}_\ell)} \rho_\ell(E)^2$$

schließen können. Aufgrund der Definition von $\theta_{*,1}$ erhalten wir wegen $\vartheta < \vartheta_*$ somit

$$\theta_1 \rho_\ell^2 \leq \theta_{*,1} \rho_\ell^2 < \sum_{E \in \omega(\mathcal{R}_\ell)} \rho_\ell(E)^2.$$

Ist andererseits die Bedingung $\text{osc}_\ell^2 \geq \vartheta \rho_\ell^2$ erfüllt, so ist

$$\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_*} \text{osc}_\ell(E)^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_*} \text{osc}_*(E)^2 \leq \tau_{\text{ex},*}^2 \leq \kappa_* \tau_{\text{ex},\ell}^2 \leq \kappa_* C_{\text{ex}} (\rho_\ell^2 + \text{osc}_\ell^2) \leq \kappa_* C_{\text{ex}} (1 + \vartheta^{-1}) \text{osc}_\ell^2$$

Aufgrund der Definition von κ_* ist dies äquivalent zu

$$\theta_2 \text{osc}_\ell^2 \leq \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{E}_*} \text{osc}_\ell(E)^2 \leq \sum_{E \in \omega(\mathcal{R}_\ell)} \text{osc}_\ell(E)^2,$$

womit der Beweis abgeschlossen ist. $\square$

Wir definieren nun die Approximationsklassen, für deren Elemente die vorgestellten adaptiven Algorithmen quasi-optimal konvergieren.

5.33 Definition (Approximationsklassen für adaptive Algorithmen). Es sei $\mathcal{E}_0$ ein beliebiges Gitter auf $\Gamma \subseteq \partial\Omega$. Wir definieren für $s > 0$

$$|\phi|_s := \sup_{N>0} N^s \inf_{\mathcal{E}_* \in \mathbb{T}_N} \rho_*,$$

wobei ρ_* den Fehlerschätzer (5.21) auf dem Gitter $\mathcal{E}_*$ bezeichnet. Wir die Approximationsklasse $\mathbb{A}_s$ durch

$$\phi \in \mathbb{A}_s : \Longleftrightarrow |\phi|_s < \infty.$$

Weiters definieren wir

$$|\phi, f|_s := \sup_{N>0} N^s \inf_{\mathcal{E}_* \in \mathbb{T}_N} \tau_*,$$

wobei $\tau_*^2 := \rho_*^2 + \text{osc}_*^2$ mit Schätzer und Oszillationen aus (5.22) ist. Dann definieren wir die Approximationsklasse $\mathbb{A}_s$ durch

$$(\phi, f) \in \mathbb{A}_s : \Longleftrightarrow |\phi, f|_s < \infty.$$

Nun können wir die quasi-optimale Konvergenzrate für den gewichteten Residualschätzer beweisen.

5.34 Theorem. *Wir verwenden Algorithmus 5.21, solve-res-weaksing, zur Lösung der schwach singulären Integralgleichung 5.6. Dann existiert eine Konstante $0 < \theta_* < 1$, sodass für alle Parameter $0 < \theta < \theta_*$ gilt: Die Galerkinlösungen Φ_ℓ und die Gitter $\mathcal{E}_\ell$, die von Algorithmus 5.21 erzeugt werden, erfüllen*

$$C_{\text{rel}}^{-1} \|\phi - \Phi_\ell\| \leq \rho_\ell \leq C_{\text{opt}} |\phi|_s (\#\mathcal{E}_\ell - \#\mathcal{E}_0)^{-s}, \quad (5.49)$$

falls $\phi \in \mathbb{A}_s$ ist für $s > 0$. Die Konstante C_{opt} hängt nur von θ, s, p und dem groben Gitter $\mathcal{E}_0$ ab.

Beweis. Wir setzen $\varepsilon^2 := \delta \rho_\ell^2$ mit einem $0 < \delta < 1$, welches wir später wählen werden. Wegen $\phi \in \mathbb{A}_s$ können wir ein Gitter $\mathcal{E}_\varepsilon$ wählen, sodass

$$\#\mathcal{E}_\varepsilon - \#\mathcal{E}_0 \leq |\phi|_s^{1/s} \varepsilon^{-1/s} \quad \text{und} \quad \rho_\varepsilon^2 \leq \varepsilon^2. \quad (5.50)$$

Wir betrachten den Overlay $\mathcal{E}_* := \mathcal{E}_\ell \oplus \mathcal{E}_\varepsilon$. Es gilt

$$\begin{aligned} \rho_*^2 &= \|h_*^{1/2} \nabla_\Gamma (V\Phi_* - f)\|_{L_2(\Gamma)}^2 \\ &\leq 2 \|h_*^{1/2} \nabla_\Gamma (V\Phi_\varepsilon - f)\|_{L_2(\Gamma)}^2 + 2 \|h_*^{1/2} \nabla_\Gamma V(\Phi_* - \Phi_\varepsilon)\|_{L_2(\Gamma)}^2 \\ &\leq 2\rho_\varepsilon^2 + 2(C_{\text{inv}}^V)^2 \|\Phi_* - \Phi_\varepsilon\|_V^2 \\ &\leq 2 \left(1 + (C_{\text{inv}}^V C_{\text{ex}} C_{\text{eq}})^2 \right) \rho_\varepsilon^2, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die inverse Ungleichung (4.3a) für V angewendet haben. Aufgrund von (5.50) und der Wahl von ε folgt

$$\rho_\star^2 \leq 2 \left(1 + (C_{\text{inv}}^V C_{\text{ex}} C_{\text{eq}})^2 \right) \delta \rho_\ell^2.$$

Nun wählen wir $0 < \delta < 1$ so, dass $\rho_\star^2 \leq \kappa_\star \rho_\ell^2$ mit $\kappa_\star$ aus Lemma 5.31 gilt, und schließen mit diesem Lemma

$$\theta \rho_\ell^2 \leq \sum_{E \in \omega(\mathcal{R}_\ell)} \rho_\ell(E)^2.$$

Da aber $\mathcal{M}_\ell$ als minimale Menge mit dieser Eigenschaft gewählt wird, sehen wir

$$\#\mathcal{M}_\ell \leq \#\omega(\mathcal{R}_\ell) \leq C'_{\text{dlr}} \#\mathcal{R}_\ell \leq C'_{\text{dlr}} (\#\mathcal{E}_\star - \#\mathcal{E}_\ell) \leq C'_{\text{dlr}} (\#\mathcal{E}_\varepsilon - \#\mathcal{E}_0),$$

woraus wir mit (5.50) und der Wahl von ε die Abschätzung

$$\#\mathcal{M}_\ell \leq C'_{\text{dlr}} |\phi|_s^{1/s} \varepsilon^{-1/s} \leq C'_{\text{dlr}} |\phi|_s^{1/s} \delta^{-1/(2s)} \rho_\ell^{-1/s}$$

erhalten. Wegen

$$\rho_\ell^{-1/s} \leq \frac{\Delta^{-1/(2s)}}{(C_{\text{rel}}^2 + \lambda)^{-1/(2s)}}$$

gilt also

$$\#\mathcal{M}_\ell \lesssim |\phi|_s^{1/s} \Delta^{-1/(2s)}.$$

Wir verwenden Lemma 3.14 und setzen obige Abschätzung ein, um

$$\#\mathcal{E}_\ell - \mathcal{E}_0 \leq C_{\text{nvb}} \sum_{j=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_j \lesssim |\phi|_s^{1/s} \sum_{j=0}^{\ell-1} \Delta_j^{-1/(2s)}$$

zu erhalten. Induktives Anwenden von Theorem 5.28 ergibt $\Delta_\ell \leq \kappa^{\ell-j} \Delta_j$ und somit

$$\Delta_j^{-1/(2s)} \leq \kappa^{(\ell-j)/(2s)} \Delta_\ell^{-1/(2s)}.$$

Aufgrund der Konvergenz der geometrischen Reihe ergibt sich

$$\#\mathcal{E}_\ell - \mathcal{E}_0 \lesssim |\phi|_s^{1/s} \Delta_\ell^{-1/(2s)} \sum_{j=0}^{\ell-1} \kappa^{(\ell-j)/(2s)} \leq C'_{\text{dlr}} |\phi|_s^{1/s} \left(\frac{1}{1 - \kappa^{1/(2s)}} - 1 \right) \Delta_\ell^{-1/(2s)},$$

beziehungsweise $\Delta_\ell^{1/2} \lesssim |\phi|_s (\#\mathcal{E}_\ell - \#\mathcal{E}_0)^{-s}$ mit einer Konstanten, die nur von θ , s , p und $\mathcal{E}_0$ abhängt. Laut Theorem 5.28 gilt damit auch $\rho_\ell \leq C_{\text{opt}} C_{\text{nvb}}^s |\phi|_s (\#\mathcal{E}_\ell - \#\mathcal{E}_0)^{-s}$ mit einer Konstanten C_{opt} , die nur von θ , s , p und $\mathcal{E}_0$ abhängt. Dies zeigt die zweite Abschätzung in (5.49). Die erste folgt aus der Zuverlässigkeit des Schätzers ρ_ℓ aus Lemma 5.19. $\square$

5.35 Theorem. *Wir verwenden Algorithmus 5.23, solve-separate-res-dirichlet, zur Lösung des Dirichletproblems 5.7. Für beliebiges $0 < \theta_2 < 1$ existieren Konstanten $0 < \theta_{\star,1}, \vartheta_{\star} < 1$, sodass für alle Parameter $0 < \theta_1 < \theta_{\star,1}$ und $0 < \vartheta < \vartheta_{\star}$ gilt: Die Galerkinlösungen Φ_ℓ und die Gitter $\mathcal{E}_\ell$, die von Algorithmus 5.23 erzeugt werden, erfüllen*

$$C_{\text{rel}}^{-1} \|\phi - \Phi_\ell\| \leq \tau_\ell \leq C_{\text{opt}} |\phi, f|_{\text{ex},s} (\#\mathcal{E}_\ell - \#\mathcal{E}_0)^{-s}, \quad (5.51)$$

falls $(\phi, f) \in \mathbb{A}_s$ ist für $s > 0$. Die Konstante C_{opt} hängt nur von θ, s, p und $\mathcal{E}_0$ ab. Hier ist

$$|\phi, f|_{\text{ex},s} := \sup_{N>0} N^s \inf_{\mathcal{E}_\star \in \mathbb{T}_N} \tau_{\text{ex},\star}.$$

Beweis. Die erste Abschätzung in (5.51) folgt aus der Zuverlässigkeit (5.25), der Rest des Beweises beschäftigt sich deshalb nur mit der zweiten Abschätzung. Da $(\phi, f) \in \mathbb{A}_s$ ist, gilt wegen (5.24b) auch $|\phi, f|_{\text{ex},s} < \infty$. Gehen wir analog dem Beweis von Theorem 5.34 vor, so finden wir ein Gitter $\mathcal{E}_\star := \mathcal{E}_\varepsilon \oplus \mathcal{E}_\ell$ mit $\tau_{\text{ex},\star}^2 \leq \kappa_\star \tau_{\text{ex},\ell}^2$ mit $\kappa_\star$ aus Lemma 5.32 und

$$\#\mathcal{R}_\ell \leq \#\mathcal{E}_\star - \#\mathcal{E}_\ell \leq \#\mathcal{E}_\varepsilon - \#\mathcal{E}_0 \leq |\phi, f|_{\text{ex},s}^{1/s} \delta^{-1/(2s)} \tau_{\text{ex},\ell}^{-1/s}.$$

Wegen Lemma 5.32 erfüllt $\omega(\mathcal{R}_\ell)$ die separierte Markierungsstrategie - weil aber $\mathcal{M}_\ell$ als Menge kleinster Kardinalität mit dieser Eigenschaft gewählt wird, ist dann

$$\#\mathcal{M}_\ell \leq \#\omega(\mathcal{R}_\ell) \leq C'_{\text{dlr}} |\phi, f|_{\text{ex},s}^{1/s} \delta^{-1/(2s)} \tau_{\text{ex},\ell}^{-1/s}.$$

Wir erhalten also wie im Beweis von Theorem 5.34 $\Delta_{\text{ex},\ell}^{1/2} \lesssim C_{\text{nvb}}^s |\phi, f|_{\text{ex},s} (\#\mathcal{E}_\ell - \#\mathcal{E}_0)^{-s}$. Mit den Abschätzungen (5.24b) und $\Delta_{\text{ex},\ell} \simeq \tau_{\text{ex},\ell}^2$ erhalten wir damit auch $\tau_\ell \lesssim |\phi, f|_{\text{ex},s} (\#\mathcal{E}_\ell - \#\mathcal{E}_0)^{-s}$, was zu zeigen war. $\square$

Kapitel 6

h -Adaptivität für die hypersinguläre Integralgleichung

In diesem Kapitel entwickeln wir die Theorie zur Konvergenz und Quasioptimalität von adaptiven Algorithmen zur Lösung der hypersingulären Integralgleichung

$$Wu = g$$

mit dem hypersingulären Randintegraloperator W aus (4.1). Wir gehen analog vor wie beim Einfachschichtpotential. Da viele der Aussagen sich fast wortwörtlich reproduzieren lassen (modulo der Wahl der richtigen inversen Ungleichungen und Approximationsaussagen aus den vorigen Kapiteln), werden wir nicht alle Beweise angeben, sondern nur die, die sich in der Beweisführung von ihren Gegenstücken unterscheiden. Zu Beginn führen wir die zu lösenden Gleichungen und die Galerkinverfahren an.

6.1 Proposition (Hypersinguläre Integralgleichung). *Es bezeichnet Ω ein Lipschitzgebiet und $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ eine zusammenhängende Teilmenge. Für gegebenes $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ existiert eine schwache Lösung $u \in \tilde{H}_\star^{1/2}(\Gamma)$ des Variationsproblems*

$$\langle Wu, v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}_\star^{1/2}(\Gamma)} = \langle \phi, v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}_\star^{1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } v \in \tilde{H}_\star^{1/2}(\Gamma). \quad (6.1)$$

■

6.2 Proposition (Neumannproblem). *Es bezeichnet Ω ein Lipschitzgebiet und $\Gamma = \partial\Omega$. Für gegebenes $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ existiert eine schwache Lösung $u \in H_\star^{1/2}(\Gamma)$ des Variationsproblems*

$$\langle Wu, v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H_\star^{1/2}(\Gamma)} = \langle (1/2 - K')\phi, v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H_\star^{1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } v \in H_\star^{1/2}(\Gamma). \quad (6.2)$$

■

Analog zur schwach singulären Integralgleichung stellen wir nun die Galerkinverfahren auf. Für das Neumannproblem (6.2) wollen wir die Daten ϕ wieder durch diskrete Funktionen approximieren.

6.3 Proposition (Galerkinverfahren für die Hypersinguläre Integralgleichung). *Es existiert eine eindeutige Galerkinlösung $U_\ell \in \mathcal{S}_*^p(\mathcal{E}_\ell) := \mathcal{S}^p(\mathcal{E}_\ell) \cap \tilde{H}_*^{1/2}(\Gamma)$ von (6.1)*

$$\langle WU_\ell, V_\ell \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}_*^{1/2}(\Gamma)} = \langle \phi, V_\ell \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}_*^{1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } V_\ell \in \mathcal{S}_*^p(\mathcal{E}_\ell). \quad (6.3)$$

■

6.4 Proposition (Galerkinverfahren für das Neumannproblem). *Bezeichne mit $\pi_\ell^{p-1} : L_2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{P}^{p-1}(\mathcal{E}_\ell)$ die L_2 -Projektion. Es existieren eindeutige Galerkinlösungen $U_\ell^{\text{ex}} \in \mathcal{S}_*^p(\mathcal{E}_\ell) := \mathcal{S}^p(\mathcal{E}_\ell) \cap H_*^{1/2}(\Gamma)$ und $U_\ell \in \mathcal{S}_*^p(\mathcal{E}_\ell)$*

$$\langle WU_\ell^{\text{ex}}, V_\ell \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H_*^{1/2}(\Gamma)} = \langle (1/2 - K')\phi, V_\ell \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H_*^{1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } V_\ell \in \mathcal{S}_*^p(\mathcal{E}_\ell) \quad (6.4)$$

$$\langle WU_\ell, V_\ell \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H_*^{1/2}(\Gamma)} = \langle (1/2 - K')\pi_\ell^{p-1}\phi, V_\ell \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H_*^{1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } V_\ell \in \mathcal{S}_*^p(\mathcal{E}_\ell). \quad (6.5)$$

■

6.1 $h - h/2$ -Fehlerschätzer und Konvergenz

Analog zu Abschnitt 5.3 stellen wir in diesem Kapitel Fehlerschätzer im Rahmen der hypersingulären Gleichung vor, die auf der $h - h/2$ -Technik beruhen. Für den 2D-Fall wurden solche Schätzer bereits in [EFGP12] analysiert. Die Konvergenzanalyse zugehöriger adaptiver Verfahren lässt sich in 2D wie in Abschnitt 5.3 durchführen. Die Techniken für den 2D-Fall lassen sich leider nicht vollständig auf nach 3D übertragen, denn ein Fehlerschätzer vom Typ $\tilde{\mu}_\ell$ aus (6.6) enthält einen möglicherweise nichtlokalen Operator J_ℓ , für den lokal keine Approximationseigenschaften genutzt werden können. Es wird also vonnöten sein, J_ℓ mit Hilfe von Proposition 3.27 gegen einen lokalen Operator auszutauschen, um dieses Problem in den Griff zu bekommen. Zunächst betrachten wir aber Fehlerschätzer, die wir analog zu denen aus Lemma 5.12 definieren. Der Beweis überträgt sich analog und wurde, wie bereits erwähnt, für 2D in der Arbeit [EFGP12] vorgeführt, weswegen wir an dieser Stelle darauf verzichten.

6.5 Lemma ($h - h/2$ -Schätzer für die hypersinguläre Gleichung). *Es bezeichne V_ℓ die Galerkinlösung der hypersingulären Gleichung (6.3) oder des Neumannproblems (6.5). Für die hypersinguläre Gleichung (6.3) bezeichnet $\hat{V}_\ell \in \mathcal{S}_*^p(\hat{\mathcal{E}}_\ell)$ die Galerkinlösung*

$$\langle W\hat{V}_\ell, \hat{U}_\ell \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}_*^{1/2}(\Gamma)} = \langle \phi, \hat{U}_\ell \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}_*^{1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } \hat{U}_\ell \in \mathcal{S}_*^p(\hat{\mathcal{E}}_\ell).$$

Für das Neumannproblem (6.5) bezeichnet $\hat{V}_\ell \in \mathcal{S}_*^p(\hat{\mathcal{E}}_\ell)$ die Galerkinlösung

$$\langle W\hat{V}_\ell, \hat{U}_\ell \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H_*^{1/2}(\Gamma)} = \langle (1/2 - K')\pi_\ell^{p-1}\phi, \hat{U}_\ell \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H_*^{1/2}(\hat{\Gamma})} \quad \text{für alle } \hat{U}_\ell \in \mathcal{S}_*^p(\mathcal{E}_\ell).$$

Definiere die $h - h/2$ -Fehlerschätzer

$$\begin{aligned} \eta_\ell &:= \|\hat{U}_\ell - U_\ell\|_W & \tilde{\eta}_\ell &:= \|(1 - J_\ell)\hat{U}_\ell\|_W \\ \mu_\ell &:= \|h_\ell^{1/2}\nabla_\Gamma(\hat{U}_\ell - U_\ell)\|_{L_2} & \tilde{\mu}_\ell &:= \|h_\ell^{1/2}\nabla_\Gamma(1 - J_\ell)\hat{U}_\ell\|_{L_2}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

wobei J_ℓ die Scott-Zhang Projektion auf $\mathcal{S}_*^p(\mathcal{E}_\ell)$ ist. Dann sind alle Fehlerschätzer äquivalent,

$$\tilde{\mu}_\ell \simeq \mu_\ell \simeq \tilde{\eta}_\ell \simeq \eta_\ell,$$

wobei die Äquivalenzkonstanten nur von C_{apx} aus Theorem 3.26, von C_{inv} aus Proposition 3.29 und der Äquivalenzkonstanten C_{eq} aus Theorem 4.3 abhängen. ■

Analog zu den Lemmata 5.13 und 5.14 gelten die folgenden Aussagen. Der Beweis von Lemma 6.6 ist in [EFGP12] zu finden, der Beweis von Lemma 6.7 folgt dann aus Lemma 6.6 wie im Falle des Einfachschichtpotentials.

6.6 Lemma. *Im Falle der hypersingulären Gleichung (6.3) sind alle Fehlerschätzer aus (6.6) effizient, und unter der Saturationsannahme*

$$\|u - \hat{U}_\ell\|_W \leq C_{\text{sat}} \|u - U_\ell\|_W \quad (6.7)$$

mit $C_{\text{sat}} \in (0, 1)$ sind alle Fehlerschätzer zuverlässig. ■

6.7 Lemma. *Sei $\phi \in L_2(\Gamma)$ das Datum der rechten Seite von (6.2) und $(\mathcal{E}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Gittern, die durch den Algorithmus `refine` erzeugt wird. Definiere die Oszillationen durch*

$$\text{osc}_\ell := \|h_\ell^{1/2}(1 - \pi_\ell^{p-1})\phi\|_{L_2(\Gamma)}. \quad (6.8)$$

Mit $\tau_\ell \in \{\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell\}$ gilt dann Effizienz

$$C_{\text{eff}}^{-1} \tau_\ell \leq \|u - U_\ell\|_W + \text{osc}_\ell. \quad (6.9)$$

Bezeichnet $\hat{U}_\ell^{\text{ex}}$ die Galerkinlösung des exakten Problems (6.4) auf $\mathcal{S}^p(\hat{\mathcal{E}}_\ell)$, so gilt unter der Saturationsannahme

$$\|u - \hat{U}_\ell^{\text{ex}}\|_W \leq C_{\text{sat}} \|u - U_\ell^{\text{ex}}\|_W \quad (6.10)$$

mit $C_{\text{sat}} \in (0, 1)$ auch die Zuverlässigkeit

$$C_{\text{rel}}^{-1} \|u - U_\ell\|_W \leq \tau_\ell + \text{osc}_\ell. \quad (6.11)$$

Die Konstante C_{eff} hängt nur von der Konstante C_{apx} aus Theorem 3.21 und der Stabilitätskonstante von $W : \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ ab, die Konstante C_{rel} nur von C_{sat} und C_{apx} . ■

Wie wir bereits am Anfang dieses Abschnittes erwähnt haben, werden wir statt dem Scott-Zhang Operator J_ℓ den Operator π^{p-1} verwenden, um einen $h - h/2$ -Fehlerschätzer zu definieren, für den wir Konvergenz zeigen können.

