
Unterschrift BetreuerIn



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Adaptive FEM für Probleme mit inhomogenen Dirichlet-Daten

ausgeführt am Institut für Analysis und Scientific Computing
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.Prof. Dipl.Math. Dr.techn. Dirk Praetorius

durch

Florian Slanovc, B.Sc. B.Sc.

Dornbacher Straße 119,
1170 Wien

May 16, 2017

Unterschrift StudentIn

Zusammenfassung

Viele Prozesse, beispielsweise in der Naturwissenschaft oder Technik, können sehr gut durch unterschiedlichste Differentialgleichungen beschrieben werden. Da es nicht immer möglich ist, die Lösungsfunktionen für derartige Differentialgleichungen explizit zu bestimmen, ist die Mathematik gefordert, Algorithmen zur numerischen Berechnung bereitzustellen, welche die Lösung mit endlichem Rechenaufwand zumindest approximativ bestimmen können.

Um einen brauchbaren Algorithmus zu entwickeln, sind jedoch natürlich einige Faktoren zu berücksichtigen, unter anderem:

- Approximationsfehler,
- Rechenaufwand,
- Forderungen an die Eingangsdaten,
- etc. . .

Wir wollen im Rahmen dieser Arbeit die Poisson-Gleichung mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen in zwei Dimensionen untersuchen:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= g && \text{auf } \Gamma := \partial\Omega. \end{aligned}$$

In weiterer Folge ist es nun das Ziel, unterschiedliche Varianten der Variationsformulierung und anschließender numerischer Diskretisierung dieses Problems zu untersuchen. Die entscheidende Rolle soll dabei die (im allgemeinen inhomogene) Dirichlet-Randbedingung spielen, wenn es um die folgenden Fragen geht:

- Wie sieht die Lösungstheorie der exakten und der approximativen Lösung aus? (siehe Kapitel 3 und 4)
- Wie sieht der Approximationsfehler aus? Welche A-Priori- und A-Posteriori-Fehlerabschätzungen gibt es? (siehe Kapitel 4 und 6)
- Wie können A-Posteriori-Fehlerabschätzungen verwendet werden, um einen adaptiven Finite-Elemente-Methode-Algorithmus zu realisieren? (siehe Kapitel 7)

Vor allem geht es uns um die folgende Frage:

- Welche unterschiedlichen Ansatzmöglichkeiten gibt es, eine Approximationslösung u_h zu erhalten und wie sehen die Antworten auf die obigen Fragen in den verschiedenen Fällen aus?

In [FPP] und [AFKPP] wird auf genau diese Themen eingegangen. Dort wird u_h so konstruiert, dass es am Rand Γ mit einer geeigneten Approximation g_h von g übereinstimmt. Wir werden die Vorgangsweise und die wichtigsten Resultate aus diesen Papers in der Arbeit zusammenfassen. Da dies jedoch nicht der einzig mögliche Ansatz ist, die Randdaten einfließen zu lassen, werden wir uns dann auch der gemischten Formulierung aus [BBF] und Nietches Methode aus [Han] annehmen und dort versuchen, entsprechende Resultate herzuleiten.

In den ersten Kapiteln der Arbeit finden sich zunächst einige grundlegende Resultate und Ausführungen um den Bereich der Finite-Elemente-Methode. Der Hauptteil beschäftigt sich dann genau mit der oben genannten Thematik. Schlussendlich schließen wir die Arbeit dann mit ein paar numerischen Simulationsreihen zu den theoretischen Ausführungen ab.

Abstract

Many processes in science and technology can be described quite conveniently by various differential equations. In most cases, it is not possible to determine the solution of these equations explicitly. Therefore, it is important to provide numerical algorithms to find them at least approximately.

For a useful algorithm, we have to consider a few criteria, for instance:

- approximation errors,
- computational effort,
- requirements for the input parameters,
- et cetera...

In this thesis, we consider the Poisson equation with inhomogeneous Dirichlet boundary conditions:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= g & \text{on } \Gamma := \partial\Omega. \end{aligned}$$

We aim to investigate different Galerkin discretisations of this problem. The focus is on the numerical treatment of the inhomogeneous boundary conditions. The important questions are the following:

- What is the mathematical background of an exact and approximate solution?
- What can be shown mathematically about the approximation error as well as a priori and a posteriori estimates?
- How can we develop an adaptive finite element method by use of a posteriori error estimates?

Especially we consider the following question:

- What are possible approaches to get an approximate solution u_h and what are the answers of the above questions in the different cases?

In [FPP] and [AFKPP] these topics are investigated by first approximating g by some discrete boundary condition g_h so that the finite element solution satisfies $u_h = g_h$ on Γ . We are going to present this approach with the main results of those papers. Furthermore, we consider a mixed method like in [BBF] and Nitsche's method like in [Han] and derive similar results to [FPP, AFKPP].

In the first chapters of the thesis, we also present some fundamental results dealing with the finite element method in general. The main part discusses the above mentioned topics. Finally, we conclude the thesis with some numerical experiments which underpin theoretical results.

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkungen	7
1.1	Notationen und Vereinbarungen	7
1.2	Einleitende Definitionen und Resultate	9
2	Finite Elemente Methode	18
2.1	Galerkin-Schema	18
2.2	Triangulierung	19
2.3	Diskrete Funktionenräume	30
2.3.1	Projektionsoperatoren	34
3	Lösungstheorie zum Modellproblem	40
3.1	Starke Formulierung	40
3.2	Schwache Formulierung mit explizit geforderter Dirichlet-Randbedingung .	40
3.3	Schwache Formulierung in gemischter Formulierung	43
3.4	Schwache Formulierung nach Nietches Methode	47
4	Varianten zur Diskretisierung	49
4.1	Schwache Formulierung mit explizit geforderter Dirichlet-Randbedingung .	49
4.1.1	Diskrete Formulierung	50
4.1.2	Céa-Lemma	51
4.2	Schwache Formulierung in gemischter Formulierung	55
4.2.1	Diskrete Formulierung	55
4.2.2	Céa-Lemma	58
4.3	Schwache Formulierung nach Nietches Methode	59
4.3.1	Diskrete Formulierung	59
4.3.2	Céa-Lemma	61
5	Zusammenhänge und Äquivalenzen	62
6	A-Posteriori-Fehlerschätzer	65
6.1	Motivation	65
6.2	Schwache Formulierung mit explizit geforderter Dirichlet-Randbedingung .	66
6.3	Schwache Formulierung in gemischter Formulierung	69
6.4	Schwache Formulierung nach Nietches Methode	71
7	Implementierung	74
7.1	Originalcode aus [FPW]	74
7.2	Schwache Formulierung mit explizit geforderter Dirichlet-Randbedingung .	75
7.2.1	solveLaplace1.m	75

7.2.2	computeEtaR1.m	75
7.3	Schwache Formulierung in gemischter Formulierung	78
7.3.1	solveLaplace2.m	78
7.3.2	computeEtaR2.m	80
7.4	Schwache Formulierung nach Nietsches Methode	80
7.4.1	solveLaplace3.m	80
7.4.2	computeEtaR3.m	81
8	Numerische Experimente	83
8.1	Erstes Beispiel	86
8.2	Zweites Beispiel	94
9	Ausblick	105
A	Ergänzende Resultate	107
B	Programmiercode	115
B.1	Originalcode aus [FPW]	115
B.1.1	solveLaplace.m	115
B.1.2	computeEtaR.m	116
B.2	Code für explizit geforderte Dirichlet-Randbedingung	117
B.2.1	solveLaplace1.m	117
B.2.2	computeEtaR1.m	117
B.3	Code für gemischte Formulierung	118
B.3.1	solveLaplace2.m	118
B.3.2	computeEtaR2.m	119
B.4	Code für Nietsches Methode	120
B.4.1	solveLaplace3.m	120
B.4.2	computeEtaR3.m	121

Kapitel 1

Vorbemerkungen

In diesem Kapitel wollen wir uns zunächst den Notationen und einigen Vereinbarungen zuwenden, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwendet werden. Außerdem werden hier einige bekannte elementare Resultate zusammengefasst, auf denen die folgenden Kapitel aufbauen sollen. Für die dazugehörigen Beweise wird teilweise auf entsprechende Stellen in der Literatur verwiesen.

Zuvor definieren wir jedoch das grundlegende Modellproblem, auf welchem in weiterer Folge die gesamte Arbeit basiert:

Definition 1.1. (Modellproblem) Sei $d \geq 2$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit Rand Γ . Betrachte für die gegebenen Funktionen f, g und die gesuchte Funktion u die Bestimmungsgleichungen

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \tag{1.1a}$$

$$u = g \quad \text{auf } \Gamma. \tag{1.1b}$$

Auf die notwendigen Bedingungen, die an die auftretenden Funktionen u, f, g und Mengen Ω, Γ an dieser Stelle gestellt werden müssen, wird in den folgenden Kapiteln genauer eingegangen.

△

1.1 Notationen und Vereinbarungen

Annahme 1.2. Wir wollen in Voraussicht auf die Behandlung unseres Modellproblems (1.1) mittels Finiter Elemente annehmen, dass in weiterer Folge für die Menge Ω und deren Rand Γ stets folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

- Ω ist eine beschränkte, offene und zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R}^d .
- Γ besteht aus den Oberflächen von endlich vielen d -Polytopen und ist jeweils orientierbar.

△

Bei den meisten, in diesem Kapitel präsentierten Sätzen, können diese Voraussetzungen entsprechend abgeschwächt werden, wie es an den angegebenen Literaturstellen ersichtlich

ist. Für unsere Zwecke sollten sie sich jedoch als ausreichend herausstellen.

Wir definieren außerdem die Ableitungsoperatoren für Funktionen $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ in kartesischen Koordinaten wie folgt:

- i -te partielle Ableitung:

$$\partial_i u := \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, d.$$

- Gradient:

$$\nabla u := \begin{pmatrix} \partial_1 u \\ \vdots \\ \partial_d u \end{pmatrix}.$$

- Normalenableitung:

$$\partial_n u := \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n.$$

- Laplace-Operator:

$$\Delta u := \sum_{i=1}^d \partial_i^2 u.$$

Man beachte dabei, dass wir diese Symbolik sowohl für klassische, als auch für schwache Ableitungen verwenden. Genauere Erläuterungen dazu finden sich in [Jue, Kapitel 2].

Wir werden es im Laufe der Arbeit mit einigen Vektorräumen (insbesondere mit Hilberträumen) zu tun bekommen. Dafür wollen wir vorweg annehmen, dass es sich dabei jeweils um Vektorräume über dem Zahlenkörper der reellen Zahlen \mathbb{R} handelt.

Für zwei Funktionen u_1, u_2 aus einem Hilbertraum H schreiben wir

$$\langle u_1, u_2 \rangle_H$$

für deren Skalarprodukt. Die gleiche Notation verwenden wir für das Dualitätsprodukt $H^* \times H \rightarrow \mathbb{R}$, $(u^*, u) \mapsto u^*(u)$ in der Form

$$\langle u^*, u \rangle_{H^* \times H}.$$

Bei Lebesgue-Integralen über messbare Teilmengen des \mathbb{R}^d (wie zum Beispiel Ω) von Funktionen u verwenden wir die Notation

$$\int_{\Omega} u \, d\lambda,$$

ebenso schreiben wir für Integrale über Oberflächen, die sich aus $(d-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^d zusammensetzen lassen (wie zum Beispiel Γ), von Funktionen g

$$\int_{\Gamma} g \, d\mu.$$

1.2 Einleitende Definitionen und Resultate

Definition 1.3. (Lebesgue-Raum) Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^d$ eine beliebige Lebesgue-messbare Menge. Mit $L_*^2(\mathcal{M})$ bezeichnen wir den Vektorraum aller quadratisch integrierbaren Funktionen, also

$$L_*^2(\mathcal{M}) := \left\{ u : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\mathcal{M}} u^2 d\lambda < \infty \right\}.$$

Gehen wir anschließend zu den Äquivalenzklassen $[u]_{\sim}$ bezüglich der Äquivalenzrelation

$$u_1 \sim u_2 : \iff u_1 = u_2 \text{ fast überall}$$

über und definieren

$$L^2(\mathcal{M}) := \{ [u]_{\sim} \mid u \in L_*^2(\mathcal{M}) \},$$

so bildet dieser Quotientenraum mit den üblichen Verknüpfungen auf den Äquivalenzklassen ebenfalls wieder einen Vektorraum. Um die Notation zu vereinfachen, werden wir statt $[u]_{\sim}$ wieder einfach u schreiben und von u als L^2 -Funktion sprechen, obwohl sich dann hinter jedem $u \in L^2(\mathcal{M})$ eigentlich eine ganze Äquivalenzklasse an Funktionen $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ verbirgt. Der Vorteil gegenüber dem ursprünglichen Raum $L_*^2(\mathcal{M})$ ist, dass wir den Raum $L^2(\mathcal{M})$ für $u, v \in L^2(\mathcal{M})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} uv d\lambda$$

und der dadurch induzierten Norm

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} := \sqrt{\langle u, u \rangle_{L^2(\Omega)}}.$$

versehen können und damit sogar einen vollständigen Vektorraum, also einen Hilbertraum erhalten.

Die Details zu dieser Vorgehensweise finden sich beispielsweise in [Kus, Kapitel 13]. \triangle

Bemerkung 1.4. Ein wesentlicher Nachteil der obigen Definition des Lebesgue-Raumes über die Äquivalenzklassen ist, dass Punktauswertung für diese „Funktionen“ nicht mehr wohldefiniert ist, da zwei verschiedene Elemente einer Äquivalenzklasse nur fast überall übereinstimmen müssen. Dies gilt genauso für die „Funktionen“ aus den, im Folgenden definierten, Sobolevräumen. \triangle

Definition 1.5. (Sobolevräume) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Wir definieren durch $H^0(\Omega) := L^2(\Omega)$ den **Sobolevraum** mit Ordnung 0.

Weiters definieren wir dann induktiv für $m \geq 1$

$$H^m(\Omega) := \{ u \in L^2(\Omega) \mid u \text{ schwach differenzierbar und } \partial_i u \in H^{m-1}(\Omega), \forall i = 1, \dots, n \}$$

die **Sobolevräume** mit Ordnung m und versehen diese mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} := \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \langle \partial_i u, \partial_i v \rangle_{H^{m-1}(\Omega)}$$

und der dadurch induzierten Norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} := \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^m(\Omega)}}.$$

\triangle

Bemerkung 1.6. Die Ausdrücke in Definition 1.3 und 1.5 machen sowohl für reell, als auch für vektorwertige Funktionen u und v Sinn.

Daher können wir beispielsweise $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ schreiben und es gilt der Zusammenhang

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (1.2)$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \\ \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

△

Für die eben eingeführten Räume gilt der folgende Satz:

Satz 1.7. Die in den Definitionen 1.3 und 1.5 definierten Funktionenräume sind jeweils vollständig, also Hilberträume. □

Bemerkung 1.8. Die **Sobolevräume** können (siehe [Jue, Definition 4.3, Satz 4.4]) für $m \geq 0$ auch durch

$$H^k(\Omega) = \overline{\{u \in C^\infty(\Omega) \mid \|u\|_{H^m(\Omega)} < \infty\}}$$

charakterisiert werden.

△

Bemerkung 1.9. Sobolevräume können anstatt direkt auf messbaren Teilmengen des \mathbb{R}^d auch auf Mannigfaltigkeiten definiert werden. Für uns wird im weiteren Verlaufe der Arbeit vor allem der Fall einer 1D-Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^2 interessieren. △

Satz 1.10. (Einbettungssatz von Sobolev) Seien, neben der Raumdimension d , $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ zwei Zahlen, für die $k - \frac{d}{2} > m$ erfüllt ist. Dann lässt sich der Funktionenraum $H^k(\Omega)$ stetig in $C^m(\Omega)$ einbetten. Da Funktionen aus $H^k(\Omega)$ nur fast überall definiert sein müssen, ist diese Einbettung im Sinne von

$$\forall u \in H^k(\Omega) \exists! \tilde{u} \in C^m(\Omega) : u = \tilde{u} \text{ fast überall}$$

zu verstehen.

□

Der Beweis für den folgenden Satz wird in [Pra, Theorem 2.12] ausgeführt:

Satz 1.11. (Spur-Operator) Sei Ω ein beschränktes Gebiet (d.h. offen, nicht leer und zusammenhängend) mit lipschitzstetigem Rand Γ . Dann existiert ein eindeutiger linearer und stetigen Operator $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$, so dass $\gamma u = u|_\Gamma$ für alle $u \in C^1(\bar{\Omega}) \subseteq H^1(\Omega)$ gilt.

Definition 1.12. Mit den Voraussetzungen aus Satz 1.11 definieren wir weiters

$$\begin{aligned} H^{1/2}(\Gamma) &:= \text{range}(\gamma) \subseteq L^2(\Gamma) \\ H_0^1(\Omega) &:= \ker(\gamma) \subseteq H^1(\Omega). \end{aligned}$$

△

Satz 1.13. Für die Räume aus Definition 1.12 gilt:

(i) Versehen wir $H^{1/2}(\Gamma)$ mit der Norm

$$\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} := \inf_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \gamma u = g}} \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

so bildet dieser einen Hilbertraum.

(ii) Der Raum $H^{1/2}(\Gamma)$ lässt sich stetig in $L^2(\Gamma)$ einbetten, d.h. es existiert eine Konstante $C_{\text{eimb}} > 0$, sodass für alle $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ gilt

$$\|g\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_{\text{eimb}} \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

(iii) Der Raum $H_0^1(\Omega)$ ist ebenfalls ein Hilbertraum. □

Bemerkung 1.14. Wegen Satz 1.13 können wir den Spur-Operator γ im Unterschied zu Satz 1.11 auch als surjektiven linearen und stetigen Operator zwischen den Räumen $H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ betrachten. △

Definition 1.15. (Dualräume der Sobolevräume) Wir definieren die Dualräume der beiden Hilberträume aus Definition 1.12 durch

$$\begin{aligned} H^{-1/2}(\Gamma) &:= (H^{1/2}(\Gamma))^* \\ H^{-1}(\Omega) &:= (H_0^1(\Omega))^* \end{aligned}$$

△

Mit dem Spursatz 1.11 können wir bei Funktionen aus Sobolev-Räumen partiell integrieren. In [Pra, Corollary 2.13] wird folgendes gezeigt:

Satz 1.16. (partielle Integration) Seien $u, v \in H^1(\Omega)$, dann gilt für alle $i = 1, \dots, d$

$$\int_{\Omega} u \partial_i v \, d\lambda + \int_{\Omega} v \partial_i u \, d\lambda = \int_{\Gamma} \gamma u \gamma v n_i \, d\mu,$$

wobei n_i für die i -te Koordinate des Oberflächennormalvektors von Γ steht.

Korollar 1.17. Gilt zu den Voraussetzungen von 1.16 zusätzlich $u \in H^2(\Omega)$, dann gilt:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\lambda + \int_{\Omega} v \Delta u \, d\lambda = \int_{\Gamma} \gamma v \partial_n u \, d\mu$$

Beweis. Wegen $u \in H^2(\Omega)$ ist nach Definition 1.5 auch $\partial_i u \in H^1(\Omega)$ und wir können Satz 1.16 auch auf $\partial_i u$ anstelle von u anwenden und erhalten

$$\int_{\Omega} \partial_i u \partial_i v \, d\lambda + \int_{\Omega} v \partial_i^2 u \, d\lambda = \int_{\Gamma} \gamma v \gamma \partial_i u n_i \, d\mu.$$

Summiert man in dieser Gleichung auf beiden Seiten über $i = 1, \dots, d$, dann erhält man genau die Behauptung. □

Definition 1.18. Sei H ein Vektorraum und seien $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ und $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_H$ zwei Skalarprodukte auf H , welche die beiden Normen $\| \cdot \|_H := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ und $\| \cdot \|_H := \sqrt{\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle}$ induzieren. Wir nennen die beiden Skalarprodukte äquivalent, wenn die Normen äquivalent sind, d.h.

$$\alpha \|v\|_H \leq \|v\|_H \leq \beta \|v\|_H \quad \text{für alle } v \in H \quad (1.4)$$

für zwei Konstanten $\alpha, \beta > 0$ gilt. △

Lemma 1.19. Sei H ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ und $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_H$ ein dazu äquivalentes Skalarprodukt.

Dann ist H versehen mit $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_H$ ebenfalls ein Hilbertraum.

Beweis. Da die beiden von den Skalarprodukten induzierten Normen $\| \cdot \|_H$ und $\| \cdot \|_H$ äquivalent sind und damit eine Folge bezüglich $\| \cdot \|_H$ genau dann eine Cauchyfolge ist und genau dann gegen einen Grenzwert konvergiert, wenn dies bezüglich $\| \cdot \|_H$ der Fall ist, folgt die Aussage unmittelbar. □

Die folgende Resultat wird in [Pra, Corollary 2.14] bewiesen:

Lemma 1.20. (Friedrichs-Ungleichung) Es existiert eine Konstante $C_F > 0$, so dass gilt:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_F (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma u\|_{L^2(\Gamma)}) \quad \text{für alle } u \in H^1(\Omega)$$

Außerdem bildet der Ausdruck $\|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma(\cdot)\|_{L^2(\Gamma)}$ eine äquivalente Norm zu $\| \cdot \|_{H^1(\Omega)}$ in $H^1(\Omega)$.

Die Konstante C_F und damit auch die Normäquivalenzkonstanten hängen dabei nur von Ω ab. □

Korollar 1.21. (Friedrichs-Ungleichung) Es existiert eine Konstante $C_F > 0$, so dass gilt:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_F \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in H_0^1(\Omega)$$

Außerdem bildet der Ausdruck $\|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}$ eine äquivalente Norm zu $\| \cdot \|_{H^1(\Omega)}$ in $H_0^1(\Omega)$. Die Konstante C_F und damit auch die Normäquivalenzkonstanten hängen dabei nur von Ω ab.

Beweis. Folgt aus Lemma 1.20 wegen $\gamma u = 0$ für alle $u \in H_0^1(\Omega)$. □

Korollar 1.22. Betrachten wir den Hilbertraum $H_0^1(\Omega)$ versehen mit dem natürlichen Skalarprodukt aus Satz 1.13. Dann ist $\langle \nabla(\cdot), \nabla(\cdot) \rangle_{L^2(\Omega)}$ ein dazu äquivalentes Skalarprodukt.

Beweis. Aus der Darstellung der H^1 -Norm in Bemerkung 1.6 folgt für beliebiges $u \in H^1(\Omega)$ unmittelbar einerseits

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (1.5)$$

und außerdem unter Verwendung der Friedrichs-Ungleichung aus Lemma 1.21

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_F^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = (C_F^2 + 1) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (1.6)$$

Kombinieren wir diese beiden Resultate erhalten wir genau die in (1.4) zu zeigende Ungleichungskette mit $\alpha = 1$ und $\beta = \sqrt{C_F^2 + 1}$. □

Lemma 1.23. Sei H ein Hilbertraum und $H_h \subseteq H$ ein abgeschlossener Teilraum. Wird H_h mit der Einschränkung des Skalarprodukts $(\langle \cdot, \cdot \rangle_H)|_{H_h \times H_h}$ versehen, so erhält man wieder einen Hilbertraum.

Beweis. Zu zeigen ist nur die Vollständigkeit von H_h , d.h. jede Cauchyfolge in H_h ist konvergent in H_h .

Aufgrund der Wahl des Skalarprodukts auf H_h ist jede Cauchyfolge aus H_h auch eine Cauchyfolge in H und wegen dessen Vollständigkeit auch konvergent in H . Wegen der Abgeschlossenheit von H_h muss der Grenzwert der Folge in H_h liegen. Daraus folgt, dass die Folge auch in H_h konvergiert, was aber genau die Vollständigkeit von H_h bedeutet. \square

Der folgende Satz liefert bekanntermaßen die Basis zur Lösungstheorie von partiellen Differentialgleichungen mithilfe von schwachen Formulierungen. Der Beweis findet sich in [BKW, Proposition 3.2.5].

Satz 1.24. (Darstellungssatz von Riesz) Sei H ein Hilbertraum und H^* dessen topologischer Dualraum. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} I_H : H &\longrightarrow H^* \\ u &\longmapsto \langle u, \cdot \rangle_H \end{aligned}$$

semilinear, isometrisch und bijektiv. \square

Wir benötigen in weiterer Folge meist die folgende Variante dieses Satzes:

Korollar 1.25. Sei H ein Hilbertraum. Dann existiert für jedes $F \in H^*$ ein eindeutiges $u \in H$ mit den Eigenschaften:

- $\langle u, v \rangle_H = F(v)$ für alle $v \in H$
- $\|u\|_H = \|F\|_{H^*}$

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Satz 1.24. \square

Wir werden jedoch auch noch speziellere Fälle betrachten müssen, in denen wir ähnliche Folgerungen wie in Korollar 1.25 brauchen. Dazu formulieren wir die folgenden Resultate, welche in [Soe, Theorem 30, 33 und 86] gezeigt werden:

Lemma 1.26. (Lax-Milgram-Lemma) Sei H ein Hilbertraum und $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform, welche die **Koerzivitätsbedingung**

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2 \quad \text{für alle } u \in H$$

für ein $\alpha > 0$ erfüllt. Sei weiters $F : H \longrightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional. Dann gibt es ein eindeutiges $u \in H$, sodass

$$a(u, v) = F(v) \quad \text{für alle } v \in H$$

erfüllt ist. Außerdem gilt dann die Abschätzung

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H^*}.$$

□

Da auf endlichdimensionalen Räumen H_h jede (bi-)lineare Abbildung automatisch stetig ist und die Bedingung $a(u_h, u_h) > 0$ für alle $u_h \in H_h \setminus \{0\}$ bereits $a(u_h, u_h) \geq \alpha \|u_h\|^2$ für alle $u_h \in H_h$ impliziert, lässt sich in diesem Fall das Lax-Milgram-Lemma in folgender Variante anschreiben:

Korollar 1.27. (Lax-Milgram-Lemma) Sei H_h ein endlichdimensionaler Hilbertraum und $a : H_h \times H_h \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform, welche die Bedingung

$$a(u_h, u_h) > 0 \quad \text{für alle } u_h \in H_h \setminus \{0\}$$

erfüllt. Sei weiters $F : H_h \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional. Dann sind die Voraussetzungen von Lemma 1.26 erfüllt, d.h. es gibt ein eindeutiges $u_h \in H_h$, sodass

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \text{für alle } v_h \in H_h$$

erfüllt ist.

□

Lemma 1.28. (Babuška-Lax-Milgram-Lemma) Seien H und V zwei Hilberträume, $B : H \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform und $M : V \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional. Sei außerdem für $\beta > 0$ die sogenannte **inf-sup-Bedingung**

$$\inf_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{B(u, v)}{\|u\|_H \|v\|_V} \geq \beta$$

erfüllt und gelte zusätzlich

$$\sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{B(u, v)}{\|u\|_H} > 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

Dann gibt es ein eindeutiges $u \in H$, sodass

$$B(u, v) = M(v) \quad \text{für alle } v \in V$$

erfüllt ist. Außerdem gilt dann die Abschätzung

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\beta} \|M\|_{V^*}.$$

□

Satz 1.29. (Satz von Brezzi) Seien H und H' zwei Hilberträume, $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, $b : H \times H' \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Bilinearformen und $F : H \rightarrow \mathbb{R}$, $G : H' \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige lineare Funktionale. Sei außerdem

$$H_0 := \{u \in H \mid b(u, v) = 0 \quad \forall v \in H'\} \quad (1.7)$$

und sei $a(\cdot, \cdot)$ auf H_0 **koerziv**, d.h., es gelte für ein $\alpha > 0$

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2 \quad \text{für alle } u \in H_0.$$

Weiters sei die **LBB-Bedingung** (Ladyshenskaja-Babuška-Brezzi)

$$\inf_{\substack{q \in H' \\ q \neq 0}} \sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{|b(u, q)|}{\|u\|_H \|q\|_{H'}} \geq \beta \quad (1.8)$$

für ein $\beta > 0$ erfüllt. Dann gilt:

Die Voraussetzungen von Lemma 1.28 sind für die Bilinearform

$$\begin{aligned} B : (H \times H') \times (H \times H') &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((u, p), (v, q)) &\longmapsto a(u, v) + b(v, p) + b(u, q) \end{aligned} \quad (1.9)$$

und das lineare Funktional

$$\begin{aligned} M : H \times H' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, q) &\longmapsto F(v) + G(q) \end{aligned} \quad (1.10)$$

erfüllt, wenn wir den Produkthilbertraum $H \times H'$ mit der Summennorm versehen. Damit liefert das Lemma die folgenden Aussagen:

Es gibt eindeutige $u \in H$ und $p \in H'$, sodass die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= F(v) && \text{für alle } v \in H \\ b(u, q) &= G(q) && \text{für alle } q \in H' \end{aligned} \quad (1.11)$$

erfüllt sind. Außerdem gibt die Abschätzung

$$\|u\|_H + \|p\|_{H'} \leq C(\|F\|_{H^*} + \|G\|_{H'^*}),$$

wobei die Konstante $C > 0$ nur von α, β und den Stetigkeitskonstanten von $a(\cdot, \cdot)$ und $b(\cdot, \cdot)$ abhängt. □

Das folgende Resultat findet sich samt Beweis in [BKW, Satz 3.2.3]:

Lemma 1.30. Sei H ein Hilbertraum. Dann gilt:

- (i) Sei $S \subseteq H$ eine nichtleere, konvexe und abgeschlossene Teilmenge von H . Dann enthält S ein eindeutiges Element u^* mit minimaler Norm, d.h. für genau ein $u^* \in S$ gilt

$$\|u^*\|_H = \min_{u \in S} \|u\|_H.$$

- (ii) Sei H_h ein abgeschlossener Unterraum von H . Dann gilt $H = H_h \oplus H_h^\perp$. Bezeichnet \mathbb{P}_h die orthogonale Projektion mit $\mathbb{P}_h H = H_h$ und ist $u \in H$, so ist $\mathbb{P}_h u$ das eindeutige Element aus H_h , sodass

$$\|u - \mathbb{P}_h u\|_H = \min\{\|u - u_h\|_H \mid u_h \in H_h\}.$$

□

Aus [Pra, Chapter 3.2.4] entnehmen wir außerdem ein Resultat, welches mittels Anwendung der Transformationsformel für Integrale gezeigt werden kann:

Lemma 1.31. Seien $T, \widehat{T} \subseteq \mathbb{R}^d$ zwei messbare Mengen, deren Ränder lokal als Graph einer Lipschitzstetigen Funktion dargestellt werden können und $\Phi : \widehat{T} \rightarrow T$ ein affiner Diffeomorphismus in der Form $\Phi(x) := Bx + a$ mit regulärem $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und $a \in \mathbb{R}^d$. Sei außerdem $u \in L^2(T)$. Dann gilt $u \circ \Phi \in L^2(\widehat{T})$ und

$$\|u \circ \Phi\|_{L^2(\widehat{T})} = |\det B|^{-1/2} \|u\|_{L^2(T)}. \quad (1.12)$$

Gilt sogar $u \in H^1(T)$ und definieren wir die Frobeniusnorm der Matrix B durch

$$\|B\|_F^2 := \sum_{i,j=1}^d b_{ij}^2,$$

dann gilt außerdem

$$\|\nabla(u \circ \Phi)\|_{L^2(\widehat{T})} \leq |\det B|^{-1/2} \|B\|_F \|\nabla u\|_{L^2(T)} \quad (1.13)$$

□

Korollar 1.32. Mit den Bezeichnungen aus Lemma 1.31 ist $\Phi^{-1} : T \rightarrow \widehat{T}$ definitionsgemäß ebenfalls ein Diffeomorphismus. Für alle $y \in T$ gilt dann $\Phi^{-1}(y) = B^{-1}y - B^{-1}a$. Vertauschen wir nun die Rollen von T und \widehat{T} und ersetzen $u \mapsto u \circ \Phi$ und $\Phi \mapsto \Phi^{-1}$, so erhalten wir anstelle von 1.13 die umgekehrte Abschätzung

$$\|\nabla u\|_{L^2(T)} \leq |\det B|^{1/2} \|B^{-1}\|_F \|\nabla(u \circ \Phi)\|_{L^2(\widehat{T})}. \quad (1.14)$$

Bemerkung 1.33. Da die Determinante eine Matrix die örtliche Volumenverzerrung der dazugehörigen Abbildung misst, gilt in den obigen Beziehungen

$$|\det B| = \frac{|T|}{|\widehat{T}|}.$$

△

Das folgende Lemma ist das Analogon von Lemma 1.31 für Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^d . Wir verwenden dabei das Resultat aus [Kal, Satz 15.5.17].