6.8 Korollar. *Mit der Notation aus Lemma 6.5 definieren wir den Schätzer*

$$\hat{\mu}_\ell := \|h_\ell^{1/2}(1 - \pi_\ell^{p-1})\nabla_\Gamma \hat{U}_\ell\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Im Falle der hypersingulären Gleichung (6.3) ist $\hat{\mu}_\ell$ effizient und unter der Saturationsannahme (6.7) auch zuverlässig, wobei die Zuverlässigkeitskonstante von p abhängt. Im Falle des Neumannproblems (6.5) ist $\hat{\mu}_\ell + \text{osc}_\ell$ mit den Oszillationen (6.8) zuverlässig und effizient, wobei die Zuverlässigkeitskonstante ebenfalls von p abhängt.

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus Lemma 6.6, Lemma 6.7 und Proposition 3.27. $\square$

Wir geben nun zwei adaptive Algorithmen an, die mit $\hat{\mu}_\ell$ und im Falle des Neumannproblems zusätzlich durch osc_ℓ gesteuert werden.

6.9 Algorithmus (`solve-hh2-hypsing` zur Lösung der hypersingulären Gleichung). *Gegeben sei ein grobes Gitter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ auf $\Gamma \subseteq \partial\Omega$, ein Parameter $0 < \theta < 1$ und $p \in \mathbb{N}$. Wir verwenden Algorithmus `solve-combined` 5.6 mit Inputparameter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$, θ und*

- U_ℓ ist die Galerkinlösung der hypersingulären Integralgleichung (6.3),
- $\tau_\ell(E) = \hat{\mu}_\ell(E)$ mit dem Schätzer $\hat{\mu}_\ell$ aus Korollar 6.8.

6.10 Algorithmus (`solve-hh2-neumann` zur Lösung des Neumannproblems). *Gegeben sei ein grobes Gitter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$ auf $\Gamma = \partial\Omega$, ein Parameter $0 < \theta < 1$ und $p \in \mathbb{N}$. Wir verwenden Algorithmus `solve-combined` 5.6 mit Inputparameter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$, θ und*

- U_ℓ ist die Galerkinlösung des Neumannproblems mit gestörter rechter Seite (6.5),
- $\tau_\ell(E)^2 = \hat{\mu}_\ell(E)^2 + \text{osc}_\ell(E)^2$ mit dem Schätzer $\hat{\mu}_\ell$ aus Korollar 6.8 und Oszillationen osc_ℓ aus Lemma 6.7.

Wir zeigen nun die Schätzerreduktion für diese beiden Algorithmen. Zuerst betrachten wir den Fall der hypersingulären Integralgleichung. Die Schätzerreduktion für `solve-hh2-neumann` wird mit den gleichen Techniken bewiesen, deshalb verzichten wir auf einen Beweis.

6.11 Lemma (Konvergenz von `solve-hh2-hypsing`). *Für Algorithmus `solve-hh2-hypsing` 6.9 gilt*

$$\tau_{\ell+1}^2 \leq \hat{\kappa} \tau_\ell^2 + C_{\text{red}} \|\hat{U}_{\ell+1} - \hat{U}_\ell\|_W^2$$

mit einer Konstante $\hat{\kappa}$, die nur von θ abhängt. Die Konstante $C_{\text{red}} > 0$ hängt nur von θ , p und $\mathcal{E}_0$ ab. Insbesondere folgt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \tau_\ell = 0.$$

Unter der Saturationsannahme 6.7 gilt insbesondere Konvergenz $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|u - U_\ell\|_W = 0$.

Beweis. Zunächst gilt $\|h_{\ell+1}^{1/2}(1 - \pi_{\ell+1}^{p-1})(\nabla_\Gamma \hat{U}_{\ell+1} - \nabla_\Gamma \hat{U}_\ell)\|_{L_2(\Gamma)} = \|h_{\ell+1}^{1/2}(\nabla_\Gamma \hat{U}_{\ell+1} - \nabla_\Gamma \hat{U}_\ell)\|_{L_2(\Gamma)}$, zusammen mit der Dreiecksungleichung führt dies auf

$$\tau_{\ell+1} \leq \|h_{\ell+1}^{1/2}(1 - \pi_{\ell+1}^{p-1})\nabla_\Gamma \hat{U}_\ell\|_{L_2(\Gamma)} + \|h_{\ell+1}^{1/2}(\nabla_\Gamma \hat{U}_{\ell+1} - \nabla_\Gamma \hat{U}_\ell)\|_{L_2(\Gamma)}. \quad (6.12)$$

Auf markierten Elementen $E \in \mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{E}_\ell$ gilt wegen $h_{\ell+1} \leq qh_\ell$ und der Bestapproximationseigenschaft der Operatoren π^{p-1}

$$\|h_{\ell+1}^{1/2}(1 - \pi_{\ell+1}^{p-1})\nabla_\Gamma \hat{U}_\ell\|_{L_2(E)}^2 \leq q \|h_\ell^{1/2}(1 - \pi_\ell^p)\nabla_\Gamma \hat{U}_\ell\|_{L_2(E)}^2,$$

während auf unmarkierten Elementen $E \in \mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell$ zumindest

$$\|h_{\ell+1}^{1/2}(1 - \pi_{\ell+1}^{p-1})\nabla_\Gamma \widehat{U}_\ell\|_{L_2(E)}^2 \leq \|h_\ell^{1/2}(1 - \pi_\ell^{p-1})\nabla_\Gamma \widehat{U}_\ell\|_{L_2(E)}^2$$

gilt. Wegen des Dörflermarkings und $q < 1$ gilt daher

$$\|h_{\ell+1}^{1/2}(1 - \pi_{\ell+1}^{p-1})\nabla_\Gamma \widehat{U}_\ell\|_{L_2(\Gamma)}^2 \leq q\tau_\ell(\mathcal{M}_\ell)^2 + \tau_\ell(\mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell)^2 = \tau_\ell^2 + (q-1)\tau_\ell(\mathcal{M}_\ell)^2 \leq (1 + (q-1)\theta)\tau_\ell^2.$$

Wir setzen dies in (6.12) ein, benutzen für den zweiten Term die inverse Ungleichung aus Proposition 3.29, und erhalten mit der Youngschen Ungleichung und der Normäquivalenz $\|\cdot\|_W \simeq \|\cdot\|_{\widetilde{H}_*^{1/2}(\Gamma)}$

$$\tau_{\ell+1} \leq (1 + \delta)(1 + (q-1)\theta)\tau_\ell + (1 + \delta^{-1})(C_{\text{inv}}C_{\text{eq}})^2 \|\widehat{U}_{\ell+1} - \widehat{U}_\ell\|_W^2.$$

Die Wahl eines genügend kleinen δ zeigt zunächst die Schätzerreduktion. Mit Lemma 5.9 schließen wir, dass der zweite Term eine Nullfolge ist. Das Schätzerreduktionsprinzip aus Lemma 5.11 besagt schließlich $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \tau_\ell = 0$, und da τ_ℓ unter der Saturationsannahme zuverlässig ist, folgt damit auch die Konvergenz in der Energienorm. $\square$

Das folgende Theorem liefert die Schätzerreduktion für den Algorithmus 6.10 und wird analog zu Lemma 5.18 bewiesen.

6.12 Lemma (Konvergenz von `solve-hh2-neumann`). *Für Algorithmus `solve-hh2-neumann` 6.10 gilt*

$$\tau_{\ell+1}^2 \leq \widehat{\kappa}\tau_\ell^2 + C_{\text{red}} \left(\|(\pi_\ell^{p-1} - \pi_{\ell+1}^{p-1})\phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|\widehat{U}_{\ell+1} - \widehat{U}_\ell\|_W^2 \right)$$

mit einer Konstante $\widehat{\kappa}$, die nur von θ abhängt. Die Konstante $C_{\text{red}} > 0$ hängt zusätzlich von p und $\mathcal{E}_0$ ab. Insbesondere folgt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \tau_\ell = 0.$$

Unter der Saturationsannahme 6.10 gilt insbesondere Konvergenz $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|u - U_\ell\|_W = 0$. $\blacksquare$

6.2 Gewichteter residualer Fehlerschätzer und Konvergenz

Analog zu Abschnitt 5.4 beschäftigen wir uns nun mit gewichteten residualen Fehlerschätzern für die hypersinguläre Integralgleichung. Schätzer dieser Art werden in der Arbeit [CMPS04] analysiert. Zunächst führen wir daraus die Definition des Schätzers und seine Zuverlässigkeit an. Lemma 6.14 folgt wieder aus Lemma 6.13 und einer Dreiecksungleichung.

6.13 Lemma (Zuverlässigkeit des gewichteten Residualschätzers für W). *Ist $U_\ell \in \mathcal{S}_*^p(\mathcal{E}_\ell)$ die Galerkinlösung der hypersingulären Integralgleichung (6.3), dann definieren wir*

$$\rho_\ell(E) := \|h_\ell^{1/2}(WU_\ell - \phi)\|_{L_2(E)}. \quad (6.13)$$

Nun gilt das Folgende: Es existiert eine Konstante C_{rel} , die nur von Γ und einer oberen Schranke für die Formregularitätskonstante γ abhängt, sodass

$$C_{\text{rel}}^{-2} \|u - U_\ell\|_W^2 \leq \rho_\ell^2 := \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \rho_\ell(E)^2.$$

$\blacksquare$

6.14 Lemma (Zuverlässigkeit des gewichteten Residualschätzers für das Neumannproblem). *Ist $U_\ell \in \mathcal{S}_*^p(\mathcal{E}_\ell)$ die Galerkinlösung des Neumannproblems (6.5), dann gilt mit $\rho_\ell(E) := \|h_\ell^{1/2}(WU_\ell - (1/2 - K')\pi_\ell^{p-1}\phi)\|_{L_2(E)}$ die Zuverlässigkeit*

$$C_{\text{rel}}^{-2} \|u - U_\ell\|_W^2 \leq \rho_\ell^2 + \text{osc}_\ell^2$$

mit den Oszillationen aus Lemma 6.7. Die Konstante C_{rel} hängt nur von Γ und einer oberen Schranke für die Formregularitätskonstante γ ab. ■

Wir geben nun die adaptiven Algorithmen an, deren Konvergenz und Quasioptimalität wir zeigen möchten. Anders als im Falle der schwach singulären Gleichung wird hier die Datenapproximation durch einen Operator mit lokalen Orthogonalitätseigenschaften realisiert, sodass wir die separierte Markierungsstrategie nicht verwenden müssen.

6.15 Algorithmus (`solve-res-hypsing` zur Lösung der hypersingulären Gleichung). *Gegeben sei ein grobes Gitter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$, ein Parameter $0 < \theta < 1$, und $p \in \mathbb{N}$. Wir verwenden Algorithmus `solve-combined` 5.6 mit Inputparameter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$, θ und*

- U_ℓ ist die Galerkinlösung der hypersingulären Gleichung (6.3),
- $\tau_\ell(E) = \rho_\ell(E)$ mit dem Schätzer (6.13).

6.16 Algorithmus (`solve-res-neumann` zur Lösung des Neumannproblems). *Gegeben sei ein grobes Gitter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$, ein Parameter $0 < \theta < 1$, und $p \in \mathbb{N}$. Wir verwenden Algorithmus `solve-combined` 5.6 mit Inputparameter $(\mathcal{E}_0, (e_E)_{E \in \mathcal{E}_0})$, θ und*

- U_ℓ ist die Galerkinlösung des Neumannproblems (6.5),
- $\tau_\ell(E)^2 = \rho_\ell(E)^2 + \text{osc}_\ell(E)^2$ mit dem Schätzer aus Lemma 6.14 und den Oszillationen aus Lemma 6.7.

Analog zu Lemma 5.24 können wir Schätzerreduktion und somit auch Konvergenz des Galerkinverfahrens für die hypersinguläre Integralgleichung und das Neumannproblem zeigen. Der Beweis wird analog geführt und wird deshalb nicht angegeben.

6.17 Lemma. *Für Algorithmus 6.15, `solve-res-hypsing`, gilt*

$$\rho_{\ell+1}^2 \leq \hat{\kappa} \rho_\ell^2 + C_{\text{red}} \|U_{\ell+1} - U_\ell\|_W^2.$$

Die Konstante $0 < \hat{\kappa} < 1$ hängt nur von θ ab, die Konstante C_{red} zusätzlich von p , $\mathcal{E}_0$ und Γ . Insbesondere gilt Konvergenz des adaptiven Algorithmus,

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \rho_\ell = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|U - U_\ell\|_W = 0.$$

6.18 Lemma. *Für den Algorithmus 6.16, `solve-res-neumann`, gilt*

$$\tau_{\ell+1}^2 \leq \hat{\kappa} \tau_\ell^2 + C_{\text{red}} \left(\|\pi_{\ell+1}^{p-1} - \pi_\ell^{p-1}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|U_{\ell+1} - U_\ell\|_W^2 \right)$$

Die Konstante $0 < \hat{\kappa} < 1$ hängt nur von θ , die Konstante C_{red} zusätzlich von p , $\mathcal{E}_0$ und Γ ab. Insbesondere gilt Konvergenz des adaptiven Algorithmus,

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \tau_\ell = \lim_{\ell \rightarrow \infty} (\rho_\ell + \text{osc}_\ell) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|U - U_\ell\|_W = 0.$$

6.3 Gewichteter residualer Fehlerschätzer und Quasioptimalität

Die Kontraktionsgröße für die hypersinguläre Integralgleichung kann analog wie im Fall der schwach singulären Integralgleichung hergeleitet werden.

6.19 Theorem (Kontraktion für hypersinguläre Integralgleichung). *Für Algorithmus 6.15, solve-res-hypsing, gilt das Folgende: Es existieren Konstanten $0 < \lambda, \kappa < 1$, sodass der Quasi-Fehler in jedem Schritt eine Kontraktion ist, d.h.:*

$$\Delta_{\ell+1} \leq \kappa \Delta_\ell \quad \text{mit } \Delta_\ell := \|u - U_\ell\|_W^2 + \lambda \rho_\ell^2 \simeq \rho_\ell^2.$$

Die Konstanten λ und κ hängen nur vom Adaptivitätsparameter θ , p und $\mathcal{E}_0$ ab. Insbesondere folgt daraus $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|U - U_\ell\|_W = 0 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \rho_\ell$. ■

Nun leiten wir eine Kontraktionsgröße für das Neumannproblem mit approximierten Daten her. Im Gegensatz zum Dirichletproblem approximieren wir hier die Daten mit einem lokal definierten Operator π_ℓ^{p-1} , wodurch wir keine separate Markierungsstrategie brauchen, um die Quasioptimalität zu beweisen. In Lemma 5.27 hatten wir im Falle des Dirichletproblems aus der separaten Markierung mit dem gestörten Fehlerschätzer das Dörflermarking (5.31) für den ungestörten Fehlerschätzer geschlossen. Damit konnten wir eine Schätzerreduktion (5.32) zeigen, in der die nichtlokalen Datenapproximationsoperatoren nicht auftauchten. Im Falle der hypersingulären Gleichung sind die Datenapproximationsoperatoren jedoch lokal und besitzen auch Orthogonalitätseigenschaften, die man benutzen kann um aus der Schätzerreduktion aus Lemma 6.18 direkt eine Kontraktionsgröße abzuleiten. In [FFKP12] wird die separate Markierungsstrategie auch für das Dirichletproblem umgangen, indem lokal definierte Operatoren wie z.B. der Scott-Zhang Operator oder die nodale Interpolation in 2D zur Datenapproximation verwendet werden. Wir bezeichnen mit u_ℓ die schwache Lösung des Neumannproblems mit approximierten Daten

$$\langle Wu, v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H_\star^{1/2}(\Gamma)} = \langle (1/2 - K') \pi_\ell^{p-1} \phi, v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H_\star^{1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } v \in H_\star^{1/2}(\Gamma).$$

6.20 Theorem (Kontraktionsgröße für das Neumannproblem). *Für Algorithmus solve-res-neumann 6.16 gilt das Folgende: Es existieren Konstanten $0 < \lambda < 1$, $\alpha > 0$, sodass eine Kontraktionsgröße Δ_ℓ existiert die äquivalent zum Fehlerschätzer ist, d.h.*

$$\Delta_{\ell+1} \leq \kappa \Delta_\ell \quad \text{mit } \Delta_\ell := \|u_\ell - U_\ell\|_W^2 + \lambda \tau_\ell^2 + \alpha \text{osc}_\ell^2 \simeq \tau_\ell^2.$$

Die Konstanten λ, α hängen nur vom Adaptivitätsparameter θ , von p , $\mathcal{E}_0$ und Γ ab. Insbesondere folgt daraus $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|u - U_\ell\|_W = 0 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \tau_\ell$.

Beweis. Wir benutzen zuerst die Galerkinorthogonalität

$$\|u_{\ell+1} - U_{\ell+1}\|_W^2 = \|u_{\ell+1} - U_\ell\|_W^2 - \|U_{\ell+1} - U_\ell\|_W^2$$

und die Schätzerreduktion aus Lemma 6.18, um

$$\begin{aligned} \Delta_{\ell+1} &\leq \|u_{\ell+1} - U_\ell\|_W^2 - \|U_{\ell+1} - U_\ell\|_W^2 \\ &\quad + \lambda \hat{\kappa} \tau_\ell^2 + \lambda C_{\text{red}} \left(\|\pi_{\ell+1}^{p-1} - \pi_\ell^{p-1}\| \phi \|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|U_{\ell+1} - U_\ell\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \right) \\ &\quad + \alpha \text{osc}_{\ell+1}^2 \end{aligned}$$

zu schließen. Wir kombinieren die Dreiecksungleichung, die Youngsche Ungleichung und die Stabilität

$$\|u_{\ell+1} - u_\ell\|_W^2 \leq C_{\text{stab}} \|(\pi_{\ell+1}^{p-1} - \pi_\ell^{p-1})\phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

aus Theorem 4.3 und erhalten

$$\begin{aligned} \|u_{\ell+1} - U_\ell\|_W^2 &\leq (1 + \delta) \|u_\ell - U_\ell\|_W^2 + (1 + \delta^{-1}) \|u_{\ell+1} - u_\ell\|_W^2 \\ &\leq (1 + \delta) \|u_\ell - U_\ell\|_W^2 + (1 + \delta^{-1}) C_{\text{stab}}^2 \|(\pi_{\ell+1}^{p-1} - \pi_\ell^{p-1})\phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Wir schließen daraus

$$\begin{aligned} \Delta_{\ell+1} &\leq (1 + \delta) \|u_\ell - U_\ell\|_W^2 + \lambda \hat{\kappa} \tau_\ell^2 \\ &\quad + (\lambda C_{\text{red}} - 1) \|U_{\ell+1} - U_\ell\|_W^2 \\ &\quad + ((1 + \delta^{-1}) C_{\text{stab}}^2 + \lambda C_{\text{red}}) \|(\pi_{\ell+1}^{p-1} - \pi_\ell^{p-1})\phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \alpha \text{osc}_{\ell+1}^2. \end{aligned}$$

Wir wählen $0 < \lambda < 1$ so, dass $\lambda C_{\text{red}} - 1 < 0$ ist und kommen zu der Abschätzung

$$\begin{aligned} \Delta_{\ell+1} &\leq (1 + \delta) \|u_\ell - U_\ell\|_W^2 + \lambda \hat{\kappa} \tau_\ell^2 \\ &\quad + ((1 + \delta^{-1}) C_{\text{stab}}^2 + \lambda C_{\text{red}}) \|(\pi_{\ell+1}^{p-1} - \pi_\ell^{p-1})\phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \alpha \text{osc}_{\ell+1}^2. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Nun kümmern wir uns um die Oszillationsterme. Aus der Identität

$$(\pi_{\ell+1}^{p-1} - \pi_\ell^{p-1}) = (1 - \pi_\ell^{p-1})\pi_{\ell+1}^{p-1} = (1 - \pi_\ell^{p-1})(\pi_{\ell+1}^{p-1} - \pi_\ell^{p-1})$$

und der Approximationseigenschaft von π_ℓ^{p-1} aus Theorem 3.21 erhalten wir

$$\|(\pi_{\ell+1}^{p-1} - \pi_\ell^{p-1})\phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C_{\text{apx}} \|h_\ell^{1/2}(\pi_{\ell+1}^{p-1} - \pi_\ell^{p-1})\phi\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Wir setzen dies in (6.14) ein und definieren $\alpha := ((1 + \delta^{-1}) C_{\text{stab}}^2 + \lambda C_{\text{red}}) C_{\text{apx}}^2$, wodurch wir

$$\begin{aligned} \Delta_{\ell+1} &\leq (1 + \delta) \|u_\ell - U_\ell\|_W^2 + \lambda \hat{\kappa} \tau_\ell^2 \\ &\quad + \alpha \left(\|h_\ell^{1/2}(\pi_{\ell+1}^{p-1} - \pi_\ell^{p-1})\phi\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \text{osc}_{\ell+1}^2 \right) \end{aligned}$$

erhalten. Wir benutzen $h_{\ell+1} \leq h_\ell$ und die Tatsache, dass $\pi_{\ell+1}^{p-1}$ auf jedem Element $E \in \mathcal{E}_{\ell+1}$ die L_2 -Orthogonalprojektion ist, um auf

$$\begin{aligned} \|h_\ell^{1/2}(\pi_{\ell+1}^{p-1} - \pi_\ell^{p-1})\phi\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \text{osc}_{\ell+1}^2 &\leq \|h_\ell^{1/2}(\pi_{\ell+1}^{p-1} - \pi_\ell^{p-1})\phi\|_{L_2(\Gamma)}^2 + \|h_\ell^{1/2}(1 - \pi_{\ell+1}^{p-1})\phi\|_{L_2(\Gamma)}^2 \\ &= \|h_\ell^{1/2}(1 - \pi_\ell^{p-1})\phi\|_{L_2(\Gamma)}^2 = \text{osc}_\ell^2 \end{aligned}$$

zu kommen. Dies liefert schließlich

$$\Delta_{\ell+1} \leq (1 + \delta) \|u_\ell - U_\ell\|_W^2 + \lambda \hat{\kappa} \tau_\ell^2 + \alpha \text{osc}_\ell^2. \tag{6.15}$$

Wir benutzen die Zuverlässigkeit $C_{\text{rel}}^{-2} \|u_\ell - U_\ell\|_W^2 < \rho_\ell^2 < \tau_\ell^2$ und die offensichtliche Abschätzung $\text{osc}_\ell^2 < \tau_\ell^2$, um für ein ε die rechte Seite von (6.15) umzuschreiben als

$$\Delta_{\ell+1} \leq (1 + \delta - \varepsilon C_{\text{rel}}^{-2}) \|u_\ell - U_\ell\|_W^2 + \lambda \frac{\lambda \hat{\kappa} + 2\varepsilon}{\lambda} \tau_\ell^2 + \alpha \frac{\alpha - \varepsilon}{\alpha} \text{osc}_\ell^2.$$

Wir wählen zunächst $\varepsilon > 0$ so klein, dass $0 < \frac{\lambda \hat{\kappa} + 2\varepsilon}{\lambda} < 1$ ist. Wir bemerken, dass für $\delta \rightarrow 0$ der Parameter α streng monoton steigt. Daher können wir ein $\delta > 0$ so klein wählen, sodass sowohl $0 < 1 + \delta - \varepsilon C_{\text{rel}}^{-2} < 1$ als auch $\alpha > \varepsilon$ erfüllt ist. Schliesslich ist

$$\Delta_{\ell+1} \leq \kappa \Delta_\ell$$

mit $\kappa = \max \left\{ 1 + \delta - \varepsilon C_{\text{rel}}^{-2}, \frac{\lambda \hat{\kappa} + 2\varepsilon}{\lambda}, \frac{\alpha - \varepsilon}{\alpha} \right\} < 1$. □

Als nächstes zeigen wir die diskrete lokale Zuverlässigkeit für den gewichteten Residualschätzer im Falle der hypersingulären Gleichung.

6.21 Lemma (Diskrete lokale Zuverlässigkeit für die hypersinguläre Integralgleichung). *Es bezeichne $\mathcal{E}_\star$ eine beliebige Verfeinerung von $\mathcal{E}_\ell$, und $U_\star \in \mathcal{S}_\star^p(\mathcal{E}_\star)$ und $U_\ell \in \mathcal{S}_\star^p(\mathcal{E}_\ell)$ bezeichnen die Galerkinlösungen der hypersingulären Integralgleichung (6.3). Für die verfeinerten Elementen $\mathcal{R}_\ell = \mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{E}_\star$ gilt dann*

$$\|U_\ell - U_\star\|_W \leq C_{\text{dlr}} \left(\sum_{E \in \omega_\ell(\mathcal{R}_\ell)} \rho_\ell(E)^2 \right)^{1/2}, \quad (6.16)$$

wobei $\rho_\ell(E)$ wie in (6.13) definiert ist. Die Konstante $C_{\text{dlr}} > 0$ hängt nur von p , $\mathcal{E}_0$ und Γ ab.

Beweis. Der Beweis folgt im Wesentlichen der Idee von [CKNS08, Lemma 3.6]. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $\bigcup \mathcal{R}_\ell$ zusammenhängend ist. Es ist

$$\|U_\star - U_\ell\|_W^2 = \langle W(U_\star - U_\ell), U_\star - U_\ell \rangle = \langle \phi - WU_\ell, U_\star - U_\ell \rangle.$$

Für eine beliebige Funktion $V_\star \in \mathcal{S}^p(\mathcal{E}_\star)$ gilt mit der Scott-Zhang Projektion $J_\ell : L_2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^p(\mathcal{E}_\ell)$

$$\begin{aligned} \langle \phi - WU_\ell, V_\star \rangle &= \langle \phi - WU_\ell, V_\star - J_\ell V_\star \rangle = \langle \phi - WU_\ell, V_\star - J_\ell V_\star \rangle_{L_2(\omega(\mathcal{R}_\ell))} \\ &\leq \|h_\ell^{1/2}(\phi - WU_\ell)\|_{L_2(\omega(\mathcal{R}_\ell))} \|h_\ell^{-1/2}(V_\star - J_\ell V_\star)\|_{L_2(\Gamma)} \\ &\leq \|h_\ell^{1/2}(\phi - WU_\ell)\|_{L_2(\omega(\mathcal{R}_\ell))} \|V_\star\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Die Wahl $V_\star = U_\star - U_\ell$ und die Normäquivalenz $\|\cdot\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)} \simeq \|\cdot\|_W$ schließen den Beweis ab. □

6.22 Lemma (Diskrete lokale Zuverlässigkeit für das Neumannproblem). *Es bezeichne $\mathcal{E}_\star$ eine beliebige Verfeinerung von $\mathcal{E}_\ell$, und $U_\star \in \mathcal{S}_\star^p(\mathcal{E}_\star)$ und $U_\ell \in \mathcal{S}_\star^p(\mathcal{E}_\ell)$ bezeichnen die Galerkinlösungen des Neumannproblems (6.5). Für die verfeinerten Elementen $\mathcal{R}_\ell = \mathcal{E}_\ell \setminus \mathcal{E}_\star$ gilt*

$$\|U_\ell - U_\star\|_W \leq C_{\text{dlr}} \left(\sum_{E \in \omega_\ell(\mathcal{R}_\ell)} \tau_\ell(E)^2 \right)^{1/2}, \quad (6.17)$$

Die Konstante $C_{\text{dlr}} > 0$ hängt nur von p , $\mathcal{E}_0$ und Γ ab.

Beweis. Mit dem Hilfsproblem

$$\langle WU_\star^\ell, V_\star \rangle = \langle (1/2 - K')\pi_\ell^{p-1}\phi, V_\star \rangle \quad \text{für alle } V_\star \in \mathcal{S}_\star^p(\mathcal{E}_\star)$$

gilt wegen Lemma 6.21 die diskrete lokale Zuverlässigkeit

$$\|U_\star^\ell - U_\ell\|_W^2 \lesssim \rho_\ell(\omega(\mathcal{R}_\ell))^2.$$

Ausserdem ist wegen der Stabilität der Galerkinprojektionen

$$\|U_\star - U_\star^\ell\|_W \leq C_{\text{stab}} \|(\pi_\star^{p-1} - \pi_\ell^{p-1})\phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C_{\text{stab}} C_{\text{apx}} \|h_\ell^{1/2}(\pi_\star^{p-1} - \pi_\ell^{p-1})\phi\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_{\text{stab}} C_{\text{apx}} \text{osc}_\ell(\mathcal{R}_\ell).$$

Eine Anwendung der Dreiecksungleichung und die Summe der letzten beiden Abschätzungen zeigt das Gewünschte. $\square$

Analog zu der Optimalität des Dörfler-Markings 5.31 im Falle der schwach singulären Gleichung zeigt man dies auch für die hypersinguläre Gleichung. Der Beweis lässt sich direkt übertragen und wird deshalb nicht angegeben.

6.23 Lemma (Optimalität des Dörfler-Markings für die hypersinguläre Gleichung). *Es gibt eine Konstante $0 < \theta_\star < 1$, sodass das Folgende gilt: Für jede Verfeinerung $\mathcal{E}_\star$ von $\mathcal{E}_\ell$, d.h. $\mathcal{E}_\star = \text{refine}(\mathcal{E}_\ell)$, gilt*

$$\rho_\star^2 \leq \kappa_\star \rho_\ell^2 \implies \theta \rho_\ell^2 \leq \sum_{E \in \omega_\ell(\mathcal{R}_\ell)} \rho_\ell(E)^2$$

für alle $0 < \theta < \theta_\star$ und $\kappa_\star := \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\theta}{\theta_\star}\right) \in (0, 1/2)$. Die Konstante $\theta_\star$ hängt ab von C_{inv}^W aus Theorem 4.4, der Äquivalenzkonstanten C_{eq} aus Theorem 4.3 und C_{dir} aus Lemma 6.21. $\blacksquare$

Für den Algorithmus **solve-res-neumann** ist die Kontraktionsgröße aus Theorem 6.20 anderer Natur als im Falle des datengestörten Dirichletproblems, denn dort haben wir die Kontraktionsgröße durch ein Hilfsproblem mit exakter rechter Seite definiert. Der Beweis ist länglicher, folgt aber leicht mit den bisher gezeigten Techniken.

6.24 Lemma (Optimalität des Dörfler-Markings für das Neumannproblem). *Es gibt eine Konstante $0 < \theta_\star < 1$, sodass das Folgende gilt: Für jede Verfeinerung $\mathcal{E}_\star$ von $\mathcal{E}_\ell$, d.h. $\mathcal{E}_\star = \text{refine}(\mathcal{E}_\ell)$, gilt*

$$\tau_\star^2 \leq \kappa_\star \tau_\ell^2 \implies \theta \tau_\ell^2 \leq \sum_{E \in \omega_\ell(\mathcal{R}_\ell)} \tau_\ell(E)^2$$

für alle $0 < \theta < \theta_\star$ und $\kappa_\star := \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\theta}{\theta_\star}\right) \in (0, 1/2)$.

Beweis. Wir halten fest, dass

$$\|(\pi_\star^{p-1} - \pi_\ell^{p-1})\phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq 2C_{\text{apx}} \text{osc}(\omega(\mathcal{R}_\ell)) \quad (6.18)$$

gilt. Weiters ist wegen $h_\ell = h_\star$ auf $\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \rho_\ell(\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star) &= \|h_\ell^{1/2}(WU_\ell - (1/2 - K')\pi_\ell^{p-1}\phi)\|_{L_2(\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)} \\ &\leq \|h_\star^{1/2}W(U_\ell - U_\star)\|_{L_2(\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)} + \|h_\star^{1/2}(WU_\star - (1/2 - K')\pi_\star^{p-1}\phi)\|_{L_2(\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)} \\ &\quad + \|h_\star^{1/2}(1/2 - K')(\pi_\ell^{p-1} - \pi_\star^{p-1})\phi\|_{L_2(\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)} \\ &\leq C_{\text{inv}}^W C_{\text{dlr}} \tau_\ell(\omega(\mathcal{R}_\ell)) + \rho_\star(\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star) + 2C_{\text{inv}}^{K'} C_{\text{apx}} \text{osc}_\ell(\omega(\mathcal{R}_\ell)) \end{aligned}$$

erfüllt, wobei wir im letzten Schritt folgendes verwendet haben: die inverse Ungleichung für W aus (4.4) und die diskrete lokale Zuverlässigkeit aus Lemma 6.22 für den ersten Term, die Definition von $\rho_\star$ für den zweiten Term, sowie die inverse Ungleichung für K' aus (4.4) und die Ungleichung (6.18) für den letzten Term. Dies zeigt

$$\rho_\ell(\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)^2 - 2\rho_\star(\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)^2 \leq 2 \left(C_{\text{inv}}^W C_{\text{dlr}} + 2C_{\text{inv}}^{K'} C_{\text{apx}} \right)^2 \tau_\ell(\omega(\mathcal{R}_\ell))^2.$$

Nun folgt wegen $\text{osc}_\ell(\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)^2 = \text{osc}_\star(\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)^2$ insgesamt

$$\begin{aligned} (1 - 2\kappa_\star)\tau_\ell^2 &= \tau_\ell^2 - 2\kappa_\star\tau_\ell^2 \leq \tau_\ell^2 - 2\tau_\star^2 \leq \tau_\ell(\mathcal{R}_\ell)^2 + \tau_\ell(\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)^2 - 2\tau_\star(\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)^2 \\ &= \tau_\ell(\mathcal{R}_\ell)^2 + \rho_\ell(\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)^2 - (1 + \delta)\rho_\star(\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_\star)^2 \\ &\leq \left(1 + 2(C_{\text{inv}}^W C_{\text{dlr}} + 2C_{\text{inv}}^{K'} C_{\text{apx}})^2 \right) \tau_\ell(\omega(\mathcal{R}_\ell))^2. \end{aligned}$$

Definieren wir

$$\theta_\star := \frac{1}{1 + 2(C_{\text{inv}}^W C_{\text{dlr}} + 2C_{\text{inv}}^{K'} C_{\text{apx}})^2}$$

dann gilt $0 < \theta_\star < 1$ und wir erhalten das Gewünschte. $\square$

Wir definieren nun die Approximationsklassen für die hypersinguläre Integralgleichung (6.1) und das Neumannproblem (6.2).

6.25 Definition (Approximationsklassen für adaptive Algorithmen). Wir betrachten die Algorithmen 6.15, `solve-res-hypsing`, und 6.16, `solve-res-neumann`. Es sei $\mathcal{E}_0$ ein beliebiges Gitter auf $\Gamma \subseteq \partial\Omega$. Wir definieren für $s > 0$

$$|u|_s := \sup_{N>0} N^s \inf_{\mathcal{E}_\star \in \mathbb{T}_N} \rho_\star,$$

wobei $\rho_\star$ den Fehlerschätzer (6.13) auf dem Gitter $\mathcal{E}_\star$ bezeichnet. Dann definieren wir die Approximationsklasse $\mathbb{A}_s$ durch

$$u \in \mathbb{A}_s : \Longleftrightarrow |u|_s < \infty.$$

Weiters definieren wir für $s > 0$

$$|u, \phi|_s := \sup_{N>0} N^s \inf_{\mathcal{E}_\star \in \mathbb{T}_N} \tau_\star,$$

wobei $\tau_\star^2 = \rho_\star^2 + \text{osc}_\star^2$ den in Algorithmus `solve-res-neumann` verwendeten Fehlerschätzer auf dem Gitter $\mathcal{E}_\star$ bezeichnet. Dann definieren wir die Approximationsklasse $\mathbb{A}_s$ durch

$$(u, \phi) \in \mathbb{A}_s : \Longleftrightarrow |u, \phi|_s < \infty.$$

Es gelten nun folgende Quasioptimalitätsaussagen für die hypersinguläre Integralgleichung (6.1) und das Neumannproblem (6.2). Für die hypersinguläre Integralgleichung geben wir den Beweis nicht an, da er analog zu Theorem 5.34 geführt werden kann.

6.26 Theorem. *Wir verwenden Algorithmus 6.15, `solve-res-hypsing`, zur Lösung der hypersingulären Integralgleichung 6.1. Dann existiert eine Konstante $0 < \theta_\star < 1$, sodass für alle Parameter $0 < \theta < \theta_\star$ gilt: Die Galerkinlösungen U_ℓ und die Gitter $\mathcal{E}_\ell$, die von Algorithmus 6.15 erzeugt werden, erfüllen*

$$C_{\text{rel}}^{-1} \|u - U_\ell\|_W \leq \rho_\ell \leq C_{\text{opt}} |u|_s (\#\mathcal{E}_\ell - \#\mathcal{E}_0)^{-s}, \quad (6.19)$$

falls $u \in \mathbb{A}_s$ ist für $s > 0$. Die Konstante C_{opt} hängt nur von θ , s , p und $\mathcal{E}_0$ ab. ■

Da die Kontraktionsgröße für das Neumannproblem von anderer Struktur ist als in den bisher betrachteten Fällen, gehen wir im folgenden Beweis nur auf die dadurch entstehenden Unterschiede ein.

6.27 Theorem. *Wir verwenden Algorithmus 6.16, `solve-res-neumann`, zur Lösung des Neumannproblems 6.1. Dann existiert eine Konstante $0 < \theta_\star < 1$, sodass für alle Parameter $0 < \theta < \theta_\star$ gilt: Die Galerkinlösungen U_ℓ und die Gitter $\mathcal{E}_\ell$, die von Algorithmus 6.16 erzeugt werden, erfüllen*

$$C_{\text{rel}}^{-1} \|u - U_\ell\|_W \leq \tau_\ell \leq C_{\text{opt}} |u, \phi|_s (\#\mathcal{E}_\ell - \#\mathcal{E}_0)^{-s}, \quad (6.20)$$

falls $(u, \phi) \in \mathbb{A}_s$ ist für $s > 0$. Die Konstante C_{opt} hängt nur von θ , s , p und $\mathcal{E}_0$ ab.

Beweis. Wir setzen $\varepsilon^2 := \delta \tau_\ell^2$ mit einem $0 < \delta < 1$, welches wir später wählen werden. Wegen $U \in \mathbb{A}_s$ können wir ein Gitter $\mathcal{E}_\varepsilon$ wählen, sodass

$$\#\mathcal{E}_\varepsilon - \#\mathcal{E}_0 \leq |u, \phi|_s \varepsilon^{-1/s} \quad \text{und} \quad \tau_\varepsilon^2 \leq \varepsilon^2.$$

Wir betrachten den Overlay $\mathcal{E}_\star := \mathcal{E}_\ell \oplus \mathcal{E}_\varepsilon$. Für die Oszillationen gilt

$$\text{osc}_\star^2 \leq \text{osc}_\varepsilon^2. \quad (6.21)$$

Für den Schätzer $\rho_\star$ gilt

$$\begin{aligned} \rho_\star &= \|h_\star^{1/2} (WU_\star - (1/2 - K')\pi_\star^{p-1}\phi)\|_{L_2(\Gamma)} \\ &\leq \|h_\star^{1/2} (WU_\varepsilon - (1/2 - K')\pi_\varepsilon^{p-1}\phi)\|_{L_2(\Gamma)} + \|h_\star^{1/2} W(U_\star - U_\varepsilon)\|_{L_2(\Gamma)} \\ &\quad + \|h_\star^{1/2} (1/2 - K')(\pi_\varepsilon^{p-1} - \pi_\star^{p-1})\phi\|_{L_2(\Gamma)} \\ &\leq \rho_\varepsilon + C_{\text{inv}}^W C_{\text{eq}} \|U_\star - U_\varepsilon\|_W + C_{\text{inv}}^{K'} \|(\pi_\varepsilon^{p-1} - \pi_\star^{p-1})\phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\leq \rho_\varepsilon + C_{\text{inv}}^W \|U_\star - U_\varepsilon\|_W^2 + C_{\text{inv}}^{K'} C_{\text{apx}} \text{osc}_\varepsilon. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Insgesamt gilt daher wegen der diskreten lokalen Zuverlässigkeit aus Lemma 6.22

$$\tau_\star^2 \lesssim \tau_\varepsilon^2 \leq \delta \tau_\ell^2,$$

und der Rest des Beweises überträgt sich wortwörtlich von Theorem 5.34. □

Kapitel 7

Numerische Experimente

In diesem Kapitel präsentieren wir numerische Experimente, um die vorangegangenen theoretischen Resultate zur Konvergenz und Quasioptimalität zu visualisieren. Gleichzeitig wollen wir untersuchen, wie sich adaptive Algorithmen bezüglich kritischen Ressourcen wie Rechenzeit und Implementierungsaufwand verhalten. In Abschnitt 7.1 werden wir auf die Implementierung eingehen und grob die wichtigsten Details festhalten. Wir beschränken unsere Experimente auf die schwach singuläre Integralgleichung und Galerkinverfahren niedrigster Ordnung. Es werden die Algorithmen

`solve-hh2-weaksing` 5.15

`solve-res-weaksing` 5.21

`solve-hh2-dirichlet` 5.16

`solve-separate-res-dirichlet` 5.23

untersucht, wobei wir, wie erwähnt, den Fall niedrigster Ordnung betrachten. In den Definitionen der Algorithmen und der Fehlerschätzer ist demnach $p = 0$ zu setzen, und die diskreten Galerkinlösungen stammen aus dem Raum der stückweise Konstanten $\mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$. Zum Vergleich werden wir die Fehlerschätzer und Energiefehler auch auf uniformen Folgen von Gittern berechnen. Unter einer uniformen Folge von Gittern verstehen wir eine Folge $(\mathcal{E}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ mit $\mathcal{E}_{j+1} = \mathbf{refine}(\mathcal{E}_j)$, sodass alle Kanten geteilt werden. Das heißt, auf jedem Element $E \in \mathcal{E}_j$ wird die Verfeinerungsregel aus Abbildung 3.1 (rechts) angewendet.

7.1 Implementierung

Da die Fundamentallösungen von partiellen Differentialgleichungen im Allgemeinen nichtlokal sind, führt die Galerkinmethode für Randintegraloperatoren auf vollbesetzte Matrizen. Dies bedeutet, dass bei N Freiheitsgraden bereits für das Assemblieren und für die Matrix-Vektor-Multiplikation mit einem Aufwand von $\mathcal{O}(N^2)$ zu rechnen ist. Um diesen Aufwand zu reduzieren, gibt es verschiedene Ansätze zur Matrixkompression. In der hier vorgestellten Implementierung approximieren wir die vollbesetzten diskreten Integraloperatoren durch sogenannte *Hierarchische Matrizen* [Hac99,Hac09], die für das Assemblieren und die Matrix-Vektor-Multiplikation auf einen Aufwand $\mathcal{O}(N \log(N))$ führen.

Desweiteren ist die Berechnung der Einträge der Galerkinmatrizen ein weiterer subtiler Punkt. Für allgemeine Integralkerne beschreibt [SS11, Chapter 5] eine Klasse von Quadraturmethoden zur Berechnung der Galerkineträge. Für spezielle Klassen von Gittern und Kernfunktionen gibt es analytische Formeln für die Auswertung der diskreten Integraloperatoren

$$V\Phi_\ell(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad KU_\ell(\mathbf{x})$$

für $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$ und $U_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$, zum Beispiel in [RS07] für Dreiecksgitter. In [Mai00] gibt es für den Fall von achsenparallelen Rechtecksgittern und monomischen Ansatzfunktionen höherer Ordnung sogar analytische Formeln für die Matrixeinträge der Galerkinmatrizen. Da wir Dreiecksgitter verwenden, benutzen wir die Formeln aus [RS07] zur Auswertung, und ersetzen im Falle der Galerkineträge das äussere Integral durch eine Quadraturregel.

Wir halten außerdem fest, dass wir keinerlei Optimierung dahingehend betrieben haben, bei adaptiven Netzverfeinerungen Teile der Matrizen wieder zu verwenden, wie es zum Beispiel in [Djo06] vorgeschlagen wird.

7.1.1 HILBERT3D

Die im Zuge dieser Arbeit entwickelte und für die numerischen Experimente verwendete Bibliothek HILBERT3D [MK12] ist eine Bibliothek zur adaptiven Lösung von Galerkinverfahren für Randintegralgleichungen. Die Bibliothek wurde in C++ implementiert, um so eine leichte Anbindung an C und dadurch an bereits existierende Bibliotheken wie LAPACK, BLAS oder HLIB zu ermöglichen.

7.1.2 Quadraturformeln

Wir verwenden eine 7-Punkt-Quadraturformel $\text{quad}_{7,\hat{E}}$ auf Dreiecken aus [Str71], die gegeben ist auf dem Referenzelement $\hat{E} = \text{conv}\{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ als

$$\int_{\hat{E}} \hat{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \text{quad}_{7,\hat{E}}(\hat{u}) = \sum_{j=1}^7 w_{7,j} \hat{u}(\hat{\mathbf{x}}_{7,j}). \quad (7.1)$$

Die Koordinaten und Gewichte sind in Tabelle 7.1 angegeben. Die zugehörigen Quadraturformeln auf beliebigen Dreiecken E bezeichnen wir mit $\text{quad}_{7,E}$.