Lemma 1.34. Seien $E, \widehat{E} \subseteq \mathbb{R}^d$ zwei Untermannigfaltigkeiten und $\Phi : \widehat{E} \rightarrow E$ ein allgemeiner Diffeomorphismus. Für ein messbares $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ und eine beliebige Einbettung ϕ in \widehat{E} gilt dann

$$\int_E f \, d\mu = \int_{\widehat{E}} f \circ \Phi \sqrt{\frac{\det \left(\left(d(\Phi \circ \phi)(\phi^{-1}(\cdot)) \right)^T d(\Phi \circ \phi)(\phi^{-1}(\cdot)) \right)}{\det \left(\left(d\phi(\phi^{-1}(\cdot)) \right)^T d\phi(\phi^{-1}(\cdot)) \right)}} \, d\mu. \quad (1.15)$$

□

Für uns ist lediglich der folgende Spezialfall dieses Lemmas von Interesse:

Korollar 1.35. Seien $E, \widehat{E} \subseteq \mathbb{R}^d$ zwei Strecken und $\Phi : \widehat{E} \rightarrow E$ ein affiner Diffeomorphismus von der gleichen Gestalt wie in Lemma 1.31. Sei außerdem $g \in L^2(E)$. Dann gilt $g \circ \Phi \in L^2(\widehat{E})$ und

$$\|g \circ \Phi\|_{L^2(\widehat{E})} = \left(\frac{h_E}{h_{\widehat{E}}}\right)^{-1/2} \|g\|_{L^2(E)}. \quad (1.16)$$

Beweis. Da \widehat{E} eine Strecke zwischen zwei Endpunkten z_1 und z_2 ist, können wir die Einbettung ϕ wie folgt wählen:

$$\begin{aligned} \phi : (0, 1) &\rightarrow \widehat{E} \\ t &\mapsto (1-t)z_1 + tz_2 \end{aligned}$$

Damit sind die Ableitungen $d\Phi = B$ und $d\phi = z_2 - z_1$ beide konstant und wir können den großen Radikanten in (1.15) unter Verwendung der Kettenregel wie folgt auswerten:

$$\begin{aligned} \frac{\det \left(\left(d(\Phi \circ \phi)(\phi^{-1}(\cdot)) \right)^T d(\Phi \circ \phi)(\phi^{-1}(\cdot)) \right)}{\det \left(\left(d\phi(\phi^{-1}(\cdot)) \right)^T d\phi(\phi^{-1}(\cdot)) \right)} &= \frac{\det \left((B(z_2 - z_1))^T B(z_2 - z_1) \right)}{\det \left((z_2 - z_1)^T (z_2 - z_1) \right)} = \\ &= \frac{|B(z_2 - z_1)|^2}{|z_2 - z_1|^2} = \frac{|E|^2}{|\widehat{E}|^2} = \frac{h_E^2}{h_{\widehat{E}}^2} \end{aligned}$$

Damit liefert (1.15) mit $f := g^2$ und anschließendem Wurzelziehen auf beiden Seiten genau die behauptete Gleichheit. \square

Bemerkung 1.36. Aufgrund der Definition der Kantenableitung gelten mit einer Einbettung ϕ wie oben ($\Phi \circ \phi$ ist dann eine Einbettung in E)

$$\begin{aligned} \nabla_{\widehat{E}}(g \circ \Phi) &= \frac{d}{dt}(g \circ \Phi \circ \phi) \cdot \frac{1}{h_{\widehat{E}}}, \\ \nabla_E g &= \frac{d}{dt}(g \circ \Phi \circ \phi) \cdot \frac{1}{h_E} \end{aligned}$$

und damit insgesamt

$$\nabla_{\widehat{E}}(g \circ \Phi) = \frac{h_E}{h_{\widehat{E}}} \nabla_E g.$$

Kombiniert man dies mit (1.16) aus dem vorhergehenden Korollar, so erhält man

$$\|\nabla_{\widehat{E}}(g \circ \Phi)\|_{L^2(\widehat{E})} = \left(\frac{h_E}{h_{\widehat{E}}}\right)^{1/2} \|\nabla g\|_{L^2(E)}. \quad (1.17)$$

\triangle

Kapitel 2

Finite Elemente Methode

Annahme 2.1. Wir beschränken uns im Folgenden auf den Fall $d = 2$. Ansonsten gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Annahme 1.2. Dann besteht Γ aus endlich vielen geschlossenen Polygonzügen. \triangle

Wir bringen in diesem Kapitel einige elementare Definitionen, die uns den Weg zur Behandlung unseres Problems mit **finiten Elementen** ebnen. Wir gehen dabei ähnlich wie in [Pra, Chapter 1 & 3] vor.

2.1 Galerkin-Schema

Zunächst wollen wir die Vorgangsweise der Approximation durch Finite Elemente noch in einem etwas allgemeineren Kontext schildern. Die Beweise zu allen Resultaten finden sich in [Pra, Kapitel 1.3].

Definition 2.2. (Galerkin-Approximation) Sei H ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ und $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_H$ ein dazu äquivalentes Skalarprodukt, gemäß Definition 1.18. Sei außerdem $H_h \subseteq H$ ein abgeschlossener Teilraum, der nach Lemma 1.23 ebenfalls ein Hilbertraum ist.

Wir betrachten nun $F \in H^*$, womit klarerweise $F|_{H_h} \in H_h^*$ gilt.

Betrachten wir die Hilberträume mit dem Skalarprodukt $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_H$ und wenden wir nun Korollar 1.25 einmal auf H und F und einmal auf H_h und $F|_{H_h}$ (jeweils versehen mit $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_H$ und $(\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_H)|_{H_h \times H_h}$) an, so erhalten wir eindeutige $u \in H, u_h \in H_h$ mit

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle_H = F(v) \quad \forall v \in H \quad (2.1a)$$

$$\langle\langle u_h, v_h \rangle\rangle_H = F(v_h) \quad \forall v_h \in H_h \quad (2.1b)$$

und nennen u_h dann die **Galerkin-Approximation** für u in H_h bezüglich $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_H$. \triangle

Korollar 2.3. (Galerkin-Orthogonalität) Mit der Notation aus Definition 2.2 gilt stets

$$\langle\langle u - u_h, v_h \rangle\rangle = 0 \quad \text{für alle } v_h \in H_h. \quad (2.2)$$

Beweis. Wegen $H_h \subseteq H$ gilt Gleichung (2.1a) insbesondere für alle $v_h \in H_h$. Subtrahiert man von dieser Gleichung dann Gleichung (2.1b), erhält man unmittelbar die Aussage. \square

Bemerkung 2.4. Die Galerkin-Orthogonalität aus Korollar 2.3 gilt auch, falls (2.1) nur für alle $v \in \tilde{H} \subseteq H$ und $v_h \in \tilde{H}_h \subseteq \tilde{H}$ gilt. \triangle

Der Beweis zu folgendem Lemma ist in [Pra, Lem. 1.6] ausgeführt:

Lemma 2.5. (Céa) Für u und u_h aus Definition 2.2 gelten

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_H &= \min_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H \\ \|u - u_h\|_H &\leq \frac{\beta}{\alpha} \min_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H,\end{aligned}$$

wobei $\alpha, \beta > 0$ wieder die Äquivalenzkonstanten aus Definition 1.18 sind. \square

2.2 Triangulierung

Zunächst definieren wir einige Begrifflichkeiten aus der Linearen Algebra. In [Hav, Kapitel 6.2, 6.3] finden sich diese Resultate auch in wesentlich allgemeinerer Formulierung, für unsere Zwecke sollten sie jedoch in der hier präsentierten Form ausreichen.

Definition 2.6. (affine Linearkombination) Sei V ein beliebiger Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Dann nennen wir für $(\lambda_i)_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ und $(v_i)_{i=1}^n \subseteq V$ die Linearkombination

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

affine Linearkombination, falls die Koeffizienten $(\lambda_i)_{i=1}^n$ die Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

erfüllen. \triangle

Definition 2.7. (affine Hülle) Sei V ein beliebiger Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $(v_i)_{i=1}^n \subseteq V$. Wir nennen dann die Menge aller möglichen affinen Linearkombinationen der Vektoren $(v_i)_{i=1}^n \subseteq V$ **affine Hülle**.

Wir schreiben dafür

$$\text{affin}\{(v_i)_{i=1}^n\}.$$

\triangle

Definition 2.8. (affin unabhängig) Sei wieder V ein beliebiger Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $(v_i)_{i=1}^n \subseteq V$. Wir nennen die Vektoren $(v_i)_{i=1}^n$ **affin unabhängig**, falls sich kein Vektor als affine Linearkombination der restlichen Vektoren schreiben lässt. \triangle

Lemma 2.9. Sei V ein beliebiger Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $(v_i)_{i=1}^n \subseteq V$ affin unabhängig. Dann ist jeder Vektor $v \in \text{affin}\{(v_i)_{i=1}^n\}$ eindeutig als affine Linearkombination aus den Vektoren $(v_i)_{i=1}^n$ darstellbar.

Beweis. Aufgrund der Definition einer affinen Hülle ist jeder Vektor $v \in \text{affin}\{(v_i)_{i=1}^n\}$ klarerweise als affine Linearkombination aus den Vektoren $(v_i)_{i=1}^n$ darstellbar. Wir müssen nur noch zeigen, dass die Darstellung auch eindeutig ist.

Seien dazu

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i^* v_i \quad (2.3)$$

mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^*$ zwei Darstellungen von v . Subtrahieren wir diese beiden, so erhalten wir

$$0 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_i^*) v_i. \quad (2.4)$$

Nehmen wir an, dass die Darstellungen nicht gleich sind, dann existiert mindestens ein Index $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\lambda_j - \lambda_j^* \neq 0$. Umformung von (2.4) liefert dann aber

$$v_j = -\frac{1}{\lambda_j - \lambda_j^*} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\lambda_i - \lambda_i^*) v_i$$

und wegen

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\lambda_j - \lambda_j^*} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\lambda_i - \lambda_i^*) &= -\frac{1}{\lambda_j - \lambda_j^*} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i^* \right) \\ &= -\frac{1}{\lambda_j - \lambda_j^*} ((1 - \lambda_j) - (1 - \lambda_j^*)) \\ &= -\frac{1}{\lambda_j - \lambda_j^*} (\lambda_j^* - \lambda_j) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ist das aber genau eine Darstellung von v_j als affine Linearkombination der restlichen Vektoren und steht daher im Widerspruch zur affinen Unabhängigkeit von $(v_i)_{i=1}^n$. \square

Definition 2.10. (affine Funktion) Seien V und W zwei Vektorräume und $V' \subseteq V$. Wir nennen dann eine Funktion $a : V' \rightarrow W$ **affin**, falls für eine beliebige affine Linearkombination $\sum_{i=1}^n \lambda_i v'_i$ mit $v'_i \in V'$, die wieder in V' liegt,

$$a \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i a(v_i)$$

gilt. Das heißt, das Bild einer affinen Linearkombination ist die affine Linearkombination der Bilder. \triangle

Bemerkung 2.11. Seien V und W zwei Vektorräume, $V'' \subseteq V' \subseteq V$ und $a : V' \rightarrow W$ affin. Da jede affine Linearkombination aus V'' insbesondere eine affine Linearkombination in V' ist, ist $a|_{V''} : V'' \rightarrow W$ in diesem Fall ebenfalls affin. \triangle

Lemma 2.12. Seien mit der Notation aus Definition 2.10 eine Familie affiner Funktionen $(a_j)_{j=1}^m$ und Skalare $(\mu_j)_{j=1}^m \subseteq \mathbb{R}$ gegeben. Dann ist auch

$$\begin{aligned} a : V' &\longrightarrow W \\ v' &\longmapsto \sum_{j=1}^m \mu_j a_j(v') \end{aligned}$$

eine affine Funktion. Das heißt jede Linearkombination von affinen Funktionen ist wieder eine affine Funktion.

Beweis. Zu zeigen ist laut Definition 2.10

$$a \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right) \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i a(v_i).$$

Da a_j für alle $j = 1, \dots, m$ affin ist, gilt

$$\begin{aligned} a \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right) &= \sum_{j=1}^m \mu_j a_j \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \mu_j \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_j(v_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{j=1}^m \mu_j a_j(v_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i a(v_i). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.13. Aus Lemma 2.12 folgt insbesondere, dass die Menge aller affinen Funktionen von V' nach W einen Unterraum des Vektorraums aller Funktionen von V' nach W bildet. △

Nun folgt ein nützliches Resultat, welches sich noch an einigen Stellen als hilfreich erweisen wird:

Satz 2.14. (Fortsetzungssatz für affine Funktionen) Seien V, W zwei Vektorräume, $(v_i)_{i=1}^n \subseteq V$ affin unabhängig und $(w_i)_{i=1}^n \subseteq W$. Betrachte eine Menge $V' \subseteq V$ mit $(v_i)_{i=1}^n \subseteq V' \subseteq \text{affin}\{(v_i)_{i=1}^n\}$. Dann gilt:

Es existiert eine eindeutige affine Abbildung $a : V' \longrightarrow W$, die

$$a(v_i) = w_i \quad \forall i = 1, \dots, n \tag{2.5}$$

erfüllt.

Beweis. 1.Schritt: Definition

Sei $v' \in V'$ beliebig. Wegen $V' \subseteq \text{affin}\{(v_i)_{i=1}^n\}$ existieren (eindeutige, von v' abhängige) Koeffizienten $\lambda_1(v'), \dots, \lambda_n(v')$, sodass

$$v' = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v') v_i \tag{2.6}$$

gilt. Wir definieren dann

$$a(v') := \sum_{i=1}^n \lambda_i(v') w_i \quad (2.7)$$

und erhalten somit eine Abbildungsvorschrift für alle $v' \in V'$.

2. Schritt: Wohldefiniertheit

Da $(v_i)_{i=1}^n$ nach Voraussetzung affin unabhängig ist, folgt aus Korollar 2.9, dass die Darstellung in (2.6) und damit insbesondere die Koeffizienten $\lambda_1(v'), \dots, \lambda_n(v')$ eindeutig durch v' bestimmt sind. Damit ist unsere durch (2.7) festgelegte Abbildung wohldefiniert.

3. Schritt: Affinität

Wir wollen zeigen, dass unsere Funktion a tatsächlich affin gemäß Definition 2.10 ist. Betrachte dazu mit $v' := \sum_{j=1}^m \mu_j v'_j \in V'$ eine beliebige affine Linearkombination aus Vektoren $(v'_j)_{j=1}^m \subseteq V'$, deren Ergebnis ebenfalls in V' liegt. Zu zeigen ist dann

$$a(v') = a\left(\sum_{j=1}^m \mu_j v'_j\right) \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^m \mu_j a(v'_j).$$

Man beachte zunächst, dass sich jedes $v'_j \in V'$ wieder eindeutig als $v'_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v'_j) v_i$ schreiben lässt. Damit können wir die ursprüngliche affine Linearkombination wie folgt umschreiben:

$$v' = \sum_{j=1}^m \mu_j v'_j = \sum_{j=1}^m \mu_j \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(v'_j) v_i \right) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m \mu_j \lambda_i(v'_j) \right)}_{=: \mu_i^*} v_i = \sum_{i=1}^n \mu_i^* v_i \quad (2.8)$$

Diese erhaltene Linearkombination von den Vektoren $(v_i)_{i=1}^n$ ist wegen

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^* = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \mu_j \lambda_i(v'_j) \right) = \sum_{j=1}^m \mu_j \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(v'_j) \right)}_{=1} = \sum_{j=1}^m \mu_j = 1$$

jedoch ebenfalls eine affine Linearkombination und damit gilt $\mu_i^* = \lambda_i(v')$, d.h. die $(\mu_i^*)_{i=1}^n$ sind genau die Koeffizienten der eindeutigen Darstellung von v' als affine Linearkombination durch die Vektoren $(v_i)_{i=1}^n$. Damit können wir die Abbildung a gemäß unserer Definition aus Schritt 1 auf v' anwenden und erhalten

$$a(v') \stackrel{(2.7)}{=} \sum_{i=1}^n \mu_i^* w_i \stackrel{(2.8)}{=} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \mu_j \lambda_i(v'_j) \right) w_i = \sum_{j=1}^m \mu_j \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(v'_j) w_i \right) \stackrel{(2.7)}{=} \sum_{j=1}^m \mu_j a(v'_j).$$

4. Schritt: Eindeutigkeit

Sei a^* eine weitere affine Funktion, welche (2.5) erfüllt. Dann gilt für beliebiges $v' = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v') v_i \in V'$

$$a(v') = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v') w_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v') a^*(v_i) = a^* \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(v') v_i \right) = a^*(v'),$$

womit a und a^* übereinstimmen. □

Korollar 2.15. Wir betrachten die Situation aus Satz 2.14 mit der zusätzlichen Bedingung

$$w_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Dann ist $a : V' \rightarrow W$ die Nullfunktion.

Beweis. Aus Satz 2.14 folgt die Existenz einer eindeutigen affinen Funktion a mit

$$a(v_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Sei $v' \in V'$ beliebig. Wegen $V' \subseteq \text{affin}\{(v_i)_{i=1}^n\}$ existieren (eindeutig von v' abhängige) Koeffizienten $\lambda_1(v'), \dots, \lambda_n(v')$, sodass

$$v' = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v') v_i$$

gilt. Verwenden wir nun, dass a eine affine Abbildung ist, erhalten wir

$$a(v') = a\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(v') v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v') a(v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(v') 0 = 0.$$

Da $v' \in V'$ beliebig ist, ist a die Nullfunktion. □

Definition 2.16. (Konvexkombination) Betrachte eine affine Linearkombination laut Definition 2.6. Gilt dann noch zusätzlich

$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

so nennen wir diese **Konvexkombination**. △

Definition 2.17. (konvexe Hülle) Analog zu Definition 2.7 definieren wir die **konvexe Hülle** als die Menge aller Konvexkombinationen der Vektoren $(v_i)_{i=1}^n \in V^n$. Wir führen dafür die Notation

$$\text{conv}\{(v_i)_{i=1}^n\}$$

ein. △

Bemerkung 2.18. Da jede Konvexkombination insbesondere eine affine Linearkombination ist, gilt für eine beliebige Teilmenge $V' \subseteq V$ klarerweise

$$\text{conv}(V') \subseteq \text{affin}(V').$$

△

Bemerkung 2.19. Wir interessieren uns im Folgenden hauptsächlich für den Fall $V := \mathbb{R}^2$ und $W := \mathbb{R}$, d.h. für affine Funktionen, die von $V' \subseteq \mathbb{R}^2$ nach \mathbb{R} abbilden. Besteht V' dann aus affinen Linearkombinationen (beispielsweise Konvexkombinationen) einer festen Menge an Elementen des \mathbb{R}^2 , so ist der Graph der Funktion anschaulich in einer (Hyper-)Ebene des \mathbb{R}^3 enthalten. △

Definition 2.20. (nicht-degeneriertes Dreieck) Sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir nennen T ein **Dreieck**, falls $x_T, y_T, z_T \in \mathbb{R}^2$ existieren, mit

$$T = \text{conv}\{x_T, y_T, z_T\}.$$

Wir nennen das Dreieck T **nicht-degeneriert**, falls x_T, y_T, z_T zusätzlich affin unabhängig sind. Das ist hier genau dann der Fall, wenn sie nicht auf einer Geraden liegen. Für ein **nicht-degeneriertes** Dreieck T definieren wir weiters die Mengen

$$\mathcal{K}_T := \{x_T, y_T, z_T\}$$

als die **Menge aller Knoten** von T und

$$\mathcal{E}_T := \{\text{conv}\{x_T, y_T\}, \text{conv}\{y_T, z_T\}, \text{conv}\{z_T, x_T\}\}$$

als die **Menge aller Kanten** von T . Wir bezeichnen außerdem mit $h_E := \text{diam}(E)$ die Länge der Kante $E \in \mathcal{E}_T$, mit $h_T := \text{diam}(T)$ den **Durchmesser** von T und mit ρ_T die **Höhe** auf einer längsten Kante in T . \triangle

Bemerkung 2.21. Man beachte in Definition 2.20, dass für ein nicht-degeneriertes Dreieck T immer folgende Eigenschaften gelten, die aus geometrischen Überlegungen folgen:

- (i) $|\mathcal{K}_T| = |\mathcal{E}_T| = 3$
- (ii) $E \cap E' \in \mathcal{K}_T \quad \forall E, E' \in \mathcal{E}_T$
- (iii) Die Wahl der Knoten x_T, y_T, z_T ist bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmt ist.
- (iv) Der Durchmesser stimmt genau mit der Länge der längsten Kante überein, d.h. es gilt immer

$$h_T = \max \{h_E | E \in \mathcal{E}_T\}.$$

- (v) Die längste Kante ist nicht eindeutig, jedoch ist die Länge der Höhe auf jeder längsten Kante immer gleich lang.
- (vi) Für das Flächenmaß gilt

$$|T| = \frac{h_T \rho_T}{2} > 0.$$

- (vii) Für alle Kanten $E \in \mathcal{E}_T$ gilt

$$\rho_T \leq h_E \leq h_T.$$

\triangle

Definition 2.22. (Triangulierung) Wir nennen ein Mengensystem $\mathcal{T} \subseteq 2^{\mathbb{R}^2}$ eine **Triangulierung** von Ω , wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

- (i) \mathcal{T} ist eine endliche Menge von nicht-degenerierten Dreiecken.
- (ii) Die Mengen aus \mathcal{T} sind eine Überdeckung von $\bar{\Omega}$, d.h. es gilt $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$.
- (iii) Für $T, T' \in \mathcal{T}$ gilt entweder $T = T'$ oder $|T \cap T'| = 0$.

△

Definition 2.23. (reguläre Triangulierung) Sei \mathcal{T} eine Triangulierung von Ω . Bezeichnen wir mit $\mathcal{K} := \bigcup\{x \in \mathcal{K}_T | T \in \mathcal{T}\}$ die **Menge aller Knoten** von \mathcal{T} und mit $\mathcal{E} := \bigcup\{E \in \mathcal{E}_T | T \in \mathcal{T}\}$ die **Menge aller Kanten** von \mathcal{T} , dann nennen wir die Triangulierung \mathcal{T} **regulär**, falls der Durchschnitt zweier verschiedener Dreiecke $T, T' \in \mathcal{T}$ stets entweder leer ist, genau einen gemeinsamen Knoten oder genau eine gemeinsame Kante beinhaltet, d.h. wenn eine der folgenden drei Eigenschaften erfüllt ist:

- (i) $T \cap T' = \emptyset$
- (ii) $T \cap T' = \{z\} = \mathcal{K}_T \cap \mathcal{K}_{T'}$
- (iii) $T \cap T' = E \in \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{T'}$

△

Lemma 2.24. Für eine reguläre Triangulierung \mathcal{T} von Ω gilt Folgendes:

- (i) $\Gamma \subseteq \bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$
- (ii) Für alle $z \in \Gamma$ gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:
 - $z \in \mathcal{K}$
 - $\exists! E \in \mathcal{E} : z \in E$
- (iii) $|E \cap \Gamma| > 0 \implies E \subseteq \Gamma$
- (iv) Ist für $z \in \Gamma$ der zweite Punkt in (ii) mit der Kante $E \in \mathcal{E}$ erfüllt, so gilt $E \subseteq \Gamma$.

Beweis. (i): Wegen $\Gamma \subseteq \bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$ gibt es für jedes $x \in \Gamma$ ein $T \in \mathcal{T}$ mit $x \in T$. Liegt x nicht auf einer Kante von T , so gibt es eine offene Umgebung $U(x)$ um x , die ganz im Dreieck T enthalten ist. Damit gilt auch $U(x) \subseteq \bar{\Omega}$, was zusammen mit $x \in \Gamma$ der Orientierbarkeit von Γ widerspricht. Also muss $x \in \bigcup_{E \in \mathcal{E}_T} E$ gelten, womit (i) gezeigt ist. (ii): Wegen (i) folgt aus $z \in \Gamma$ sofort $z \in E$ für zumindest ein $E \in \mathcal{E}$.

Seien $E, E' \in \mathcal{E}$ zwei unterschiedliche Kanten mit $z \in E$ und $z \in E'$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1.Fall: Es existiert ein $T \in \mathcal{T}$, mit $E, E' \in \mathcal{E}_T$.

Dann folgt aus Bemerkung 2.21 (ii) sofort, dass $z \in \mathcal{K}_T \subseteq \mathcal{K}$.

2.Fall: $E \in \mathcal{E}_T$ und $E' \in \mathcal{E}_{T'}$ für $T \neq T'$.

Aufgrund der vorausgesetzten Regularität der Triangulierung muss (ii) aus Definition 2.23 erfüllt sein. Also gilt wieder $z \in \mathcal{K}$.

(iii): Gilt $|E \cap \Gamma| > 0$, so besitzt die Menge $E \cap \Gamma$ unendlich viele Elemente und damit insbesondere Punkte, die im Inneren der Kante, also in $E \setminus \mathcal{K}$, liegen. Auf diese Punkte trifft dann der zweite Punkt aus (ii) zu. Da der Rand aus Polygonzügen besteht und entlang der Kante wegen Definition 2.23 (iii) keine anderen Dreiecke angrenzen können (sonst wäre die Kante ganz im anderen Dreieck enthalten), folgt die Behauptung.

(iv): Da z kein Knoten ist, gibt es ein $\epsilon_1 > 0$, sodass $B_{\epsilon_1}(z) \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Da z außerdem ein Randpunkt des laut Annahme 1.2 orientierbaren Rands Γ ist, gibt es außerdem $\epsilon_2 > 0$ mit $\epsilon_2 < \epsilon_1$, sodass $B_{\epsilon_2}(z)$ von Γ in zwei Teile geteilt wird, von denen einer ganz in Ω und der andere ganz in $\bar{\Omega}^c$ liegt. Wegen $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ist $B_{\epsilon_2}(z) \cap \Gamma$ jedoch sogar Teil von einer Geraden, da jeder Eckpunkt des Polygonzugs insbesondere in \mathcal{K} enthalten sein müsste.

Damit sind die beiden Teile genau offene Halbkreise. Da $E \subseteq \bar{\Omega}$ ist und genauso wie Γ durch den Kreismittelpunkt verläuft, muss damit $B_{e_2}(z) \cap \Gamma \subseteq E \cap \Gamma$ gelten. Damit folgt mit (iii) die Behauptung. \square

Definition 2.25. Erfüllt eine Kante $E \in \mathcal{E}$ den Punkt (ii) in Lemma 2.24, so nennen wir sie **Randkante**. Die restlichen Kanten nennen wir **innere Kanten**.

Die Menge aller Randkanten sei $\mathcal{E}_\Gamma := \{E \in \mathcal{E} | E \subseteq \Gamma\}$ und die Menge aller inneren Kanten $\mathcal{E}_\Omega := \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\Gamma$.

Analog dazu definieren wir die Mengen \mathcal{K}_Γ und \mathcal{K}_Ω als die Mengen aller **Randknoten** und **inneren Knoten**. \triangle

Definition 2.26. (Patches) Wir definieren für einen Knoten $z \in \mathcal{K}$ den **Knoten-Patch** durch

$$\tilde{\omega}_z := \{T \in \mathcal{T} | T \cap \{z\} \neq \emptyset\} \quad \text{und} \quad \omega_z := \bigcup \tilde{\omega}_z,$$

welcher aus allen Dreiecken besteht, die den Knoten z als Eckpunkt enthalten. Analog definieren wir für eine Kante $E \in \mathcal{E}$ den **Kanten-Patch** mittels

$$\tilde{\omega}_E := \{T \in \mathcal{T} | T \cap E \neq \emptyset\} \quad \text{und} \quad \omega_E := \bigcup \tilde{\omega}_E,$$

der aus allen Dreiecken besteht, welche an die Kante E angrenzen und für ein Dreieck $T \in \mathcal{T}$ den **Element-Patch** mittels

$$\tilde{\omega}_T := \{T' \in \mathcal{T} | T' \cap T \neq \emptyset\} \quad \text{und} \quad \omega_T := \bigcup \tilde{\omega}_T,$$

der aus allen Dreiecken besteht, die an das Dreieck T angrenzen. Dazu bezeichnen wir für eine Kante $E \in \mathcal{E}_\Gamma$ die Menge

$$\tilde{\omega}_E^\Gamma := \{E' \in \mathcal{E}_\Gamma | E' \cap E \neq \emptyset\} \quad \text{und} \quad \omega_E^\Gamma := \bigcup \tilde{\omega}_E^\Gamma$$

als **Randkanten-Patch**.