7.1.3 Die Berechnung der Matrixeinträge

Wie bereits weiter oben erwähnt, erfolgt die Berechnung der Matrixeinträge durch analytische Formeln für das innere Integral und numerische Quadratur für das äussere Integral. Wir folgen hier der in [RS07] angegebenen Vorgangsweise. Im Folgenden sei ein Gitter

$$\mathcal{E}_\ell = \{E_1, \dots, E_N\}$$

gegeben. Bezeichnet χ_j die charakteristische Funktion eines Elementes E_j , dann ist eine Basis von $\mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$ gegeben durch $\{\chi_1, \dots, \chi_N\}$. Die Galerkinmatrix für das Einfachschichtpotential ist gegeben durch

$$\mathbf{V}_{j,k} = \langle V\chi_k, \chi_j \rangle = \int_{E_j} \int_{E_k} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}). \quad (7.2)$$

j	$x_{7,j}$	$y_{7,j}$	$w_{7,j}$
1	$(6 - \sqrt{15})/21$	$(6 - \sqrt{15})/21$	$(155 - \sqrt{15})/2400$
2	$(9 + 2\sqrt{15})/21$	$(6 - \sqrt{15})/21$	$(155 - \sqrt{15})/2400$
3	$(6 - \sqrt{15})/21$	$(9 + 2\sqrt{15})/21$	$(155 - \sqrt{15})/2400$
4	$(6 + \sqrt{15})/21$	$(9 - 2\sqrt{15})/21$	$(155 + \sqrt{15})/2400$
5	$(6 + \sqrt{15})/21$	$(6 + \sqrt{15})/21$	$(155 + \sqrt{15})/2400$
6	$(9 - 2\sqrt{15})/21$	$(6 + \sqrt{15})/21$	$(155 + \sqrt{15})/2400$
7	$1/3$	$1/3$	$9/80$

Tabelle 7.1: 7-Punkt Gauss Quadratur auf dem Referenzelement $\hat{E}$

j	$x_{3,j}$	$y_{3,j}$	$w_{3,j}$
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$
2	$2/3$	$1/6$	$1/6$
3	$1/6$	$2/3$	$1/6$

Tabelle 7.2: 3-Punkt Gauss Quadratur auf dem Referenzelement $\hat{E}$

In [RS07, Abschnitt C.2.2] werden analytische Formeln für die Auswertung des Einfachschichtpotentials

$$V\chi_k(\mathbf{x}) = \int_{E_k} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y})$$

für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ angegeben. Die Galerkeineinträge berechnen sich dann als

$$\mathbf{V}_{j,k} \approx \text{quad}_{7,E_j}(V\chi_k).$$

Wir bezeichnen im Weiteren mit $\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ die Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ aus Hutfunktionen, das heißt, sind $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\}$ die Knoten aus dem Gitter $\mathcal{E}_\ell$, so gilt $\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{i,j}$ mit dem Kronecker Delta. Die Einträge des Doppelschichtpotentials sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{j,k} &= \langle K\varphi_k, \chi_j \rangle = \int_{E_j} \int_{\text{supp}(\varphi_k)} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi_k(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &= \int_{E_j} \sum_{E \subseteq \text{supp}(\varphi_k)} \int_E \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi_k(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

In [RS07, Abschnitt C.2.1] finden sich analytische Formeln für die Auswertung von

$$K_E \varphi_k(\mathbf{x}) = \int_E \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi_k(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}),$$

wenn $E \subseteq \text{supp}(\varphi_k)$ ist. Die Galerkeineinträge berechnen sich dann als

$$\mathbf{K}_{j,k} \approx \text{quad}_{7,E_j} \left(\sum_{E \in \text{supp}(\varphi_k)} K_E \varphi_k \right).$$

Für dieses semi-analytische Verfahren zur Berechnung der Matrixeinträge ist dem Autor keine Fehleranalyse im Sinne des Lemmas von Strang bekannt. Die Arbeit [GS97] beschäftigt sich jedoch mit einem semi-analytischen Ansatz auf quasiuniformen Rechtecksgittern. Auf Basis einer Quadraturregel, die konstante Funktionen exakt integriert wird gezeigt, dass eine summierte Quadraturregel auf die richtige Konvergenzordnung führt, sofern nur die Anzahl M der Teilintervalle für die summierte Quadraturregel eine von der Gitterweite h abhängige Ungleichung erfüllt [GS97, Theorem 7.1]. Integriert die zugrundeliegende Quadraturregel Polynome vom Grad 1 exakt, so wird gezeigt, dass die summierte Quadraturregel auf die richtige Konvergenzordnung führt, falls die Anzahl der Teilintervalle M groß genug ist, und diese Schranke hängt nicht von der Gitterweite h ab [GS97, Theorem 7.2]. In [SS11, Chapter 5] werden volldiskrete Verfahren auf uniformen Gittern analysiert, und es wird gezeigt, dass die Quadraturordnung für die Nahfeldterme logarithmisch in der Netzweite, also wie $|\log h|$, steigen muss. Für Fernfeldterme, das heisst $\text{dist}(E_i, E_j) \simeq 1$, kann die Quadraturordnung unabhängig von h gewählt werden (siehe [SS11, Remark 5.3.31]). Dieser volldiskrete Ansatz wird in [GHS00] für lokal quasi-uniforme Gitter analysiert.

7.1.4 Matrixkompression

Wir verwenden sogenannte *Hierarchische Matrizen* [Hac99, Hac09], um die vollbesetzten Matrizen $\mathbf{V}$ und $\mathbf{K}$ effizient zu speichern und zu verwenden. Die Fundamentallösung des Laplace-Operators

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

ist für $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ singulär, sonst jedoch ist sie glatt, und daher ist ein Matrixeintrag $\mathbf{V}_{j,k}$ für weit entfernte E_j und E_k gut zu approximieren. Für ein $\eta > 0$ definiert man sogenannte η -zulässige Blöcke $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ der Indexmenge $\{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}$ durch

$$\min\{\text{diam} \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \text{supp}(\varphi_i), \text{diam} \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \text{supp}(\psi_j)\} \leq \eta \text{dist}(\text{diam} \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \text{supp}(\varphi_i), \text{diam} \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \text{supp}(\psi_j)). \quad (7.3)$$

wobei φ_i und ψ_j zugehörige Basis- bzw. Testfunktionen sind. In unserer Implementierung wählen wir $\eta = 1$. Auf η -zulässigen Blöcken ist die Fundamentallösung glatt, und man approximiert einen Matrixblock $\mathbf{V}_{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ durch eine Niedrigrangmatrix, d.h.

$$\mathbf{V}_{\mathcal{I}, \mathcal{J}} = UV^T \quad \text{mit } U \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{I} \times k} \quad \text{und } V \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{J} \times k}$$

mit einem kleinen k . Die C-Bibliothek HLIB, die wir in unserer Implementierung verwenden, implementiert eine solche Matrixstruktur in der Klasse `supermatrix`, als auch Funktionen zur Bestimmung von η -zulässigen Blöcken sowie Routinen zur Matrix-Vektor-Multiplikation und der iterativen Lösung von linearen Gleichungssystemen. Zur Berechnung der Niedrigrangmatrizen U und V verwenden wir den ACA-Algorithmus aus [Beb00], der ebenfalls in der HLIB implementiert ist. Wir bemerken noch, dass die Zulässigkeitsbedingung (7.3) in der HLIB nicht in dieser Form implementiert ist, sondern durch sogenannte *Bounding Boxes* realisiert wird. Dies sind minimale, achsenparallele Boxen, die den Träger einer Basisfunktion umfassen. Wie weiter oben bereits gesagt, reduziert sich der Speicheraufwand sowie der Zeitaufwand für die Berechnung der Matrix $\mathbf{V}$ und der Matrix-Vektor-Multiplikation von $\mathcal{O}(N^2)$ auf $\mathcal{O}(N \log(N))$. Dies ist auch in Abbildung 7.1 ersichtlich, in der die Zeit für das Aufstellen der Matrix $\mathbf{V}$ visualisiert wird.

7.1.5 Implementierung des Residualschätzers und der Oszillationen

Zur Berechnung des Residualschätzers ρ_ℓ aus (5.21) beziehungsweise (5.22) und den Oszillationen aus (5.16) und (5.22) ist es notwendig, das Quadrat des Oberflächengradienten zu integrieren. Dazu verwenden wir folgende Aussage aus [SS11, Lemma 4.3.4].

7.1 Lemma. *Für ein Element E gilt*

$$\|\nabla_\Gamma u\|_{L_2(E)}^2 = \frac{|E|}{|\hat{E}|} \int_{\hat{E}} \langle \hat{\nabla} \hat{u}(\mathbf{x}), \mathbf{G}_E^{-1} \hat{\nabla} \hat{u}(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x}. \quad (7.4)$$

Dabei ist mit den Definitionen aus Abschnitt 3.3

$$\hat{u}(\mathbf{x}) := u(F_E(\mathbf{x}))$$

mit der Elementabbildung F_E ,

$$\mathbf{G}_E^{-1} = \frac{|\hat{E}|^2}{|E|^2} \begin{pmatrix} \|\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_0\|^2 & -\langle \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_0 \rangle \\ -\langle \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_0 \rangle & \|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0\|^2 \end{pmatrix}$$

mit den Knoten $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ des Elements E , und $\hat{\nabla}$ ist der Gradient in den Koordinaten von $\mathbb{R}^2$. ■

Für die Randintegraloperatoren V und K stehen uns analytische Formeln für die Auswertungen $V\Phi_\ell(\mathbf{x})$ bzw. $KV_\ell(\mathbf{x})$ für diskrete Funktionen $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$, $V_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ zur Verfügung, siehe Abschnitt 7.1.3. Für Funktionen u , für die wir nur die Auswertung zur Verfügung haben, können wir die Berechnung von $\hat{\nabla} \hat{u}$ approximativ durchführen. Wir gehen dazu folgendermaßen vor: mit $L_k \in \mathcal{P}^2(\hat{E})$, $k = 1, \dots, 7$, bezeichnen wir die Lagrangepolynome zu den Quadraturpunkten $\mathbf{x}_{7,k} = (x_{7,k}, y_{7,k})$ aus der 7-Punkt Quadraturregel aus Tabelle 7.1, das heißt $L_k(\mathbf{x}_{7,j}) = \delta_{j,k}$. Wir approximieren den Gradienten $\hat{\nabla} \hat{u}$ in einem Punkt $\mathbf{x} \in \hat{E}$ durch

$$\hat{\nabla} \hat{u}(\mathbf{x}) \approx \sum_{k=1}^6 \hat{u}(\mathbf{x}_{7,k}) \hat{\nabla} L_k(\mathbf{x}).$$

Schliesslich ersetzen wir die L_2 -Norm (7.4) durch eine 3-Punkt Quadraturformel, deren Knoten und Gewichte in Tabelle 7.2 angegeben sind, sodass wir

$$\|\nabla_\Gamma u\|_{L_2(E)}^2 \approx \frac{|E|}{|\hat{E}|} \sum_{j=1}^3 w_{3,j} \left\langle \sum_{k=1}^6 \hat{\nabla} L_k(\mathbf{x}_{3,j}) \hat{u}(\mathbf{x}_{7,k}), \mathbf{G}_E^{-1} \sum_{k=1}^6 \hat{\nabla} L_k(\mathbf{x}_{3,j}) \hat{u}(\mathbf{x}_{7,k}) \right\rangle \quad (7.5)$$

erhalten. Verwenden wir die Methode (7.5) für die Berechnung der gewichteten Residualschätzers (5.21) beziehungsweise (5.22), so ist das Einfachschichtpotential $V\Phi_\ell$ für ein $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$ und eventuell auch das Doppelschichtpotential KV_ℓ für ein $V_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$ auf den Quadraturpunkten *jedes* Elementes $E \in \mathcal{E}_\ell$ auszuwerten. Daher hätte eine naive Implementierung den Aufwand $\mathcal{O}(N^2)$. Wir umgehen dieses Problem, indem wir die Matrix der Auswertungspunkte ebenfalls durch eine Hierarchische Matrix approximieren. Wir sammeln zuerst die Menge aller Auswertungspunkte

$$\{\mathbf{x}_j\}_{j \in \mathcal{J}} := \{F_E(\mathbf{x}_{7,k})\}_{\substack{k=1,\dots,6 \\ E \in \mathcal{E}_\ell}}.$$

Im Falle des Einfachschichtpotentials ist das Ziel die Berechnung der Matrix $\mathbf{V}^{\text{eval}} \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{J}} \times \mathbb{R}^N$, gegeben durch

$$\mathbf{V}_{j,k}^{\text{eval}} = V(\chi_k)(\mathbf{x}_j).$$

Die Einträge dieser Matrix können wir, wie bereits erwähnt, analytisch berechnen. Für einen Auswertungspunkt $\mathbf{x}_j$ wählen wir als Träger das Element $E \in \mathcal{E}_\ell$ mit $\mathbf{x}_j \in E$, sodass wir η -zulässige Blöcke für die Indexmenge $\mathcal{J} \times \{1, \dots, N\}$ definieren können. Wir approximieren $\mathbf{V}^{\text{eval}}$ durch eine hierarchische Matrix, sodass wir durch die Matrix-Vektor-Multiplikation

$$\mathbf{V}^{\text{eval}} \Phi_\ell$$

die Auswertung von $V\Phi_\ell$ in allen nötigen Punkten mit Aufwand $\mathcal{O}(N \log(N))$ realisiert haben. In Abbildung 7.1 ist ersichtlich, dass die Auswertung des Einfachschichtpotentials durch eine hierarchische Matrix tatsächlich fast-linearen Aufwand $\mathcal{O}(N \log(N))$ hat. Die Implementierung der Oszillationen (5.16) erfolgt ebenfalls auf Basis von Lemma 7.1, während die Implementierung der Oszillationen (5.22) durch Quadratur des exakten Oberflächengradienten erfolgt. In beiden Fällen sind keine nichtlokalen Operatoren beteiligt.

7.1.6 Lösen und Vorkonditionieren des linearen Gleichungssystems

Im Zuge der adaptiven Algorithmen müssen wir lineare Gleichungssysteme

$$\mathbf{V}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{7.6}$$

mit der Matrix $\mathbf{V}$ aus (7.2) lösen. Laut [AMT99, Theorem 2.1] und [AMT00] gilt für die Konditionszahl der Matrix $\mathbf{V}$

$$\text{cond}(\mathbf{V}) \lesssim N^{1/2} \left(\frac{h_{\max}}{h_{\min}} \right)^3.$$

Auf einer Folge von adaptiv verfeinerten Gittern steigt die Konditionszahl also kubisch mit dem Quotient zwischen größtem und kleinstem Elementdurchmesser. Für lokal verfeinerte Gitter ist dieser Anstieg der Konditionszahl problematisch für das Lösen des Systems. Verwendet man die Diagonalmatrix $\mathbf{D}$ mit $\mathbf{D}_{j,j} := \mathbf{V}_{j,j}$, so gilt ebenfalls laut [AMT99, Theorem 2.1] und [AMT00] für das vorkonditionierte System

$$\mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{V} \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{y} = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{b}, \tag{7.7}$$

dass die Konditionszahl der Systemmatrix sich verhält wie

$$\text{cond}(\mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{V} \mathbf{D}^{-1/2}) \lesssim N^{1/2}.$$

Zur Lösung des linearen Systems verwenden wir daher ein GMRES-Verfahren mit der Vorkonditionierung (7.7). Die Implementierung erfolgt durch einen GMRES-Solver aus der `HLIB`, der entsprechend modifiziert wurde.

7.2 Schwach singuläre Integralgleichung

In diesem Abschnitt lösen wir die schwach singuläre Integralgleichung (5.6) mit rechter Seite $f = 1$, d.h.

$$V\phi = 1.$$

Die Galerkinlösung auf einem Gitter $\mathcal{E}_\ell$ ist demnach gegeben durch (5.8) mit $p = 0$. Wir wenden die adaptiven Algorithmen **solve-hh2-weaksing** 5.21 und **solve-res-weaksing** 5.15 an, um die exakte Lösung zu approximieren. Als zugrundeliegende Geometrien dienen uns ein L-förmiger Schirm und Fichera's Würfel.

7.2.1 L-förmiges Gebiet

Im ersten Experiment ist die zugrundeliegende Geometrie ein L-förmiger Schirm Γ , welches zusammen mit dem größten Gitter $\mathcal{E}_0$ und der gewählten Referenzkantenverteilung in Abbildung 7.2 (links) dargestellt ist. Die exakte Lösung ϕ besitzt starke Kantensingularitäten, daher erwarten wir für uniforme, isotrope Gitter eine Konvergenzordnung von $|||\phi - \Phi_\ell|||_V = \mathcal{O}(N^{-1/4})$, vergleiche [CMS01]. Für einen adaptiven Algorithmus, der eine Folge von isotropen Gittern erzeugt, erwarten wir eine Konvergenzordnung von $|||\phi - \Phi_\ell|||_V = \mathcal{O}(N^{-1/2})$, vergleiche ebenfalls [CMS01]. Wir verwenden die Algorithmen **solve-res-weaksing** 5.21, **solve-hh2-weaksing** 5.15 sowie eine uniforme Folge von Gittern, für die wir ebenfalls den $h - h/2$ -Schätzer $\tilde{\mu}_\ell$ und den gewichteten Residualschätzer ρ_ℓ berechnen. Aus den Berechnungen des Algorithmus **solve-res-weaksing** extrapolieren wir eine Energienorm von $|||\phi|||_V^2 \approx 8.2844$. Die Berechnung des quadrierten Energiefehlers kann aufgrund der Galerkinorthogonalität mit

$$|||\phi - \Phi_\ell|||_V^2 = |||\Phi_\ell|||_V^2 - |||\phi|||_V^2$$

erfolgen.

Algorithmus solve-res-weaksing

Wir verwenden Algorithmus **solve-res-weaksing** 5.21, der durch den gewichteten Residualschätzer ρ_ℓ (5.21) gesteuert wird. Als Adaptivitätsparameter wählen wir $\theta = 0.5$. In Abbildung 7.3 (Oben) werden der extrapolierte quadrierte Energiefehler $|||\phi - \Phi_\ell|||_V^2$ und der quadrierte gewichtete Residualschätzer ρ_ℓ^2 , die von Algorithmus **solve-res-weaksing** erzeugt werden, über der Anzahl N der Freiheitsgrade geplottet. Zusätzlich werden Energiefehler und Fehlerschätzer für den uniformen Fall geplottet. Wie zu sehen ist, liefern die Algorithmen die erwarteten Konvergenzordnungen. In Abbildung 7.4 plotten wir vier Gitter, die von Algorithmus **solve-res-weaksing** in den Schritten 10, 20, 30 und dem letzten Schritt 42 erzeugt werden. Da die exakte Lösung ϕ Kantensingularitäten besitzt, stellt sich die erwartete Verfeinerung entlang der Aussenkanten ein.

Algorithmus solve-hh2-weaksing

Wir verwenden Algorithmus **solve-hh2-weaksing** 5.15, der durch den $h - h/2$ -Schätzer $\tilde{\mu}_\ell$ (5.14) gesteuert wird. Als Adaptivitätsparameter wählen wir $\theta = 0.5$. In Abbildung 7.3 (Unten) werden der extrapolierte quadrierte Energiefehler $|||\phi - \Phi_\ell|||_V^2$ und der quadrierte $h - h/2$ -Schätzer $\tilde{\mu}_\ell^2$, die von Algorithmus **solve-hh2-weaksing** erzeugt werden, über der Anzahl N der Freiheitsgrade geplottet. Zusätzlich plotten wir diese Größen auch für eine Folge von uniformen Gittern. Wie in Abbildung 7.3 (Unten) zu

sehen ist, stellen sich die erwarteten Konvergenzraten ein. In Abbildung 7.5 plotten wir die vier Gitter, die von Algorithmus `solve-hh2-weaksing` in den Schritten 10, 20, 30 und dem letzten Schritt 42 erzeugt werden. Erwartungsgemäß stellt sich eine Verfeinerung entlang der Aussenkanten ein.

Vergleich zwischen $h - h/2$ -Schätzer und gewichtetem Residualschätzer

In Abbildung 7.6 (oben) vergleichen wir die Konvergenzraten für Schätzer und Energiefehler der beiden Algorithmen `solve-hh2-weaksing` und `solve-res-weaksing`. Die Energiefehler der beiden Algorithmen sind dabei von der gleichen Größenordnung. Wir schließen, dass die beiden Algorithmen in diesem Kontext Gitter derselben Qualität erzeugen.

Vergleich des Zeitaufwandes zwischen uniformer und adaptiver Verfeinerung

Die Analysis dieser Arbeit besagt, dass die von den adaptiven Algorithmen `solve-hh2-weaksing` und `solve-res-weaksing` erzeugten diskreten Lösungen gegen die exakte Lösung konvergieren und dass der Algorithmus `solve-res-weaksing` eine optimale Konvergenzrate für den Fehlerschätzer liefert. Ein interessanter Aspekt ist, wie sich diese Algorithmen bezüglich der Zeit verhalten, die für eine gewisse Genauigkeit benötigt wird. Wir wollen also die Genauigkeit der diskreten Lösungen über der Zeit, die für ihre Berechnung nötig ist, plotten. Da ein adaptiver Algorithmus die ganze Historie von Verfeinerungen und Lösungen benötigt, können wir uniforme und adaptive Verfahren nicht mit derselben Zeitmessung ausstatten, daher messen wir die Zeiten unterschiedlich. Beide Verfahrenstypen starten zunächst in jedem Experiment mit dem selben groben Gitter $\mathcal{E}_0$.

- Für ein uniformes Verfahren ist $t_{\text{unif},\ell}$ die Zeit, die in Summe benötigt wird, um
 - das grobe Gitter $\mathcal{E}_0$ ℓ mal uniform zu verfeinern und so $\mathcal{E}_\ell$ zu erhalten,
 - die Daten (d.h. die diskreten Integraloperatoren) auf dem Gitter $\mathcal{E}_\ell$ zu berechnen,
 - die Galerkinlösung Φ_ℓ auf dem Gitter $\mathcal{E}_\ell$ zu berechnen.
- Für ein adaptives Verfahren ist $t_{\text{adap},\ell}$ in einer kumulativen Weise definiert, um dem adaptiven Algorithmus Rechnung zu tragen. Wir definieren $t_{\text{adap},-1} = 0$, und $t_{\text{adap},\ell}$ berechnet sich dann in Summe aus
 - der bisherigen Zeit $t_{\text{adap},\ell-1}$,
 - der Zeit um die Daten (d.h. die diskreten Integraloperatoren) auf dem Gitter $\mathcal{E}_\ell$ zu berechnen,
 - der Zeit, um auf $\mathcal{E}_\ell$ zu lösen und den Fehlerschätzer zu berechnen,
 - der Zeit, um das nächste Gitter $\mathcal{E}_{\ell+1}$ zu berechnen.

In Abbildung 7.7 plotten wir die Fehlerschätzer und die extrapolierten Energiefehler der adaptiven Algorithmen sowie einer uniformen Folge von Gittern über der Zeit, die für die Berechnung nötig ist. In Abbildung 7.6 (unten) vergleichen wir die Algorithmen `solve-res-weaksing` und `solve-hh2-weaksing` bezüglich der Zeit, die für die Berechnung einer gewissen Genauigkeit nötig ist. Die interessierende Größe ist dabei der Energiefehler, und wir sehen, dass der Algorithmus `solve-res-weaksing` um einen Faktor 3-4 schneller ist. Dies liegt daran, dass zur Berechnung des $h - h/2$ -Schätzers $\tilde{\mu}_\ell$ die Galerkinlösung auf einem uniform verfeinerten Gitter berechnet werden muss, während für die Zeit für die Berechnung des

gewichteten Residualschätzers ρ_ℓ durch die Anzahl der Auswertungspunkte zur Approximation des Oberflächengradienten bestimmt wird. Dies entspricht nicht ganz der Erwartung. Für den $h - h/2$ -Schätzer $\tilde{\mu}_\ell$ wird auf dem uniform verfeinerten Gitter das Einfachschichtpotential $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{4N \times 4N}$ berechnet, während für den gewichteten Residualschätzer ρ_ℓ das Einfachschichtpotential $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ auf dem groben Gitter sowie die Auswertung des Einfachschichtpotentials berechnet werden muss. Wie in Abschnitt 7.1.5 angegeben, werten wir das Einfachschichtpotential an 7 Punkten auf jedem Element aus, die Matrix der Auswertungspunkte ist also von der Größe $7N \times N$. Insgesamt benötigt die Berechnung des $h - h/2$ -Schätzers also den doppelten Aufwand als die Berechnung des Residualschätzers, ist in diesem Experiment unerwarteterweise 3 – 4 mal so teuer.

7.2.2 Fichera's Würfel

In diesem Experiment ist die zugrundeliegende Geometrie Γ die Oberfläche des sogenannten Fichera Würfels, welcher zusammen mit dem größten Gitter $\mathcal{E}_0$ und der gewählten Referenzkantenverteilung in Abbildung 7.2 (rechts) dargestellt ist. Durch Extrapolation der von `solve-res-weaksing` berechneten Daten erhalten wir eine extrapolierte Energie von $|||\phi|||_V^2 \approx 8.113212833$.

Algorithmus `solve-res-weaksing`

Wir verwenden zunächst wieder Algorithmus `solve-res-weaksing` 5.21, der durch den gewichteten Residualschätzer ρ_ℓ (5.21) gesteuert wird. Als Adaptivitätsparameter wählen wir, wie vorher, $\theta = 0.5$. In Abbildung 7.8 (oben) werden der extrapolierte quadrierte Energiefehler $|||\phi - \Phi_\ell|||_V^2$ und der quadrierte gewichtete Residualschätzer ρ_ℓ^2 , die von Algorithmus `solve-res-weaksing` erzeugt werden, über der Anzahl N der Freiheitsgrade geplottet. Zusätzlich werden Energiefehler und Fehlerschätzer für den uniformen Fall geplottet. Für den uniformen Algorithmus beobachten wir für Schätzer und Energiefehler eine suboptimale Konvergenzrate $\mathcal{O}(N^{2/6})$, während Algorithmus `solve-res-weaksing` die für isotrope Gitter optimale Konvergenzrate $\mathcal{O}(N^{-1/2})$ liefert. In Abbildung 7.9 plotten wir vier Gitter, die von Algorithmus `solve-res-weaksing` in den Schritten 10, 17, 23 und dem letzten Schritt 29 erzeugt werden. Wir beobachten, dass sich die uniforme Netzverfeinerung nur an den konvexen Kanten einstellt, während zu den Kanten an der Innenseite des ausgeschnittenen Teils nicht verfeinert wird. Dies entspricht auch der Erwartung. Mit $g = -1$ ist $(-1/2 + K)g = 1$, wir lösen also die Gleichung

$$V\phi = 1 = (-1/2 + K)g,$$

die eine äquivalente Formulierung eines Außenraumproblems ist, siehe [SS11, Section 3.4.2.2]. Für den Außenraum sind die Kanten der einspringenden Ecke des Würfels konvex, während alle anderen Kanten einspringende Kanten sind, an denen also generische Singularitäten erwartet werden.

Algorithmus `solve-hh2-weaksing`

Nun verwenden wir Algorithmus `solve-hh2-weaksing` 5.15, der durch den $h - h/2$ -Schätzer $\tilde{\mu}_\ell$ (5.14) gesteuert wird. Als Adaptivitätsparameter wählen wir abermals $\theta = 0.5$. In Abbildung 7.8 (unten) werden der extrapolierte quadrierte Energiefehler $|||\phi - \Phi_\ell|||_V^2$ und der quadrierte $h - h/2$ -Schätzer $\tilde{\mu}_\ell^2$, die von Algorithmus `solve-hh2-weaksing` erzeugt werden, über der Anzahl N der Freiheitsgrade geplottet. Zusätzlich plotten wir diese Größen auch für eine Folge von uniformen Gittern. In Abbildung 7.5 plotten wir die vier

Gitter, die von Algorithmus `solve-hh2-weaksing` in den Schritten 7, 14, 21 und dem letzten Schritt 27 erzeugt werden. Wir erhalten qualitativ dasselbe Verhalten wie für den Algorithmus `solve-res-weaksing`.

7.3 Dirichletproblem

In diesem Abschnitt lösen wir das Dirichletproblem (5.7)

$$V\phi = (1/2 + K)f$$

Die Galerkinlösung auf einem Gitter $\mathcal{E}_\ell$ ist demnach gegeben durch (5.10) mit $p = 0$. Wir werden die Algorithmen `solve-hh2-dirichlet` 5.16 und `solve-separate-res-dirichlet` 5.23 verwenden, um die exakte Lösung ϕ zu approximieren. Den für die Datenapproximation auf einem Gitter $\mathcal{E}_\ell$ nötigen Operator wählen wir als die $L_2(\Gamma)$ -Orthogonalprojektion auf $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\ell)$, das heißt wir setzen $\mathbb{P}_\ell = \Pi_\ell$. Als Geometrie dient die Oberfläche Γ des L-Blocks $\Omega = [-1, 1]^3 \setminus [0, 1]^2 \times [-1, 1]$, die in Abbildung 7.11 mitsamt der gewählten Referenzkantenverteilung dargestellt ist. Wir verwenden Zylinderkoordinaten (r, φ, z) mit $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $z \in \mathbb{R}$ und definieren die Funktion

$$u(r, \varphi, z) = r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\left(\varphi + \frac{3}{2}\pi\right)\right).$$

Es gilt $-\Delta u = 0$ und $u \in H^{5/3-\varepsilon}(\Omega)$ für alle $\varepsilon > 0$. Wir wählen das Dirichletdatum als $f = \gamma_0^{\text{int}} u$ und bemerken, dass $\phi \in H^{1/6-\varepsilon}(\Gamma)$ gilt. Das Datum f verschwindet an den beiden einspringenden Seitenflächen, und daher gilt $f \in H^{5/3-\varepsilon}(\Gamma)$. Für eine uniforme Folge von Gittern erwarten wir daher eine Konvergenzrate $\mathcal{O}(h^{2/3-\varepsilon}) = \mathcal{O}(N^{-1/3+\varepsilon})$ für den Fehlerschätzer und den Energiefehler, jedoch $\mathcal{O}(h^{7/6-\varepsilon}) = \mathcal{O}(N^{-7/12+\varepsilon})$ für die Datenoszillationen. Durch Extrapolation der von einer uniformen Folge von Gittern berechneten Daten erhalten wir eine Energie von $|||\phi|||_V^2 \approx 1.937780194756554$.

Algorithmus `solve-separate-res-dirichlet`

Wir verwenden Algorithmus `solve-separate-res-dirichlet` 5.23, der durch den gewichteten Residualschätzer ρ_ℓ (5.22) und die Datenoszillationen osc_ℓ aus (5.22) gesteuert wird. Als Adaptivitätsparameter für die separate Markierungsstrategie wählen wir $\theta_1 = \theta_2 = \vartheta = 0.5$. In Abbildung 7.12 (oben) werden der extrapolierte quadrierte Energiefehler $|||\phi - \Phi_\ell|||_V^2$, der quadrierte gewichtete Residualschätzer ρ_ℓ^2 sowie die Datenoszillationen osc_ℓ^2 , die von Algorithmus `solve-separate-res-dirichlet` erzeugt werden, über der Anzahl N der Freiheitsgrade geplottet. Zusätzlich werden Energiefehler und Fehlerschätzer für den uniformen Fall geplottet. Wie zu sehen ist, liegen die Kurven für den quadrierten Energiefehler und den quadrierten Fehlerschätzer parallel zu $\mathcal{O}(N^{-2/3})$. Die quadrierten Datenoszillationen fallen im uniformen Fall wie erwartet mit einer Rate von $\mathcal{O}(N^{-7/6})$. Der adaptive Algorithmus liefert nicht die optimale Konvergenzordnung von $\mathcal{O}(N^{-3/2})$ für die quadrierten Größen, sondern eine geschätzte Rate von $\mathcal{O}(N^{-4/3})$. Die Singularität der Spur f liegt, wie wir bereits bemerkt haben, an den einspringenden Ecken der Ober- und Unterseite des Gebietes, während die Singularität der exakten Lösung ϕ liegt dagegen an der einspringenden Kante des Gebietes. Da die separierte Markierungsstrategie jeweils nur mit dem Fehlerschätzer ρ_ℓ oder mit den Oszillationen osc_ℓ markiert, erklärt sich das stufenförmige Verhalten der Graphen für ρ_ℓ und

osc_ℓ im adaptiven Fall in Abbildung 7.12. In Abbildung 7.13 plotten wir wieder 4 Gitter, die in den Schritten 10, 20, 30 und 41 erzeugt werden. Die Singularität der exakten Lösung ϕ entlang der einspringenden Kante lässt eine Verfeinerung in diesem Bereich erwarten, die sich, wie in den Abbildungen zu erkennen ist, auch einstellt.

Algorithmus solve-hh2-dirichlet

Wir verwenden Algorithmus `solve-hh2-dirichlet` 5.16 mit dem Adaptivitätsparameter $\theta = 0.5$. Durch die Definition des $h - h/2$ -Schätzers $\tilde{\mu}_\ell$ aus Lemma 5.12 muss die Galerkinlösung $\Phi_\ell \in \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\ell)$ nicht berechnet werden, stattdessen ist in jedem Schritt die Galerkinlösung $\hat{\Phi}_\ell \in \mathcal{P}^0(\hat{\mathcal{E}}_\ell)$ auf dem uniform verfeinerten Gitter $\hat{\mathcal{E}}_\ell$ zu berechnen. Implementierungstechnisch ist es daher ratsamer, die Galerkinlösung $\hat{\Phi}_\ell \in \mathcal{P}^0(\hat{\mathcal{E}}_\ell)$ zur rechten Seite $\hat{\Pi}_\ell f \in \mathcal{S}^1(\hat{\mathcal{E}}_\ell)$ mit der L_2 -Projektion $\hat{\Pi}_\ell$ auf $\mathcal{S}^1(\hat{\mathcal{E}}_\ell)$ zu definieren, das heißt

$$\langle V\hat{\Phi}_\ell, \hat{\Psi}_\ell \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} = \langle (K + 1/2)\hat{\Pi}_\ell f, \hat{\Psi}_\ell \rangle_{H^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } \hat{\Psi}_\ell \in \mathcal{P}^p(\hat{\mathcal{E}}_\ell).$$

Ausserdem wählen wir die Oszillationen nicht wie in (5.16), sondern durch (5.22), das heißt

$$\text{osc}_\ell := \|\hat{h}_\ell^{1/2}(1 - \hat{\pi}_\ell)\nabla_\Gamma f\|_{L_2(\Gamma)}, \quad (7.8)$$

wobei $\hat{\pi}_\ell$ die L_2 -Projektion auf $\mathcal{P}^0(\hat{\mathcal{E}}_\ell)$ bezeichnet. Durch diese Modifikationen, die die Implementierung wesentlich vereinfachen, nimmt die Schätzerreduktion aus Lemma 5.18 die Form

$$\tau_{\ell+1}^2 \leq \hat{\kappa}\tau_\ell^2 + C_{\text{red}} \left(\|\hat{\Phi}_{\ell+1} - \hat{\Phi}_\ell\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|\hat{\Pi}_{\ell+1}f - \hat{\Pi}_\ell f\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \right)$$

an, sodass der Algorithmus nach wie vor konvergent ist. In Abbildung 7.12 (unten) plotten wir die quadrierten Größen Fehlerschätzer, Oszillationen und Energiefehler, die von Algorithmus `solve-hh2-dirichlet` erzeugt werden. Parallel plotten wir diese Größen für eine uniforme Folge von Gittern. Für die uniforme Folge von Gittern erhalten wir wie im vorigen Experiment eine Konvergenzrate von $\mathcal{O}(N^{-2/3})$ für den quadrierten Energiefehler und den quadrierten Fehlerschätzer. Die quadrierten Oszillationen fallen wie erwartet mit einer Rate von $\mathcal{O}(N^{-7/6})$. Algorithmus `solve-hh2-dirichlet` liefert eine Konvergenzrate von $\mathcal{O}(N^{-4/3})$ für die quadrierten Größen. In Abbildung 7.14 plotten wir die 4 Gitter, die in den Schritten 5, 8, 13 und 18 erzeugt werden. Wie zu erwarten stellt sich die Verfeinerung entlang der einspringenden Kante ein.

Vergleich zwischen $h - h/2$ -Schätzer und gewichtetem Residualschätzer

In Abbildung 7.15 (oben) vergleichen wir die Konvergenzraten für Schätzer und Energiefehler der beiden Algorithmen `solve-hh2-dirichlet` und `solve-separate-res-dirichlet`. Anders als in Experiment 7.2.1 ist kein massiver Unterschied der Größenordnungen von $h - h/2$ -Schätzer und Residualschätzer zu erkennen, jedoch ist die Differenz von Schätzer und tatsächlicher Energienorm für den Residualschätzer geringer.

Vergleich des Zeitaufwandes zwischen uniformer und adaptiver Verfeinerung

In Abbildung 7.16 vergleichen wir die Zeiten, die die Algorithmen `solve-hh2-dirichlet` und `solve-separate-res-dirichlet` benötigen. Wir plotten Fehlerschätzer, Oszillationen und extrapolierten

Energiefehler über der benötigten Zeit, die wir in Experiment 7.2.1 definiert haben. Wir sehen, dass die adaptiven Algorithmen sich auch bezüglich des Zeitaufwandes besser verhalten als die uniforme Variante. Die Differenz der benötigten Zeit für eine gewisse Genauigkeit des Energiefehlers ist in diesem Experiment nicht mehr so massiv wie in Experiment 7.2.1.

7.4 Abschließende Bemerkungen

Wir haben in zwei Experimenten jeweils $h - h/2$ -Schätzer und gewichteten Residualschätzer verglichen. Das Prinzip des $h - h/2$ -Schätzers ist äußerst einfach und kann auf beliebige Probleme angewandt werden, während die Herleitung des Residualschätzers an der zugrundeliegenden Gleichung hängt und daher auch analytisch aufwändiger ist. Für den $h - h/2$ -Schätzer spricht ebenfalls, dass der Aufwand für die Implementierung sehr gering ist und Schätzer von diesem Typus auch in bestehende Softwarebibliotheken ohne großen Aufwand eingepflegt werden können. Im Gegensatz dazu ist der Aufwand für die Implementierung des gewichteten Residualschätzers enorm. Der Schätzer benötigt zunächst stabile Routinen für die Auswertung der Integraloperatoren. Um dem fastlinearen Aufwand einer schnellen Randelementmethode gerecht zu werden, müssen diese Routinen aber so gestaltet sein, dass sie die Auswertung separat für die Basisfunktionen des zugrundeliegenden Ansatzraumes zulassen, sodass die Matrix aller Auswertungen schnell aufgestellt werden kann. Die Aufnahme eines Schätzers von diesem Typus in eine bereits bestehende Bibliothek ist daher mit großem Aufwand und der genauen Kenntnis dieser Bibliothek verbunden. Bezüglich der Rechenzeiten ist zu sagen, dass sich für den Residualschätzer in den hier getätigten Experimenten bessere Rechenzeiten als für den $h - h/2$ -Schätzer einstellen. Theoretische Überlegungen in diesem Rahmen zeigen, dass die Algorithmen, die mit einem $h - h/2$ -Schätzer arbeiten, mindestens den zweifachen Aufwand der Algorithmen mit einem Residualschätzer haben. Ein Nachteil des $h - h/2$ -Schätzers ist außerdem, dass seine Zuverlässigkeit äquivalent zur Saturationsannahme ist. Während die Konvergenz der Algorithmen für beide Schätzertypen sichergestellt ist, so ist die Quasioptimalität nur durch Verwendung des Residualschätzers bewiesen. Wir sehen aber experimentell, dass beide Schätzertypen auf die theoretisch vorausgesagten Konvergenzraten führen.

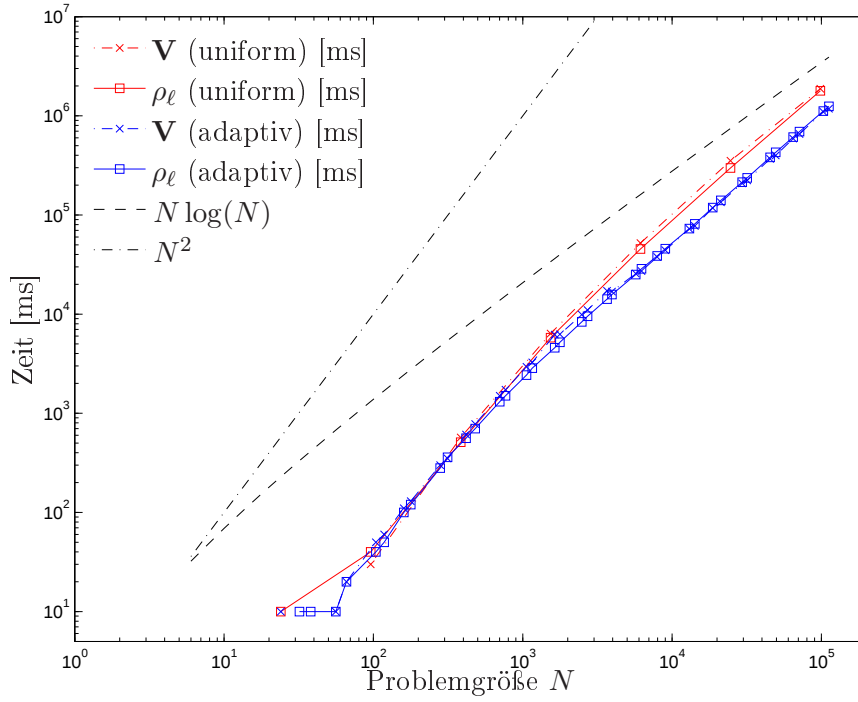


Abbildung 7.1: Die benötigten Zeiten für das Aufstellen der Matrix $\mathbf{V}$ und der Berechnung des gewichteten Residualschätzers ρ_ℓ . Die Daten entstammen dem Experiment 7.2.1. Es werden die benötigten Zeiten für uniforme Netzverfeinerung und adaptive Netzverfeinerung, gesteuert durch den Algorithmus **solve-res-weaksing**, geplottet. Anstatt dem in einer normalen Implementierung nötigen Aufwand $\mathcal{O}(N^2)$ erhalten wir nach einer kurzen Anlaufphase, die dem Overhead durch die Implementierung der schnellen Methode geschuldet ist, einen fast-linearen Aufwand $\mathcal{O}(N \log(N))$.

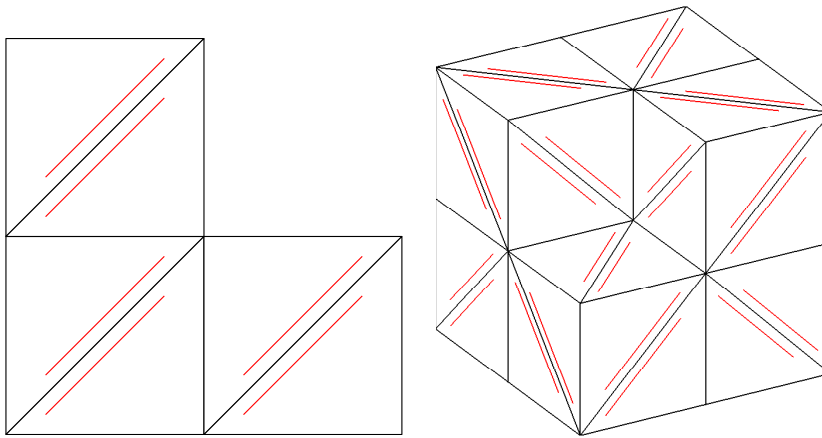


Abbildung 7.2: Die Geometrien mitsamt der Startgitter $\mathcal{E}_0$ für die Experimente 7.2.1 (links) und 7.2.2 (rechts).

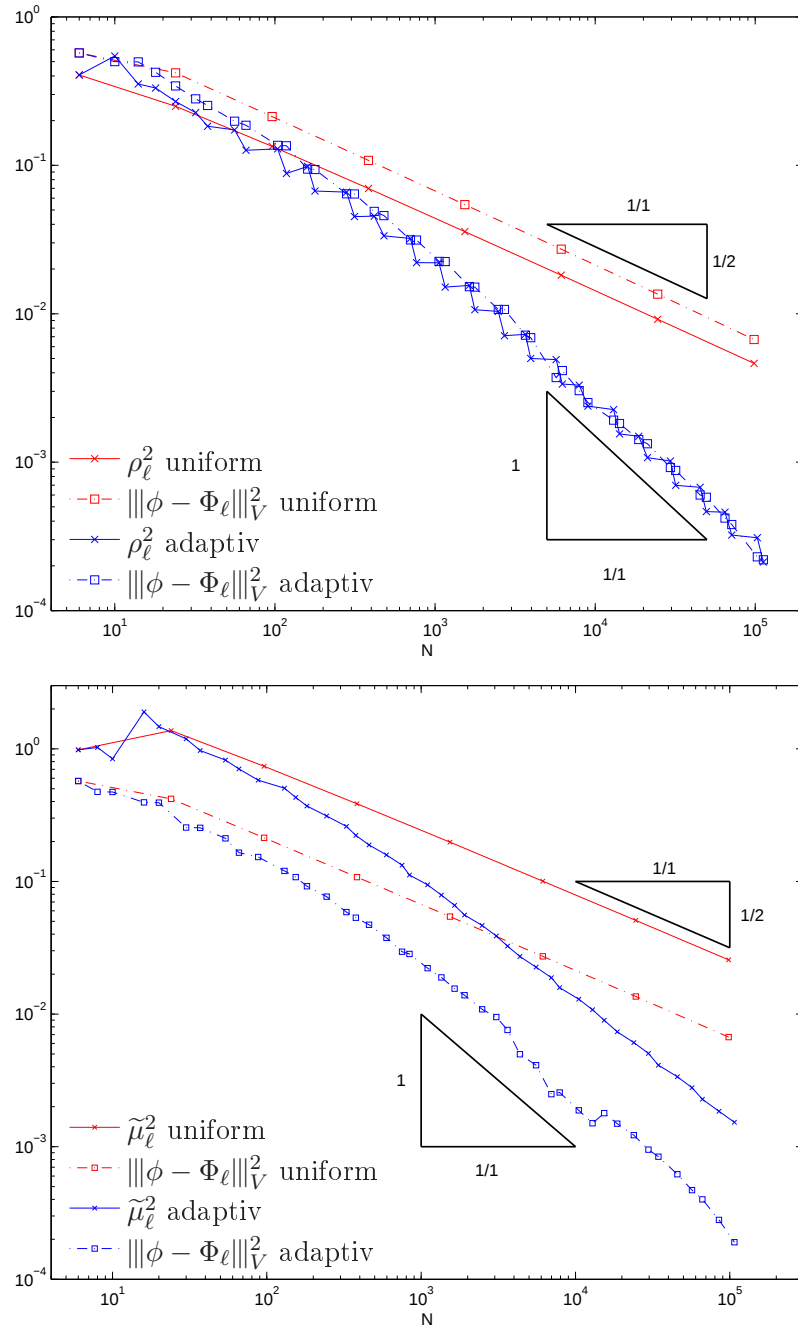


Abbildung 7.3: Oben: Experiment 7.2.1 auf dem L-förmigen Gebiet mit Algorithmus `solve-res-weaksing` 5.21: Konvergenz des gewichteten Residualschätzers und des Energiefehlers im adaptiven und uniformen Fall.