Außerdem sei für $z \in \mathcal{K}$

$$\mathcal{E}_z := \{E \in \mathcal{E} | z \in E\}$$

die Menge aller Kanten, die den Knoten z enthalten. \triangle

Definition 2.27. (Formregularität) Mit der Notation aus Definition 2.20 definieren wir für eine reguläre Triangulierung \mathcal{T} zunächst in Form zweier elementweise konstanten Funktionen $h \in L^\infty(\Omega)$ und $\rho \in L^\infty(\Omega)$ die **lokalen Gitterweiten** durch

$$\begin{aligned} h|_T &:= h_T & \forall T \in \mathcal{T}. \\ \rho|_T &:= \rho_T \end{aligned}$$

Befinden wir uns auf dem Rand Γ , so schreiben wir auch $h \in L^\infty(\Gamma)$ für

$$h|_E := h_E \quad \forall E \in \mathcal{E}_\Gamma.$$

Dazu definieren wir durch

$$\sigma(T) := \frac{h_T}{\rho_T}$$

und

$$\sigma(\mathcal{T}) := \|h/\rho\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{T \in \mathcal{T}} \frac{h_T}{\rho_T}$$

die **Formregularitätskonstanten** eines Dreiecks T und der Triangulierung \mathcal{T} . Wegen Bemerkung 2.21 (vi) gilt damit insbesondere auch

$$\sigma(\mathcal{T}) = \max_{T \in \mathcal{T}} \frac{h_T^2}{2|T|} = \max_{T \in \mathcal{T}} \frac{2|T|}{\rho_T^2} \quad (2.9)$$

Wir nennen die Triangulierung \mathcal{T} schlussendlich $\bar{\gamma}$ -**formregulär**, falls $\sigma(\mathcal{T}) \leq \bar{\gamma}$ gilt. \triangle

Für $\bar{\gamma}$ -formreguläre Triangulierungen gelten die folgenden Abschätzungen:

Lemma 2.28. Sei \mathcal{T} eine $\bar{\gamma}$ -formreguläre Triangulierung und $T \in \mathcal{T}$ ein beliebiges Dreieck, dann gelten die Ungleichungsketten

$$2|T| \leq h_T^2 \leq 2\bar{\gamma}|T| \quad (2.10)$$

$$2|T|\bar{\gamma}^{-1} \leq \rho_T^2 \leq 2|T| \quad (2.11)$$

$$2|T|\bar{\gamma}^{-1} \leq h_E^2 \leq 2\bar{\gamma}|T|. \quad (2.12)$$

Außerdem gilt mit $E \in \mathcal{E}_T$

$$h_T \leq \bar{\gamma}\rho_T \leq \bar{\gamma}h_E. \quad (2.13)$$

Beweis. Wegen $\rho_T \leq h_T$ gilt

$$\frac{\rho_T^2}{2} \leq \underbrace{\frac{h_T \rho_T}{2}}_{=|T|} \leq \frac{h_T^2}{2}$$

und damit folgt jeweils ein Teil der Ungleichungsketten in (2.10) und (2.11). Der jeweils andere Teil und die erste Abschätzung in (2.13) gilt, da für beliebiges $T \in \mathcal{T}$ wegen (2.9) stets

$$\frac{h_T}{\rho_T} = \frac{h_T^2}{2|T|} = \frac{2|T|}{\rho_T^2} \leq \sigma(\mathcal{T}) \leq \bar{\gamma}$$

erfüllt ist. Um die restlichen Abschätzungen für h_E in (2.12) und (2.13) zu erhalten, verwende man die bereits gezeigten Ungleichungen in Kombination mit Bemerkung 2.21 (vii). \square

Aus [Pra, Lemma 3.9] entnehmen wir außerdem das folgende Resultat:

Lemma 2.29. Sei $\widehat{T} := \text{conv}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ das Referenzelement und $T := \text{conv}\{z_1, z_2, z_3\}$ ein beliebiges nicht-degeneriertes Dreieck. Dann ist mit

$$B := \begin{pmatrix} z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

eine reguläre Matrix definiert und außerdem stellt

$$\begin{aligned} \Phi : \widehat{T} &\longrightarrow T \\ x &\longmapsto Bx + z_1 \end{aligned}$$

einen Diffeomorphismus gemäß den Voraussetzungen aus Lemma 1.31 dar. Dabei gilt

$$|\det B| = 2|T| \quad (2.14)$$

und die beiden Abschätzungen

$$h_T/\sqrt{2} \leq \|B\|_F \leq \sqrt{2}h_T \quad \text{und} \quad \rho_T^{-1}/\sqrt{2} \leq \|B^{-1}\|_F \leq \sqrt{2}\rho_T^{-1}. \quad (2.15)$$

□

Mit den letzten beiden Lemmata können wir durch einige Spezialfälle von Lemma 1.31 formulieren, die im weiteren Verlauf der Arbeit besonders wichtig sind.

Korollar 2.30. Es gelten die Voraussetzungen aus Lemma 2.29. Dann gilt für $u \in H^1(T)$:

$$\|u \circ \Phi\|_{L^2(\hat{T})}^2 \leq \bar{\gamma}h_T^{-2}\|u\|_{L^2(T)}^2, \quad (2.16)$$

$$\|u\|_{L^2(T)}^2 \leq h_T^2\|u \circ \Phi\|_{L^2(\hat{T})}^2, \quad (2.17)$$

$$\|\nabla(u \circ \Phi)\|_{L^2(\hat{T})}^2 \leq 2\bar{\gamma}\|\nabla u\|_{L^2(T)}^2, \quad (2.18)$$

$$\|\nabla u\|_{L^2(T)}^2 \leq 2\bar{\gamma}^2\|\nabla(u \circ \Phi)\|_{L^2(\hat{T})}^2. \quad (2.19)$$

Sei $E \in \mathcal{E}_T$ eine beliebige Kante und $\hat{E} \in \mathcal{E}_{\hat{T}}$ die dazugehörige Kante des Referenzelements, dann gilt außerdem:

$$\|\gamma u \circ \Phi\|_{L^2(\hat{E})}^2 \leq \sqrt{2}h_E^{-1}\|\gamma u\|_{L^2(E)}^2, \quad (2.20)$$

$$\|\gamma u\|_{L^2(E)}^2 \leq h_E\|\gamma u \circ \Phi\|_{L^2(\hat{E})}^2, \quad (2.21)$$

$$\|\nabla_{\hat{E}}(\gamma u \circ \Phi)\|_{L^2(\hat{E})}^2 \leq h_E\|\nabla_E \gamma u\|_{L^2(E)}^2, \quad (2.22)$$

$$\|\nabla_E \gamma u\|_{L^2(E)}^2 \leq \sqrt{2}h_E^{-1}\|\nabla_{\hat{E}}(\gamma u \circ \Phi)\|_{L^2(\hat{E})}^2. \quad (2.23)$$

Beweis. Mit den bisherigen Resultaten lassen sich die Ungleichungen (2.16)-(2.21) problemlos wie folgt zeigen:

$$\begin{aligned} \|u \circ \Phi\|_{L^2(\hat{T})}^2 &\stackrel{(1.12)}{=} |\det B|^{-1}\|u\|_{L^2(T)}^2 \stackrel{(2.14)}{=} \frac{1}{2|T|}\|u\|_{L^2(T)}^2 \stackrel{(2.10)}{\leq} \bar{\gamma}h_T^{-2}\|u\|_{L^2(T)}^2 \quad \checkmark \\ \|u\|_{L^2(T)}^2 &\stackrel{(1.12)}{=} |\det B|\|u \circ \Phi\|_{L^2(\hat{T})}^2 \stackrel{(2.14)}{=} 2|T|\|u \circ \Phi\|_{L^2(\hat{T})}^2 \\ &\stackrel{(2.10)}{\leq} h_T^2\|u \circ \Phi\|_{L^2(\hat{T})}^2 \quad \checkmark \\ \|\nabla(u \circ \Phi)\|_{L^2(\hat{T})}^2 &\stackrel{(1.13)}{\leq} |\det B|^{-1}\|B\|_F^2\|\nabla u\|_{L^2(T)}^2 \stackrel{(2.14),(2.15)}{\leq} |T|^{-1}h_T^2\|\nabla u\|_{L^2(T)}^2 \\ &\stackrel{(2.10)}{\leq} 2\bar{\gamma}\|\nabla u\|_{L^2(T)}^2 \quad \checkmark \\ \|\nabla u\|_{L^2(T)}^2 &\stackrel{(1.14)}{\leq} |\det B|\|B^{-1}\|_F^2\|\nabla(u \circ \Phi)\|_{L^2(\hat{T})}^2 \\ &\stackrel{(2.14),(2.15)}{\leq} 4|T|\rho_T^{-2}\|\nabla(u \circ \Phi)\|_{L^2(\hat{T})}^2 \stackrel{(2.11)}{\leq} 2\bar{\gamma}\|\nabla(u \circ \Phi)\|_{L^2(\hat{T})}^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Da \widehat{E} eine Kante des Referenzelements ist, gilt $1 \leq h_{\widehat{E}} \leq \sqrt{2}$ und damit gilt auch:

$$\begin{aligned}
\|\gamma u \circ \Phi\|_{L^2(\widehat{E})}^2 &\stackrel{(1.16)}{=} \left(\frac{h_E}{h_{\widehat{E}}}\right)^{-1} \|\gamma u\|_{L^2(E)}^2 \leq \sqrt{2} h_E^{-1} \|\gamma u\|_{L^2(E)}^2 \quad \checkmark \\
\|\gamma u\|_{L^2(E)}^2 &\stackrel{(1.16)}{=} \frac{h_E}{h_{\widehat{E}}} \|\gamma u \circ \Phi\|_{L^2(\widehat{E})}^2 \leq h_E \|\gamma u \circ \Phi\|_{L^2(\widehat{E})}^2 \quad \checkmark \\
\|\nabla_{\widehat{E}}(\gamma u \circ \Phi)\|_{L^2(\widehat{E})}^2 &\stackrel{(1.17)}{=} \frac{h_E}{h_{\widehat{E}}} \|\nabla_E \gamma u\|_{L^2(E)}^2 \leq h_E \|\nabla_E \gamma u\|_{L^2(E)}^2 \quad \checkmark \\
\|\nabla_E \gamma u\|_{L^2(E)}^2 &\stackrel{(1.17)}{=} \left(\frac{h_E}{h_{\widehat{E}}}\right)^{-1} \|\nabla_{\widehat{E}}(\gamma u \circ \Phi)\|_{L^2(\widehat{E})}^2 \leq \sqrt{2} h_E^{-1} \|\nabla_{\widehat{E}}(\gamma u \circ \Phi)\|_{L^2(\widehat{E})}^2 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

□

In [Pra, Lemma 4.3] findet sich dazu folgendes Resultat:

Lemma 2.31. Es existiert eine Konstante $C_\sigma > 0$, die nur von $\sigma(\mathcal{T})$ abhängt, sodass gilt:

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\omega}_z| &\leq C_\sigma \quad \text{für alle } z \in \mathcal{K}, \\
|\widetilde{\omega}_E| &\leq C_\sigma \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}, \\
|\widetilde{\omega}_T| &\leq C_\sigma \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}, \\
|\widetilde{\omega}_E^\Gamma| &\leq C_\sigma \quad \text{für alle } E \in E_\Gamma.
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Anzahl der Elemente pro Patch gleichmäßig beschränkt ist. □

Es gilt außerdem das folgende Lemma:

Lemma 2.32. Für $E \in \mathcal{E}_\Gamma$ und $E' \in \omega_E^\Gamma$ gilt mit den Konstanten aus Definition 2.27 und Lemma 2.31

$$\bar{\gamma}^{-C_\sigma} \leq \frac{h_E}{h_{E'}} \leq \bar{\gamma}^{C_\sigma}.$$

Beweis. Wegen $E \cap E' \neq \emptyset$ sind wir in einer Situation wie in Abbildung 2.1 mit den Kanten $E = E_1, E_2, \dots, E_{n-1}, E_n = E'$ dargestellt.

Wegen Lemma 2.31 gilt $n \leq C_\sigma$. Wegen Bemerkung 2.21 (vii) und der $\bar{\gamma}$ -Formregularität aus Definition 2.27 folgt für jedes $i = 1, \dots, n-1$

$$\frac{h_{E_i}}{h_{E_{i+1}}} \leq \frac{h_{T_i}}{\rho_{T_i}} \leq \bar{\gamma}.$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\frac{h_E}{h_{E'}} = \frac{h_{E_1}}{h_{E_n}} = \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{h_{E_i}}{h_{E_{i+1}}} \right) \leq \bar{\gamma}^{n-1} \leq \bar{\gamma}^{C_\sigma}.$$

Um die andere Abschätzung

$$\bar{\gamma}^{-C_\sigma} \leq \frac{h_E}{h_{E'}}$$

einzusehen, gehe man zu den Kehrwerten über und vertausche lediglich die Rollen von E und E' . □

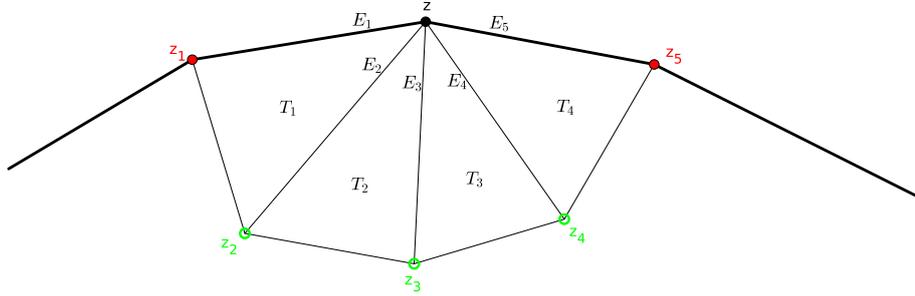


Abbildung 2.1: Die fetten Kanten stellen einen Abschnitt des Randes Γ dar. Die Abbildung soll illustrieren, dass zwei „benachbarte“ Kanten E_i und E_{i+1} jeweils Randkanten des gemeinsamen Dreiecks T_i sind.

2.3 Diskrete Funktionenräume

In diesem Abschnitt wollen wir einige Funktionenräume und deren Eigenschaften angeben. \mathcal{T} sei dabei stets eine reguläre Triangulierung von Ω und \mathcal{E} die Menge aller Kanten von \mathcal{T} .

Definition 2.33. Sei $\emptyset \neq \mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}$ eine beliebige Teilmenge an Dreiecken und $\mathcal{T}_\cup^* := \bigcup_{T \in \mathcal{T}^*} T$ die Vereinigung dieser Dreiecke. Wir definieren dann mit

$$\mathcal{S}^1(\mathcal{T}^*) := \{v_h \in C(\mathcal{T}_\cup^*) \mid v_h|_T \text{ affin} \quad \forall T \in \mathcal{T}^*\}$$

den Funktionenraum aller stetiger und stückweise affiner Funktionen und dessen Unterraum

$$\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}^*) := \{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}^*) \mid v_h(z) = 0 \quad \forall z \in \mathcal{K} \cap \Gamma \cap \mathcal{T}_\cup^*\}.$$

Diese Definition gilt insbesondere für den Fall $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$. △

Lemma 2.34. Sei $\emptyset \neq \mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}$ und bezeichne mit $\mathcal{K}^* := \bigcup\{z \in \mathcal{K}_T \mid T \in \mathcal{T}^*\}$ die Menge aller Knoten dieser Dreiecke. Sei außerdem eine Funktion $r : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, die jedem Knoten einen beliebigen Skalar zuordnet.

Dann existiert eine eindeutige Funktion $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}^*)$, die

$$v_h(z) = r(z) \quad \forall z \in \mathcal{K}^*$$

erfüllt.

Beweis. Für jedes $x \in \mathcal{T}_\cup^*$ gibt es nach Definition von \mathcal{T}_\cup^* zumindest ein $T \in \mathcal{T}^*$ mit $x \in T$. Wegen 2.18 können wir Satz 2.14 mit

- $(v_i)_{i=1}^3 := x_T, y_T, z_T$
- $(w_i)_{i=1}^3 := r(x_T), r(y_T), r(z_T)$

- $V' := T = \text{conv}\{x_T, y_T, z_T\}$

anwenden. Dieser liefert uns zumindest lokal auf jedem Dreieck die eindeutige Existenz einer affinen Funktion $a_T : T \rightarrow \mathbb{R}$, die $a_T(z) = r(z)$ für alle $z \in \mathcal{K}_T$ erfüllt. Wir definieren daher

$$v_h|_T := a_T \quad \forall T \in \mathcal{T}^*, \quad (2.24)$$

müssen jedoch noch zeigen, dass diese Funktion auch auf dem Durchschnitt von verschiedenen Dreiecken wohldefiniert ist.

Seien dazu also $T, T' \in \mathcal{T}^*$ mit $T \neq T'$ und $T \cap T' \neq \emptyset$ gegeben. Aufgrund der Regularität von \mathcal{T} kann jedoch in diesem Fall nur entweder (ii) oder (iii) aus Definition 2.23 erfüllt sein.

1. Fall: $T \cap T' = z = \mathcal{K}_T \cap \mathcal{K}_{T'}$

Wegen $z \in \mathcal{K}_T \cap \mathcal{K}_{T'}$ gilt

$$a_T(z) = r(z) = a_{T'}(z)$$

und damit stimmen die Funktionswerte der affinen Funktionen überein.

2. Fall: $T \cap T' = E \in \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{T'}$

Seien z_1^E, z_2^E die Endpunkte der Kante E . Wir können in diesem Fall Satz 2.14 mit der Wahl

- $(v_i)_{i=1}^2 := z_1^E, z_2^E$
- $(w_i)_{i=1}^2 := r(z_1^E), r(z_2^E)$
- $V' := E = \text{conv}\{z_1^E, z_2^E\}$

anwenden. Dieser liefert dann die Eindeutigkeit einer affinen Abbildung $a_E : E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a_E(z_1^E) = r(z_1^E)$ und $a_E(z_2^E) = r(z_2^E)$. Da die beiden Abbildungen $a_T|_E$ und $a_{T'}|_E$ jedoch ebenfalls affine Abbildungen mit diesen Eigenschaften sind, folgt $a_T|_E = a_{T'}|_E$ und damit müssen die Funktionen auf der gemeinsamen Kante übereinstimmen.

Dies zeigt, dass unsere Definition aus (2.24) tatsächlich eine wohldefinierte Abbildung beschreibt. Diese Funktion ist außerdem auch stetig auf \mathcal{T}_\cup^* , da die affinen Einschränkungen auf alle Dreiecke stetig sind und liegt daher in $C(\mathcal{T}_\cup^*)$. \square

Lemma 2.35. Für $\emptyset \neq \mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}$ gilt:

- (i) Für jeden Knoten $z \in \mathcal{K}^*$ gibt es eine eindeutige Funktion $\zeta_z \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}^*)$ mit der Eigenschaft

$$\zeta_z(z') = \delta_{zz'} \quad \forall z' \in \mathcal{K}^*.$$

Man nennt diese Funktionen **Hutfunktionen**. Die Menge aller Hutfunktionen $\mathcal{B} := \{\zeta_z | z \in \mathcal{K}^*\}$ bildet eine Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}^*)$, die sogenannte **nodale Basis**.

- (i) $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ ist ein endlichdimensionaler Unterraum von $H^1(\Omega)$ und damit ebenfalls ein Hilbertraum.

- (i) $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ ist ein endlichdimensionaler Unterraum von $H_0^1(\Omega)$ und damit ebenfalls ein Hilbertraum.

Beweis. (i): Durch (i) sind die Funktionswerte für ζ_z an allen Knoten vorgegeben. Damit folgt zunächst aus Lemma 2.34 die Existenz und Eindeutigkeit einer derartigen Funktion aus $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}^*)$.

Um nachzuweisen, dass die Menge aller Hutfunktionen auch eine Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}^*)$ bildet, müssen noch zeigen, dass sich jede Funktion aus $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}^*)$ eindeutig als Linearkombination aus Hutfunktionen darstellen lässt. Sei $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}^*)$ beliebig. Dazu betrachten wir die Linearkombination $v_h^* := \sum_{z \in \mathcal{K}^*} v_h(z) \zeta_z$. Diese Funktion ist klarerweise wieder stetig, außerdem aufgrund von Lemma 2.12 wieder auf jedem Dreieck affin und liegt daher ebenfalls in $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}^*)$. Es gilt weiters

$$v_h^*(z') = \sum_{z \in \mathcal{K}^*} v_h(z) \zeta_z(z') = \sum_{z \in \mathcal{K}^*} v_h(z) \delta_{zz'} = v_h(z') \quad \text{für alle } z' \in \mathcal{K}^*$$

womit v_h und v_h^* auf den Knoten übereinstimmen. Aufgrund von Lemma 2.34 müssen die Funktionen dann aber übereinstimmen, damit lässt sich v_h in der obigen Form als Linearkombination von Hutfunktionen schreiben. Da die Koeffizienten in einer Linearkombination aus Hutfunktionen wegen $\zeta_z(z') = \delta_{zz'}$ jedoch immer genau die Funktionswerte an den Knoten sind, ist die Darstellung auch eindeutig.

(ii): Zunächst müssen wir sicherstellen, dass für jedes $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \subseteq H^1(\Omega)$ gilt. Laut Definition ist jede Funktion aus $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ stetig auf $\bar{\Omega}$ und damit insbesondere auch auf Ω . Als stetige Funktion auf einem beschränkten Gebiet ist $\int_{\Omega} |v_h|^2 d\lambda < \infty$, also $v_h \in L^2(\Omega)$. Betrachtet man die schwachen partiellen Ableitungen und beachtet, dass v_h auf jedem Dreieck T affin ist, so folgt, dass $\partial_i v_h$ stückweise konstant ist. Damit gilt jedoch auch $\int_{\Omega} |\partial_i v_h|^2 d\lambda < \infty$, womit mit der Definition des Sobolev-Raumes $H^1(\Omega)$ aus Definition 1.5 genau $v_h \in H^1(\Omega)$ erfüllt ist.

Da es für jeden Knoten genau eine Hutfunktion gibt, gilt

$$|\mathcal{B}^*| = |\mathcal{K}^*| < \infty,$$

womit die Dimension von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})|_{\Omega}$ endlich ist und genau mit der Anzahl der Knoten übereinstimmt. Mit Lemma 1.23 folgt daraus also, dass $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})|_{\Omega}$ auch ein Hilbertraum ist.

(iii): Wegen $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})|_{\Omega} \subseteq \mathcal{S}^1(\mathcal{T})|_{\Omega} \subseteq H^1(\Omega)$ genügt es zu zeigen, dass

$$\gamma v_h = v_h|_{\Gamma} \equiv 0 \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$$

gilt. Dafür verwenden wir die Resultate aus Lemma 2.24.

Sei also $z \in \Gamma$ beliebig. Wegen Lemma 2.24 (ii) gilt $z \in \mathcal{K}$ oder $z \in E$ für genau eine Kante $E \in \mathcal{E}$.

1. Fall: $z \in \mathcal{K}$

In diesem Fall folgt $v_h(z) = 0$ unmittelbar aus der Definition des $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$.

2. Fall: $z \in E$

Wegen Lemma 2.24 (iii) gilt $E \subseteq \Gamma$ und damit insbesondere auch für die beiden Endpunkte der Kante $z_1^E, z_2^E \in \Gamma$. Da die Endpunkte einer Kante immer Knoten sind, gilt $v_h(z_1^E) = v_h(z_2^E) = 0$. Da v_h affin ist und sich jedes $z \in E$ als Konvexkombination der Endpunkte schreiben lässt, können wir Korollar 2.15 anwenden und erhalten $v_h(z) = 0$.

Also gilt in jedem Fall $v_h(z) = 0$ und damit $v_h|_{\Gamma} \equiv 0$. □

Wir können affine Funktionen natürlich auch nur auf Kanten, anstatt auf Dreiecken betrachten. Dies wird im Folgenden vor allem bei den Dirichlet-Randdaten eine Rolle spielen.

Definition 2.36. Sei $\emptyset \neq \mathcal{E}^* \subseteq \mathcal{E}$ eine beliebige Menge an Kanten und $E_{\cup}^* := \bigcup_{E \in \mathcal{E}^*} E$ die Vereinigung dieser Kanten. Wir definieren dann mit

$$\mathcal{S}^1(\mathcal{E}^*) := \{v_h \in C(\mathcal{E}_{\cup}^*) \mid \forall E \in \mathcal{E}^* \text{ ist } v_h|_E \text{ affin} \}$$

die Menge aller auf den Kanten stetigen und stückweise affinen Funktionen. Diese Definition gilt insbesondere für die interessanten Spezialfälle:

- $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}_{\Gamma}$, was dann wegen $\mathcal{E}_{\cup}^* = \Gamma$ auf den Raum $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_{\Gamma}) := \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_{\Gamma})$ führt.
- $\mathcal{E}^* = \{E\}$, wobei $E \in \mathcal{E}$ eine einzelne Kante der Triangulierung ist. Die führt auf den Raum $\mathcal{S}^1(E)$, was nichts anderes als der Raum aller affinen Funktionen auf der Kante E ist.

△

Wir formulieren nun entsprechende Varianten der beiden Lemmata 2.34 und 2.35 (i), (ii) für Funktionen aus $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}^*)$.

Lemma 2.37. Sei $\emptyset \neq \mathcal{E}^* \subseteq \mathcal{E}$ und bezeichne mit $\mathcal{K}^* := \bigcup\{z \in \mathcal{K} \mid \exists E \in \mathcal{E}^* : z \in E\}$ die Menge aller Knoten dieser Kanten. Sei außerdem eine Funktion $r : \mathcal{K}^* \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, die jedem Knoten einen beliebigen Skalar zuordnet.

Dann existiert eine eindeutige Funktion $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}^*)$, die

$$v_h(z) = r(z) \quad \text{für alle } z \in \mathcal{K}^*$$

erfüllt.

Beweis. Bei den Knoten ist der Funktionswert durch die Forderung bereits klar.

Für jedes $z \in \mathcal{E}_{\cup}^* \setminus \mathcal{K}^*$ gibt es wegen Bemerkung 2.21 (ii) genau ein $E \in \mathcal{E}^*$ mit $z \in E$. Seien z_1^E und z_2^E die Randpunkte von E . Wegen Bemerkung 2.18 können wir Satz 2.14 mit

- $(v_i)_{i=1}^2 := z_1^E, z_2^E$
- $(w_i)_{i=1}^2 := r(z_1^E), r(z_2^E)$
- $V' := E = \text{conv}\{z_1^E, z_2^E\}$

anwenden. Dieser liefert dann die Eindeutigkeit einer affinen Abbildung $a_E : E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a_E(z_1^E) = r(z_1^E)$ und $a_E(z_2^E) = r(z_2^E)$. Wir setzen dann $v_h(z) := a_E(z)$. □

Lemma 2.38. Es gilt für $\emptyset \neq \mathcal{E}^* \subseteq \mathcal{E}$:

- (i) Für jeden Knoten $z \in \mathcal{K}^*$ gibt es eine eindeutige Funktion $\zeta_z^{\mathcal{E}} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}^*)$ mit der Eigenschaft

$$\zeta_z^{\mathcal{E}}(z') = \delta_{zz'} \quad \text{für alle } z' \in \mathcal{K}^*.$$

Man nennt diese Funktionen **Hutfunktionen** und die Menge aller Hutfunktionen $\mathcal{B} := \{\zeta_z^{\mathcal{E}} \mid z \in \mathcal{K}^*\}$ bildet eine Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}^*)$, die sogenannte **nodale Basis**.

- (ii) Seien ζ_z die in Lemma 2.35 definierten Funktionen und $\mathcal{E}_{\cup}^* \subseteq \mathcal{T}_{\cup}^*$. Dann gilt

$$\zeta_z^{\mathcal{E}} = \zeta_z|_{\mathcal{E}_{\cup}^*} \quad \text{für alle } z \in \mathcal{K}^*.$$

(iii) $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ ist ein endlichdimensionaler Unterraum von $H^{1/2}(\Gamma)$ und damit ebenfalls ein Hilbertraum.

Beweis. (i): Der Beweis kann wortgleich von Lemma 2.35 (i) übernommen werden, indem überall \mathcal{T}^* durch \mathcal{E}^* ersetzt wird.

(ii): Wegen der Forderung $\mathcal{E}_\cup^* \subseteq \mathcal{T}_\cup^*$ ist der Definitionsbereich der Funktionen $\zeta_z^\mathcal{E}$ eine Teilmenge des Definitionsbereichs der Funktionen ζ_z . Damit macht die Einschränkung Sinn. Wegen Lemma 2.35 (i) gilt die Eigenschaft aus Punkt (i) dieses Lemmas ebenfalls für die Einschränkungen $\zeta_z|_{\mathcal{E}_\cup^*}$. Da die $\zeta_z^\mathcal{E}$ jedoch eindeutig sind, folgt sofort die Behauptung.

(iii): Sei $g_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$. Wegen Bemerkung 3.11 existiert dazu dann eine Fortsetzung $\widehat{g}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$. Wegen Lemma 2.35 (ii) liegt $\widehat{g}_h|_\Omega$ dann aber insbesondere in $H^1(\Omega)$. Da $\gamma(\widehat{g}_h|_\Omega) = \widehat{g}_h|_\Gamma = g_h$ gilt, ist $g_h \in \gamma(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\Gamma)$. Damit gilt $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma) \subseteq H^{1/2}(\Gamma)$. Der Rest folgt wieder völlig analog zu Lemma 2.35 (ii). \square

Die nun folgende **inverse Ungleichung** wird unter anderem in Kapitel 6 eine wesentliche Eigenschaft der in diesem Kapitel eingeführten Funktionenräume sein. Wir entnehmen diese aus [Pra, Theorem 3.10].

Lemma 2.39. Sei \mathcal{T} eine reguläre Triangulierung von Ω mit der Formregularitätskonstanten $\sigma(\mathcal{T})$ und $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$. Dann existiert eine von Ω und \mathcal{T} unabhängige Konstante $C > 0$, sodass gilt

$$\|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sigma(\mathcal{T})\|h^{-1}v_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

\square

2.3.1 Projektionsoperatoren

Um die Analysis der folgenden Kapitel zu bewältigen, sind wir an Projektionsoperatoren interessiert.

Diese sollen die Sobolev-Räume aus Kapitel 3 geeignet auf die diskreten Funktionenräume dieses Kapitels abbilden. Entscheidend wird es sein, die Projektionen geschickt so zu wählen, dass sie möglichst günstige Eigenschaften haben, die wir in weiterer Folge dann verwenden können.

Knoten-Interpolation

Definition 2.40. Sei \mathcal{T}_h eine reguläre Triangulierung von Ω .

Wir definieren dann die Knoten-Interpolation $\mathbb{K}_h : \mathbb{R}^\Omega \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ durch

$$\mathbb{K}_h v := \sum_{z \in \mathcal{K}} v(z) \zeta_z. \quad (2.25)$$

Zusätzlich definieren wir mit den Funktionen $\zeta_z^\mathcal{E} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ aus Lemma 2.38 die Knoten-Interpolation auf dem Rand $\mathbb{K}_h^\Gamma : \mathbb{R}^\Gamma \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ durch

$$\mathbb{K}_h^\Gamma g := \sum_{z \in \mathcal{K}^\Gamma} g(z) \zeta_z^\mathcal{E}. \quad (2.26)$$

\triangle

Proposition 2.41. Seien im Folgenden $v, v^* \in \mathbb{R}^{\bar{\Omega}}$, $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$, $g \in \mathbb{R}^\Gamma$ und $g_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$. Für die Knoten-Interpolationen \mathbb{K}_h und \mathbb{K}_h^Γ gelten folgende Eigenschaften

(i) \mathbb{K}_h ist eine Projektion auf $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$, d.h. es gilt

$$\mathbb{K}_h v_h = v_h$$

(ii) Die Funktionswerte von \mathbb{K}_h an den Knoten bleiben bestehen, d.h. es gilt

$$v|_{\mathcal{K}} = (\mathbb{K}_h v)|_{\mathcal{K}}.$$

(iii) Die Spur $\gamma(\mathbb{K}_h v)$ hängt nur von $v|_{\mathcal{K}_\Gamma}$ ab, d.h. es gilt

$$v|_{\mathcal{K}_\Gamma} = v^*|_{\mathcal{K}_\Gamma} \implies \gamma(\mathbb{K}_h v) = \gamma(\mathbb{K}_h v^*).$$

(iv) Die Spur $\gamma(\mathbb{K}_h v)$ hängt nur von $v|_\Gamma$ ab, d.h. es gilt

$$v|_\Gamma = v^*|_\Gamma \implies \gamma(\mathbb{K}_h v) = \gamma(\mathbb{K}_h v^*).$$

(v) \mathbb{K}_h^Γ ist eine Projektion auf $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$, d.h. es gilt

$$\mathbb{K}_h^\Gamma g_h = g_h.$$

(vi) Die Funktionswerte von \mathbb{K}_h^Γ an den Knoten bleiben bestehen, d.h. es gilt

$$g|_{\mathcal{K}^\Gamma} = (\mathbb{K}_h^\Gamma g)|_{\mathcal{K}^\Gamma}.$$

(vii) Bezeichnen wir mit $\hat{g} \in \mathbb{R}^{\bar{\Omega}}$ eine beliebige Fortsetzung von g , d.h. es gelte $\hat{g}|_\Gamma = g$. Dann gilt der Zusammenhang

$$(\mathbb{K}_h \hat{g})|_\Gamma = \mathbb{K}_h^\Gamma g.$$

(viii) Es gilt außerdem der Zusammenhang

$$(\mathbb{K}_h v)|_\Gamma = \mathbb{K}_h^\Gamma (v|_\Gamma).$$

Beweis. (i): Wegen der Eigenschaft aus Lemma 2.35 (i) für die nodale Basis gilt für beliebiges $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$

$$(\mathbb{K}_h v_h)(z) = \sum_{z' \in \mathcal{K}} v_h(z') \zeta_{z'}(z) = \sum_{z' \in \mathcal{K}} v_h(z') \delta_{z'z} = v_h(z) \quad \text{für alle } z \in \mathcal{K}.$$

(ii): Laut Definition gilt

$$(\mathbb{K}_h v)(z') = \sum_{z \in \mathcal{K}} v(z) \zeta_z(z') = \sum_{z \in \mathcal{K}} v(z) \delta_{zz'} = v(z') \quad \text{für alle } z' \in \mathcal{K},$$

was aber genau $v|_{\mathcal{K}} = (\mathbb{K}_h v)|_{\mathcal{K}}$ bedeutet.