Unten: Experiment 7.2.1 auf dem L-förmigen Gebiet mit Algorithmus `solve-hh2-weaksing` 5.15: Konvergenz des $h - h/2$ -Schätzers und des Energiefehlers im adaptiven und uniformen Fall.

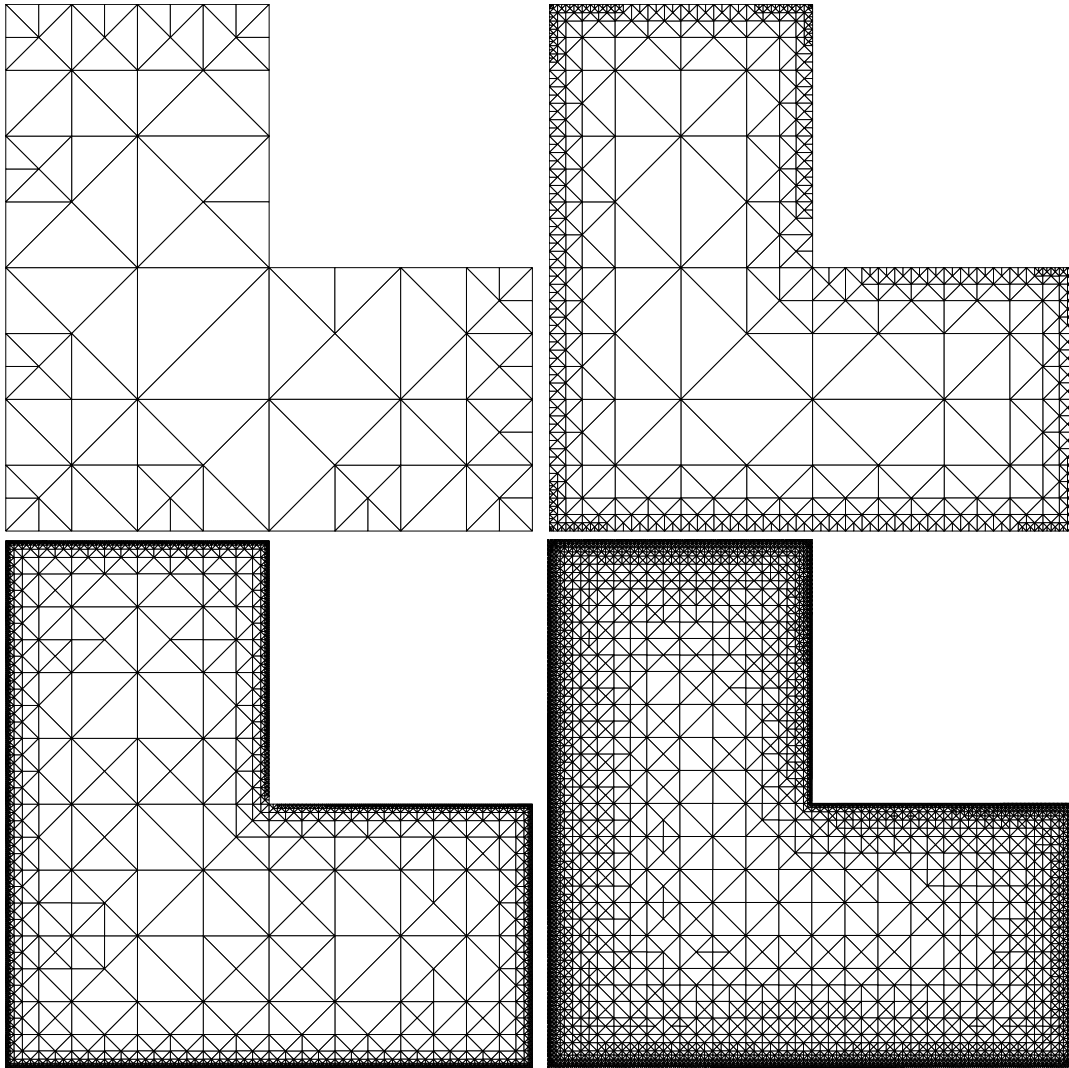


Abbildung 7.4: Die Gitter $\mathcal{E}_{10}$, $\mathcal{E}_{20}$, $\mathcal{E}_{30}$ und $\mathcal{E}_{42}$, die von Algorithmus `solve-res-weaksing` erzeugt werden.

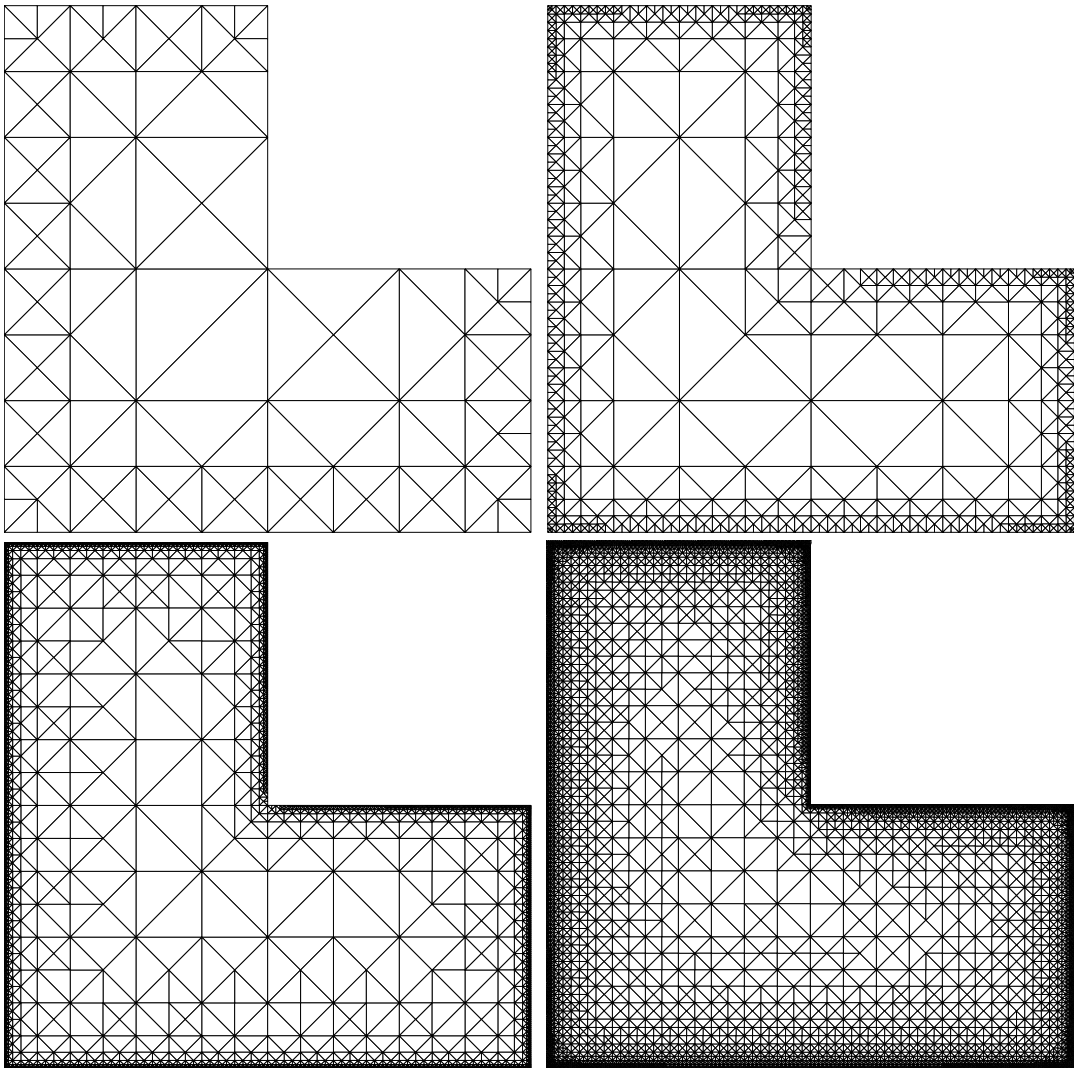


Abbildung 7.5: Die Gitter $\mathcal{E}_{10}$, $\mathcal{E}_{20}$, $\mathcal{E}_{30}$ und $\mathcal{E}_{42}$, die von von Algorithmus `solve-hh2-weaksing` erzeugt werden.

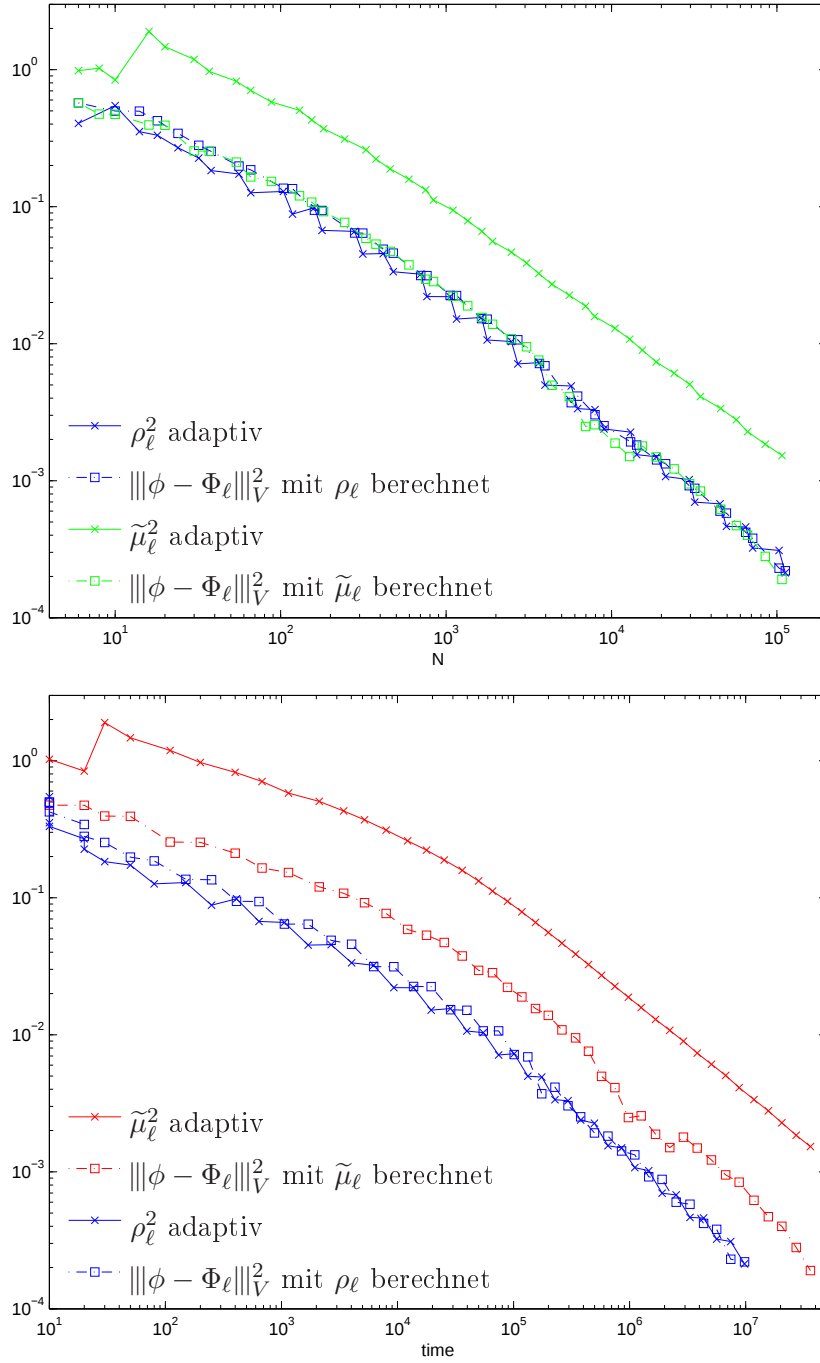


Abbildung 7.6: Vergleich des $h - h/2$ Fehlerschätzer $\tilde{\mu}_\ell^2$ aus Algorithmus `solve-hh2-weaksing` und des gewichteten Residualschätzers ρ_ℓ^2 aus Algorithmus `solve-res-weaksing` in Experiment 7.2.1. Oben: Fehlerschätzer und Energiefehler über der Anzahl der Freiheitsgrade. Unten: Fehlerschätzer und Energiefehler über der Zeit, die für die Berechnung benötigt wird.

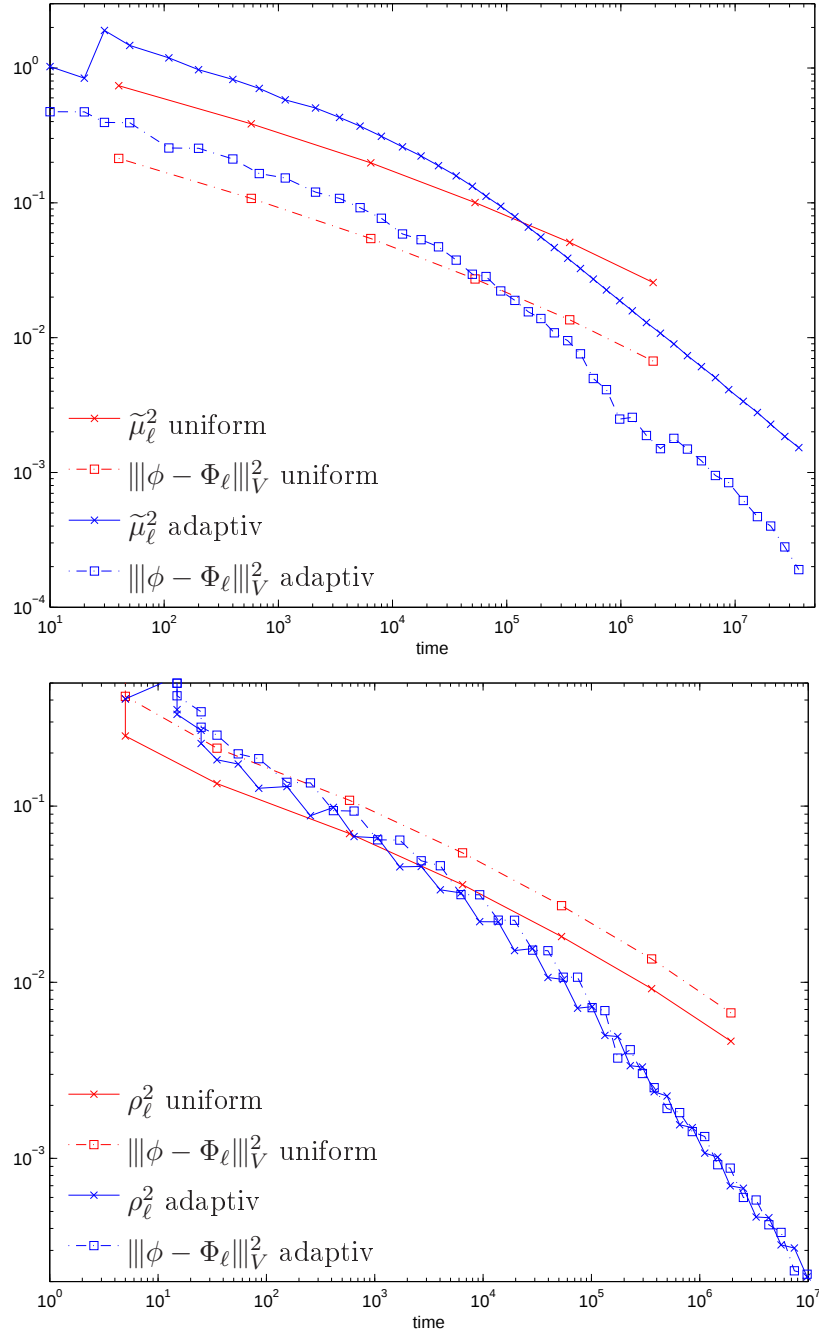


Abbildung 7.7: Vergleich der Rechenzeiten von adaptiven und uniformen Verfahren. Die obere Abbildung zeigt den $h-h/2$ -Fehlerschätzer $\tilde{\mu}_\ell^2$ und den extrapolierten Energiefehler $\|\phi - \Phi_\ell\|_V^2$ für eine uniforme Folge von Gittern sowie für den Algorithmus `solve-hh2-weaksing`. Die untere Abbildung zeigt den gewichteten Residualschätzer ρ_ℓ^2 und den extrapolierten Energiefehler $\|\phi - \Phi_\ell\|_V^2$ für eine uniforme Folge von Gittern sowie für den Algorithmus `solve-res-weaksing`.

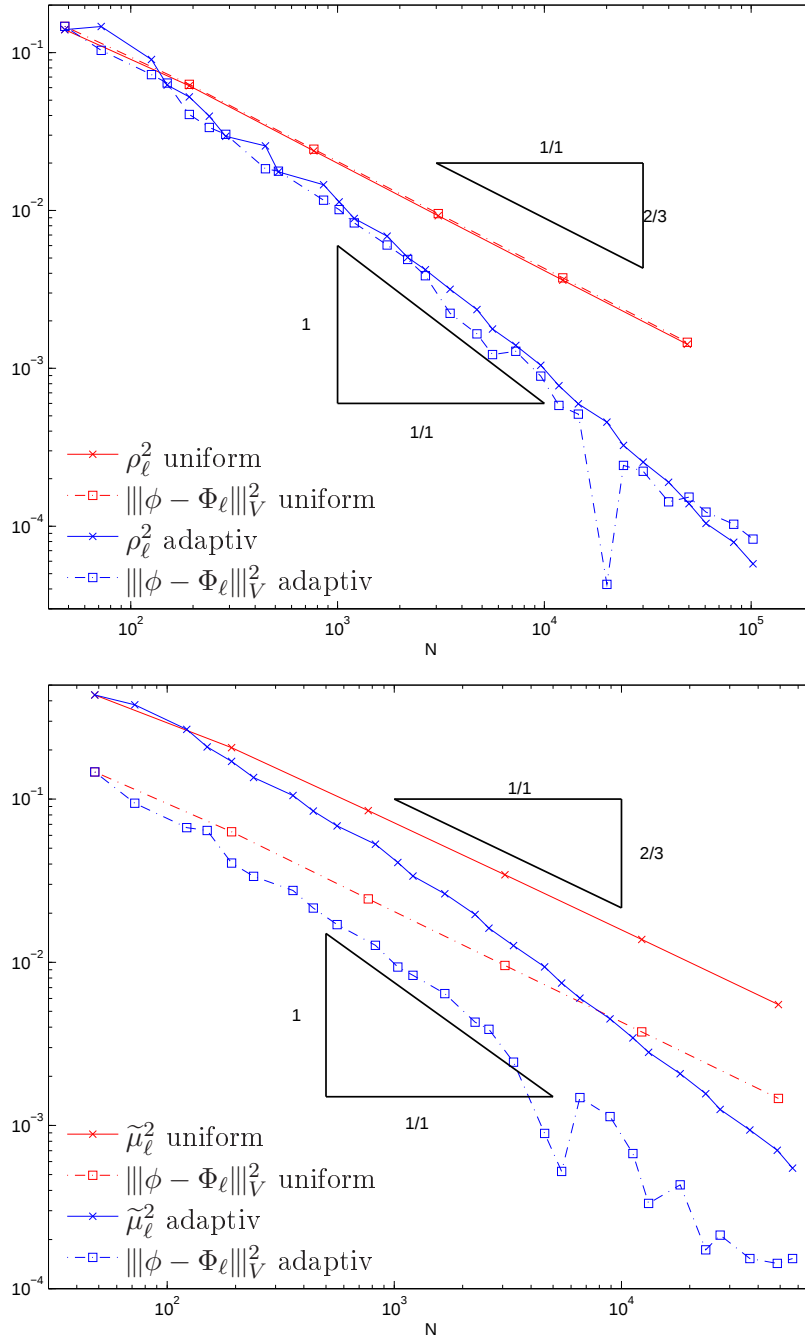


Abbildung 7.8: Oben: Experiment 7.2.2 auf dem Fichera Würfel mit Algorithmus `solve-res-weaksing` 5.21: Konvergenz des gewichteten Residualschätzers und des Energiefehlers im adaptiven und uniformen Fall.

Unten: Experiment 7.2.1 auf dem Fichera Würfel mit Algorithmus `solve-hh2-weaksing` 5.15: Konvergenz des $h - h/2$ -Schätzers und des Energiefehlers im adaptiven und uniformen Fall.