(iii): Wegen (ii) gilt $v|_{\mathcal{K}_\Gamma} = (\mathbb{K}_h v)|_{\mathcal{K}_\Gamma}$. Da $\mathbb{K}_h v \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ gilt, ist $\mathbb{K}_h v$ insbesondere affin auf allen Kanten $E \in \mathcal{E}_\Gamma$. Lemma 2.37 mit $\mathcal{E}^* := \mathcal{E}_\Gamma$ liefert uns jedoch die Eindeutigkeit einer solchen affinen Funktion, die obendrein nur von Funktionswerte an den Knoten \mathcal{K}_Γ

abhängt.

(iv): Folgt unmittelbar aus (iii), wegen der offensichtlichen Implikation

$$v|_{\Gamma} = v^*|_{\Gamma} \implies v|_{\mathcal{K}_{\Gamma}} = v^*|_{\mathcal{K}_{\Gamma}}.$$

(v),(vi): Beweise analog zu (i) und (ii).

(vii): Wegen Lemma 2.38 (ii) gilt $\zeta_z|_{\Gamma} = \zeta_z^{\mathcal{E}}$ und damit für beliebiges $g \in \mathbb{R}^{\Gamma}$ laut Definition von \mathbb{K}_h und \mathbb{K}_h^{Γ} und

$$(\mathbb{K}_h \widehat{g})|_{\Gamma} = \sum_{z \in \mathcal{K}} \widehat{g}(z) \zeta_z|_{\Gamma} = \sum_{z \in \mathcal{K}^{\Gamma}} g(z) \zeta_z^{\mathcal{E}} = \mathbb{K}_h^{\Gamma} g.$$

(viii): Da die Fortsetzung \widehat{g} in (vii) beliebig ist, können wir für die Wahl $g := v_{\Gamma}$ und $\widehat{g} := v$ diesen bereits gezeigten Punkt anwenden und erhalten so unmittelbar die Aussage. \square

Scott-Zhang-Projektion

Wir führen diese Projektion wie in [Pra, Chapter 4.2] ein. Dort finden sich auch die Beweise zu Lemma 2.42 und Proposition 2.46 (i)–(viii).

In diesem Kapitel sei \mathcal{T}_h wieder jeweils eine reguläre Triangulierung von Ω .

Lemma 2.42. Wähle zunächst für jeden Knoten $z \in \mathcal{K}$ eine beliebige Kante $E_z \in \mathcal{E}$. Dann gibt es für jedes beliebige $z \in \mathcal{K}$ eine eindeutige Funktion $\psi_z \in \mathcal{S}^1(E_z)$, sodass gilt

$$\int_{E_z} \psi_z \zeta_{z'} d\mu = \delta_{zz'} \quad \text{für alle } z' \in \mathcal{K}.$$

\square

Bemerkung 2.43. Ähnlich wie in Satz 1.11 lässt sich mit $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(E_z)$ auch ein Operator definieren, welcher der Einschränkung einer H^1 -Funktion auf eine beliebige Kante der Triangulierung entspricht, da Kanten ja jeweils die Ränder von Dreiecken darstellen. Dieser Umstand legitimiert die folgende Definition. \triangle

Definition 2.44. Wir wählen wieder für jeden Knoten $z \in \mathcal{K}$ eine beliebige Kante $E_z \in \mathcal{E}$ mit $z \in E_z$, fordern dabei jedoch, dass bei der Wahl die zusätzliche Bedingung

$$z \in \Gamma \implies E_z \subseteq \Gamma \tag{2.27}$$

erfüllt ist.

Nach Lemma 2.42 erhalten wir für jedes $z \in \mathcal{K}$ die Funktion $\psi_z \in \mathcal{S}^1(E_z)$ mit den dort angeführten Eigenschaften. Damit definieren wir die **Scott-Zhang-Projektion** $\mathbb{J}_h : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ durch

$$\mathbb{J}_h v := \sum_{z \in \mathcal{K}} \left(\int_{E_z} \psi_z \gamma v d\mu \right) \zeta_z,$$

wobei $\gamma : T \rightarrow E_z$ hier die Spurabbildung von einem Dreieckselement auf dessen Rand bezeichnet. Weiters definieren wir die Scott-Zhang-Projektion auf dem Rand $J^{\Gamma} : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^1(\Gamma)$ durch

$$\mathbb{J}_h^\Gamma g := \sum_{z \in \mathcal{K}_\Gamma} \left(\int_{E_z} \psi_z g \, d\mu \right) \zeta_z^\mathcal{E},$$

was wegen der Forderung in (2.27) möglich ist. \triangle

Bemerkung 2.45. Die Scott-Zhang-Projektion \mathbb{J}_h hängt von der Wahl der Triangulierung \mathcal{T}_h ab. Andererseits hängt \mathbb{J}_h auch von der Wahl der Kanten E_z gemäß Lemma 2.42 ab. Dieser Umstand wird in weiterer Folge aber keinen Einfluss auf die Analysis haben. Entsprechendes gilt auch für die Scott-Zhang-Projektion auf dem Rand. \triangle

Proposition 2.46. Die Scott-Zhang-Projektion erfüllt für beliebige $v, v^* \in H^1(\Omega)$ und $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)$ die folgenden Eigenschaften:

(i) \mathbb{J}_h ist linear und stetig. Es gilt

$$\|\mathbb{J}_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq C(1 + \text{diam}(\Omega)) \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

(ii) \mathbb{J}_h ist eine Projektion, d.h. es gilt

$$\mathbb{J}_h v_h = v_h.$$

(iii) Der Rand $\gamma(\mathbb{J}_h v)$ hängt nur vom Rand γv ab, d.h. es gilt

$$\gamma v = \gamma v^* \implies \gamma(\mathbb{J}_h v) = \gamma(\mathbb{J}_h v^*).$$

(iv) \mathbb{J}_h erhält diskrete Randdaten, d.h. es gilt

$$\gamma v \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma) \implies \gamma(\mathbb{J}_h v) = \gamma v.$$

(v) \mathbb{J}_h ist lokal H^1 -stetig, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $T \in \mathcal{T}_h$ gilt

$$\|\nabla \mathbb{J}_h v\|_{L^2(T)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}.$$

(vi) \mathbb{J}_h hat lokal lineare Konvergenzordnung, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $T \in \mathcal{T}_h$ gilt

$$\|(1 - \mathbb{J}_h)v\|_{L^2(T)} \leq C h_T \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}.$$

(vii) \mathbb{J}_h erfüllt das Céa-Lemma in dem Sinne, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, für die gilt

$$\|(1 - \mathbb{J}_h)v\|_{H^1(\Omega)} \leq C(1 + \text{diam}(\Omega)) \min_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)} \|v - v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

(viii) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist \mathbb{J}_h quasi-optimal, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$, sodass gilt

$$\|h^\alpha \nabla(1 - \mathbb{J}_h)v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \min_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h)} \|h^\alpha \nabla(v - v_h)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dabei ist h die lokale Gitterweite aus Definition 2.27.

(ix) Es gilt

$$\gamma \mathbb{J}_h v = \mathbb{J}_h^\Gamma(\gamma v).$$

(x) Es gilt

$$\gamma \mathbb{J}_h \mathcal{L}g = \mathbb{J}_h^\Gamma g \quad \text{für alle } g \in H^{1/2}(\Gamma).$$

(xi) Es gibt eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $T \in \mathcal{T}_h$ und $E \in \mathcal{E}_T$ gilt

$$\|\gamma(1 - \mathbb{J}_h)v\|_{L^2(E)} \leq Ch_E^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}.$$

(xii) Es gibt eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $E \in \mathcal{E}_\Gamma$ gilt

$$\|(1 - \mathbb{J}_h^\Gamma)g\|_{L^2(E)} \leq C \|h \nabla_E g\|_{L^2(\omega_E^\Gamma)} \quad \text{für alle } g \in H^1(\Gamma).$$

Dabei hängen die Konstanten C jeweils nur von der $\bar{\gamma}$ -Formregularität der Triangulierung \mathcal{T}_h ab.

Beweis. Die Beweise zu (i)-(viii) und (xi) finden sich in [Pra, Chapter 4.2]. Außerdem findet sich (xii) in [AFKPP, Kapitel 3.2].

(ix): Sei $v \in H^1(\Omega)$ beliebig. Weil $\zeta_z|_\Gamma \equiv 0$ für alle $z \in \mathcal{K}_\Omega$, gilt dann

$$\gamma \mathbb{J}_h v = \gamma \left(\sum_{z \in \mathcal{K}} \left(\int_{E_z} \psi_z \gamma v \, d\mu \right) \zeta_z \right) = \sum_{z \in \mathcal{K}_\Gamma} \left(\int_{E_z} \psi_z \gamma v \, d\mu \right) \zeta_z^\mathcal{E} = \mathbb{J}_h^\Gamma(\gamma v).$$

(x): Setzt man in der in Punkt (ix) gezeigten Gleichheit $v := \mathcal{L}g$ und verwende die Eigenschaft des Fortsetzungsoperators aus (3.9), so erhält man unmittelbar die Aussage. \square

L^2 -Orthogonalprojektion

Wegen $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \subseteq H^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ und da $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ endlichdimensional und damit abgeschlossen in $L^2(\Omega)$ ist, können wir mit Lemma 1.30 die L^2 -Orthogonalprojektion auf diesen Unterraum betrachten. Analoges gilt wegen $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma) \subseteq H^{1/2}(\Gamma) \subseteq L^2(\Gamma)$ auch für den Rand. Dies führt zu folgender Definition:

Definition 2.47. Für eine Triangulierung \mathcal{T}_h bezeichnen wir mit

$$\mathbb{P}_h : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_h) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}_h^\Gamma : L^2(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$$

die L^2 -Orthogonalprojektionen auf die jeweiligen Unterräume. \triangle

Wir fassen die (für unseren späteren Gebrauch) wichtigsten Eigenschaften von Orthogonalprojektionen zusammen, die beispielsweise in [BKW, Kapitel 3.2] angegeben sind. Da die für alle Orthogonalprojektionen gelten, formulieren wir sie allgemein:

Definition 2.48. Sei H ein Hilbertraum, H_h ein Unterraum. Man bezeichnet eine lineare Abbildung $\mathbb{P} : H \longrightarrow H$ genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn für alle $u \in H$ die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:

- $\mathbb{P}u \in H_h$
- $\langle \mathbb{P}u - u, v \rangle_H = 0$ für alle $v \in H_h$

△

Proposition 2.49. Sei H ein Hilbertraum, H_h ein Unterraum und $\mathbb{P} : H \rightarrow H$ die Orthogonalprojektion auf H_h . Dann gilt:

- (i) Eine Projektion (und damit insbesondere die Orthogonalprojektion) ist idempotent, d.h. es gilt

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}.$$

- (ii) Eine Orthogonalprojektion ist selbstadjungiert, d.h. es gilt

$$\langle \mathbb{P}u_1, u_2 \rangle_H = \langle u_1, \mathbb{P}u_2 \rangle_H \quad \text{für alle } u_1, u_2 \in H.$$

- (iii) Aus (i) und (ii) folgt insbesondere für jedes $u \in H$ die Gleichheit

$$\langle \mathbb{P}u, u_h \rangle_H = \langle u, u_h \rangle_H \quad \text{für alle } u_h \in H_h.$$

- (iv) Die Orthogonalprojektion ist stetig mit Stetigkeitskonstante 1, d.h. es gilt

$$\|\mathbb{P}u\|_H \leq \|u\|_H \quad \text{für alle } u \in H.$$

□

Kapitel 3

Lösungstheorie zum Modellproblem

Bevor wir uns numerischer Methoden zur Behandlung des Modellproblems (1.1) bedienen, betrachten wir zunächst Resultate zur Lösungstheorie dazu. Die Vorgangsweise in diesem Kapitel ist ähnlich wie in [Pra, Kapitel 1.1, 1.2, 3.6] und [Jue, Kapitel 4]. Für Ω und Γ gelten dabei wieder die Voraussetzungen aus Kapitel 1.1.

3.1 Starke Formulierung

Definition 3.1. (Starke Formulierung) Wir definieren die **starke Formulierung** des Problems, eine Lösung für unser Modellproblem (1.1) zu finden, wie folgt:
Gesucht ist eine Funktion $u \in C^2(\bar{\Omega})$, welche die beiden Gleichungen in (1.1) erfüllt. \triangle

Definition 3.2. (Starke Lösung) Sei u eine Funktion, welche die Eigenschaften aus Definition 3.1 erfülle. Dann nennen wir u eine **starke Lösung** des Modellproblems in (1.1). \triangle

3.2 Schwache Formulierung mit explizit geforderter Dirichlet-Randbedingung

Wir multiplizieren nun (1.1a) mit einer beliebigen Funktion $v \in H_0^1(\Omega)$ und integrieren auf beiden Seiten über Ω . Bei der erhaltenen Gleichung

$$-\int_{\Omega} v \Delta u \, d\lambda = \int_{\Omega} f v \, d\lambda$$

können wir auf der linken Seite laut Korollar 1.17 partielle Integration anwenden und erhalten

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\lambda = \int_{\Omega} f v \, d\lambda + \int_{\Gamma} \gamma v \partial_n u \, d\mu.$$

Das Randintegral in dieser Gleichung verschwindet, da $v \in H_0^1(\Gamma)$ und damit $\gamma v = 0$ ist. Wir erhalten daher in kompakterer Schreibweise die Gleichung

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (3.1)$$

Die Ausdrücke in dieser Gleichung sind im Unterschied zu (1.1) auch für Funktionen $u \in H^1(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$ wohldefiniert. Dieser Umstand motiviert folgende Definition:

Definition 3.3. (schwache Formulierung) Wir definieren die **schwache Formulierung** des Problems, eine Lösung für unser Modellproblem 1.1 zu finden, wie folgt: Gesucht ist eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

- u erfüllt Gleichung (3.1) für alle $v \in H_0^1(\Omega)$,
- $\gamma u = g$ auf Γ .

△

Definition 3.4. (schwache Lösung) Sei u eine Funktion, welche die Eigenschaften aus Definition 3.3 erfülle. Dann nennen wir u eine **schwache Lösung** des Modellproblems in (1.1). △

Bemerkung 3.5. Betrachten wir noch einmal Definition 3.3, erkennen wir sofort, dass $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ eine notwendige Bedingung für die Existenz einer schwachen Lösung ist, da das Bild einer $H^1(\Omega)$ -Funktion unter dem Spur-Operator γ laut Definition 1.12 genau eine $H^{1/2}(\Gamma)$ -Funktion ist.

Dass diese Voraussetzung auch hinreichend ist, zeigt Satz 3.8. △

Proposition 3.6. Man betrachte die beiden Definitionen 3.2 und 3.4. Dann gilt:

- (i) Jede klassische Lösung ist auch eine schwache Lösung.
- (ii) Wenn eine schwache Lösung ein Element von $C^2(\overline{\Omega})$ ist, dann ist sie auch eine klassische Lösung.

Beweis. (i) haben wir durch partielle Integration in Gleichung (3.3) hergeleitet. Beachte dabei, dass $C^2(\overline{\Omega})|_{\Omega} \subseteq H^1(\Omega)$ gilt, da stetige Funktionen auf kompakten Mengen sicher quadratisch integrierbar sind.

Für den Beweis von (ii) siehe [Pra, Proposition 2.17] und beachte, dass die Randbedingung auf Γ in beiden Formulierung explizit gefordert wird und in Gleichung (3.3) nicht eingeht. □

Bemerkung 3.7. In Proposition 3.6 haben wir gesehen, dass die Menge aller schwachen Lösungen eine Obermenge der Menge der klassischen Lösungen ist. Daher konzentrieren wir uns in weiterer Folge nur noch auf die schwache Formulierung des Modellproblems (1.1).

In den bisherigen Formulierungen dieses Kapitels muss noch keine schwache Lösung existieren. Notwendig für deren Existenz ist beispielsweise, dass die Randbedingung in Definition 3.3 überhaupt erfüllt sein kann. Dafür muss zumindest $g \in \gamma(H^1(\Omega))$, also $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ gelten.

Hinreichende Bedingungen für die Existenz einer schwachen Lösung liefert der folgende Satz. △

Satz 3.8. (Existenz für schwache Lösungen) Sei $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. Dann gilt:

- (i) Für unser Modellproblem (1.1) existiert eine eindeutige schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$.
- (ii) Die schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ erfüllt dabei die Abschätzung

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq 2(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}). \quad (3.2)$$

Beweis. (i):

1. Schritt: Existenz

Wir betrachten mit $\widehat{g} \in H^1(\Omega)$ eine beliebige Fortsetzung von $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. Diese muss existieren, da $H^{1/2}(\Gamma)$ nach Definition 1.12 ja genau das Bild von $H^1(\Omega)$ unter dem Spuroperator γ darstellt. Wir definieren eine Funktion $w \in H^1(\Omega)$ durch $w := u - \widehat{g}$, womit

$$\gamma w = \gamma u - \gamma \widehat{g} = g - g = 0$$

und damit sogar $w \in H_0^1(\Omega)$ gilt. Setzen wir diese Definition in Gleichung (3.1) ein, so erhalten wir

$$\langle \nabla w, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla \widehat{g}, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (3.3)$$

Das Ziel ist es nun, den **Darstellungssatz von Riesz** in der Variante von Korollar 1.25 anzuwenden. Wegen Korollar 1.22 und Lemma 1.19 ist die linke Seite von Gleichung (3.3) genau ein Skalarprodukt des Hilbertraumes $H_0^1(\Omega)$. Damit müssen wir nur noch zeigen, dass die rechte Seite $F(v) := \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla \widehat{g}, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}$ ein stetiges lineares Funktional auf $H_0^1(\Omega)$, also $F \in H^{-1}(\Omega)$, ist. Die Linearität in v ist klar, aufgrund der Eigenschaften von Skalarprodukten und Gradienten. Für die Stetigkeit betrachte unter Verwendung der Dreiecksungleichung und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |F(v)| &= |\langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla \widehat{g}, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}| \\ &\leq |\langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}| + |\langle \nabla \widehat{g}, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \widehat{g}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\stackrel{(1.3)}{\leq} (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \widehat{g}\|_{L^2(\Omega)}) \|v\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

was zeigt, dass F tatsächlich stetig ist und die Stetigkeitskonstante

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \widehat{g}\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.4)$$

erfüllt.

Damit liefert uns Korollar 1.25 ein eindeutiges $w \in H_0^1(\Omega)$, welches (3.3) erfüllt. Aus der Definition von w erhalten wir dann durch $u = w + \widehat{g}$ auch eine schwache Lösung laut Definition 3.4.

2. Schritt: Eindeutigkeit

Korollar 1.25 liefert zwar für gegebenes \widehat{g} eine eindeutige Lösung für w , im allgemeinen ist die Fortsetzung von g jedoch nicht eindeutig. Wir müssen daher zeigen, dass die erhaltene Lösung u unabhängig von der Wahl der Fortsetzung \widehat{g} ist.

Seien also \widehat{g}_1 und \widehat{g}_2 zwei H^1 -Fortsetzungen von g . Wie in Schritt 1 des Beweises erhalten wir daraus jeweils zuerst Funktionen w_1, w_2 und anschließend u_1, u_2 , die (3.7), beziehungsweise (3.1) lösen.

Wir erhalten also für beliebiges $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle \nabla u_1, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \\ \langle \nabla u_2, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

woraus durch Subtraktion der beiden Gleichungen

$$\langle \nabla(u_1 - u_2), \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.5)$$

folgt. Da $\gamma(u_1 - u_2) = g - g = 0$ gilt und $u_1 - u_2$ damit sicher in $H_0^1(\Omega)$ liegt, können wir direkt Korollar 1.25 anwenden, was uns eine eindeutige Lösung für $u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$ sicher stellt. Da die Nullfunktion jedoch offensichtlich eine Lösung der Gleichung 3.5 darstellt, folgt $u_1 - u_2 = 0$ und damit $u_1 = u_2$.

Damit haben wir (i) gezeigt.

(ii):

Der zweite Punkt in Korollar 1.25 liefert uns für jedes w aus dem ersten Beweisteil zusätzlich die Aussage

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} = \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

und damit gemeinsam mit (3.4) die Abschätzung

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \hat{g}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\hat{g}\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.6)$$

Damit gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)} &= \|w + \hat{g}\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|w\|_{H^1(\Omega)} + \|\hat{g}\|_{H^1(\Omega)} \\ &\stackrel{(4.2)}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\hat{g}\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq 2(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\hat{g}\|_{H^1(\Omega)}) \end{aligned}$$

für jede beliebige Fortsetzung \hat{g} und g . Laut Definition der $H^{1/2}$ -Norm gilt sie dann auch in der Form von (3.2) und wir haben die Behauptung in (ii) gezeigt. \square

3.3 Schwache Formulierung in gemischter Formulierung

Die Vorgangsweise, mit der wir am Beginn von Kapitel 3.2 die schwache Formulierung in Definition 3.3 motivierten, ist bei weitem nicht der einzige Möglichkeit.

In diesem Kapitel wollen wir eine weitere Variante präsentieren, die sich im Wesentlichen dadurch unterscheidet, dass wir die Erfüllung der Dirichlet-Randbedingungen nicht explizit fordern, sondern diese in die schwache Formulierung direkt einbauen. Dabei halten wir uns an [Soe, Section 7.1].

Die Vorgangsweise ist wie folgt in zwei Schritten:

- Wir multiplizieren (1.1a) mit einer beliebigen Funktion $v \in H^1(\Omega)$ und integrieren auf beiden Seiten über Ω . Bei der erhaltenen Gleichung

$$-\int_{\Omega} v \Delta u \, d\lambda = \int_{\Omega} f v \, d\lambda$$

können wir auf der linken Seite laut Korollar 1.17 partielle Integration anwenden und erhalten

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\lambda - \int_{\Gamma} \gamma v \partial_n u \, d\mu = \int_{\Omega} f v \, d\lambda.$$

Das Randintegral in dieser Gleichung verschwindet hier im Unterschied zu Kapitel 3.2 nicht, da v nun allgemeiner in $H^1(\Gamma)$ liegt. Damit tritt in dieser Gleichung neben der unbekanntem Funktion u auch zusätzlich $\partial_n u$ auf. Interpretieren wir das vorkommende Randintegral als lineares Funktional in der Form $p := - \int_{\Gamma} \partial_n u(\cdot) d\mu$ wirkend auf $\gamma v \in H^{1/2}(\Gamma)$, so lässt sich $\partial_n u$ vollständig durch eine neue Unbekannte p ersetzen.

In kompakterer Schreibweise erhalten wir also die Gleichung

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle p, \gamma v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (3.7)$$

Die Ausdrücke in dieser Gleichung sind im allgemeinen Fall für Funktionen $u \in H^1(\Omega)$, $p \in H^{-1/2}(\Gamma)$ und $f \in L^2(\Omega)$ wohldefiniert.

- Wir wählen nun auch für die Randbedingung aus Gleichung (1.1b) eine ähnliche Behandlung. Dazu wenden wir ein beliebiges Funktional $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ auf die Randbedingung an und erhalten

$$\langle q, \gamma u \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} = \langle q, g \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}. \quad (3.8)$$

Diese Gleichung ist für $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, $u \in H^1(\Omega)$ und damit $\gamma u \in H^{1/2}(\Gamma)$ ebenfalls wohldefiniert.

Wir kommen mit diesen Vorüberlegungen wieder zu einer schwachen Formulierung unseres Modellproblems aus (1.1):

Definition 3.9. (gemischte Formulierung) Wir definieren die **gemischte Formulierung**, wie folgt:

Gesucht ist das Funktionenpaar $(u, p) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, welches Gleichung (3.7) für alle $v \in H^1(\Omega)$ und (3.8) für alle $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ erfüllt. Wie man durch Einsetzen von Testfunktionen in der Form $(0, q)$ bzw. $(v, 0)$ unschwer erkennt, ist diese Formulierung äquivalent dazu, dass $(u, p) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ die Bedingung

$$\begin{aligned} & \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle p, \gamma v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} + \langle q, \gamma u \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} \\ & = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle q, g \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} \quad \text{für alle } (v, q) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \end{aligned}$$

erfüllt. △

Der folgende Existenzsatz mit Beweis stammt aus [Soe, Theorem 87].

Satz 3.10. (Existenz von schwachen Lösungen) Die schwache Formulierung aus Definition 3.9 besitzt eine eindeutige Lösung $(u, p) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$.

Beweis. Das Ziel ist es, Satz 1.29 anzuwenden. In Anlehnung an die Formulierung in Gleichung (1.11) definieren wir die beiden Bilinearformen $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ und $b : H^{-1/2}(\Gamma) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} a(\cdot, \cdot) & := \langle \nabla(\cdot), \nabla(\cdot) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ b(\cdot, \cdot) & := \langle (\cdot), \gamma(\cdot) \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} \end{aligned}$$

und die linearen Funktionale $F : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ und $G : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} F(\cdot) &:= \langle f, (\cdot) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ G(\cdot) &:= \langle (\cdot), g \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Es verbleibt also zu zeigen, dass die Voraussetzungen an a, b, F, G aus Satz 1.29 für diese Wahl erfüllt sind.

1. Schritt: Stetigkeit

Aus der Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und Gleichung (1.2) folgt für beliebige $u, v \in H^1(\Omega)$

$$|a(u, v)| = |\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

also ist $a(\cdot, \cdot)$ stetig. Aufgrund der Definition des Raumes $H^{-1/2}(\Gamma)$ als Dualraum von $H^{1/2}(\Gamma)$ und der Definition der $H^{1/2}$ -Norm aus Satz 1.13 folgt für beliebige $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ und $u \in H^1(\Omega)$

$$|b(u, q)| = |\langle q, \gamma u \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}| \leq \|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|\gamma u\|_{H^{1/2}} \leq \|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

und damit auch die Stetigkeit von $b(\cdot, \cdot)$. Für F verwende man wiederum die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung gemeinsam mit Gleichung (1.2), um für beliebiges $v \in H^1(\Omega)$ die Abschätzung

$$|F(v)| = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

und damit die Stetigkeit von F zu zeigen. Die Stetigkeit von G folgt wiederum unmittelbar aus der Definition von $H^{-1/2}(\Gamma)$.

2. Schritt: Koerzivität auf H_0

Betrachten wir die Definition von H_0 aus Gleichung (1.7), so erhalten wir in unserem Fall

$$\begin{aligned} H_0 &= \{u \in H^1(\Omega) \mid \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma) \quad \langle q, \gamma u \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} = 0\} \\ &= \{u \in H^1(\Omega) \mid \gamma u = 0\} = H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Damit gilt wegen Korollar 1.22

$$a(u, u) = \langle \nabla u, \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{C_F^2 + 1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

die Koerzivität von $a(\cdot, \cdot)$ auf dem Unterraum H_0 .

3. Schritt: LBB-Bedingung

Die zu zeigende LBB-Bedingung aus Gleichung (1.8) ist aufgrund der Definition des Infimums äquivalent zu

$$\sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{|b(u, q)|}{\|u\|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta \|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma)$$

für ein $\beta > 0$. Laut der Definition der Normen gilt

$$\begin{aligned} \|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &= \sup_{\substack{g \in H^{1/2}(\Gamma) \\ g \neq 0}} \frac{|\langle q, g \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}|}{\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} = \sup_{\substack{g \in H^{1/2}(\Gamma) \\ g \neq 0}} \frac{|\langle q, g \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}|}{\inf_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \gamma u = g}} \|u\|_{H^1(\Omega)}} \\ &= \sup_{\substack{g \in H^{1/2}(\Gamma) \\ g \neq 0}} \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ \gamma u = g}} \frac{|\langle q, g \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}|}{\|u\|_{H^1(\Omega)}} = \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{|\langle q, \gamma u \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}|}{\|u\|_{H^1(\Omega)}} \\ &= \sup_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{|b(u, q)|}{\|u\|_{H^1(\Omega)}} \end{aligned}$$

und damit ist die LBB-Bedingung mit $\beta = 1$ erfüllt. \square

Wir verwenden den letzten Satz gleich, um folgendes Resultat zu beweisen.

Bemerkung 3.11. Sei $g_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$. Dann können wir g_h leicht zu einer Funktion $\widehat{g}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ fortsetzen, in dem Sinne dass

$$\widehat{g}_h|_\Gamma = g_h$$

gilt. Dazu können wir für \widehat{g}_h beispielsweise folgende Darstellung bezüglich der nodalen Basis wählen:

$$\widehat{g}_h := \sum_{z \in \mathcal{K}_\Gamma} g_h(z) \zeta_z + \sum_{z \in \mathcal{K}_\Omega} 0 \zeta_z$$

Wir könnten in der zweiten Summe die Koeffizienten aber auch beliebig anders wählen, da die Wahl keinen Einfluss auf die Funktionswerte am Rand Γ nimmt.

Da sowohl $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$, als auch $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ endlichdimensional sind, ist der lineare Operator $\widehat{\cdot} : g_h \mapsto \widehat{g}_h$ nach obiger Definition weiters stetig.

Für $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ existiert nach Definition ebenfalls (zumindest) eine Fortsetzung $\widehat{g} \in H^1(\Omega)$. Da diese Räume jedoch unendlichdimensional sind, ist die Stetigkeit nicht mehr klar. Die Lösung dieses Problems bietet jedoch das folgende Lemma. \triangle

Lemma 3.12. (Fortsetzungsoperator) Betrachten wir den Spuroperator $\gamma \in L(H^1(\Omega), H^{1/2}(\Gamma))$ aus Bemerkung 1.14. Dann existiert umgekehrt auch ein Fortsetzungsoperator $\mathcal{L} \in L(H^{1/2}(\Gamma), H^1(\Omega))$ mit der Eigenschaft, dass

$$\gamma \mathcal{L} g = g \quad \text{für alle } g \in H^{1/2}(\Gamma) \quad (3.9)$$

gilt.

Beweis. 1. Schritt: Definition

Sei $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ beliebig. Wir betrachten das Hilfsproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Laut Satz 3.8 (i) besitzt dieses Problem eine eindeutige schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$. Wir definieren dann $\mathcal{L} g := u$.

2. Schritt: Linearität

Seien $g_1, g_2 \in H^{1/2}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist $\mathcal{L}(g_1 + \alpha g_2) = \mathcal{L}g_1 + \alpha \mathcal{L}g_2$. Betrachte nun die beiden Hilfsprobleme

$$\begin{aligned} -\Delta u_{1,2} &= 0 && \text{in } \Omega \\ u_{1,2} &= g_{1,2} && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

u_1 und u_2 . Diese besitzen nach Definition die beiden Lösungen $u_1 = \mathcal{L}g_1$ und $u_2 = \mathcal{L}g_2$. Nun ist jedoch leicht zu sehen, dass die Linearkombination $u := u_1 + \alpha u_2$ dieser beiden Lösungen das Hilfsproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= g_1 + \alpha g_2 && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

löst. Da die eindeutige Lösung dieses letzteren Hilfsproblems aber genau $\mathcal{L}(g_1 + \alpha g_2)$ ist, folgt $\mathcal{L}(g_1 + \alpha g_2) = \mathcal{L}g_1 + \alpha \mathcal{L}g_2$.