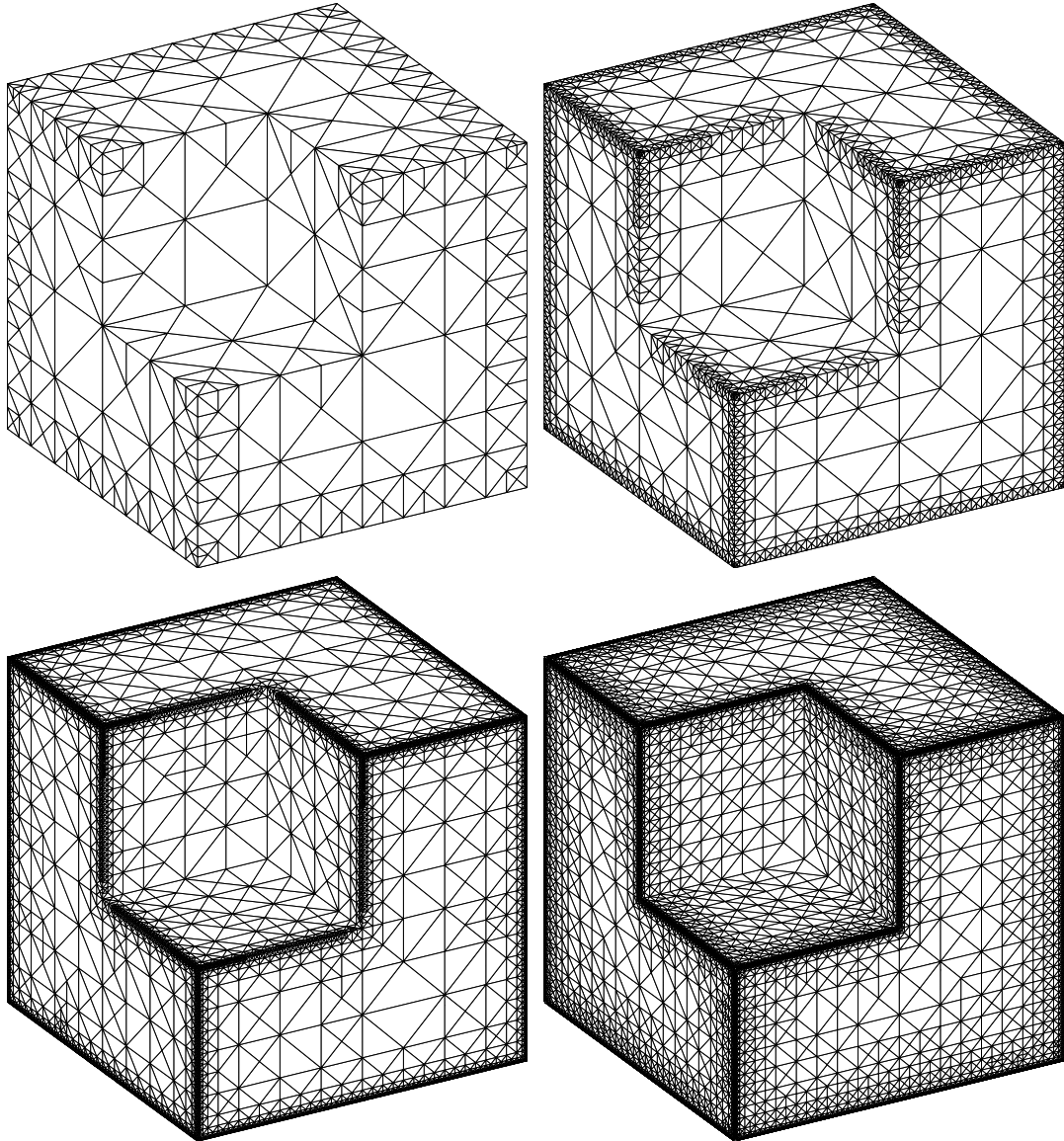


Abbildung 7.9: Die Gitter $\mathcal{E}_{10}$, $\mathcal{E}_{17}$, $\mathcal{E}_{23}$ und $\mathcal{E}_{29}$, die von von Algorithmus `solve-res-weaksing` erzeugt werden.

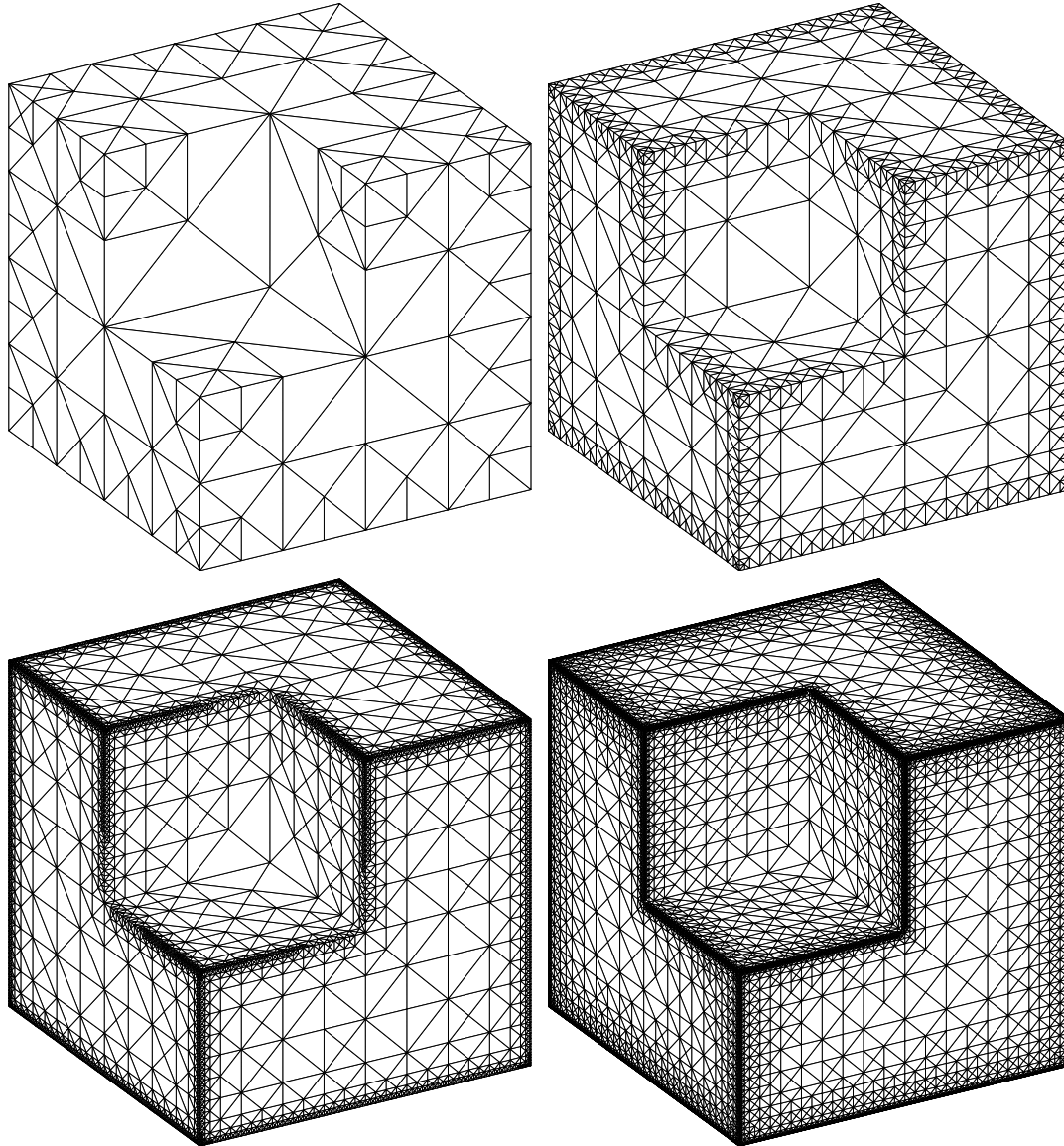


Abbildung 7.10: Die Gitter $\mathcal{E}_7$, $\mathcal{E}_{14}$, $\mathcal{E}_{21}$ und $\mathcal{E}_{27}$, die von von Algorithmus `solve-hh2-weak` erzeugt werden.

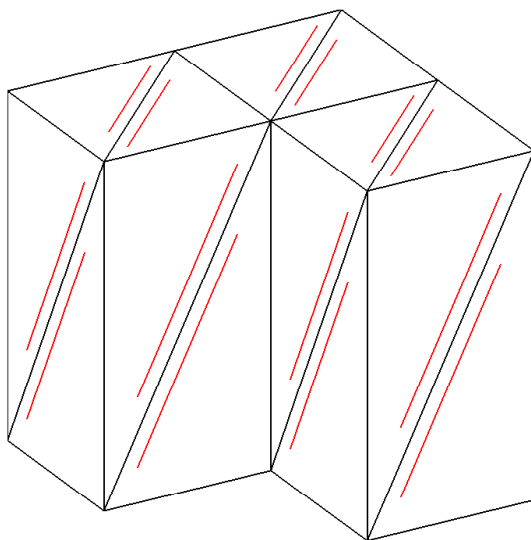


Abbildung 7.11: Die Geometrie Γ mitsamt dem Startgitter $\mathcal{E}_0$ für das Experiment 7.3 zum Dirichletproblem.

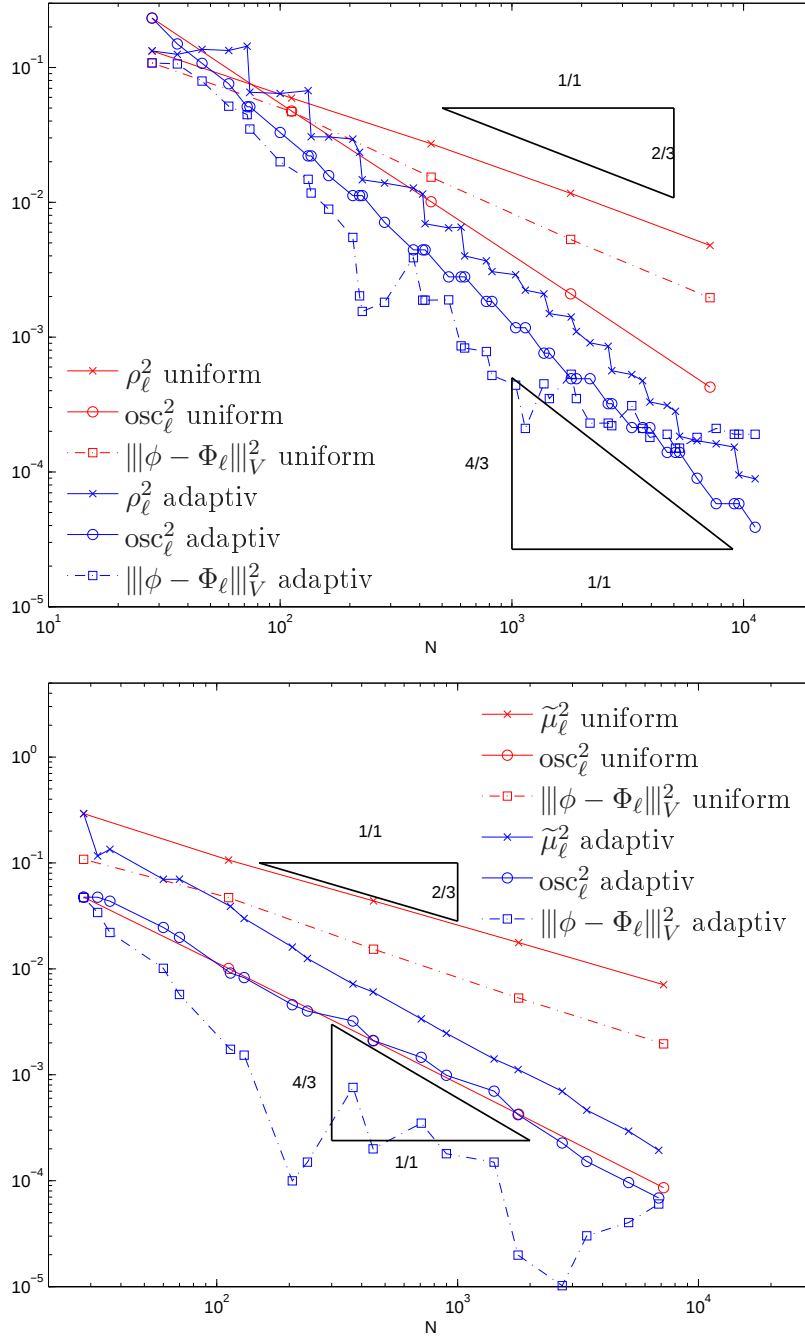


Abbildung 7.12: Oben: Experiment 7.3 auf dem L-Block mit Algorithmus `solve-separate-res-dirichlet` 5.23: Konvergenz des gewichteten Residualschätzers, der Oszillationen und des Energiefehlers im adaptiven und uniformen Fall.

Unten: Experiment 7.3 auf dem L-Block mit Algorithmus `solve-hh2-dirichlet` 5.16: Konvergenz des $h - h/2$ -Schätzers, der Oszillationen und des Energiefehlers im adaptiven und uniformen Fall.

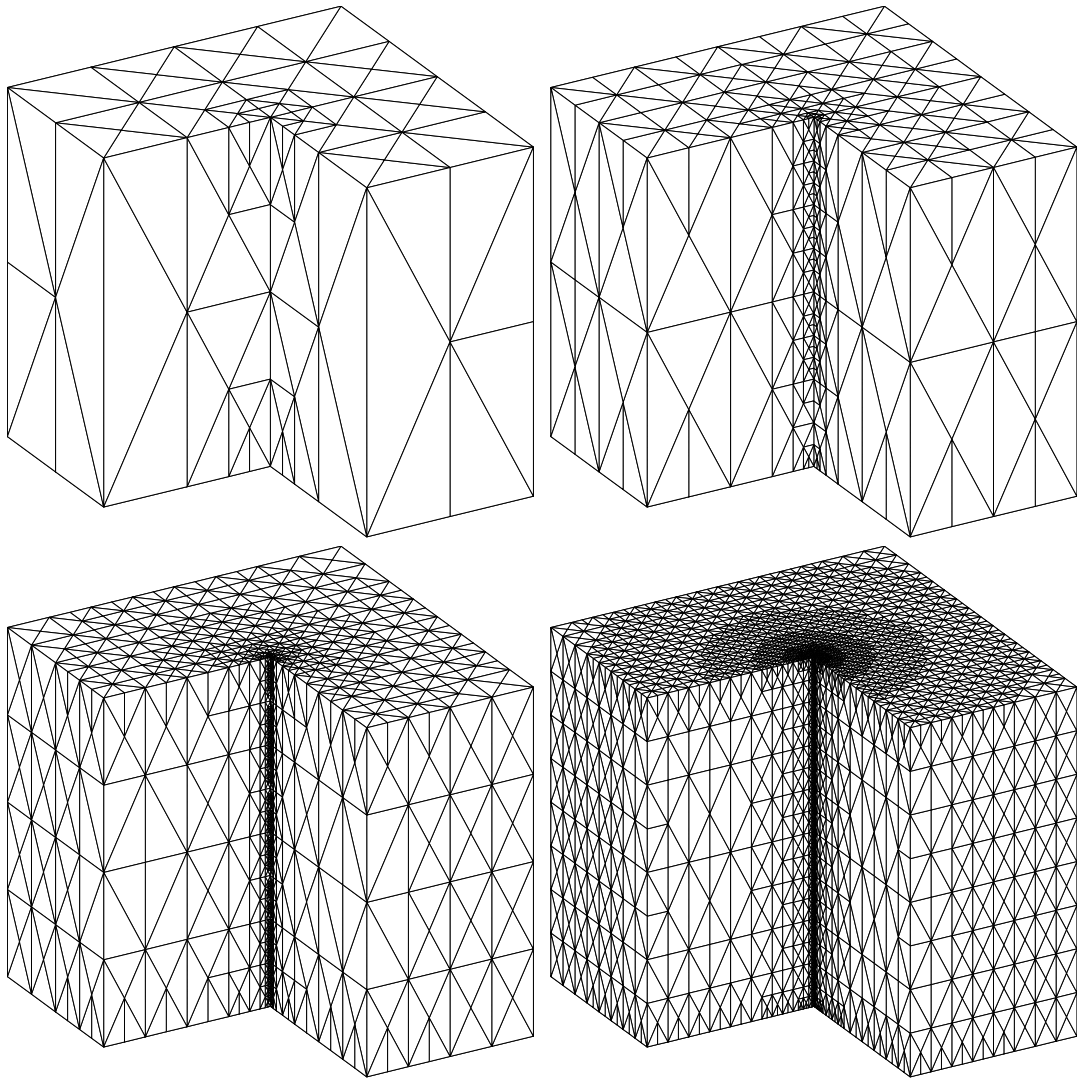


Abbildung 7.13: Die Gitter $\mathcal{E}_{10}$, $\mathcal{E}_{20}$, $\mathcal{E}_{30}$ und $\mathcal{E}_{41}$, die von von Algorithmus `solve-separate-res-dirichlet` erzeugt werden.

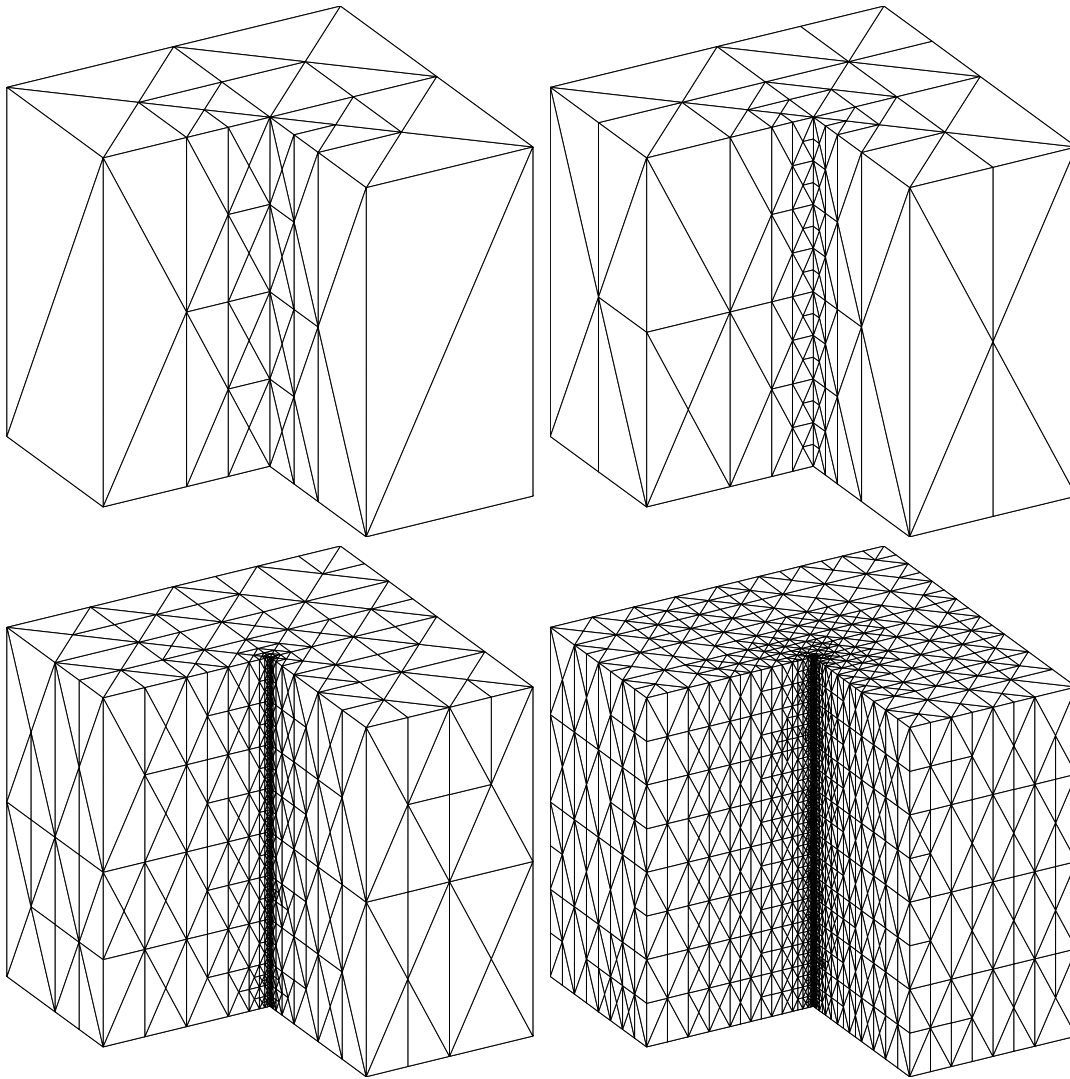


Abbildung 7.14: Die Gitter $\mathcal{E}_5$, $\mathcal{E}_8$, $\mathcal{E}_{13}$ und $\mathcal{E}_{18}$, die von von Algorithmus `solve-hh2-dirichlet` erzeugt werden.

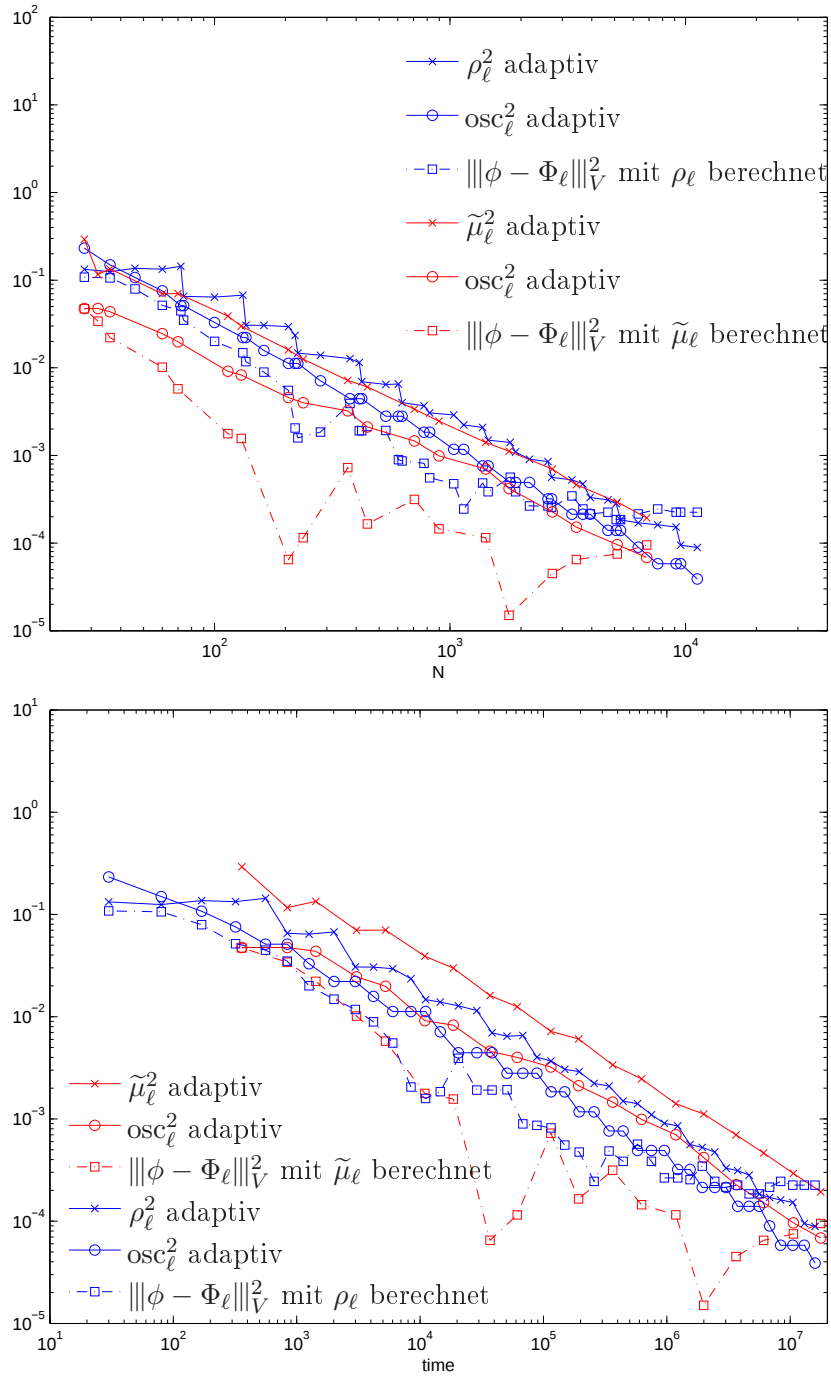


Abbildung 7.15: Vergleich des $h - h/2$ Fehlerschätzer $\tilde{\mu}_\ell^2$ aus Algorithmus `solve-hh2-dirichlet` und des gewichteten Residualschätzers ρ_ℓ^2 aus Algorithmus `solve-separate-res-dirichlet` in Experiment 7.3. Oben: Fehlerschätzer, Oszillationen und Energiefehler über der Anzahl der Freiheitsgrade. Unten: Fehlerschätzer, Oszillationen und Energiefehler über der Zeit, die für die Berechnung benötigt wird.

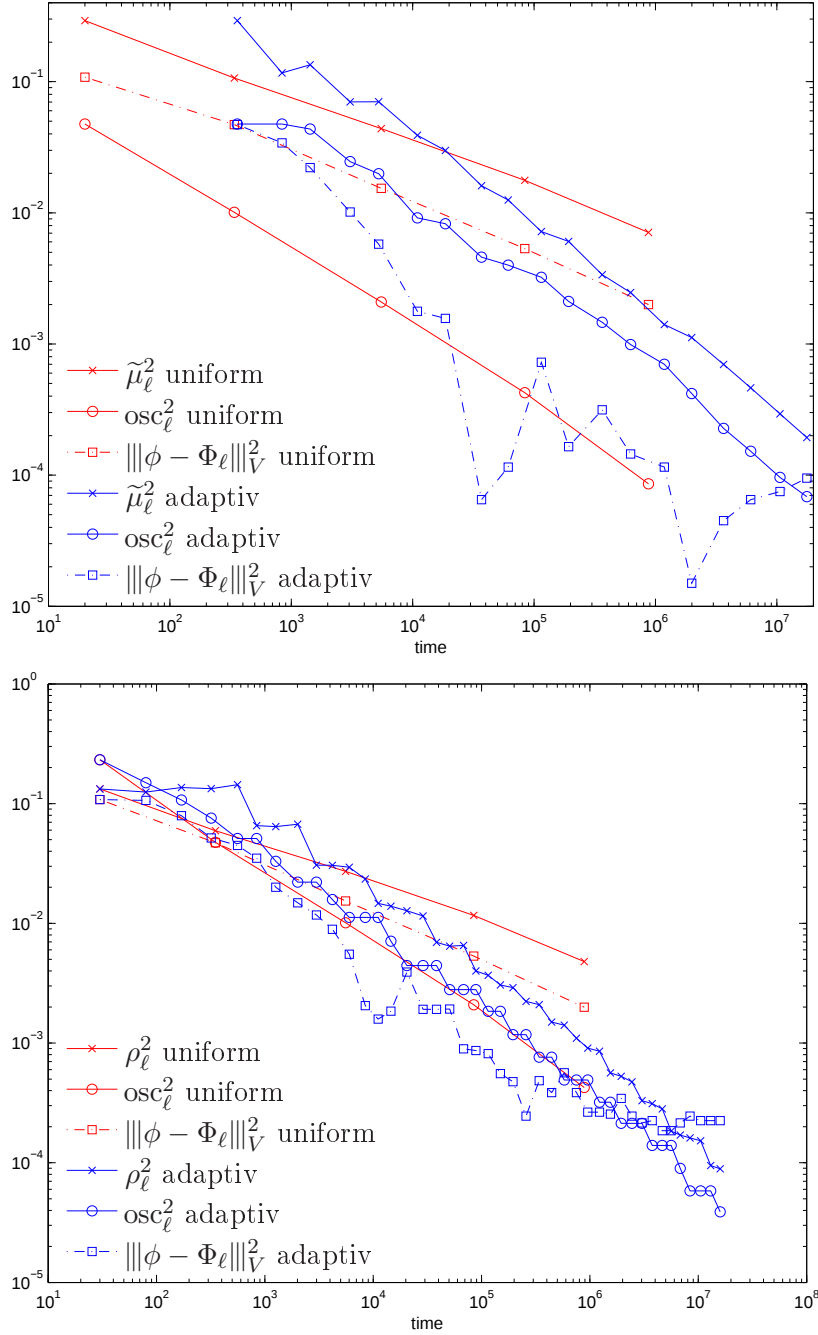


Abbildung 7.16: Vergleich der Rechenzeiten von adaptiven und uniformen Verfahren. Oben: $h - h/2$ -Fehlerschätzer $\tilde{\mu}_\ell^2$, Oszillationen osc_ℓ^2 (7.8) und extrapoliierter Energiefehler $\|\phi - \Phi_\ell\|_V^2$ für eine uniforme Folge von Gittern sowie für den Algorithmus `solve-hh2-dirichlet`. Unten: gewichteter Residualschätzer ρ_ℓ^2 , Oszillationen osc_ℓ^2 und extrapoliierter Energiefehler $\|\phi - \Phi_\ell\|_V^2$ für eine uniforme Folge von Gittern sowie für den Algorithmus `solve-separate-res-dirichlet`.

Literaturverzeichnis

- [Ada75] Robert A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.
- [AFF⁺12a] Markus Aurada, Michael Feischl, Thomas Führer, Michael Karkulik, Jens Markus Melenk, and Dirk Praetorius. Inverse estimates for elliptic integral operators and application to the adaptive coupling of FEM and BEM. Technical report, Institute for Analysis and Scientific Computing, TU Wien, 2012. in preparation.
- [AFF⁺12b] Markus Aurada, Michael Feischl, Thomas Führer, Michael Karkulik, and Dirk Praetorius. Efficiency and optimality of some weighted-residual error estimator for adaptive 2d boundary element methods. ASC Report 25, Institute for Analysis and Scientific Computing, TU Wien, 2012.
- [AFG⁺12] Markus Aurada, Michael Feischl, Petra Goldenits, Michael Karkulik, Markus Mayr, and Dirk Praetorius. Convergence of adaptive bem for some mixed boundary value problem. *Appl. Numer. Math.*, 62:226–245, 2012.
- [AFK⁺12] Markus Aurada, Michael Feischl, Josef Kemetmüller, Marcus Page, and Dirk Praetorius. Each $H^{1/2}$ -stable projection yields convergence and quasi-optimality of adaptive fem with inhomogeneous dirichlet data in $\mathbb{R}^d$. Technical Report 03, TU Wien, 2012.
- [AFLP12] Markus Aurada, Samuel Ferraz-Leite, and Dirk Praetorius. Estimator reduction and convergence of adaptive bem. *Appl. Numer. Math.*, 62:787–801, 2012.
- [AL09] Mario Arioli and Daniel Loghin. Discrete interpolation norms with applications. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(4):2924–2951, 2009.
- [AMT99] Mark Ainsworth, William McLean, and Thanh Tran. The conditioning of boundary element equations on locally refined meshes and preconditioning by diagonal scaling. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(6):1901–1932 (electronic), 1999.
- [AMT00] Mark Ainsworth, Bill McLean, and Thanh Tran. Diagonal scaling of stiffness matrices in the Galerkin boundary element method. *ANZIAM J.*, 42(1):141–150, 2000. Papers in honour of David Elliott on the occasion of his sixty-fifth birthday.
- [BDD04] Peter Binev, Wolfgang Dahmen, and Ron DeVore. Adaptive finite element methods with convergence rates. *Numer. Math.*, 97(2):219–268, 2004.

- [Beb00] Mario Bebendorf. Approximation of boundary element matrices. *Numer. Math.*, 86(4):565–589, 2000.
- [BL76] Jöran Bergh and Jörgen Löfström. *Interpolation spaces. An introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223.
- [BPS02] James H. Bramble, Joseph E. Pasciak, and Olaf Steinbach. On the stability of the L^2 projection in $H^1(\Omega)$. *Math. Comp.*, 71(237):147–156 (electronic), 2002.
- [BS08] Susanne C. Brenner and L. Ridgway Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2008.
- [BV84] Ivo Babuška and Michael Vogelius. Feedback and adaptive finite element solution of one-dimensional boundary value problems. *Numer. Math.*, 44(1):75–102, 1984.
- [BX91] James H. Bramble and Jinchao Xu. Some estimates for a weighted L^2 projection. *Math. Comp.*, 56(194):463–476, 1991.
- [Car02] Carsten Carstensen. Merging the Bramble-Pasciak-Steinbach and the Crouzeix-Thomée criterion for H^1 -stability of the L^2 -projection onto finite element spaces. *Math. Comp.*, 71(237):157–163 (electronic), 2002.
- [Car04] Carsten Carstensen. An adaptive mesh-refining algorithm allowing for an H^1 stable L^2 projection onto Courant finite element spaces. *Constr. Approx.*, 20(4):549–564, 2004.
- [CF01] Carsten Carstensen and Birgit Faermann. Mathematical foundation of a posteriori error estimates and adaptive mesh-refining algorithms for boundary integral equations of the first kind. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 25(7):497 – 509, 2001.
- [CKNS08] J. Manuel Cascon, Christian Kreuzer, Ricardo H. Nochetto, and Kunibert G. Siebert. Quasi-optimal convergence rate for an adaptive finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(5):2524–2550, 2008.
- [Clé75] Philippe Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *RAIRO Analyse Numérique*, 9(R-2):77–84, 1975.
- [CMPS04] Carsten Carstensen, Matthias Maischak, Dirk Praetorius, and E. P. Stephan. Residual-based a posteriori error estimate for hypersingular equation on surfaces. *Numer. Math.*, 97(3):397–425, 2004.
- [CMS01] Carsten Carstensen, Matthias Maischak, and Ernst. P. Stephan. A posteriori error estimate and h -adaptive algorithm on surfaces for Symm’s integral equation. *Numer. Math.*, 90(2):197–213, 2001.
- [Cos88] Martin Costabel. Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results. *SIAM J. Math. Anal.*, 19(3):613–626, 1988.
- [CP12] Carsten Carstensen and Dirk Praetorius. Convergence of adaptive boundary element methods. *J. Integral Equations Appl.*, 24:1–23, 2012.

- [CT87] Michel Crouzeix and Vidar Thomée. The stability in L_p and W_p^1 of the L_2 -projection onto finite element function spaces. *Math. Comp.*, 48(178):521–532, 1987.
- [CvPS09] Alexey Chernov, Tobias von Petersdorff, and Christoph Schwab. Exponential convergence of hp quadrature for integral operator with gevrey kernels. Technical Report 2009-03, ETH Zürich, 2009.
- [DHS07] Wolfgang Dahmen, Helmut Harbrecht, and Reinhold Schneider. Adaptive methods for boundary integral equations: complexity and convergence estimates. *Math. Comp.*, 76(259):1243–1274, 2007.
- [Djo06] Jelena Djokic. *Efficient update of hierarchical matrices in the case of adaptive discretisation schemes*. PhD thesis, Universität Leipzig, 2006.
- [DN02] Willy Dörfler and Ricardo H. Nochetto. Small data oscillation implies the saturation assumption. *Numer. Math.*, 91(1):1–12, 2002.
- [Dör96] Willy Dörfler. A convergent adaptive algorithm for Poisson’s equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(3):1106–1124, 1996.
- [DS80] Todd Dupont and Ridgway Scott. Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces. *Math. Comp.*, 34(150):441–463, 1980.
- [EFGP12] Christoph Erath, Stefan Funken, Petra Goldenits, and Dirk Praetorius. Simple error estimators for the galerkin bem for some hypersingular integral equation in 2d. *Applicable Analysis*, 2012.
- [EFLFP09] Christoph Erath, Samuel Ferraz-Leite, Stefan Funken, and Dirk Praetorius. Energy norm based a posteriori error estimation for boundary element methods in two dimensions. *Appl. Numer. Math.*, 59(11):2713–2734, 2009.
- [EG92] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [Fae93] Birgit Faermann. *Lokale a-posteriori-Fehlerschätzer bei der Diskretisierung von Randintegralgleichungen*. PhD thesis, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 1993.
- [FFKP12] Michael Feischl, Thomas Führer, Michael Karkulik, and Dirk Praetorius. Quasi-optimal convergence rates for adaptive boundary element method with data approximation. Technical report, Institute for Analysis and Scientific Computing, TU Wien, 2012. in preparation.
- [FKMP11] Michael Feischl, Michael Karkulik, Jens Markus Melenk, and Dirk Praetorius. Quasi-optimal convergence rate for an adaptive boundary element method. ASC Report 28, Institute for Analysis and Scientific Computing, TU Wien, 2011.
- [FLOP10] Samuel Ferraz-Leite, Christoph Ortner, and Dirk Praetorius. Convergence of simple adaptive Galerkin schemes based on $h - h/2$ error estimators. *Numer. Math.*, 116(2):291–316, 2010.
- [FLP08] Samuel Ferraz-Leite and Dirk Praetorius. Simple a posteriori error estimators for the h -version of the boundary element method. *Computing*, 83(4):135–162, 2008.

-
- [Gan11] Tsogtgerel Gantumur. Adaptive boundary element methods with convergence rates. Technical report, arXiv, 2011.
 - [Geo08] Emmanuil H. Georgoulis. Inverse-type estimates on hp -finite element spaces and applications. *Math. Comp.*, 77(261):201–219 (electronic), 2008.
 - [GHS00] I. G. Graham, W. Hackbusch, and S. A. Sauter. Discrete boundary element methods on general meshes in 3D. *Numer. Math.*, 86(1):103–137, 2000.
 - [GHS05] Ivan G. Graham, Wolfgang Hackbusch, and Stefan A. Sauter. Finite elements on degenerate meshes: inverse-type inequalities and applications. *IMA J. Numer. Anal.*, 25(2):379–407, 2005.
 - [GS97] R. D. Grigorieff and I. H. Sloan. Galerkin approximation with quadrature for the screen problem in $\mathbf{R}^3$. *J. Integral Equations Appl.*, 9(4):293–319, 1997.
 - [Hac99] Wolfgang Hackbusch. A sparse matrix arithmetic based on h -matrices. I. Introduction to h -matrices. *Computing*, 62(2):89–108, 1999.
 - [Hac09] Wolfgang Hackbusch. *Hierarchische Matrizen: Algorithmen und Analysis*. Springer, 2009.
 - [KOP12] Michael Karkulik, Günther Of, and Dirk Praetorius. Convergence of adaptive 3d bem for weakly singular integral equations based on isotropic mesh-refinement. ASC Report 20, Institute for Analysis and Scientific Computing, TU Wien, 2012.
 - [KPP12] Michael Karkulik, David Pavlicek, and Dirk Praetorius. On 2d newest vertex bisection: Optimality of mesh-closure and H^1 -stability of L_2 -projection. ASC Report 10, Institute for Analysis and Scientific Computing, TU Wien, 2012.
 - [Mai00] Matthias Maischak. The analytical computation of the galerkin elements for the laplace, lamé and helmholtz equation in 3d-bem. Technical report, Institute für Angewandte Mathematik, Universität Hannover, 2000.
 - [McL00] William McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
 - [MK12] Markus Mayr and Michael Karkulik. *Hilbert3D User Manual*, 2012.
 - [MN05] Khamron Mekchay and Ricardo H. Nochetto. Convergence of adaptive finite element methods for general second order linear elliptic PDEs. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(5):1803–1827 (electronic), 2005.
 - [MNS00] Pedro Morin, Ricardo H. Nochetto, and Kunibert G. Siebert. Data oscillation and convergence of adaptive FEM. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(2):466–488 (electronic), 2000.
 - [MNS02] Pedro Morin, Ricardo H. Nochetto, and Kunibert G. Siebert. Convergence of adaptive finite element methods. *SIAM Rev.*, 44(4):631–658 (electronic) (2003), 2002. Revised reprint of “Data oscillation and convergence of adaptive FEM” [*SIAM J. Numer. Anal.* **38** (2000), no. 2, 466–488 (electronic); MR1770058 (2001g:65157)].

- [Mor08] Charles B. Morrey, Jr. *Multiple integrals in the calculus of variations*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Reprint of the 1966 edition.
- [Néd01] Jean-Claude Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations*, volume 144 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2001. Integral representations for harmonic problems.
- [NSV09] Ricardo H. Nochetto, Kunibert G. Siebert, and Andreas Veiser. Theory of adaptive finite element methods: an introduction. In *Multiscale, nonlinear and adaptive approximation*, pages 409–542. Springer, Berlin, 2009.
- [NV11] Ricardo H. Nochetto and Andreas Veiser. Primer of adaptive finite element methods. In *Multiscale and Adaptivity: Modeling, Numerics and Applications, CIME Lectures*. Springer, Berlin, 2011.
- [QV94] Alfio Quarteroni and Alberto Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*, volume 23 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [RS07] Sergej Rjasanow and Olaf Steinbach. *The fast solution of boundary integral equations*. Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering. Springer, New York, 2007.
- [Sch94] Christoph Schwab. Variable order composite quadrature of singular and nearly singular integrals. *Computing*, 53(2):173–194, 1994.
- [Sch98] Christoph Schwab. *p- and hp-finite element methods*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998. Theory and applications in solid and fluid mechanics.
- [Sew72] Edward Granville Sewell. *Automatic generation of triangulations for piecewise polynomial approximation*. PhD thesis, Purdue University, 1972.
- [SS11] Stefan A. Sauter and Christoph Schwab. *Boundary element methods*, volume 39 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2011. Translated and expanded from the 2004 German original.
- [Ste01] Olaf Steinbach. On the stability of the L_2 projection in fractional Sobolev spaces. *Numer. Math.*, 88(2):367–379, 2001.
- [Ste07] Rob Stevenson. Optimality of a standard adaptive finite element method. *Found. Comput. Math.*, 7(2):245–269, 2007.
- [Ste08a] Olaf Steinbach. *Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems*. Springer, New York, 2008. Finite and boundary elements, Translated from the 2003 German original.
- [Ste08b] Rob Stevenson. The completion of locally refined simplicial partitions created by bisection. *Math. Comp.*, 77(261):227–241 (electronic), 2008.

- [Str71] Arthur H. Stroud. *Approximate calculation of multiple integrals*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1971. Prentice-Hall Series in Automatic Computation.
- [SZ90] L. Ridgway Scott and Shangyou Zhang. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Math. Comp.*, 54(190):483–493, 1990.
- [Tar07] Luc Tartar. *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*, volume 3 of *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*. Springer, Berlin, 2007.
- [Tri95] Hans Triebel. *Interpolation theory, function spaces, differential operators*. Johann Ambrosius Barth, Heidelberg, second edition, 1995.
- [Ver84] Gregory Verchota. Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace’s equation in Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.*, 59(3):572–611, 1984.
- [Ver96] Rüdiger Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Wiley-Teubner, 1996.

LEBENS LAUF

Institut für Analysis und Scientific Computing
Wiedner Hauptstraße 8-10
1040 Wien

Tel.: ++43 1 58801-10154
Mail: michael.karkulik@tuwien.ac.at
<http://www.asc.tuwien.ac.at/~mkarkulik/>

PERSÖNLICHE DATEN

Name	Michael Karkulik
Geburtstag	12. Juni 1983
Geburtsort	Steyr
Staatsbürgerschaft	österreichisch

AUSBILDUNG

seit 07/2009	Technische Universität Wien Doktoratsstudium
07/2009 – 10/2012	Mitglied des FWF Forschungsprojekts „Adaptive Boundary Element Method“ gefördert durch den Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung (P21732)
10/2004 – 04/2009	Technische Universität Wien Diplomstudium Technische Mathematik Abschluss mit Auszeichnung Titel der Diplomarbeit: „Quasi-Interpolation Operators for hp -Finite Element Methods“
10/2003– 10/2004	Johannes Kepler Universität, Linz Diplomstudium Technische Mathematik
10/1997– 06/2002	Höhere Technische Bundeslehranstalt Steyr Fachbereich Elektronik – Technische Informatik Abschluss: Matura

PUBLIKATIONEN, PREPRINTS UND ARBEITEN

M. Aurada, M. Feischl, T. Führer, M. Karkulik, J. M. Melenk, D. Praetorius:

Classical FEM-BEM coupling methods: nonlinearities, well-posedness, and adaptivity,
accepted for publication in Computational Mechanics (2012).

M. Aurada, M. Feischl, M. Karkulik, D. Praetorius:

A posteriori error estimates for the Johnson-Nédélec FEM-BEM coupling,
Eng. Anal. Bound. Elem., 36 (2012), 255-266.

M. Aurada, S. Ferraz-Leite, P. Goldenits, M. Karkulik, M. Mayr, D. Praetorius:

Convergence of adaptive BEM for some mixed boundary value problem,
Appl. Numer. Math., 62 (2012), 226-245.

M. Aurada, M. Ebner, M. Feischl, S. Ferraz-Leite, P. Goldenits, M. Karkulik, M. Mayr, D. Praetorius:

HILBERT-A MATLAB Implementation of Adaptive 2D-BEM,
ASC Report 24/2011, Institut für Analysis und Scientific Computing, Technische Universität Wien, 2011,
ISBN 978-3-902627-04-9.

M. Aurada, M. Feischl, T. Führer, M. Karkulik, D. Praetorius:

Efficiency and optimality of some weighted-residual error estimator for adaptive 2D boundary element methods,
ASC Report 15/2012, Institut für Analysis und Scientific Computing, Technische Universität Wien, 2012,
ISBN 978-3-902627-05-6, S. 1-27.

M. Feischl, M. Karkulik, J. M. Melenk, D. Praetorius:

Quasi-optimal convergence rate for an adaptive boundary element method,
ASC Report 28/2011, Institut für Analysis und Scientific Computing, Technische Universität Wien, 2011,
ISBN 978-3-902627-04-9.

M. Karkulik, G. Of, D. Praetorius:

Convergence of adaptive 3D BEM for weakly singular integral equations based on isotropic mesh-refinement,
ASC Report 20/2012, Institut für Analysis und Scientific Computing, Technische Universität Wien, 2012,
ISBN 978-3-902627-05-6, S. 1-25

M. Karkulik, D. Pavlicek, D. Praetorius:

On 2D newest vertex bisection: Optimality of mesh-closure and H^1 -stability of L_2 -projection,
ASC Report 10/2012, Institut für Analysis und Scientific Computing, Technische Universität Wien, 2012,
ISBN 978-3-902627-05-6, S. 1-28.

M. Feischl (Supervisors: M. Karkulik, D. Praetorius):

Optimality of adaptive 2D boundary element method,

Diplomarbeit, Institut für Analysis und Scientific Computing, Technische Universität Wien, 2012.

M. Karkulik (Supervisor: J. M. Melenk):

Quasi-Interpolation Operators for hp -Finite Element Methods,

Diplomarbeit, Institut für Analysis und Scientific Computing, Technische Universität Wien, 2009.