3. Schritt: Stetigkeit

Laut Satz 3.8 (ii) gilt für die Lösung des Hilfsproblems aus (3.10) die Abschätzung

$$\|\mathcal{L}g\|_{H^1(\Omega)} \leq 2\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)},$$

was genau die Stetigkeit des Fortsetzungsoperators \mathcal{L} bedeutet. \square

3.4 Schwache Formulierung nach Nietsches Methode

Die folgende Variante geht auf den deutschen Mathematiker Joachim Nietsche (\star 1926, \dagger 1996) zurück. Wir schildern hier die Ansätze zur Formulierung und lehnen uns dabei an [Tho, Kapitel 2] an.

Der wesentliche Unterschied im Vergleich zu den beiden vorhergehenden Kapiteln ist, dass wir bereits zu Beginn Ω mit einer regulären Triangulierung \mathcal{T} versehen und das Verfahren auch explizit von dessen Wahl abhängt. Außerdem definieren wir für diesen Abschnitt den Funktionenraum

$$H_n^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) \mid \partial_n u \in L^2(\Gamma)\}. \quad (3.11)$$

Obwohl dies einen Unterraum von $H^1(\Omega)$ darstellt, versehen wir ihn hier mit der Norm

$$\|(\cdot)\|_{H_n^1(\Omega)}^2 := \|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|h^{1/2}\partial_n(\cdot)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|h^{-1/2}\gamma(\cdot)\|_{L^2(\Gamma)}^2, \quad (3.12)$$

welche jedoch abhängig von der Triangulierung \mathcal{T} ist. (h bezeichnet die lokale Gitterweite aus Definition 2.27.) Die Vorgangsweise ist nun, wie folgt in drei Schritten:

- Analog zu den vorhergehenden Kapiteln multiplizieren wir zuerst (1.1a) mit einer beliebigen Funktion $v \in H_n^1(\Omega)$. Nach Integration über Ω erhalten wir die Gleichheit

$$-\int_{\Omega} v \Delta u \, d\lambda = \int_{\Omega} f v \, d\lambda.$$

Anwendung der partiellen Integration aus Korollar 1.17 liefert wieder

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\lambda - \int_{\Gamma} \partial_n u \, \gamma v \, d\mu = \int_{\Omega} f v \, d\lambda. \quad (3.13)$$

Das Ziel ist es nun, die linke Seite als Bilinearform in u und v und die rechte Seite als lineares Funktional in v zu interpretieren und mit dem Lax-Milgram-Lemma die Existenz eines eindeutigen $u \in H_n^1(\Omega)$ nachzuweisen, welches die obige Gleichheit für alle $v \in H_n^1(\Omega)$ erfüllt. Außerdem muss die Erfüllung der Randbedingung aus (1.1b) — zumindest in gewissem Sinne — gefordert werden. Daher sind noch die folgenden beiden Schritte nötig.

- Symmetrisieren:

Wir betrachten nun die Randbedingung aus (1.1b), multiplizieren diese mit $\partial_n v$ und integrieren über Γ . Damit erhalten wir

$$\int_{\Gamma} \gamma u \, \partial_n v \, d\mu = \int_{\Gamma} g \, \partial_n v \, d\mu,$$

subtrahieren diese Gleichung anschließend von (3.13) und erhalten schließlich

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\lambda - \int_{\Gamma} \partial_n u \, \gamma v \, d\mu - \int_{\Gamma} \gamma u \, \partial_n v \, d\mu = \int_{\Omega} f v \, d\lambda - \int_{\Gamma} g \, \partial_n v \, d\mu. \quad (3.14)$$

In diesem Fall stellt die linke Seite bereits eine symmetrische Bilinearform dar. Damit wir außerdem noch die Koerzivitätsbedingung aus Lemma 1.26 zeigen können, fehlt noch der folgende Schritt.

- **Stabilisieren:**

Sei nun $\chi > 0$ eine beliebige Konstante und h die lokale Gitterweite aus Definition 2.27. Wir betrachten erneut die Randbedingung aus (1.1b), multiplizieren diese diesmal mit $\chi h^{-1} \gamma v$ und integrieren über Γ . Damit erhalten wir die Gleichung

$$\chi \int_{\Gamma} h^{-1} \gamma u \, \gamma v \, d\mu = \chi \int_{\Gamma} h^{-1} g \, \gamma v \, d\mu.$$

Diese addieren wir nun zu (3.14) und erhalten schlussendlich

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\lambda - \int_{\Gamma} \partial_n u \, \gamma v \, d\mu - \int_{\Gamma} \gamma u \, \partial_n v \, d\mu + \chi \int_{\Gamma} h^{-1} \gamma u \, \gamma v \, d\mu \\ &= \int_{\Omega} f v \, d\lambda - \int_{\Gamma} g \, \partial_n v \, d\mu + \chi \int_{\Gamma} h^{-1} g \, \gamma v \, d\mu, \end{aligned}$$

was sich in vereinfachter Schreibweise auch anschreiben lässt als

$$\begin{aligned} & \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \partial_n u, \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma)} - \langle \gamma u, \partial_n v \rangle_{L^2(\Gamma)} + \chi \langle h^{-1/2} \gamma u, h^{-1/2} \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ &= \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle g, \partial_n v \rangle_{L^2(\Gamma)} + \chi \langle h^{-1/2} g, h^{-1/2} \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Definition 3.13. (schwache Formulierung) Sei \mathcal{T} eine reguläre Triangulierung von Ω , $\alpha > 0$ und h die lokale Gitterweite. Gesucht ist die Funktion $u \in H_n^1(\Omega)$, welche die Gleichung (3.15) für alle $v \in H_n^1(\Omega)$ erfüllt. \triangle

Satz 3.14. Seien $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. Erfüllt $u \in H_n^1(\Omega)$ unser Modellproblem (1.1), dann ist u auch eine Lösung der schwachen Formulierung aus Definition 3.13.

Beweis. Betrachtet man die Herleitung der schwachen Formulierung in drei Schritten am Beginn dieses Kapitels, so folgt aus der Gültigkeit von (1.1) unmittelbar die der weiteren Gleichungen. \square

Kapitel 4

Varianten zur Diskretisierung

Nachdem wir nun Voraussetzungen für die Lösbarkeit unseres Modellproblems (1.1) mittels Satz 3.8 geklärt haben, formulieren und untersuchen wir verschiedene Diskretisierungsverfahren

Die Kernidee dabei ist es, den Lösungsraum $H^1(\Omega)$ für u aus Satz 3.8 durch „einfachere“ (zum Beispiel endlichdimensionale) Räume zu ersetzen, um dort Approximationslösungen u_h für (3.1) zu konstruieren. Diese sollen nach Möglichkeit ein gewisses Konvergenzverhalten zeigen — im Optimalfall natürlich gegen die exakte Lösung u . Dabei müssen wir auch an a posteriori Fehlerschätzern arbeiten, die uns eine Aussage über den Approximationsfehler in geeigneter Norm $\|u - u_h\|$ geben können. In diesem Fall ist natürlich zu beachten, dass die exakte Lösung u im Allgemeinen unbekannt ist.

Das besondere Augenmerk legen wir dabei auf die inhomogene Dirichlet-Randbedingung aus (1.1b). Verfügen wir nicht mehr über den Raum $H^1(\Omega)$ als Lösungsraum, können wir die Randbedingung aus $H^{1/2}(\Gamma)$ für u_h im Allgemeinen nicht mehr exakt erfüllen. Wir wollen uns daher Gedanken machen, wie wir eine — zumindest näherungsweise — Erfüllung der Randbedingung in die Formulierung unserer Bedingungen an u_h einfließen lassen.

4.1 Schwache Formulierung mit explizit geforderter Dirichlet-Randbedingung

Die Vorgangsweise in diesem Kapitel ist angelehnt an [FPP]. Wir verfolgen hier folgende grundsätzliche Strategie um eine Approximationslösung u_h zu ermitteln. Wir manipulieren die **schwache Formulierung** aus Definition 3.3 in folgender Hinsicht:

- Wähle eine (reguläre) Triangulierung \mathcal{T} von Ω .
- Approximiere die Funktion g am Rand durch eine stückweise affine Funktion g_h .
- Ersetze die Funktionenräume $H^1(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ durch die stückweise affinen Ansatzräume $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ und $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$.
- Löse das veränderte Problem exakt.

Diese Vorgangsweise wollen wir im folgenden Kapitel präzisieren. Man beachte dabei, dass fast derselbe Wortlaut wie in Kapitel 3.2 verwendet werden kann. Lediglich die Funktionenräume müssen an geeigneten Stellen abgeändert werden.

4.1.1 Diskrete Formulierung

Wir wollen nun die schwache Formulierung aus Definition 3.3 für unsere Approximationen anpassen:

Definition 4.1. (diskrete Form der schwachen Formulierung) Sei \mathcal{T} eine beliebige reguläre Triangulierung von Ω und g_h eine Approximation von g . Wir definieren die **diskrete Form der schwachen Formulierung**, eine Lösung für unser Modellproblem 1.1 zu finden, wie folgt: Gesucht ist eine Funktion $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

- u_h erfüllt $\langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)}$ für alle $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$.
- $\gamma u_h = g_h$ auf Γ .

△

Definition 4.2. (diskrete Lösung) Sei u_h eine Funktion, welche die Eigenschaften aus Definition 4.1 erfülle. Dann nennen wir u_h eine **diskrete Lösung** des Modellproblems in (1.1).

△

Bemerkung 4.3. Betrachten wir Definition 4.1, dann folgt aus Bemerkung 2.11, dass $g_h \in \mathcal{S}^1(\Gamma)$ eine notwendige Bedingung für die Existenz einer schwachen Lösung ist. Inwiefern diese Voraussetzung auch hinreichend ist, zeigt Satz 4.5.

△

Diese Bemerkung und Lemma 2.37 lassen nun folgende Definition zu.

Definition 4.4. (Knoten-Interpolation) Sei $g \in H^1(\Gamma)$. Dann definieren wir die stückweise affine Approximationsfunktion g_h nach Lemma 2.37 für den Fall $\mathcal{E}^* := \mathcal{E}_\Gamma$ und $r := g|_{\mathcal{K}_\Gamma}$.

△

Satz 4.5. (Existenz für Lösungen der diskreten Form der schwachen Formulierung) Sei $g_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ und f nach wie vor aus $L^2(\Omega)$. Dann existiert eine eindeutige Lösung der diskreten Form der schwachen Formulierung aus Definition 4.1.

Beweis. Man beachte:

- Mit Lemma 2.35 folgt, dass auch $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ ein Hilbertraum ist.
- Wegen Bemerkung 3.11 lässt sich g_h leicht durch eine affine Funktion $\hat{g}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ fortsetzen.

Unter Berücksichtigung dieser beiden Fakten kann der Beweis in völliger Analogie wie der Beweis zu Satz 3.8 geführt werden. □

4.1.2 Céa-Lemma

Wir haben im vergangenen Kapitel gezeigt, dass wir durch das Ersetzen der Randfunktion $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ durch eine beliebige stückweise affine Funktion $g_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ auf eine alternative Formulierung mit endlichdimensionalen Funktionenräumen übergehen können, die ebenfalls eindeutig lösbar ist.

Jetzt wollen wir uns darüber Gedanken machen, wie gut die diskrete Lösung u_h aus Satz 4.5 die exakte Lösung u aus Satz 3.8 tatsächlich approximiert. Dies wird unter anderem auch davon abhängen, wie gut die Funktion g durch die Funktion g_h approximiert wird. Trotzdem wollen wir die Resultate zu Beginn dieses Kapitel noch möglichst allgemein formulieren und erst am Ende darauf eingehen, wie diese Approximation konkret aussehen könnte.

Wir wollen dafür in diesem Kapitel zwei Versionen des Céa-Lemmas zeigen, welches uns — in gewissem Sinne — sicherstellt, eine quasi-optimale Lösung in unserem gewählten Approximationsraum gefunden zu haben. Die Vorgangsweise dabei ist wie in [Pra, Kapitel 3.6].

Lemma 4.6. (Céa-Lemma I) Seien u und u_h Lösungen der schwachen Formulierungen aus den Definitionen 3.3 und 4.1 mit zwei Funktionen $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ und $g_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$. Dann existiert eine (nur von Ω abhängige) Konstante $C_{Cea} > 0$ mit

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{Cea} \min_{\substack{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \\ \gamma v_h = g_h}} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

Beweis. Wegen Bemerkung 2.4 gilt die Galerkin-Orthogonalität hier in der Form

$$\langle \nabla(u - u_h), \nabla v_h \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}). \quad (4.1)$$

Wir wählen nun eine beliebige Fortsetzung \widehat{g}_h von g_h wie in Bemerkung 3.11 und definieren $u_{0h} := u_h - \widehat{g}_h \in \mathcal{S}_0^1(\Omega)$. Dann gilt für jedes $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \langle \nabla(u - u_h), \nabla(u - u_h) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle \nabla(u - u_h), \nabla(u - [u_{0h} + \widehat{g}_h]) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\stackrel{(4.1)}{=} \langle \nabla(u - u_h), \nabla(u - [v_h + \widehat{g}_h]) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - [v_h + \widehat{g}_h])\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

und damit

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla(u - [v_h + \widehat{g}_h])\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.2)$$

In Lemma 1.20 haben wir gesehen, dass $\|\cdot\| := \|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma(\cdot)\|_{L^2(\Gamma)}$ eine äquivalente Norm in $H^1(\Omega)$ definiert, das heißt es existieren Konstanten $\alpha, \beta > 0$ mit $\alpha\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\cdot\| \leq \beta\|v\|_{H^1(\Omega)}$ für alle $v \in H^1(\Omega)$. Daraus folgt unter Verwendung von (4.2) und $\gamma v_h \equiv 0$ in (*) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\alpha \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|u - u_h\| \\
&= \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma(u - u_h)\|_{L^2(\Gamma)} \\
&= \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} + \|g - g_h\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \|\nabla(u - [v_h + \widehat{g}_h])\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma(u - [v_h + \widehat{g}_h])\|_{L^2(\Gamma)} \\
&= \|u - (v_h + \widehat{g}_h)\| \\
&\leq \beta \|u - (v_h + \widehat{g}_h)\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir damit also

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{Cea} \|u - (v_h + \widehat{g}_h)\|_{H^1(\Omega)}$$

gezeigt, wobei wir $C_{Cea} := \beta/\alpha$ gesetzt haben. Da diese Ungleichung für beliebige Fortsetzungen $\widehat{g}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ und beliebige $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ gilt, erhalten wir sogar

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{Cea} \inf_{\substack{\widehat{g}_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \\ \gamma \widehat{g}_h = g_h \\ v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})}} \|u - (v_h + \widehat{g}_h)\|_{H^1(\Omega)} = C_{Cea} \inf_{\substack{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \\ \gamma v_h = g_h}} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.3)$$

Mithilfe von Lemma 1.30 kann außerdem gezeigt werden, dass das Infimum tatsächlich durch eine eindeutige Funktion angenommen wird und wir es daher durch ein Minimum ersetzen können (für eine genaue Ausführung siehe Anhang, Lemma A.1). \square

Wir zeigen nun die zweite Variante des Céa-Lemmas.

Lemma 4.7. (Céa-Lemma II) Die Voraussetzungen seien gleich wie in Lemma 4.6. Dann existiert eine Konstante $C'_{Cea} > 0$ mit

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C'_{Cea} \left[\min_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} + \|g - g_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right]. \quad (4.4)$$

In dieser Abschätzung hängt die Konstante $C'_{Cea} > 0$ (im Unterschied zu C_{Cea} aus Lemma 4.6) jedoch nicht nur von Ω , sondern auch von der Stetigkeitskonstante der Scott-Zhang-Projektion aus Proposition 2.46 (i) und damit insbesondere auch von der $\bar{\gamma}$ -Formregularität der Triangulierung \mathcal{T} ab.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass eine Konstante $C_{Cea2} > 0$ existiert, sodass

$$\min_{\substack{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \\ \gamma v_h = g_h}} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{Cea2} \left[\min_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} + \|g - g_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right] \quad (4.5)$$

gilt. Dann folgt die zu zeigende Abschätzung aus Lemma 4.6.

Wir wählen dazu

$$v_h^* := \mathbb{J}_h(u - \mathcal{L}(g - g_h)) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}),$$

wobei \mathcal{L} genau der Fortsetzungsoperator aus Lemma 3.12 und \mathbb{J}_h die Scott-Zhang-Projektion aus Kapitel 2.3.1 ist. Nun gilt aufgrund der Eigenschaft aus (3.9) für Fortsetzungsoperatoren

$$\gamma(u - \mathcal{L}(g - g_h)) = g - (g - g_h) = g_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$$

und damit können wir die Eigenschaft (iv) aus Proposition 2.46 anwenden und erhalten

$$\gamma v_h^* = g_h.$$

Außerdem gilt unter Verwendung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|u - v_h^*\|_{H^1(\Omega)} &= \|u - \mathbb{J}_h(u - \mathcal{L}(g - g_h))\|_{H^1(\Omega)} \\ &= \|u - \mathbb{J}_h u + \mathbb{J}_h \mathcal{L}(g - g_h)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|(1 - \mathbb{J}_h)u\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbb{J}_h \mathcal{L}(g - g_h)\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Um den ersten Summanden weiter abzuschätzen, verwenden wir Proposition 2.46 (vii) und erhalten

$$\|(1 - \mathbb{J}_h)u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \min_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

Für den zweiten Summanden verwenden wir die Stetigkeit von \mathbb{J}_h und \mathcal{L} und erhalten so

$$\|\mathbb{J}_h \mathcal{L}(g - g_h)\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \|g - g_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Die Konstanten C_1 und C_2 hängen dabei in beiden Abschätzungen nur von Ω und der $\bar{\gamma}$ -Formregularität ab. Definieren wir $C_{Cea2} := \max\{C_1, C_2\}$ so erhalten wir insgesamt

$$\|u - v_h^*\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{Cea2} \left[\min_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} + \|g - g_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right]$$

und haben daher mit v_h^* eine Funktion aus der Menge gefunden, über die auf der linken Seite in (4.4) minimiert wird. Daher gilt diese Abschätzung insbesondere auch für das Minimum. \square

Bemerkung 4.8. Die Abschätzung aus Lemma 4.7 gilt für alle beliebigen $g_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$. Der Summand $\|g - g_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ beschreibt dabei genau die Abweichung der diskreten von den echten Dirichlet-Daten, gemessen in der $H^{1/2}$ -Norm. Daher kann dieser Term, abhängig von der tatsächlichen Wahl von g_h als Approximation von g entsprechend weiter abgeschätzt werden. \triangle

Bemerkung 4.9. Aufgrund des Einbettungssatzes von Sobolev (Satz 1.10 für den Fall $d = 1, k = 1, m = 0$), können wir die Funktion $g \in H^1(\Gamma)$ „punktauswerten“, indem wir

$$g(z) := \tilde{g}(z) \quad \text{für alle } z \in \Gamma$$

definieren. Die Funktion $\tilde{g} \in C^0(\Omega)$ sei dabei genau die entsprechende Funktion aus Satz 1.10. \triangle

Definition 4.10. (Dirichlet-Daten-Oszillationen) Sei $g \in H^1(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma)$, $g_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$, $\mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\Gamma)$ die Menge aller kantenweise konstanten Funktionen am Rand Γ und $\mathbb{P}_0^\Gamma : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\Gamma)$ die L^2 -Orthogonalprojektion auf $\mathcal{P}^0(\mathcal{E}_\Gamma)$. Dann schreiben wir für jedes $E \in \mathcal{E}_\Gamma$

$$\text{osc}_\Gamma(E)^2 := h_E \|(1 - \mathbb{P}_0^\Gamma) \nabla_E g\|_{L^2(E)}^2,$$

wobei ∇_E für die (schwache) Richtungsableitung entlang der Kante E steht. Weiters definieren wir

$$\text{osc}_\Gamma^2 := \sum_{E \in \mathcal{E}_\Gamma} \text{osc}_\Gamma(E)^2.$$

\triangle

Dazu finden wir in [AFKPP, Proposition 3.1] folgende Äquivalenzabschätzung bezüglich der Scott-Zhang-Projektion:

Lemma 4.11. Es gilt mit einer von Γ und einer Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 abhängigen Konstanten $C > 0$

$$\text{osc}_\Gamma \leq \|h^{1/2}\nabla_E(1 - \mathcal{J}_h)g\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \text{osc}_\Gamma.$$

□

In [FPP, Lemma 1] bzw. [AFKPP, Corollary 3.2] findet sich das folgende Resultat:

Lemma 4.12. Sei $g \in H^1(\Gamma)$ und $g_h := \mathbb{P}_h^\Gamma g \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$, wobei der allgemeine Projektionsoperator \mathbb{P}_h^Γ entweder für die Knoten-Interpolation, die Scott-Zhang-Projektion oder die L^2 -Orthogonalprojektion aus Kapitel 2.3.1 steht, d.h. es gilt $\mathbb{P}_h^\Gamma := \mathbb{K}_h^\Gamma$, $\mathbb{P}_h^\Gamma := \mathbb{J}_h^\Gamma$ oder $\mathbb{P}_h^\Gamma := \mathbb{P}_h^\Gamma$. Dann folgt

$$\|g - g_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C_{\text{osc}} \text{osc}_\Gamma$$

mit einer Konstante $C_{\text{osc}} > 0$, welche nur von Ω , der $\bar{\gamma}$ -Formregularität, der Stetigkeitskonstante der jeweiligen Projektion und bei geeignet gewählter Netzverfeinerung (z.B. Newest Vertex Bisection) nur von der Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 abhängt. □

Mit diesem Lemma können wir die Abschätzung aus Lemma 4.7 präzisieren:

Korollar 4.13. Sei \mathbb{P}_h^Γ ein Projektionsoperator gemäß Lemma 4.12. Dann hat die Abschätzung in Lemma 4.7 die Gestalt

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left[\min_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} + \text{osc}_\Gamma \right],$$

wobei die Konstante $C > 0$ von Ω und der $\bar{\gamma}$ -Formregularität abhängt. □

Abschätzung für Scott-Zhang-Projektion

Lemma 4.14. Seien $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, $g_h := \mathbb{J}_h^\Gamma g \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ und $\hat{g} \in H^1(\Omega)$ eine beliebige Fortsetzung von g . Dann gilt

$$\|g - g_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C \min_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})} \|\hat{g} - v_h\|_{H^1(\Omega)},$$

wobei die Konstante $C > 0$ von Ω und der $\bar{\gamma}$ -Formregularität abhängt.

Beweis. Zunächst gilt für die beliebige Fortsetzung \hat{g} trivialerweise $\gamma\hat{g} = g$ und damit können wir die linke Seite die folgt umschreiben:

$$\|g - g_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|g - \mathbb{J}_h^\Gamma g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|\gamma\hat{g} - \mathbb{J}_h^\Gamma \gamma\hat{g}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Mit Proposition 2.46 (ix) lassen sich Spuoperator und Scott-Zhang-Projektor vertauschen und daher gilt weiter

$$\|\gamma\hat{g} - \mathbb{J}_h^\Gamma \gamma\hat{g}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|\gamma\hat{g} - \gamma\mathbb{J}_h\hat{g}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|\gamma(\hat{g} - \mathbb{J}_h\hat{g})\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \|\hat{g} - \mathbb{J}_h\hat{g}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Verwenden wir bei diesem Resultat schlussendlich noch Proposition 2.46 (vii), so erhalten wir direkt die gewünschte Abschätzung mit einer von Ω und der $\bar{\gamma}$ -Formregularität abhängenden Konstanten. □

Da die Lösung $u \in H^1(\Omega)$ der schwachen Formulierung aus Definition 3.3 die Bedingung $\gamma u = g$ erfüllt, können wir im letzten Lemma insbesondere $\widehat{g} := u$ wählen. Damit lässt sich die Abschätzung aus Lemma 4.7 für den Fall der Scott-Zhang-Projektion formulieren:

Korollar 4.15. Mit der Voraussetzungen $g_h := \mathcal{J}_h^\Gamma g$ in Lemma 4.7 gilt die Abschätzung

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \min_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)},$$

wobei die Konstante $C > 0$ von Ω und der $\bar{\gamma}$ -Formregularität abhängt. \square

4.2 Schwache Formulierung in gemischter Formulierung

Wir wählen in diesem Fall die folgenden Abänderungen im Vergleich zur ursprünglichen **gemischter Formulierung** aus Definition 3.9:

- Wähle eine reguläre Triangulierung \mathcal{T} von Ω .
- Ersetze die Funktionenräume $H^1(\Omega)$ und $H^{-1/2}(\Gamma)$ durch die stückweise affinen Ansatzräume $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ und $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$.
- Löse das veränderte Problem exakt.

4.2.1 Diskrete Formulierung

Die adaptierte Form der schwachen Formulierung aus Definition 3.9 lautet also:

Definition 4.16. (diskrete Form der gemischten Formulierung) Sei \mathcal{T} eine beliebige reguläre Triangulierung von Ω . Wir definieren die **diskrete Form der gemischten Formulierung**, eine Lösung für unser Modellproblem (1.1) zu finden, wie folgt: Gesucht ist das Funktionenpaar $(u_h, p_h) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \times \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$, welches die Bedingung

$$\begin{aligned} \langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle p_h, \gamma v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} + \langle q_h, \gamma u_h \rangle_{L^2(\Gamma)} &= \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle q_h, g \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ &\text{für alle } (v_h, q_h) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \times \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma) \end{aligned} \quad (4.6)$$

erfüllt. \triangle

Bevor wir Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung dieser diskreten Form der schwachen Formulierung beweisen, benötigen wir zunächst das folgende Hilfsmittel aus [Soe, Lemma 99]

Definition 4.17. (Fortin-Operator) Seien H, V, H_h und V_h Hilberträume mit $H_h \subseteq H$ und $V_h \subseteq V$ und $b : H \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform. Einen stetiger linearer Operator $\Pi_h : H \rightarrow H_h$ mit Stetigkeitskonstante C_{Π_h} , der zusätzlich die Eigenschaft

$$b(\Pi_h u, q_h) = b(u, q_h) \quad \text{für alle } u \in H \text{ und } q_h \in V_h \quad (4.7)$$

erfüllt, bezeichnet man als **Fortin-Operator**. \triangle

Lemma 4.18. Vorausgesetzt ein Fortin-Operator aus Definition 4.17 existiert, dann impliziert die stetige LBB-Bedingung

$$\inf_{\substack{q \in V \\ q \neq 0}} \sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{|b(u, q)|}{\|u\|_H \|q\|_V} \geq \beta$$

die diskrete LBB-Bedingung

$$\inf_{\substack{q_h \in V_h \\ q_h \neq 0}} \sup_{\substack{u_h \in H_h \\ u_h \neq 0}} \frac{|b(u_h, q_h)|}{\|u_h\|_H \|q_h\|_V} \geq \beta_h := \beta / C_{\Pi_h}.$$

Beweis. Die stetige LBB-Bedingung ist äquivalent zu

$$\sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{|b(u, q)|}{\|u\|_H} \geq \beta \|q\|_V \quad \text{für alle } q \in V.$$

Wegen $V_h \subseteq V$ gilt diese Ungleichung insbesondere für alle $q_h \in V_h$. Daher gilt weiter für alle $q_h \in V_h$

$$\sup_{\substack{u_h \in H_h \\ u_h \neq 0}} \frac{|b(u_h, q_h)|}{\|u_h\|_H} \geq \sup_{\substack{u_h \in \Pi_h H \\ u_h \neq 0}} \frac{|b(u_h, q_h)|}{\|u_h\|_H} = \sup_{\substack{u \in H \\ \Pi_h u \neq 0}} \frac{|b(\Pi_h u, q_h)|}{\|\Pi_h u\|_H} \geq \sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0}} \frac{|b(u, q_h)|}{C_{\Pi_h} \|u\|_H} \geq \frac{\beta}{C_{\Pi_h}} \|q_h\|_V,$$

was wiederum äquivalent zur diskreten LBB-Bedingung mit $\beta_h = \beta / C_{\Pi_h}$ ist. \square

Um einen Fortin-Operator konkret konstruieren zu können, entnehmen wir dazu die folgende Proposition aus [BBF, Proposition 5.4.4].

Proposition 4.19. Seien Funktionenräume und Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ gewählt wie in Definition 4.17 und seien $\Pi_{h1}, \Pi_{h2} : H \rightarrow H_h$ zwei stetige lineare Operatoren, welche mit zwei Konstanten $C_1, C_2 > 0$ die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

$$\|\Pi_{h1} u\|_{H_h} \leq C_1 \|u\|_H \quad \text{für alle } u \in H \quad (4.8a)$$

$$b(\Pi_{h2} u, q_h) = b(u, q_h) \quad \text{für alle } u \in H \text{ und } q_h \in V_h \quad (4.8b)$$

$$\|\Pi_{h2}(1 - \Pi_{h1})u\|_H \leq C_2 \|u\|_H \quad \text{für alle } u \in H \quad (4.8c)$$

Dann ist der Operator $\Pi_h := \Pi_{h2}(1 - \Pi_{h1}) + \Pi_{h1}$ ein Fortin-Operator mit $C_{\Pi_h} = C_1 + C_2$.

Beweis. Die Stetigkeit von Π_h erhält man durch

$$\begin{aligned} \|\Pi_h u\|_H &= \|\Pi_{h2}(1 - \Pi_{h1})u + \Pi_{h1}u\|_H \leq \|\Pi_{h2}(1 - \Pi_{h1})u\|_H + \|\Pi_{h1}u\|_H \\ &\stackrel{(4.8c), (4.8a)}{\leq} (C_2 + C_1) \|u\|_H \quad \text{für alle } u \in H \end{aligned}$$

Um (4.7) nachzurechnen, betrachte man

$$\begin{aligned} b(\Pi_h u, q_h) &= b(\Pi_{h2}(u - \Pi_{h1}u), q_h) + b(\Pi_{h1}u, q_h) \stackrel{(4.8b)}{=} b(u - \Pi_{h1}u, q_h) + b(\Pi_{h1}u, q_h) \\ &= b(u, q_h). \end{aligned}$$

Damit erfüllt Π_h genau die Eigenschaften eines Fortin-Operators. \square

Satz 4.20. (Existenz für Lösungen der diskreten Form der gemischten Formulierung) Die diskrete Form der gemischten Formulierung aus Definition 4.16 besitzt eine eindeutige Lösung $(u_h, p_h) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \times \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$.

Beweis. Wie bereits für den Existenzbeweis von schwachen Lösungen im kontinuierlichen Fall in Satz 3.8 ist es das Ziel, Satz 1.29 zu verwenden. Dazu müssen wir alle Voraussetzungen für die gleichen Bilinearformen und linearen Funktionale, jedoch diesmal für die diskreten Funktionenräume $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ und $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ überprüfen. Zunächst bemerken wir, dass wegen Lemma 2.35 (ii) und Lemma 2.38 (iii) die Funktionenräume $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ und $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ ebenfalls jeweils Hilberträume sind. Der Rest des Beweises folgt wie im Beweis von Satz 3.8 in drei Schritten:

1. Schritt: Stetigkeit

Die Stetigkeit von $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$, $F(\cdot)$ und $G(\cdot)$ vererbt sich nach Definition aus dem kontinuierlichen Fall direkt auf die diskreten Unterräume.

2. Schritt: Koerzivität auf H_0

Mit den adaptierten Funktionenräumen gilt hier

$$H_0 = \{u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \mid \forall q_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma) \quad \langle u_h|_\Gamma, q_h \rangle = 0\}.$$

Da $u_h|_\Gamma \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma) \cap H_0$, gilt $\langle u_h|_\Gamma, q_h \rangle = 0$ insbesondere auch für $q_h = u_h|_\Gamma$. Damit gilt

$$0 = \langle u_h|_\Gamma, u_h|_\Gamma \rangle = \|u_h|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}^2 \implies u_h|_\Gamma = 0,$$

womit $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\Omega)$ ist. Insgesamt stellen wir also gemeinsam mit Lemma 2.35 (iii) fest, dass

$$H_0 \subseteq \mathcal{S}_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$$

gilt. Damit vererbt sich die Koerzivität von $a(\cdot, \cdot)$ direkt aus dem kontinuierlichen Fall.

3. Schritt: LBB-Bedingung

Da wir die stetige LBB-Bedingung im Beweis von Satz 3.8 bereits gezeigt haben, wollen wir nun Lemma 4.18 verwenden, um daraus die diskrete LBB-Bedingung zu folgern. Dazu konstruieren wir gemäß Definition 4.17 für den Fall $H := H^1(\Omega)$, $V := H^{-1/2}(\Gamma)$, $H_h := \mathcal{S}^1(\Omega)$, $V_h := \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ und $b(\cdot, \cdot) := \langle (\cdot), \gamma(\cdot) \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}$ einen Fortin-Operator $\Pi_h : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$. Wegen Proposition 4.19 genügt es zwei stetige lineare Operatoren $\Pi_{h1}, \Pi_{h2} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ zu wählen, welche die Eigenschaften aus (4.8) erfüllen. Dazu definieren wir zunächst einen diskreten Fortsetzungsoperator

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} : \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma) &\longrightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \\ g_h &\longmapsto \hat{g}_h, \end{aligned} \tag{4.9}$$

wobei \hat{g}_h genau die triviale Fortsetzung aus Bemerkung 3.11 darstellt, welche auf allen inneren Knoten \mathcal{K}_Ω verschwindet. Mit dieser Notation definieren wir

$$\begin{aligned} \Pi_{h1} &:= \mathcal{J}_h, \\ \Pi_{h2} &:= \bar{\mathcal{L}} \circ \mathbb{P}_h^\Gamma \circ \gamma. \end{aligned}$$

Wegen Proposition 2.46 (i) ist (4.8a) dann sofort erfüllt. Um (4.8b) zu verifizieren, betrachten wir für beliebige $u \in H^1(\Omega)$ und $q_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ die Gleichheit

$$b(\Pi_{h2}u, q_h) = \langle q_h, \gamma \Pi_{h2}u \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle q_h, \underbrace{\gamma \bar{\mathcal{L}}}_{=1} \mathbb{P}_h^\Gamma \gamma u \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle q_h, \gamma u \rangle_{L^2(\Gamma)} = b(u, q_h),$$

wobei die vorletzte Gleichheit genau wegen der Eigenschaft einer L^2 -Orthogonalprojektion aus Proposition 2.49 (iii) gilt. Für die letzte Eigenschaft (4.8c) verwenden wir, dass $\bar{\mathcal{L}}$ mit einer von \mathcal{T} unabhängigen Konstante $\tilde{C} > 0$ die Abschätzung

$$\|\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{C}\|h^{-1/2}v_h\|_{L^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$$

erfüllt. Dies kann durch Transformation auf ein Referenzelement gezeigt werden und wird im Anhang detailliert ausgeführt (siehe Lemma A.2). Verwendet man zudem die Abschätzung

$$\|h^{-1/2}\mathbb{P}_h^\Gamma g\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|h^{-1/2}g\|_{L^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } g \in L^2(\Gamma),$$

welche ebenfalls im Anhang genauer ausgeführt wird (siehe Lemma A.3), dann erhalten wir insgesamt für beliebiges $u \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|\Pi_{h2}(1 - \Pi_{h1})u\|_{H^1(\Omega)} &= \|\bar{\mathcal{L}}\mathbb{P}_h^\Gamma \gamma(1 - \mathbb{J}_h)u\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \tilde{C}\|h^{-1/2}\mathbb{P}_h^\Gamma \gamma(1 - \mathbb{J}_h)u\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \tilde{C}C\|h^{-1/2}\gamma(1 - \mathbb{J}_h)u\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq C_2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_2\|u\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt Proposition 2.46 gemeinsam mit Lemma 2.31 und Lemma 2.32 verwendet wurde und unter C_2 sämtliche von \mathcal{T} unabhängige Konstanten zusammengefasst wurden. Dies ist genau die Abschätzung aus (4.8c). Damit liefert uns Proposition 4.19 einen geeigneten Fortin-Operator und aus Lemma 4.18 folgt die diskrete LBB-Bedingung. \square

4.2.2 Céa-Lemma

Um das Céa-Lemma zu formulieren, betrachten wir wie in Satz 1.29 die zusammengefasste Bilinearform $B((\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot))$ und das zusammengefasste lineare Funktional $M(\cdot, \cdot)$ aus (1.9) und (1.10). Damit können wir den folgenden Satz aus [Soe, Theorem 36 und 98] formulieren:

Lemma 4.21. (Céa-Lemma) Seien $(u, p) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ und $(u_h, p_h) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \times \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ die Lösungen der schwachen Formulierungen aus Definition 3.9 und 4.16. Sei außerdem C_B die Stetigkeitskonstante von $B((\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot))$ und β_{zh} die Konstante der diskreten inf-sup-Bedingung. Dann gilt:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} + \|p - p_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \left(1 + \frac{C_B}{\beta_{zh}}\right) \min_{\substack{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \\ q_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)}} (\|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} + \|p - q_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)})$$

Beweis. Wir führen die Abschätzung auf dem Produkthilbertraum versehen mit der Summennorm durch. Um die Notation zu vereinfachen, definieren wir $H := H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$

und $H_h := \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \times \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$. Dazu sei $(v_h, q_h) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \times \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \|(u, p) - (u_h, p_h)\|_H \\
& \leq \|(u, p) - (v_h, q_h)\|_H + \|(v_h, q_h) - (u_h, p_h)\|_H \\
& \leq \|(u, p) - (v_h, q_h)\|_H + \frac{1}{\beta_{zh}} \sup_{\substack{(v'_h, q'_h) \in H_h \\ (v'_h, q'_h) \neq (0,0)}} \frac{B((v_h, q_h) - (u_h, p_h), (v'_h, q'_h))}{\|(v'_h, q'_h)\|_H} \\
& = \|(u, p) - (v_h, q_h)\|_H + \frac{1}{\beta_{zh}} \sup_{\substack{(v'_h, q'_h) \in H_h \\ (v'_h, q'_h) \neq (0,0)}} \frac{B((v_h, q_h) - (u, p), (v'_h, q'_h))}{\|(v'_h, q'_h)\|_H} \\
& \leq \|(u, p) - (v_h, q_h)\|_H + \frac{1}{\beta_{zh}} \sup_{\substack{(v'_h, q'_h) \in H_h \\ (v'_h, q'_h) \neq (0,0)}} \frac{C_B \|(v_h, q_h) - (u, p)\|_H \|(v'_h, q'_h)\|_H}{\|(v'_h, q'_h)\|_H} \\
& = \left(1 + \frac{C_B}{\beta_{zh}}\right) \|(u, p) - (v_h, q_h)\|_H.
\end{aligned}$$

Da $(v_h, q_h) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \times \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ beliebig waren, gilt diese Abschätzung auch für das Infimum. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 4.6 kann auch gezeigt werden, dass das Infimum angenommen wird und durch ein Minimum ersetzt werden kann. Aufgrund der Gestalt der Summennorm erhält man dann genau die gewünschte Ungleichung. \square

4.3 Schwache Formulierung nach Nietches Methode

Angeknüpft an Kapitel 3.4 ersetzen wir den kontinuierlichen Funktionenraum $H_n^1(\Omega)$ durch $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$. Da die Normalenableitungen auf Γ für Funktionen aus diesem Raum stückweise konstant und damit in $L^2(\Gamma)$ liegen, gilt $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \subseteq H_n^1(\Omega)$. Anschließend lösen wir das Problem auf diesem endlichdimensionalen Unterraum wieder exakt.

4.3.1 Diskrete Formulierung

Die diskrete Form der schwache Formulierung aus Definition 3.13 lautet:

Definition 4.22. (diskrete Form der Nietzsche-Formulierung) Sei \mathcal{T} eine reguläre Triangulierung von Ω , $\chi > 0$ und h die lokale Gitterweite aus Definition 2.27. Gesucht ist die Funktion $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$, welche die Bedingung

$$\begin{aligned}
& \langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \partial_n u_h, \gamma v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} - \langle \gamma u_h, \partial_n v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} + \chi \langle h^{-1/2} \gamma u_h, h^{-1/2} \gamma v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} \\
& = \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle g, \partial_n v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} + \chi \langle h^{-1/2} g, h^{-1/2} \gamma v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})
\end{aligned}$$

erfüllt. \triangle

Um Existenz und Eindeutigkeit zu zeigen, benötigen wir zunächst noch folgendes Lemma aus [Tho, Lemma 2.1], welches mit elementaren Skalierungsargumenten folgt.

Lemma 4.23. Sei \mathcal{T} eine reguläre Triangulierung und $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ beliebig. Dann gibt es von h unabhängige Konstanten $C_1, C_2, C_3 > 0$, sodass gilt:

$$\|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \|h^{-1} u_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.10a)$$

$$\|h^{1/2} \partial_n u_h\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_2 \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.10b)$$

$$\|u_h\|_{H_n^1(\Omega)} \leq C_3 \|h^{-1} u_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.10c)$$

\square

Satz 4.24. (Existenz für Lösungen der diskreten Form der Nietsche-Formulierung)

Wir wählen die Konstante χ so, dass $\chi > 4C_2^2$ mit der Konstanten C_2 aus (4.10b) erfüllt ist. Dann besitzt die diskrete Form der Nietsche-Formulierung aus Definition 4.22 eine eindeutige Lösung $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$. Insbesondere ist die Bilinearform $a : \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \times \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$a(u_h, v_h) := \langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \partial_n u_h, \gamma v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ - \langle \gamma u_h, \partial_n v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} + \chi \langle h^{-1/2} \gamma u_h, h^{-1/2} \gamma v_h \rangle_{L^2(\Gamma)}$$

koerziv und stetig.

Beweis. Die Vorlage für den Beweis ist [Han, Kapitel 2.2]. Ziel ist es, direkt das Lax-Milgram-Lemma aus Lemma 1.26 anzuwenden. Dafür müssen wir zeigen, dass $a(\cdot, \cdot)$ koerziv und stetig ist. Außerdem muss das Funktional $F : \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(v_h) := \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle g, \partial_n v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} + \chi \langle h^{-1/2} g, h^{-1/2} \gamma v_h \rangle_{L^2(\Gamma)}$$

ebenfalls stetig sein. Diese Eigenschaften sind alle bezüglich der Norm $\|(\cdot)\|_{H_n^1(\Omega)}$ aus (3.12) zu verstehen.

1. Schritt: Koerzitivität von $a(\cdot, \cdot)$:

Zu zeigen ist, dass mit einer Konstante $\alpha > 0$ für alle $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ gilt

$$a(u_h, u_h) \geq \alpha \|u_h\|_{H_n^1(\Omega)}^2.$$

Wir schätzen also für beliebiges $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung in (*) und der Young-Ungleichung in (**) wie folgt ab:

$$\begin{aligned} a(u_h, u_h) &= \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\langle \partial_n u_h, \gamma u_h \rangle_{L^2(\Gamma)} + \chi \|h^{-1/2} \gamma u_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\stackrel{(*)}{\geq} \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\|h^{1/2} \partial_n u_h\|_{L^2(\Gamma)} \|h^{-1/2} \gamma u_h\|_{L^2(\Gamma)} + \chi \|h^{-1/2} \gamma u_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\stackrel{(**)}{\geq} \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{4C_2^2} \|h^{1/2} \partial_n u_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\quad - 4C_2^2 \|h^{-1/2} \gamma u_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \chi \|h^{-1/2} \gamma u_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\stackrel{(4.10b)}{\geq} \frac{1}{2} \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4C_2^2} \|h^{1/2} \partial_n u_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 + (\chi - 4C_2^2) \|h^{-1/2} \gamma u_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\geq \alpha \|u_h\|_{H_n^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Dabei haben wir $\alpha := \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4C_2^2}, \chi - 4C_2^2\}$ gesetzt.

2. Schritt: Stetigkeit von $a(\cdot, \cdot)$:

Im Unterschied zur Koerzitivität im 1. Beweisschritt gilt die Stetigkeit nicht nur auf dem Unterraum $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$, sondern sogar auf ganz $H_n^1(\Omega)$. Wir zeigen daher

$$|a(u, v)| \leq C_{stab} \|u\|_{H_n^1(\Omega)} \|v\|_{H_n^1(\Omega)}.$$

Unter Verwendung der Dreiecks- und Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhält man für beliebige $u, v \in H_n^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= |\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \partial_n u, \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma)} - \langle \gamma u, \partial_n v \rangle_{L^2(\Gamma)} + \chi \langle h^{-1/2} \gamma u, h^{-1/2} \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma)}| \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|h^{1/2} \partial_n u\|_{L^2(\Gamma)} \|h^{-1/2} \gamma v\|_{L^2(\Gamma)} + \\ &\quad + \|h^{-1/2} \gamma u\|_{L^2(\Gamma)} \|h^{1/2} \partial_n v\|_{L^2(\Gamma)} + \chi \|h^{-1/2} \gamma u\| \|h^{-1/2} \gamma v\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \max\{1, \chi\} (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|h^{1/2} \partial_n u\|_{L^2(\Gamma)} + \|h^{-1/2} \gamma u\|_{L^2(\Gamma)}) \\ &\quad \cdot (\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|h^{1/2} \partial_n v\|_{L^2(\Gamma)} + \|h^{-1/2} \gamma v\|_{L^2(\Gamma)}) \\ &\leq 3 \max\{1, \chi\} \|u\|_{H_n^1(\Omega)} \|v\|_{H_n^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei der Faktor 3 wegen der Äquivalenz zwischen ℓ_1 - und ℓ_2 -Norm im \mathbb{R}^3 ergänzt wurde. Damit folgt die Stetigkeit von $a(\cdot, \cdot)$ mit $C_{stab} := 3 \max\{1, \chi\}$.

3. Schritt: Stetigkeit von $F(\cdot)$:

Da $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ ein endlichdimensionaler Vektorraum ist, folgt die Stetigkeit sofort aus der Linearität von $F(\cdot)$.

Damit folgt also mit Lemma 1.26 die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für die schwache Formulierung aus Definition 4.22. \square

4.3.2 Céa-Lemma

Wir führen des Beweis für das Céa-Lemma ähnlich wie in [Han, Kapitel 2.3].

Lemma 4.25. (Céa-Lemma) Seien $u \in H_n^1(\Omega)$ und $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ Lösungen der schwachen Formulierungen aus Definition 3.13 und 4.22 und gelte $\chi > 4C_2$, wie in den Voraussetzungen von Satz 3.8. Dann gilt

$$\|u - u_h\|_{H_n^1(\Omega)} \leq \left(1 + \frac{C_{stab}}{\alpha}\right) \inf_{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})} \|u - v_h\|_{H_n^1(\Omega)}.$$

Beweis. Sei $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ beliebig. Wenn wir die Ungleichung

$$\|u - u_h\|_{H_n^1(\Omega)} \leq \left(1 + \frac{C_{stab}}{\alpha}\right) \|u - v_h\|_{H_n^1(\Omega)} \quad (4.11)$$

zeigen können, sind wir fertig. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$\|u - u_h\|_{H_n^1(\Omega)} \leq \|u - v_h\|_{H_n^1(\Omega)} + \|v_h - u_h\|_{H_n^1(\Omega)}. \quad (4.12)$$

Wenn wir den zweiten Term weiter abschätzen erhalten wir unter Verwendung der Koerzitivität und Stetigkeit von $a(\cdot, \cdot)$ aus Satz 4.24 und der Galerkin-Orthogonalität aus Korollar 2.3 weiter

$$\begin{aligned} \|u_h - v_h\|_{H_n^1(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{\alpha} a(u_h - v_h, u_h - v_h) \\ &= \frac{1}{\alpha} a(u - v_h, u_h - v_h) \\ &\leq \frac{C_{stab}}{\alpha} \|u - v_h\|_{H_n^1(\Omega)} \|u_h - v_h\|_{H_n^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Im Fall $\|u_h - v_h\|_{H_n^1(\Omega)} = 0$ ist die behauptete Ungleichung (4.11) trivialerweise erfüllt. Andernfalls können wir $\|u_h - v_h\|_{H_n^1(\Omega)}$ kürzen und erhalten

$$\|u_h - v_h\|_{H_n^1(\Omega)} \leq \frac{C_{stab}}{\alpha} \|u - v_h\|_{H_n^1(\Omega)}.$$

Einsetzen in (4.12) liefert die Behauptung. \square

Kapitel 5

Zusammenhänge und Äquivalenzen

In den letzten beiden Kapiteln haben wir insgesamt drei Varianten präsentiert, die es erlauben, unser Modellproblem aus (1.1) zu diskretisieren und mit finiten Elementen zu approximieren. Die Varianten lauteten:

- explizit geforderte Dirichlet-Randbedingung (DR),
- gemischte Formulierung (GF),
- Nietsches Methode (NM).

Wir versuchen nun in diesem Kapitel die Beziehungen zwischen diesen drei Varianten zusammenzufassen und verwenden dafür in weiterer Folge die in Klammern stehenden Abkürzungen. Dazu zunächst die folgenden beiden Lemmata:

Lemma 5.1. Sei $g \in L^2(\Gamma)$ und $g_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$, dann sind äquivalent:

- (i) $g_h = \mathbb{P}_h^\Gamma g$.
- (ii) $\langle q_h, g_h \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle q_h, g \rangle_{L^2(\Gamma)}$ für alle $q_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$.

Beweis. (i) \implies (ii):

Diese Implikation folgt direkt aus der Definition einer Orthogonalprojektion aus Definition 2.48.

(ii) \implies (i):

Zunächst bemerken wir, dass aufgrund des Darstellungssatzes von Riesz aus Korollar 1.25 für jedes $g \in L^2(\Gamma)$ ein eindeutiges $g_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ existiert, welches die Bedingung aus (ii) löst, d.h. insbesondere ist dadurch eine wohldefinierte Abbildung $g \mapsto g_h$ festgelegt. Da diese Abbildung aufgrund der Bilinearität des L^2 -Skalarproduktes auch linear ist, erfüllt sie damit genau die Eigenschaften aus Definition 2.48. Damit gilt (i). \square

Lemma 5.2. Wir betrachten das folgende Variationsproblem:

Seien $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ und $f \in L^2(\Omega)$ beliebig. Gesucht ist $p_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$, sodass die Gleichung

$$\langle p_h, \gamma v_h^\Gamma \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle f, v_h^\Gamma \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla u_h, \nabla v_h^\Gamma \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v_h^\Gamma \in \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)) \quad (5.1)$$

erfüllt ist. Wir bezeichnen hier mit $\overline{\mathcal{L}}$ wieder den diskreten Fortsetzungsoperator aus Gleichung (4.9), d.h. es gilt

$$\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)) = \{v_h^\Gamma \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \mid v_h^\Gamma|_{\mathcal{K}_\Omega} \equiv 0\}.$$

Dann gilt:

Dieses Variationsproblem besitzt eine eindeutige Lösung $p_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$.

Beweis. Wir definieren $\widehat{p}_h := \overline{\mathcal{L}}p_h \in \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma))$. Wegen $\gamma\widehat{p}_h = p_h$ bildet die linke Seite von (5.1) eine symmetrische Bilinearform auf $\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma))$. Für das Lax-Milgram-Lemma aus Lemma 1.26 definieren wir also $a : \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)) \times \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)) \rightarrow \mathbb{R}$ und das lineare Funktional $F : \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)) \rightarrow \mathcal{R}$ durch

$$\begin{aligned} a(\cdot, \cdot) &:= \langle \gamma(\cdot), \gamma(\cdot) \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ F(\cdot) &:= \langle f, (\cdot) \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla u_h, \nabla(\cdot) \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Wir müssen nun Stetigkeit und Koerzivität von $a(\cdot, \cdot)$ und Stetigkeit von $F(\cdot)$ zeigen.

1. Schritt: Stetigkeit von $a(\cdot, \cdot)$

Wegen der Endlichdimensionalität folgt die Stetigkeit sofort aus der Bilinearität.

2. Schritt: Koerzivität von $a(\cdot, \cdot)$

Wir können Korollar 1.27 anwenden. Für beliebiges $v_h^\Gamma \in \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)) \setminus \{0\}$ gilt

$$a(v_h^\Gamma, v_h^\Gamma) = \|\gamma v_h^\Gamma\|_{L^2(\Gamma)}^2 > 0,$$

da aus $\gamma v_h^\Gamma = 0$ auch $v_h^\Gamma = 0$ folgen würde.

3. Schritt: Stetigkeit von $F(\cdot)$

Analog zum ersten Schritt ist hier wegen der Endlichdimensionalität nichts zu zeigen.

Nach Lemma 1.26 besitzt das Variationsproblem aus (5.1) also eine eindeutige Lösung $\widehat{p}_h \in \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma))$. Wegen der Injektivität von $\overline{\mathcal{L}}$ entspricht dies ebenfalls einem eindeutigen $p_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$. \square

Mit dieser Vorarbeit zeigen wir nun, wie die Lösungen DR und GF zusammenhängen:

Lemma 5.3. Betrachten wir die diskrete Form der schwachen Formulierung in DR aus Definition 4.1 mit der zusätzlichen Forderung $g_h := \mathbb{P}_h^\Gamma g$ und sei $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ die nach Satz 4.5 existierende eindeutige Lösung dieses Problems. Sei außerdem $p_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ die eindeutige Lösung des Variationsproblems aus (5.1), wobei f wie in Satz 4.5 gewählt und u_h die dazugehörige eindeutige Lösung ist. Dann gilt:

Das Funktionenpaar $(u_h, p_h) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \times \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ ist die eindeutige Lösung der diskreten Form der schwachen Formulierung in GF aus Definition 4.16.

Beweis. Zu zeigen ist, dass für alle $(v_h, q_h) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \times \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ gilt

$$\langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle p_h, \gamma v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} + \langle q_h, \gamma u_h \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle q_h, g \rangle_{L^2(\Gamma)}.$$

Wir bemerken, dass jede affine Funktion $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ eindeutig durch die Funktionswerte auf allen Knoten aus \mathcal{K} bestimmt ist. Daher können wir $v_h = v_h^\Omega + v_h^\Gamma$ auf eindeutige Weise in eine Summe zerlegen, wobei $v_h^\Omega \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ und $v_h^\Gamma \in \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{S}_0^1(\Gamma))$ ist (vgl. Lemma 5.2). Dies ist leicht einzusehen, denn v_h^Ω besitzt nichttriviale Funktionswerte auf allen Knoten aus \mathcal{K}_Ω und v_h^Γ auf allen Knoten aus $\mathcal{K}_\Gamma = \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_\Omega$. Daher können wir obige Gleichung unter Verwendung von $\gamma v_h^\Omega = 0$ schreiben als

$$\begin{aligned} \langle \nabla u_h, \nabla(v_h^\Omega + v_h^\Gamma) \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle p_h, \gamma v_h^\Gamma \rangle_{L^2(\Gamma)} + \langle q_h, \gamma u_h \rangle_{L^2(\Gamma)} &= \langle f, (v_h^\Omega + v_h^\Gamma) \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle q_h, g \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ &\text{für alle } (v_h^\Omega, v_h^\Gamma, q_h) \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}) \times \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{S}_0^1(\Gamma)) \times \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma) \end{aligned}$$

Werden jeweils zwei Funktionen des Tripels $(v_h^\Omega, v_h^\Gamma, q_h)$ gleich 0 gesetzt, zerfällt diese Bedingung in die drei äquivalenten Teilbedingungen

$$\begin{aligned}
\langle \nabla u_h, \nabla v_h^\Omega \rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle f, v_h^\Omega \rangle_{L^2(\Omega)} && \text{für alle } v_h^\Omega \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}), \\
\langle \nabla u_h, \nabla v_h^\Gamma \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle p_h, \gamma v_h^\Gamma \rangle_{L^2(\Gamma)} &= \langle f, v_h^\Gamma \rangle_{L^2(\Omega)} && \text{für alle } v_h^\Gamma \in \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{S}_0^1(\Gamma)), \\
\langle q_h, \gamma u_h \rangle_{L^2(\Gamma)} &= \langle q_h, g \rangle_{L^2(\Gamma)} && \text{für alle } q_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma).
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist direkt die erste der beiden Voraussetzungen in DR. Da p_h nach Voraussetzung (5.1) erfüllt, folgt die zweite Gleichung ebenfalls sofort. Die letzte Gleichung folgt wegen $g_h := \mathbb{P}_h^\Gamma g$ und der Voraussetzung $\gamma u_h = g_h$ bei DR aus Lemma 5.1. \square

Das nächste Lemma stellt in gewisser Weise die Umkehrung des vergangenen Lemmas dar:

Lemma 5.4. Betrachten wir die diskrete Form der schwachen Formulierung in GF aus Definition 4.16 und sei $(u_h, p_h) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \times \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ die nach Satz 4.20 existierende eindeutige Lösung dieses Problems. Dann gilt:

Die Funktion $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ ist die eindeutige Lösung der diskreten Form der schwachen Formulierung in DR aus Definition 4.1 mit $g_h := \mathbb{P}_h^\Gamma g$.

Beweis. Zu zeigen sind die beiden Eigenschaften aus Definition 4.1, also:

(i) u_h erfüllt

$$\langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$$

(ii) $\gamma u_h = g_h$ auf Γ

Betrachten wir (4.6) für $q_h = 0$, so erhalten wir

$$\langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle p_h, \gamma v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}).$$

Wegen $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ gilt das insbesondere auch für Funktionen $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ und damit erhalten wir sogar

$$\langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}),$$

da für $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ zusätzlich $\gamma v_h = 0$ gilt. Also ist (i) erfüllt. Um (ii) zu zeigen, betrachten wir (4.6) diesmal für $v_h = 0$ und erhalten

$$\langle q_h, \gamma u_h \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle q_h, g \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } q_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma).$$

Mit Lemma 5.1 gilt damit aber genau $\gamma u_h = \mathbb{P}_h^\Gamma g = g_h$. \square

Aus den vergangenen beiden Lemmata erhalten wir sofort den folgenden Satz:

Satz 5.5. Seien u_h^{DR}, u_h^{GF} jeweils die Lösungen der diskreten Form der schwachen Formulierung in DR und GF, wobei in DR zusätzlich $g_h := \mathbb{P}_h^\Gamma g$ gilt. Dann gilt:

$$u_h^{DR} = u_h^{GF}.$$

\square

Kapitel 6

A-Posteriori-Fehlerschätzer

6.1 Motivation

Die Idee eines adaptiven Finite-Elemente-Algorithmus ist es, die Triangulierung \mathcal{T} von Ω schrittweise gezielt zu verkleinern, um damit die Approximation der schwachen Lösung aus Kapitel 3 durch die diskreten Lösungen aus Kapitel 4 zu verbessern. Das bedeutet konkret, dass für eine gegebene Lösung $u \in H^1(\Omega)$ und dazugehörige Approximationslösung $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ der Approximationsfehler $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ geeignet evaluiert werden muss. Dabei ist natürlich zu beachten, dass zu diesem Zeitpunkt lediglich u_h , nicht jedoch u bekannt ist. Diese Problematik führt auf das nun im Folgenden verwendete Konzept der Fehlerschätzer.

Definition 6.1. (Fehlerschätzer) Wir gehen von unserem Modellproblem aus (1.1) aus. Sei \mathcal{T} eine reguläre Triangulierung von Ω und $u_h \in H_h$ eine beliebige Approximationslösung im Approximationshilbertraum H_h . Dann nennen wir eine beliebige Funktion

$$\begin{aligned}\eta_{\mathcal{T}} : H_h &\longrightarrow [0, \infty) \\ u_h &\longmapsto \eta_{\mathcal{T}}(u_h)\end{aligned}$$

einen **Fehlerschätzer**. △

Um einen adaptiven Algorithmus folgen zu lassen, benötigen wir vor allem die folgende Eigenschaft eines Fehlerschätzers.

Definition 6.2. Wir nennen einen Fehlerschätzer **elementbasierend**, wenn er sich in der Form

$$\eta_{\mathcal{T}} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2 \right)^{1/2}$$

mit nur lokal von von $T \in \mathcal{T}$ abhängigen Funktion

$$\begin{aligned}\eta_T : H_h|_T &\longrightarrow [0, \infty) \\ u_h|_T &\longmapsto \eta_T(u_h|_T)\end{aligned}$$

schreiben lässt. △

Obige Definition des Fehlerschätzers sagt noch nichts darüber aus, ob der Fehlerschätzer nun tatsächlich etwas mit dem Approximationsfehler zu tun hat. Daher definieren wir nun zwei wesentliche Eigenschaften, welche die Werte des Fehlerschätzers und den tatsächlichen Approximationsfehler in Verbindung bringt. Sie stammen aus [FPP, Proposition 2].

Definition 6.3. (Zuverlässigkeit) Sei $H_h \subseteq H$ und seien $u \in H$ die exakte und $u_h \in H_h$ die approximierte Lösung eines Variationsproblems. Wir nennen einen Fehlerschätzer **zuverlässig**, wenn es eine Konstante $C_{rel} > 0$ gibt, die nur von Ω , $\sigma(\mathcal{T})$ und gegebenenfalls einer Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 abhängt, sodass gilt

$$\|u - u_h\|_H \leq C_{rel} \eta_{\mathcal{T}}. \quad (6.1)$$

△

Oft gilt auch eine umgekehrte Abschätzung. Dies führt dann zur folgenden Definition.

Definition 6.4. (Effizienz) Mit den gleichen Voraussetzungen wie in Definition 6.3 nennen wir einen Fehlerschätzer **effizient**, wenn es eine von Ω und $\sigma(\mathcal{T})$ abhängige Konstante $C_{eff} > 0$ und eine geeignete Abbildung $\text{osc}(\cdot) : H_h \rightarrow [0, \infty)$ gibt, sodass gilt

$$\eta_{\mathcal{T}}^2 \leq C_{eff} (\|u - u_h\|_{H_h}^2 + \text{osc}(u_h)^2). \quad (6.2)$$

△

Wir wollen nun in weiterer Folge für die einzelnen Formulierungsvarianten unseres Modellproblems jeweils Fehlerschätzer definieren und ihre Eigenschaften näher untersuchen.

6.2 Schwache Formulierung mit explizit geforderter Dirichlet-Randbedingung

Angeknüpft an die Ausführungen in Kapitel 3.2 und 4.1 definieren wir wie in [AFKPP, Chapter 2.2] für eine reguläre Triangulierung \mathcal{T} einen elementbasierenden Fehlerschätzer durch

$$\eta_{\mathcal{T}}^2 := \|hf\|_{L^2(T)}^2 + \|h^{1/2}[\partial_n u_h]\|_{L^2(\partial T \cap \Omega)}^2 + \|h^{1/2}(1 - \mathbb{P}_0^\Gamma) \nabla_{EG}\|_{L^2(\partial T \cap \Gamma)}^2 \quad (6.3)$$

und damit wegen Definition 4.10

$$\eta_{\mathcal{T}}^2 = \|hf\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|h^{1/2}[\partial_n u_h]\|_{L^2(\cup \mathcal{E}_\Omega)}^2 + \text{osc}_\Gamma^2. \quad (6.4)$$

Wir formulieren nun den folgenden Satz, dessen Beweis nach der Idee von [AFKPP, Chapter 3.5] geführt wird:

Satz 6.5. Sei \mathbb{P}_h^Γ ein Projektionsoperator wie in den Voraussetzungen von Lemma 4.12 und $g_h = \mathbb{P}_h^\Gamma g$. Dann erfüllt der Fehlerschätzer aus (6.4) die Zuverlässigkeit aus Definition 6.3, d.h. es gilt

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{rel} \eta_{\mathcal{T}}$$

mit einer Konstante $C_{rel} > 0$, die nur von Ω , $\sigma(\mathcal{T})$, einer Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 und der Stetigkeitskonstante von \mathbb{P}_h^Γ abhängt.

Beweis. Wir betrachten für den Beweis das folgende Hilfsproblem für $w \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} -\Delta w &= 0 && \text{in } \Omega \\ w &= g - g_h && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Wie schon für unser Modellproblem (1.1) liefert Satz 3.8 für diesen Fall mit der Wahl $u \mapsto w$, $f \mapsto 0$ und $g \mapsto g - g_h$ die Existenz einer eindeutigen Lösung $w \in H^1(\Omega)$ mit der Abschätzung

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq 2 \|g - g_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \stackrel{\text{Lem.4.12}}{\leq} 2C_{osc} \text{osc}_\Gamma. \quad (6.5)$$

Außerdem gilt wegen der Wahl der Randbedingungen $\gamma(u - u_h - w) = 0$ auf Γ und damit $u - u_h - w \in H_0^1(\Omega)$, weshalb wir für diesen Ausdruck die Friedrichs-Ungleichung in der Form von (1.6) anwenden können. Damit erhalten wir dann insgesamt

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} &= \|(u - u_h - w) + w\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|u - u_h - w\|_{H^1(\Omega)} + \|w\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \sqrt{C_F^2 + 1} \|\nabla(u - u_h - w)\|_{L^2(\Omega)} + \|w\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Da wir für den zweiten Summanden aus (6.6) bereits die Abschätzung aus (6.5) verwenden können, verbleibt zu zeigen, dass auch der erste Summand durch den Fehlerschätzer aus (6.4) abgeschätzt werden kann. Betrachten wir dabei zunächst noch einmal die schwachen Formulierungen für u , u_h und w (siehe Definitionen 3.3 und 4.1), so gilt

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega), \quad (6.7)$$

$$0 = \langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}), \quad (6.8)$$

$$\langle \nabla w, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \quad (6.9)$$

Addiert man nun zunächst (6.7), (6.8) und subtrahiert anschließend (6.9) und $\langle \nabla u_h, v \rangle_{L^2(\Omega)}$ auf beiden Seiten, so erhält man für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ und $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$

$$\begin{aligned} \langle \nabla(u - u_h - w), \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle f, v - v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla u_h, \nabla(v_h - v) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle f, v - v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{T \in \mathcal{T}} \langle \nabla u_h, \nabla(v_h - v) \rangle_{L^2(T)} \\ &\stackrel{\text{Kor.1.17}}{\stackrel{\Delta u_h=0}{=}} \langle f, v - v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{T \in \mathcal{T}} \langle \partial_n u_h, \gamma v_h - \gamma v \rangle_{L^2(\partial T)} \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\gamma v = \gamma v_h = 0}{\text{auf } \Gamma} \sum_{T \in \mathcal{T}} \langle f, v - v_h \rangle_{L^2(T)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \langle [\partial_n u_h], \gamma v_h - \gamma v \rangle_{L^2(E)} \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}} \|f\|_{L^2(T)} \|v - v_h\|_{L^2(T)} + \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(E)} \|\gamma v - \gamma v_h\|_{L^2(E)}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Da diese Rechnung insbesondere auch für die Wahl $v_h := \mathbb{J}_h v$ gilt, können wir in diesem Fall die Abschätzungen aus Proposition 2.46 (vi) und (xi) verwenden (T_E bezeichnet hier ein beliebiges $T \in \mathcal{T}$ mit $E \in \mathcal{E}_T$) und erhalten dadurch weiter

$$\begin{aligned}
& \langle \nabla(u - u_h - w), \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} \\
& \leq \tilde{C} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \|f\|_{L^2(T)} h_T \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(E)} h_E^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_{TE})} \right) \\
& \leq \tilde{C} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \|f\|_{L^2(T)}^2 h_T^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(E)}^2 h_E \right)^{1/2} \\
& \quad \cdot \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_{TE})}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Da jedes $T \in \mathcal{T}$ genau drei Randkanten $E \in \mathcal{E}_T$ und jedes ω_T nach Lemma 2.31 beschränkt viele Dreiecke besitzt, gilt schlussendlich mit einer von $\sigma(\mathcal{T})$ abhängigen Konstanten \widehat{C}

$$\langle \nabla(u - u_h - w), \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} \leq \widehat{C} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \left(\|hf\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|h^{1/2}[\partial_n u_h]\|_{L^2(\cup \mathcal{E}_\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Da der Hilbertraum $L^2(\Omega)$ nach Satz 1.24 mit seinem Dualraum identifiziert werden kann, gilt über die Definition der Abbildungsnorm und der soeben gezeigten Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u - u_h - w)\|_{L^2(\Omega)} &= \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ \nabla v \neq 0}} \frac{\langle \nabla(u - u_h - w), \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}} \\
&\leq \tilde{C} \left(\|hf\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|h^{1/2}[\partial_n u_h]\|_{L^2(\cup \mathcal{E}_\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Damit haben wir auch den ersten Summanden in (6.6) erfolgreich durch Terme aus dem Fehlerschätzer (6.4) abgeschätzt.

Wir erhalten daher insgesamt die Zuverlässigkeitsabschätzung aus Definition 6.3. \square

In Anlehnung an Definition 4.10 definieren wir zunächst einen weiteren Oszillationsterm.

Definition 6.6. (Element-Daten-Oszillationen) Sei $f \in L^2(\Omega)$ und $f_T := |T|^{-1} \int_T f \, d\lambda$ das Integralmittel über jeweils ein Element. Dann schreiben wir für jedes $T \in \mathcal{T}$

$$\text{osc}_{\mathcal{T}}(T)^2 := h_T^2 \|f - f_T\|_{L^2(T)}^2$$

und weiters

$$\text{osc}_{\mathcal{T}}^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}} \text{osc}_{\mathcal{T}}(T)^2.$$

\triangle

Dann gilt der folgende Satz, dessen Beweis in [FPP, Proposition 2] skizziert und dessen technische Details in [Ver, Proposition 4.2] detailliert ausgeführt sind:

Satz 6.7. Mit den Voraussetzungen aus Satz 6.5 gilt auch die Effizienz aus Definition 6.4 in der Form

$$\eta_{\mathcal{T}}^2 \leq C_{eff} \left(\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2 + \text{osc}_{\Gamma}^2 \right)$$

mit einer von Ω und $\sigma(\mathcal{T})$ abhängigen Konstante $C_{eff} > 0$. \square

Bemerkung 6.8. Die Abschätzung des letzten Satzes verwendet keine zusätzlichen Voraussetzungen an u_h und gilt damit für jedes $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ und nicht nur für die Lösung der diskreten Form der schwachen Formulierung aus Definition 4.1. \triangle

6.3 Schwache Formulierung in gemischter Formulierung

Die Vorgangsweise hier ist analog zum vorhergehenden Abschnitt und setzt die Kapitel 3.3 und 4.2 fort. Wir definieren wieder einen elementbasierenden Fehlerschätzer durch

$$\begin{aligned} \eta_T^2 := & \|hf\|_{L^2(T)}^2 + \|h^{1/2}[\partial_n u_h]\|_{L^2(\partial T \cap \Omega)}^2 + \\ & + \|h^{1/2}(1 - \mathbb{T}_0^\Gamma) \nabla_E g\|_{L^2(\partial T \cap \Gamma)}^2 + \|h^{1/2}(\partial_n u_h + p_h)\|_{L^2(\partial T \cap \Gamma)}^2. \end{aligned}$$

und

$$\eta_{\mathcal{T}}^2 = \|hf\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|h^{1/2}[\partial_n u_h]\|_{L^2(\cup \mathcal{E}_\Omega)}^2 + \text{osc}_\Gamma^2 + \|h^{1/2}(\partial_n u_h + p_h)\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad (6.13)$$

Satz 6.9. Der Fehlerschätzer aus (6.13) erfüllt die Zuverlässigkeit aus Definition 6.3 auf dem Produkthilbertraum $H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, d.h. es gilt

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} + \|p - p_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C_{rel} \eta_{\mathcal{T}}$$

mit einer Konstante $C_{rel} > 0$, die nur von Ω , $\sigma(\mathcal{T})$, einer Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 und der Stetigkeitskonstante von \mathbb{P}_h^Γ abhängt.

Beweis. Wir beginnen mit dem Term $\|p - p_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ und betrachten dazu noch einmal die schwachen Formulierungen (siehe Definitionen 3.9 und 4.16) in der Form

$$\begin{aligned} \langle p, \gamma v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} &= \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} && \text{für alle } v \in H^1(\Omega), \\ 0 &= \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - \langle p_h, \gamma v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} && \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}). \end{aligned}$$

Subtrahieren wir nun diese beiden Gleichungen und subtrahieren danach noch $\langle p_h, \gamma v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}$ auf beiden Seiten, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \langle p - p_h, \gamma v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} \\
&= \langle f, v - v_h \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \\
&\quad + \langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle p_h, \gamma v_h - \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma)} \\
&= \langle f, v - v_h \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla u_h, \nabla v - \nabla v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + \\
&\quad + \langle \nabla u_h - \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle p_h, \gamma v_h - \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma)} \\
&= \langle f, v - v_h \rangle_{L^2(\Omega)} - \sum_{T \in \mathcal{T}} \langle \nabla u_h, \nabla v - \nabla v_h \rangle_{L^2(T)} + \\
&\quad + \langle \nabla u_h - \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Gamma} \langle p_h, \gamma v_h - \gamma v \rangle_{L^2(E)} \\
&\stackrel{\text{Kor.1.17}}{\stackrel{\Delta u=0}{=}} \langle f, v - v_h \rangle_{L^2(\Omega)} - \sum_{T \in \mathcal{T}} \langle \partial_n u_h, \gamma v - \gamma v_h \rangle_{L^2(\partial T)} + \\
&\quad + \langle \nabla u_h - \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Gamma} \langle p_h, \gamma v_h - \gamma v \rangle_{L^2(E)} \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}} \langle f, v - v_h \rangle_{L^2(T)} - \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \langle [\partial_n u_h], \gamma v - \gamma v_h \rangle_{L^2(E)} + \\
&\quad + \langle \nabla u_h - \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Gamma} \langle \partial_n u_h + p_h, \gamma v_h - \gamma v \rangle_{L^2(E)} \\
&\leq \sum_{T \in \mathcal{T}} \|f\|_{L^2(T)} \|v - v_h\|_{L^2(T)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(E)} \|\gamma v - \gamma v_h\|_{L^2(E)} + \\
&\quad + \|\nabla u_h - \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Gamma} \|\partial_n u_h + p_h\|_{L^2(E)} \|\gamma v_h - \gamma v\|_{L^2(E)}.
\end{aligned}$$

Unter der Verwendung von $v_h := \mathbb{J}_h v$ und Proposition 2.46 (vi) und (xi) ergibt sich durch analoge Abschätzungen wie im vorhergehenden Kapitel

$$\begin{aligned}
& \langle p - p_h, \gamma v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} \leq \\
& \tilde{C} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \left(\|hf\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|h^{1/2}[\partial_n u_h]\|_{L^2(\cup \mathcal{E}_\Omega)}^2 + \|h^{1/2}(\partial_n u_h + p_h)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right)^{1/2} + \\
& + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_h - \nabla u\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung gilt für alle $v \in H^1(\Omega)$. Daher gilt aufgrund der Definition der Abbildungsnorm in $H^{-1/2}(\Gamma)$ und wegen eben gezeigter Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|p - p_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &= \sup_{\substack{g \in H^{1/2}(\Omega) \\ g \neq 0}} \frac{\langle p - p_h, g \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}}{\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} \\
&= \sup_{\substack{g \in H^{1/2}(\Gamma) \\ g \neq 0}} \frac{\langle p - p_h, g \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}}{\inf_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ \gamma v = g}} \|v\|_{H^1(\Omega)}} \\
&= \sup_{\substack{g \in H^{1/2}(\Gamma) \\ g \neq 0}} \sup_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ \gamma v = g}} \frac{\langle p - p_h, g \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \\
&= \sup_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{\langle p - p_h, \gamma v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \\
&\leq \tilde{C} \left(\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|h^{1/2}[\partial_n u_h]\|_{L^2(\cup \mathcal{E}_\Omega)}^2 + \|h^{1/2}(\partial_n u_h + p_h)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right)^{1/2} + \\
&\quad + \|\nabla u_h - \nabla u\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Der erste Summand dieses Ergebnisses lässt sich sofort durch die Terme im Fehlerschätzer $\eta_{\mathcal{T}}$ abschätzen. Daher gilt insgesamt

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} + \|p - p_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \tilde{C}\eta_{\mathcal{T}} + 2\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$$

Wegen Satz 5.5 kann $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ auch in diesem Fall gemäß Satz 6.5 abgeschätzt werden, denn unser in (6.13) definierter Fehlerschätzer enthält alle Terme aus (6.4). Insgesamt erhalten wir damit also die zu zeigende Abschätzung. \square

6.4 Schwache Formulierung nach Nietsches Methode

Wir haben in Kapitel 3.4 die eindeutige Lösbarkeit der schwachen Formulierung aus Definition 3.13 nicht gezeigt, da die Bilinearform auf der rechten Seite in (3.15) auf $H_n^1(\Omega)$ nicht koerziv ist und es in diesem Raum auch keine Lösung geben muss. (Sie ist jedoch koerziv auf $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$, vgl. Definition 4.22 und Satz 3.8.) Wir betrachten daher in diesem Kapitel mit $u \in H^1(\Omega)$ die gemäß Satz 3.8 eindeutige Lösung der schwachen Formulierung aus Definition 3.3 und $u_h \in H_n^1(\Omega)$ die gemäß Satz 4.24 eindeutige Lösung der diskreten Form der schwachen Formulierung aus Definition 4.22. Das Ziel ist es dann, den Fehler $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ zu kontrollieren.

Mit diesen Voraussetzungen definieren wir für eine beliebige Approximation $g_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ von g den elementbasierten Fehlerschätzer durch

$$\begin{aligned}
\eta_T^2 &:= \|hf\|_{L^2(T)}^2 + \|h^{1/2}[\partial_n u_h]\|_{L^2(\partial T \cap \Omega)}^2 + \\
&\quad + \|h^{1/2}(1 - \mathbb{P}_0^\Gamma)\nabla_E g\|_{L^2(\partial T \cap \Gamma)}^2 + \|h^{-1/2}(g_h - \gamma u_h)\|_{L^2(\Gamma)}^2
\end{aligned}$$

und damit

$$\eta_{\mathcal{T}}^2 = \|hf\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|h^{1/2}[\partial_n u_h]\|_{L^2(\cup \mathcal{E}_\Omega)}^2 + \text{osc}_\Gamma^2 + \|h^{-1/2}(g_h - \gamma u_h)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad (6.14)$$

Satz 6.10. Sei $g_h := \mathbb{P}_h^\Gamma g$ eine Projektion wie in Lemma 4.12. Dann erfüllt der Fehlerschätzer aus (6.14) die Zuverlässigkeit auf $H^1(\Omega)$, d.h. es gilt

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{rel}\eta_{\mathcal{T}}$$

mit einer Konstante $C_{rel} > 0$, die nur von Ω , $\sigma(\mathcal{T})$, einer Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 und der Stetigkeitskonstante von \mathbb{P}_h^Γ abhängt.

Beweis. Die Vorgangsweise ist ähnlich wie im Beweis von Satz 6.5. Unser Hilfsproblem für $w \in H^1(\Omega)$ lautet:

$$\begin{aligned} -\Delta w &= 0 && \text{in } \Omega \\ w &= g - \gamma u_h && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \|w\|_{H^1(\Omega)} &\leq 2\|g - \gamma u_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq 2(\|g - g_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|g_h - \gamma u_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)}) \\ &\stackrel{\text{Lem. 4.12}}{\leq} 2(C_{osc} \text{osc}_\Gamma + \|\bar{\mathcal{L}}(g_h - \gamma u_h)\|_{H^1(\Omega)}) \\ &\stackrel{\text{Lem. A.2}}{\leq} 2(C_{osc} \text{osc}_\Gamma + \tilde{C}\|h^{-1/2}(g_h - \gamma u_h)\|_{L^2(\Gamma)}). \end{aligned}$$

Wie in (6.6) gilt

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} &= \|(u - u_h - w) + w\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \|u - u_h - w\|_{H^1(\Omega)} + \|w\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \sqrt{C_F^2 + 1}\|\nabla(u - u_h - w)\|_{L^2(\Omega)} + \|w\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

und wegen obiger Abschätzung für $\|w\|_{H^1(\Omega)}$ verbleibt nur noch der erste Summand durch die Terme aus dem Fehlerschätzer abzuschätzen. Dazu betrachten wir die schwachen Formulierungen für u, u_h und w (siehe Definition 3.3 und 4.22)

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega), \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad + \langle g - \gamma u_h, \partial_n v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}), \quad (6.16) \end{aligned}$$

$$\langle \nabla w, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \quad (6.17)$$

Wir addieren nun (6.15) und (6.16) und subtrahieren (6.17) und $\langle \nabla u_h, v \rangle_{L^2(\Omega)}$ auf beiden Seiten. Damit erhalten wir für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ und alle $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$

$$\langle \nabla(u - u_h - w), \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v - v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla u_h, \nabla(v_h - v) \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g - \gamma u_h, \partial_n v_h \rangle_{L^2(\Gamma)}.$$

Mit den ersten beiden Summanden können wir genau wie im Beweis von Satz 6.5 ab Gleichung (6.10) verfahren. Für den dritten Summanden gilt

$$\begin{aligned} \langle g - \gamma u_h, \partial_n v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} &= \langle h^{-1/2}(g - \gamma u_h), h^{1/2} \partial_n v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|h^{-1/2}(g - \gamma u_h)\|_{L^2(\Gamma)} \|h^{1/2} \partial_n v_h\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\stackrel{(4.10b)}{\leq} C_2 \|h^{-1/2}(g - \gamma u_h)\|_{L^2(\Gamma)} \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt eine entsprechende Abschätzung zu (6.12), nämlich

$$\|\nabla(u - u_h - w)\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{C} \left(\|hf\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|[h^{1/2} \partial_n u_h]\|_{L^2(\cup \mathcal{E}_\Omega)}^2 + \|h^{-1/2}(g - \gamma u_h)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right)^{1/2}$$

Da auf der rechten Seite genau die Terme aus dem Fehlerschätzer in (6.4) auftauchen, haben wir die behauptete Zuverlässigkeit gezeigt. \square

Satz 6.11. Es gelten die Voraussetzungen vom Beginn dieses Kapitels und aus Satz 6.10 jedoch mit $g_h := \mathbb{J}_h^\Gamma g$. Sei zusätzlich $u \in H_n^1(\Omega)$. Dann gilt die Effizienz in der Form

$$\eta_{\mathcal{T}}^2 \leq C_{eff} \left(\|u - u_h\|_{H_n^1(\Omega)}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2 + \text{osc}_{\Gamma}^2 \right).$$

Beweis. Wegen Bemerkung 6.8 können wir hier verwenden, dass wir für die Terme im Fehlerschätzer aus 6.4 bereits die Abschätzung aus Satz 6.7 kennen. Der einzige verbleibende Term in $\eta_{\mathcal{T}}^2$ ist dann $\|h^{-1/2}(g_h - \gamma u_h)\|_{L^2(\Gamma)}^2$. Es gilt wegen $\gamma u = g$ und Definition der $H_n^1(\Omega)$ -Norm

$$\begin{aligned} \|h^{-1/2}(g_h - \gamma u_h)\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\leq \|h^{-1/2}(g_h - g)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|h^{-1/2}(g - \gamma u_h)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\leq \|h^{-1/2}(g_h - g)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|u - u_h\|_{H_n^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

und außerdem

$$\begin{aligned} \|h^{-1/2}(g_h - g)\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Gamma}} h_E^{-1} \|g_h - g\|_{L^2(E)}^2 \\ &\stackrel{g_h = \mathbb{J}_h^\Gamma g}{=} \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Gamma}} h_E^{-1} \|(1 - \mathbb{J}_h^\Gamma)(g_h - g)\|_{L^2(E)}^2 \\ &\stackrel{\text{Prop.2.46(xii)}}{\leq} \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Gamma}} h_E^{-1} \|h \nabla_E (g_h - g)\|_{L^2(\omega_E^\Gamma)}^2 \\ &\stackrel{\text{Lem.2.31,2.32}}{\leq} C_\sigma \gamma^{C_\sigma} \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Gamma}} h_E \|\nabla_E (g_h - g)\|_{L^2(E)}^2 \\ &= C_\sigma \gamma^{C_\sigma} \|h^{1/2} \nabla_E (g_h - g)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\stackrel{\text{Lem.4.11}}{\leq} C^2 C_\sigma \gamma^{C_\sigma} \text{osc}_{\Gamma}^2. \end{aligned}$$

Damit gilt die behauptete Abschätzung. □

Bemerkung 6.12. Der vorhergehende Satz kann mit den dazu nötigen Eigenschaften der Knoten-Interpolation aus [FPP] auf ähnliche Weise auch für $g_h := \mathbb{K}_h^\Gamma g$ gezeigt werden. △

Kapitel 7

Implementierung

Wir wollen nun die verschiedenen Varianten des Fehlerschätzers aus der vorherigen Abschnitt anhand eines adaptiven Finite-Elemente-Algorithmus testen. Die Grundlage dafür liefert der MATLAB-Code aus [FPW], welcher eine Implementierung der schwachen Formulierung mit explizit geforderten Dirichlet-Randbedingungen aus Kapitel 4.1 darstellt. Das Ziel dieses Abschnittes ist es also, diesen Algorithmus geeignet zu adaptieren und zu ergänzen, damit er unseren Berechnungen entspricht.

Für eine funktionierende Implementierung eines Algorithmus über die adaptive Finite-Elemente-Methode sind mehrere Schritte nötig. Wie auch in [FPP, Kapitel 1.3] angeführt, sind dabei im Wesentlichen folgende Dinge wiederholt auszuführen:

- (i) Lösen der diskretisierten Variante der schwachen Formulierung gemäß Kapitel 4 für eine gegebene Triangulierung \mathcal{T} .
- (ii) Berechnung des elementbasierenden Fehlerschätzers auf den einzelnen Elementen gemäß Kapitel 6.
- (iii) Markierung der Elemente, die zur Netzverfeinerung vorgesehen sind.
- (iv) Verfeinerung der Triangulierung \mathcal{T} .

Für die Details der Punkte (iii) und (iv) verweisen wir auf die genauen Ausführungen in [FPW] und werden auch die Codestücke, die dafür notwendig sind, von dort übernehmen. Hier beschäftigen wir uns in weiterer Folge damit, wie die Punkte (i) und (ii) nach unseren Ausführungen in den Kapiteln 4 und 6 zu implementieren sind. Dazu betrachten und vergleichen wir jeweils die beiden MATLAB-Codestücke, die diesen Teil umsetzen. Die Files für Schritt (i) tragen jeweils die Namen *solveLaplace.m*, *solveLaplace1.m*, *solveLaplace2.m*, *solveLaplace3.m* und die für Schritt (ii) *computeEtaR.m*, *computeEtaR1.m*, *computeEtaR2.m*, *computeEtaR3.m*. Sie befinden sich alle im Anhang 7 und werden in den folgenden Abschnitten genauer erläutert.

7.1 Originalcode aus [FPW]

Die originalen Codestücke aus [FPW] *solveLaplace.m* und *computeEtaR.m* befinden sich in Anhang B.1. Sie entsprechen im Prinzip einer Implementierung unserer schwachen

Formulierung mit explizit geforderten Dirichlet-Randbedingung aus Kapitel 4.1. Der Unterschied ist jedoch im Wesentlichen, dass dort im Gegensatz zu unseren bisherigen Ausführungen auf einem Teil des Randes auch Neumann-Randbedingungen zugelassen sind und jedoch im Fehlerschätzer kein Term für die Dirichlet-Daten-Oszillationen aus Definition 4.10 auftauchen. In den nächsten Abschnitten werden wir daher vor allem darauf eingehen, wie wir den Code entsprechend adaptieren mussten, um ihn auf das jeweilige Problem anzupassen.

7.2 Schwache Formulierung mit explizit geforderter Dirichlet-Randbedingung

Die Codestücke für diese Variante befinden sich in Anhang B.2 unter den Namen *solveLaplace1.m* und *computeEtaR1.m*. Wir beschreiben nun im Detail die Codeänderungen im Vergleich zum Originalcode.

7.2.1 solveLaplace1.m

Wie bereits im vorhergehenden Abschnitt erwähnt, löst der Originalcode aus [FPW] ein sehr ähnliches Problem, wie wir bei explizit geforderter Dirichlet-Randbedingung. Beim Löser der schwachen Formulierung aus Kapitel 4.1 waren daher lediglich die Passagen des Codes, welche die Neumann-Randbedingungen behandeln (Zeilen 67-73 in *solveLaplace.m*), zu eliminieren. Wir haben außerdem die Bezeichnung für die Randbedingung im Einklang mit unserer Notation von u_D auf g abgeändert.

7.2.2 computeEtaR1.m

Hier wurden ebenso die Zeilen bezüglich Neumann-Randbedingungen gelöscht. Außerdem muss der Dirichlet-Oszillationsterm $\|h^{1/2}(1 - \mathbb{P}_0^\Gamma)\nabla_E g\|_{L^2(\partial T \cap \Gamma)}^2$ aus (6.3) zusätzlich implementiert werden (siehe Zeilen 29-40 in *computeEtaR1.m*). Wir gehen dabei für eine beliebige Randkante $E \subseteq \Gamma$ mit den beiden Endpunkten $z, z' \in \mathbb{R}^2$ wie folgt vor:

- Bestimme ein Interpolationspolynom $p_E \approx g|_E$ vom Grad 2 mit den Stützstellen $\{z, \frac{z+z'}{2}, z'\}$ und dazugehörigen Funktionswerten $\{g(z), g(\frac{z+z'}{2}), g(z')\}$.
- Berechne das Integral $h_E^{1/2}\|(1 - \mathbb{P}_0^\Gamma)\nabla_E p_E\|_{L^2(E)}^2 \approx h_E^{1/2}\|(1 - \mathbb{P}_0^\Gamma)\nabla_E g\|_{L^2(E)}^2$ exakt.

Die Grundlage für dieses Vorgehen ist der folgende Satz, welcher die Approximation durch das Interpolationspolynom rechtfertigt. Der Beweis befindet sich in [Pra2, Korollar 4.3].

Satz 7.1. Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $g_* \in C^{n+1}[a, b]$, also eine n -mal stetig differenzierbare Funktion auf $[a, b]$. Sind $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ paarweise verschiedene Stützstellen und p das Interpolationspolynom mit $p(x_i) = g_*(x_i)$ für alle $i = 0, \dots, n$. Dann gibt es für $x \in [a, b]$ ein $\xi \in [a, b]$, sodass die Darstellung

$$g_*(x) - p(x) = \frac{g_*^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

gilt. □

Korollar 7.2. Mit den Voraussetzungen in Satz 7.1 gilt

$$|g'_*(x) - p'(x)| \leq \frac{\|g_*^{(n+1)}\|_{L^\infty[a,b]}}{n!} (b-a)^n.$$

Beweis. Differenziert man im vorherigen Satz auf beiden Seiten nach x , so erhält man unmittelbar unter Verwendung der Produktregel

$$g'_*(x) - p'(x) = \frac{g_*^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \sum_{j=0}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x - x_i)$$

und damit auch die Abschätzung

$$|g'_*(x) - p'(x)| \leq \frac{\|g_*^{(n+1)}\|_{L^\infty[a,b]}}{(n+1)!} (n+1)(b-a)^n = \frac{\|g_*^{(n+1)}\|_{L^\infty[a,b]}}{n!} (b-a)^n$$

□

Wir betrachten nun die Einbettung

$$\phi : [-1, 1] \longrightarrow E = \text{conv}\{z, z'\}, \quad \phi(t) = \frac{(1-t)z + (1+t)z'}{2}, \quad (7.1)$$

welche unser Referenzintervall $[-1, 1]$ affin auf die Kante E abbildet. Wähle

$$(p_E \circ \phi)(t) := g(z) \frac{t^2 - t}{2} - g\left(\frac{z+z'}{2}\right) (t^2 - 1) + g(z') \frac{t^2 + t}{2}, \quad (7.2)$$

dann ist $p_E \circ \phi : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom 2. Grades, welches an den Stückstellen $\{-1, 0, 1\}$ die Funktionswerte $\{g(z), g(\frac{z+z'}{2}), g(z')\}$ annimmt. Somit ist $p_E : E \longrightarrow \mathbb{R}$ genau das eindeutige quadratische Interpolationspolynom auf der Kante E .

Lemma 7.3. Es gilt mit obiger Notation und $g \in C^3(E)$:

$$\|\nabla_E(g - p_E)\|_{L^2(E)} = \mathcal{O}(h_E^{5/2})$$

Beweis. Es gilt zunächst unter Verwendung des Transformationssatzes und Definition der Kantenableitung

$$\begin{aligned} \|\nabla_E(g - p_E)\|_{L^2(E)}^2 &= \int_E (\nabla_E(g - p_E))^2 d\mu \\ &= \int_{-1}^1 (\nabla_E(g - p_E) \circ \phi(t))^2 \frac{h_E}{2} dt \\ &= \int_{-1}^1 \left(((g - p_E) \circ \phi)'(t) \frac{2}{h_E} \right)^2 \frac{h_E}{2} dt \\ &= \int_{-1}^1 \left(((g - p_E) \circ \phi)'(t) \right)^2 \frac{2}{h_E} dt. \end{aligned}$$

Die Funktionen $g \circ \phi$ und $p_E \circ \phi$ erfüllen auf $[-1, 1]$ genau die Voraussetzungen von Satz 7.1 für $n = 2$ und damit können wir in diesem Fall Korollar 7.2 anwenden und erhalten für den Integranden

$$\begin{aligned} \left(((g - p_E) \circ \phi)'(t) \right)^2 \frac{2}{h_E} &\leq \left(\frac{\|(g \circ \phi)'''\|_{L^\infty[-1,1]}}{2} 2^2 \right)^2 \frac{2}{h_E} = \left(2 \|(g \circ \phi)'''\|_{L^\infty[-1,1]} \right)^2 \frac{2}{h_E} \\ &= \left(2 \|\nabla_E^3 g \circ \phi\|_{L^\infty[-1,1]} \left(\frac{h_E}{2} \right)^3 \right)^2 \frac{2}{h_E} = \frac{h_E^5}{8} \|\nabla_E^3 g\|_{L^\infty(E)}^2. \end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt

$$\|\nabla_E(g - p_E)\|_{L^2(E)} \leq \left(\int_{-1}^1 \frac{h_E^5}{8} \|\nabla_E^3 g\|_{L^\infty(E)}^2 dt \right)^{1/2} = \frac{h_E^{5/2}}{2} \|\nabla_E^3 g\|_{L^\infty(E)}$$

und damit gilt die Behauptung. \square

In Analogie zu $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ aus Definition 2.36 definieren wir

$$\mathcal{S}^2(\Gamma) := \{p \in C(\Gamma) \mid \forall E \in \mathcal{E}_\Gamma \ p|_E \text{ ist quadratisches Polynom} \}.$$

Korollar 7.4. Sei $g \in H^1(\Gamma)$ und gelte zusätzlich $g|_E \in C^3(E)$ für alle Randkanten $E \in \mathcal{E}_\Gamma$. Sei $p \in \mathcal{S}^2(\Gamma)$, sodass $p|_E = p_E$ gilt, also p auf jeder Kante mit dem vorher beschriebene Interpolationspolynom von $g|_E$ übereinstimmt. Dann gilt

$$\left| \|h^{1/2}(1 - \mathbb{P}_0^\Gamma) \nabla_E g\|_{L^2(\Gamma)} - \|h^{1/2}(1 - \mathbb{P}_0^\Gamma) \nabla_E p\|_{L^2(\Gamma)} \right| = \mathcal{O}(h^3).$$

Beweis. Unter Verwendung der Dreiecksungleichung gilt zunächst

$$\left| \|h^{1/2}(1 - \mathbb{P}_0^\Gamma) \nabla_E g\|_{L^2(\Gamma)} - \|h^{1/2}(1 - \mathbb{P}_0^\Gamma) \nabla_E p\|_{L^2(\Gamma)} \right| \leq \|h^{1/2}(1 - \mathbb{P}_0^\Gamma) \nabla_E(g - p)\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Wegen der Stetigkeit von $(1 - \mathbb{P}_0^\Gamma)$ gilt unter Verwendung des vorherigen Lemmas

$$\begin{aligned} \|h^{1/2}(1 - \mathbb{P}_0^\Gamma) \nabla_E(g - p)\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\leq \|h^{1/2} \nabla_E(g - p)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &= \sum_{E \in \mathcal{E}_\Gamma} h_E \|\nabla_E(g - p_E)\|_{L^2(E)}^2 \\ &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_\Gamma} \frac{h_E^6}{4} \|\nabla_E^3 g\|_{L^\infty(E)}^2 \\ &\leq \frac{h^6}{4} \|\nabla_E^3 g\|_{L^\infty(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Wurzelziehen auf beiden Seiten liefert die Behauptung. \square

Damit ist die Approximation $p \approx g$ gerechtfertigt und wir können uns in weiterer Folge auf die Berechnung von $\|h^{1/2}(1 - \mathbb{P}_0^\Gamma) \nabla_E p\|_{L^2(E)}^2$ beschränken. Das Ergebnis liefert das folgende Lemma.

Lemma 7.5. Mit oben beschriebener Wahl von p_E als quadratisches Interpolationspolynom von g in $\{z, \frac{z+z'}{2}, z'\}$ auf der Kante $E = \text{conv}\{z, z'\}$ gilt

$$h_E \|(1 - \mathbb{P}_0^\Gamma) \nabla_E p_E\|_{L^2(E)}^2 = \frac{4}{3} \left(g(z) - 2g\left(\frac{z+z'}{2}\right) + g(z') \right)^2.$$

Beweis. Zunächst differenzieren wir (7.2) nach t und erhalten

$$(p_E \circ \phi)'(t) := g(z) \frac{2t-1}{2} - g\left(\frac{z+z'}{2}\right) \cdot 2t + g(z') \frac{2t+1}{2}.$$

Da die L^2 -Orthogonalprojektion auf eine konstante Funktion genau das Integralmittel ergibt, gilt bei einer affinen Funktion $(p_E \circ \phi)'$ der Zusammenhang

$$\mathbb{P}_0^\Gamma(p_E \circ \phi)' \equiv (p_E \circ \phi)'(0) = \frac{g(z') - g(z)}{2}.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} h_E \|(1 - \mathbb{P}_0^\Gamma) \nabla_E p_E\|_{L^2(E)}^2 &= h_E \int_E ((1 - \mathbb{P}_0^\Gamma) \nabla_E p_E)^2 d\mu \\ &= h_E \int_{-1}^1 ((1 - \mathbb{P}_0^\Gamma)(\nabla_E p_E \circ \phi)(t))^2 \frac{h_E}{2} dt \\ &= \frac{h_E^2}{2} \int_{-1}^1 \left((1 - \mathbb{P}_0^\Gamma)(p_E \circ \phi)'(t) \frac{2}{h_E} \right)^2 dt \\ &= 2 \int_{-1}^1 ((1 - \mathbb{P}_0^\Gamma)(p_E \circ \phi)'(t))^2 dt \end{aligned}$$

Einsetzen der Terme für $(p_E \circ \phi)'(t)$ und $\mathbb{P}_0^\Gamma(p_E \circ \phi)'$ und anschließende elementare Integration liefern dann genau das gewünschte Ergebnis. \square

Zu guter Letzt sei noch erwähnt, dass wir im Unterschied zum Originalcode aus [FPW] die einzelnen elementweisen Fehlerterme des Fehlerschätzers aus (6.3) getrennt voneinander zurückgeben, um in weiterer Folge (insbesondere in Kapitel 8) auf jeden einzelnen Anteil zugreifen zu können.

7.3 Schwache Formulierung in gemischter Formulierung

Die Codestücke heißen in diesem Fall *solveLaplace2.m* und *computeEtaR2.m* und sind in Anhang B.3 angeführt.

7.3.1 solveLaplace2.m

Im Unterschied zu *solveLaplace.m* und *solveLaplace1.m* aus den vorherigen beiden Kapiteln haben wir es bei der gemischten Formulierung mit einer veränderten Bilinearform zu tun und müssen daher das Gleichungssystem zum Lösen der diskreten Formulierung neu aufstellen. Schreiben wir dazu die Bestimmungsgleichung (4.6) in der Form

$$\begin{aligned} \langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle p_h, \gamma v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} &= \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} && \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \\ \langle q_h, \gamma u_h \rangle_{L^2(\Gamma)} &= \langle q_h, g \rangle_{L^2(\Gamma)} && \text{für alle } q_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma) \end{aligned}$$

und bezeichnen (wie schon in Lemma 2.35) mit ζ_z für alle $z \in \mathcal{K}$ die nodalen Basisfunktionen von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$, dann bildet die Menge $\{\zeta_z|_\Gamma \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma) \mid z \in \mathcal{K}_\Gamma\}$ klarerweise auch eine Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$. Durch die Basisdarstellungen $u_h = \sum_{z \in \mathcal{K}} \lambda_z \zeta_z$ und $p_h = \sum_{y \in \mathcal{K}_\Gamma} \mu_y \zeta_y|_\Gamma$

mit Koeffizienten λ_z, μ_y lässt sich das obige Gleichungssystem äquivalent als lineares Gleichungssystem in Matrizenform anschreiben als

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

wobei die Knoten o.B.d.A durch z_i mit $i = 1, \dots, |\mathcal{K}|$ bzw. y_k mit $k = 1, \dots, |\mathcal{K}_\Gamma|$ durchnummeriert sind und jeweils für alle $i, j = 1, \dots, |\mathcal{K}|$ und $k = 1, \dots, |\mathcal{K}_\Gamma|$ gilt, dass

$$\begin{aligned} A_{ij} &:= \langle \nabla \zeta_{z_i}, \nabla \zeta_{z_j} \rangle_{L^2(\Omega)}, \\ B_{kj} &:= \langle \zeta_{y_k}, \zeta_{z_j} \rangle_{L^2(\Gamma)}, \\ \lambda_j &:= \lambda_{z_j}, \\ \mu_k &:= \mu_{y_k}, \\ a_i &:= \langle f, \zeta_{z_i} \rangle_{L^2(\Omega)}, \\ b_i &:= \langle \zeta_{y_k}, g \rangle_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Die Matrix A ist identisch mit der Steifigkeitsmatrix aus *solveLaplace.m*, daher sind die Zeilen 47–59 in *solveLaplace.m* gleich wie die Zeilen 12–24 in *solveLaplace2.m*. Die Berechnung für den Rechte-Seite-Vektor ist ebenfalls gleich (siehe Zeilen 64–66 in *solveLaplace.m*, bzw. 41–43 in *solveLaplace2.m*), bis auf den Unterschied, dass die fixen Dirichlet-Daten am Rand in zweiter Variante nicht zu berücksichtigen sind. Um die Matrix B aufzubauen, verwenden wir das folgende Lemma.

Lemma 7.6. Sei $E = \text{conv}\{z, z'\}$ eine Kante zwischen den Knoten z und z' . Dann gilt

$$\langle \zeta_z, \zeta_z \rangle_{L^2(E)} = \langle \zeta_{z'}, \zeta_{z'} \rangle_{L^2(E)} = \frac{h_E}{3} \quad \text{sowie} \quad \langle \zeta_z, \zeta_{z'} \rangle_{L^2(E)} = \frac{h_E}{6}.$$

Beweis. Wir betrachten die Einbettung

$$\begin{aligned} \phi : [0, 1] &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto (1-t)z + tz' \end{aligned}$$

mit dem Referenzintervall $[0, 1]$. Auf diesem können wir die nodalen Basisfunktionen besonders leicht explizit angeben durch $(\zeta_z \circ \phi)(t) = 1-t$ und $(\zeta_{z'} \circ \phi)(t) = t$. Damit gilt mit Integraltransformation:

$$\begin{aligned} \langle \zeta_z, \zeta_z \rangle_{L^2(E)} &= \int_E \zeta_z^2 d\mu = \int_0^1 (\zeta_z \circ \phi)^2 h_E dt = \int_0^1 (1-t)^2 h_E dt = \frac{h_E}{3} \quad \checkmark \\ \langle \zeta_{z'}, \zeta_{z'} \rangle_{L^2(E)} &= \int_E \zeta_{z'}^2 d\mu = \int_0^1 (\zeta_{z'} \circ \phi)^2 h_E dt = \int_0^1 t^2 h_E dt = \frac{h_E}{3} \quad \checkmark \\ \langle \zeta_z, \zeta_{z'} \rangle_{L^2(E)} &= \int_E \zeta_z \zeta_{z'} d\mu = \int_0^1 (\zeta_z \circ \phi)(\zeta_{z'} \circ \phi) h_E dt = \int_0^1 (1-t)t h_E dt = \frac{h_E}{6} \quad \checkmark \end{aligned}$$

□

Mit dem Resultat dieses Lemmas können wir die Matrix B analog zu A in den Zeilen 27–34 anlegen. Für den Vektor b verwenden wir (analog zum Vektor a , wie auch in [FPW, Chapter 3.2] ausgeführt) für jede Randkante $E = \text{conv}\{y, y'\} \in \mathcal{E}_\Gamma$ mit $y, y' \in \mathcal{K}_\Gamma$ die Approximation

$$\langle \zeta_y, g \rangle_{L^2(E)} = \int_E \zeta_y g d\mu \approx g \left(\frac{y+y'}{2} \right) \int_E \zeta_y d\mu = g \left(\frac{y+y'}{2} \right) \frac{h_E}{2}$$

(siehe Zeilen 47–48).

7.3.2 computeEtaR2.m

Vergleicht man die beiden Fehlerschätzer bei explizit geforderter Dirichlet-Randbedingung in (6.4) und gemischter Formulierung in (6.4) miteinander, dann ist ersichtlich, dass in diesem Fall lediglich der zusätzliche Term $\|h^{1/2}(\partial_n u_h + p_h)\|_{L^2(\Gamma)}^2$ implementiert werden muss. Dabei verwenden wir das folgende Lemma:

Lemma 7.7. Sei $E = \text{conv}\{y, y'\} \in \mathcal{E}_\Gamma$ mit $y, y' \in \mathcal{K}_\Gamma$ eine beliebige Randkante und bezeichne $\mu_y = p_h(y)$ bzw. $\mu_{y'} = p_h(y')$ die Funktionswerte von p_h an den beiden Endpunkten der Kante. Beachtet man außerdem, dass $\partial_n u_h|_E$ konstant ist und damit unter Transformation unverändert bleibt, gilt

$$h_E \|\partial_n u_h + p_h\|_{L^2(E)}^2 = h_E^2 \frac{(\mu_{y'} + \partial_n u_h|_E)^3 - (\mu_y + \partial_n u_h|_E)^3}{3(\mu_{y'} - \mu_y)}.$$

Beweis. Zunächst betrachten wir die Einbettung

$$\begin{aligned} \phi : [0, 1] &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto (1-t)y + ty'. \end{aligned}$$

Da $p_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ eine stückweise affine Funktion gilt nach nach Transformation auf das Referenzintervall $[0, 1]$, dass $(p_h \circ \phi)(t) = (1-t)\mu_y + t\mu_{y'}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} h_E \|\partial_n u_h + p_h\|_{L^2(E)}^2 &= h_E \int_E (\partial_n u_h + p_h)^2 d\mu = h_E \int_0^1 (\partial_n u_h + (p_h \circ \phi)(t))^2 h_E d\mu \\ &= h_E^2 \int_0^1 (\partial_n u_h + (1-t)\mu_y + t\mu_{y'})^2 d\mu \end{aligned}$$

und anschließende Integration liefert genau die gewünschte Gleichheit. \square

In den Zeilen 55–59 findet sich die Implementierung dieses Terms. Dabei ist zu beachten, dass der Originalcode aus [FPW] die Normalenableitungen $\partial_n u_h$ auf Γ bereits berechnet. Man beachte dazu auch die Zeilen 25–28 im Code, wo die Normalenableitung bereits vorsorglich auf den inneren Kanten \mathcal{E}_Ω und Randkanten \mathcal{E}_Γ in getrennten Arrays abgespeichert werden.

7.4 Schwache Formulierung nach Nietsches Methode

Wir betrachten in diesem Kapitel die Codestücke *solveLaplace3.m* und *computeEtaR3.m* aus Anhang B.4.

7.4.1 solveLaplace3.m

Wie schon bei der gemischten Formulierung in Abschnitt 7.3.1 müssen wir das lineare Gleichungssystem aus Definition 4.22 in Matrizenform bezüglich der nodalen Basis umschreiben. Mit der Basisdarstellung $u_h = \sum_{z \in \mathcal{K}} \lambda_z \zeta_z$ und durchnummerierten Knoten ist die zu fordernde Bedingung

$$\begin{aligned} &\langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \partial_n u_h, \gamma v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} - \langle \gamma u_h, \partial_n v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} + \chi \langle h^{-1/2} \gamma u_h, h^{-1/2} \gamma v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ &= \langle f, v_h \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle g, \partial_n v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} + \chi \langle h^{-1/2} g, h^{-1/2} \gamma v_h \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \end{aligned}$$

äquivalent zu einem Gleichungssystem $A\lambda = b$, wobei für alle $i, j = 1, \dots, |\mathcal{K}|$ gilt

$$\begin{aligned} A_{ij} &:= \langle \nabla \zeta_{z_i}, \nabla \zeta_{z_j} \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \partial_n \zeta_{z_i}, \zeta_{z_j} \rangle_{L^2(\Gamma)} - \langle \zeta_{z_i}, \partial_n \zeta_{z_j} \rangle_{L^2(\Gamma)} + \chi \langle h^{-1/2} \zeta_{z_i}, h^{-1/2} \zeta_{z_j} \rangle_{L^2(\Gamma)}, \\ \lambda_j &:= \lambda_{z_j}, \\ b_i &:= \langle f, \zeta_{z_i} \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle g, \partial_n \zeta_{z_i} \rangle_{L^2(\Gamma)} + \chi \langle h^{-1/2} g, h^{-1/2} \zeta_{z_i} \rangle_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Die einzelnen Ausdrücke werden wie folgt berechnet:

- Der erste Term $\langle \nabla \zeta_{z_i}, \nabla \zeta_{z_j} \rangle_{L^2(\Omega)}$ ist identisch mit dem bereits im Originalcode berechneten Anteil, daher kann der Code direkt übernommen werden (siehe Zeilen 9–21).
- Für $\langle \partial_n \zeta_{z_i}, \zeta_{z_j} \rangle_{L^2(\Gamma)}$ bemerken wir, dass die Normalenableitung $\partial_n \zeta_{z_i}$ für jede Funktion der nodalen Basis auf jeder Randkante $E \in \mathcal{E}_\Gamma$ stets eine Konstante ist und damit im Fall $z_i \in E$ gilt

$$\langle \partial_n \zeta_{z_i}, \zeta_{z_j} \rangle_{L^2(\Gamma)} = \int_E \partial_n \zeta_{z_i} \zeta_{z_j} \, d\mu = \partial_n \zeta_{z_i}|_E \int_E \zeta_{z_j} \, d\mu = \partial_n \zeta_{z_i}|_E \frac{h_E}{2}. \quad (7.3)$$

Die Berechnung beschränkt sich damit lediglich auf die korrekte Berechnung der Normalenableitung entlang der Randkante. Dabei ist jedoch zu beachten, dass diese auch für Funktionen ζ_{z_i} nichtverschwindend ist, für deren Knoten $z_i \in \mathcal{K}_\Omega$ gilt (vgl. Abbildung 7.1). Genauer müssen wir zu jedem Randdreieck, welches eine Kante aus \mathcal{E}_Γ besitzt, den dazugehörigen dritten Eckpunkt aus \mathcal{K}_Ω ausfindig machen. Dies geschieht in den Zeilen 24–32. Die Normalenableitung gemäß (7.3) berechnen wir dann in den Zeilen 35–53. Das Vorgehen ist analog zu den Zeilen 38–52 in *computeEtaR.m* aus Anhang B.1 im Originalcode, wo ebenfalls Normalenableitungen auf den (auch inneren) Kanten berechnet werden.

- Der Term $\langle \zeta_{z_i}, \partial_n \zeta_{z_j} \rangle_{L^2(\Gamma)}$ liefert genau den transponierten Matrixanteil vom Term im vorherigen Punkt.
- Den letzte Anteil von A liefert $\chi \langle h^{-1/2} \zeta_{z_i}, h^{-1/2} \zeta_{z_j} \rangle_{L^2(\Gamma)}$. Wir können für diesen Term wieder Lemma 7.6 anwenden und erhalten damit analoge Ergebnisse wie bei *solveLaplace2.m* in den Zeilen 30–34, nur ohne der Skalierung mit h_E – dafür jedoch mit Faktor χ , der als zusätzlicher Parameter an die MATLAB-Funktion übergeben werden kann. Realisiert ist dies in den Zeilen 56–59.
- Die drei Terme für den Rechte-Seite-Vektor b berechnen sich analog wie in vorherigen Abschnitten, indem die Funktionen f und g wieder durch eine elementweise bzw. kantenweise Konstante approximiert wird. Man betrachte dazu die Zeilen 68–81 im Code.

7.4.2 computeEtaR3.m

Vergleichen wir wieder die beiden Fehlerschätzer bei explizit geforderter Dirichlet-Randbedingung aus (6.4) und Nietches Methode aus (6.14), dann erkennen wir, dass wie im vorangehenden Kapitel 7.3 nur ein Term im Fehlerschätzer ergänzt werden muss. Diesmal handelt es sich um $\|h^{-1/2}(g_h - \gamma u_h)\|_{L^2(\Gamma)}^2$. Wir verwenden für die Implementierung zwecks einfacher Handhabung für g_h Knoten-Interpolation gemäß Kapitel 2.3.1, d.h. $g_h := \mathbb{K}_h^\Gamma g$.

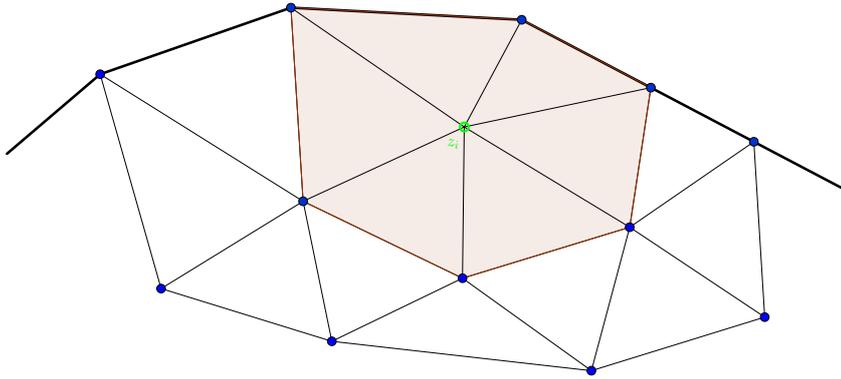


Abbildung 7.1: Die fetten Kanten stellen einen Abschnitt des Randes Γ dar. Farblich markiert sind der Knoten $z_i \in \mathcal{K}_\Omega$ und der Träger der dazugehörigen nodalen Basisfunktion ζ_{z_i} . Die Funktion selbst ist auf den beiden Randkanten zwar konstant gleich 0, nicht jedoch die Normalenableitung $\partial_n \zeta_{z_i}$, da der Gradient von ζ_{z_i} auf jedem Dreieck im Träger stets einen konstanten Wert $\neq 0$ annimmt!

Lemma 7.8. Sei $E = \text{conv}\{z, z'\} \in \mathcal{E}_\Gamma$ mit $z, z' \in \mathcal{K}_\Gamma$ eine beliebige Randkante. Dann gilt

$$h_E^{-1} \|g_h - \gamma u_h\|_{L^2(E)}^2 = \frac{(g_h(z') - u_h(z'))^3 - (g_h(z) - u_h(z))^3}{3 \left((g_h(z') - g_h(z)) - (u_h(z') - u_h(z)) \right)}.$$

Beweis. Wir nehmen die Einbettung

$$\phi : [0, 1] \longrightarrow E, \quad \phi(t) = (1-t)z + tz'.$$

Da sowohl g_h als auch u_h affine Funktionen auf der Kante E sind, gilt auf dem Referenzintervall $[0, 1]$, dass $(g_h \circ \phi)(t) = (1-t)g_h(z) + tg_h(z')$ und $(\gamma u_h \circ \phi)(t) = (1-t)u_h(z) + tu_h(z')$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} h_E^{-1} \|g_h - \gamma u_h\|_{L^2(E)}^2 &= h_E^{-1} \int_E (g_h - \gamma u_h)^2 d\mu = h_E^{-1} \int_0^1 ((g_h \circ \phi)(t) - (\gamma u_h \circ \phi)(t))^2 h_E dt \\ &= \int_0^1 \left(((1-t)g_h(z) + tg_h(z')) - ((1-t)u_h(z) + tu_h(z')) \right)^2 dt \end{aligned}$$

und anschließende Integration nach t liefert genau das behauptete Ergebnis. \square

Im Programmiercode wird genau das Resultat des letzten Lemmas in den Zeilen 43–47 implementiert.

Kapitel 8

Numerische Experimente

In diesem Abschnitt zeigen wir nun ein paar Simulationen, welche auf den im vorherigen Kapitel vorgestellten Implementierungen beruhen. Unser Gebiet soll dabei die Gestalt $\Omega := (-1, 1)^2 \setminus [0, 1) \times (-1, 0]$ haben und mit der Ausgangstriangulierung wie in Abbildung 8.1. Zusätzlich wählen wir in diesem gesamten Kapitel für den Parameter $\theta := 0,25$, welcher die Dörfler-Markierung zur adaptiven Netzverfeinerung steuert. Die Details sind in [FPW, Chapter 6.1] angeführt. Bei Implementierung von Nietsches Methode aus Kapitel 7.4 wählen wir jeweils $\chi := 17$. Der Grund für diese Wahl ist die folgende Proposition, welche auf den Eigenschaften der Newest-Vertex-Bisection zur Elementverfeinerung aufbaut.

Proposition 8.1. Sei \mathcal{T}_0 eine Ausgangstriangulierung, welche nur aus gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken besteht, wobei für die Verfeinerung der einzelnen Elemente jeweils die Hypotenuse markiert ist. Dann gilt:

- (i) Für jede Netzverfeinerung \mathcal{T}_n vererben sich ebenfalls diese genannten Eigenschaften.
- (ii) Jede Netzverfeinerung \mathcal{T}_n ist $\bar{\gamma}$ -formregulär gemäß Definition 2.27 mit $\bar{\gamma} = 2$.
- (iii) Es gelte zusätzlich, dass jedes Dreieck der in \mathcal{T}_0 nur höchstens eine Randkante besitzt. Für $\chi > 16$ ist dann die Bedingung aus Satz 4.24 für jede Netzverfeinerung \mathcal{T}_n erfüllt, d.h. die diskrete Form der schwachen Formulierung besitzt immer eine eindeutige Lösung.

Beweis. (i): Berücksichtigt man die Vorgangsweise zur Verfeinerung bei Newest-Vertex-Bisection aus [KPP, Section 3], dann folgt dieses Resultat unmittelbar aus elementaren geometrischen Überlegungen, denn wird ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck entlang der Schwerlinie auf die Hypotenuse geteilt, erhält man wieder zwei (kongruente) gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke (siehe Abbildung 8.2 und insbesondere auch [KPP, Figure 6]).

(ii): Für die Formregularitätskonstante $\sigma(\mathcal{T}_n)$ gilt allgemein

$$\sigma(\mathcal{T}_n) = \max_{T \in \mathcal{T}_n} \frac{h_T}{\rho_T},$$

wobei h_T die längste Seite des Dreiecks bezeichnet und ρ_T die dazugehörige Höhe. Da in gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecken stets $h_T = 2\rho_T$ gilt, folgt unmittelbar $\sigma(\mathcal{T}_n) = 2$.

(iii): Mit (2.12) gilt wegen (ii) $h_E^2 \leq 4|T|$. Da wegen $u_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_n)$ stets $\nabla u_h|_E$ konstant

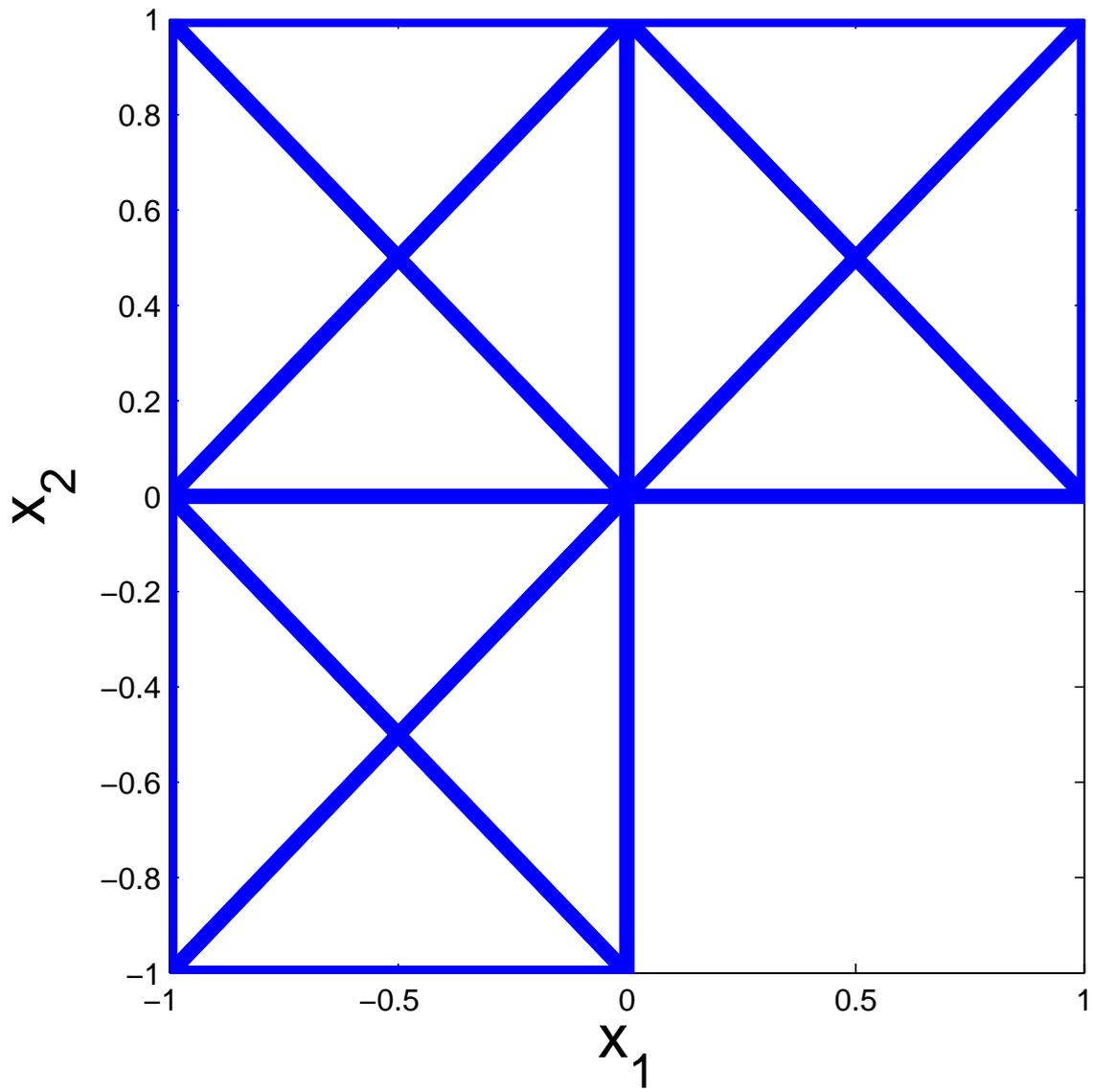


Abbildung 8.1: Die Abbildung stellt das Gebiet Ω samt Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 dar.

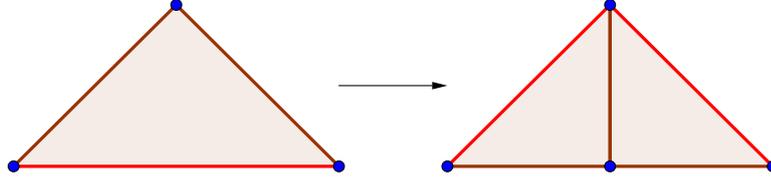


Abbildung 8.2: Die Grafik soll die Verfeinerung eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks mittels Newest-Vertex-Bisection illustrieren. Die rot gefärbte Kante ist jeweils diejenige Kante des Dreiecks, die sich gegenüber des „newest Vertex“, also des neuesten Knoten des Dreiecks, befindet. Diese wird bei der folgenden Netzverfeinerung gegebenenfalls geteilt. Liegt also in der Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 der „newest Vertex“ beim rechten Winkel, dann ist dies auch bei jeder darauf folgenden Netzverfeinerung der Fall.

ist, gilt für jede Randkante $E \in \mathcal{E}_\Gamma$ mit dazugehörigem (eindeutigen) Dreieck T die Abschätzung

$$h_E^{1/2} \|\partial_n u_h\|_{L^2(E)} \leq h_E^{1/2} \|\nabla u_h\|_{L^2(E)} = h_E \nabla u_h \leq 2|T|^{1/2} \nabla u_h = 2\|\nabla u_h\|_{L^2(T)}.$$

Summieren wir über alle Randkanten und Dreiecke, so ergibt sich damit genau (4.10b) mit Konstante $C_2 = 2$. Damit gilt die Voraussetzung von Satz 4.24 für $\chi > 16$. \square

Wir stellen durch die Wahl $\chi = 17$ also sicher, dass unser diskretes Problem stets lösbar ist, da unsere gewählte Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 aus Abbildung 8.1 alle Voraussetzungen der vorherigen Proposition erfüllt.

In Vorbereitung auf die folgenden Grafiken definieren wir noch ein paar Kurzschreibweisen für die Terme in den Fehlerschätzern aus den Kapiteln 6.2 - 6.4, um die Notation in den Legenden zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} \eta_f^2 &:= \|hf\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \eta_E^2 &:= 2\|h^{1/2}[\partial_n u_h]\|_{L^2(\cup \mathcal{E}_\Omega)}^2 \\ \eta_p^2 &:= \|h^{1/2}(\partial_n u_h + p_h)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ \eta_g^2 &:= \|h^{-1/2}(g_h - \gamma u_h)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \end{aligned}$$

8.1 Erstes Beispiel

Wir wählen hier

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2) &:= 1 \\g(x_1, x_2) &:= x_1^2 + x_2^2\end{aligned}$$

und führen die Simulation daraufhin in den vier verschiedenen Varianten, die in den Kapiteln 7.1-7.4 beschrieben wurden, durch. Die Resultate sind in den jeweiligen Abbildungen grafisch dargestellt.

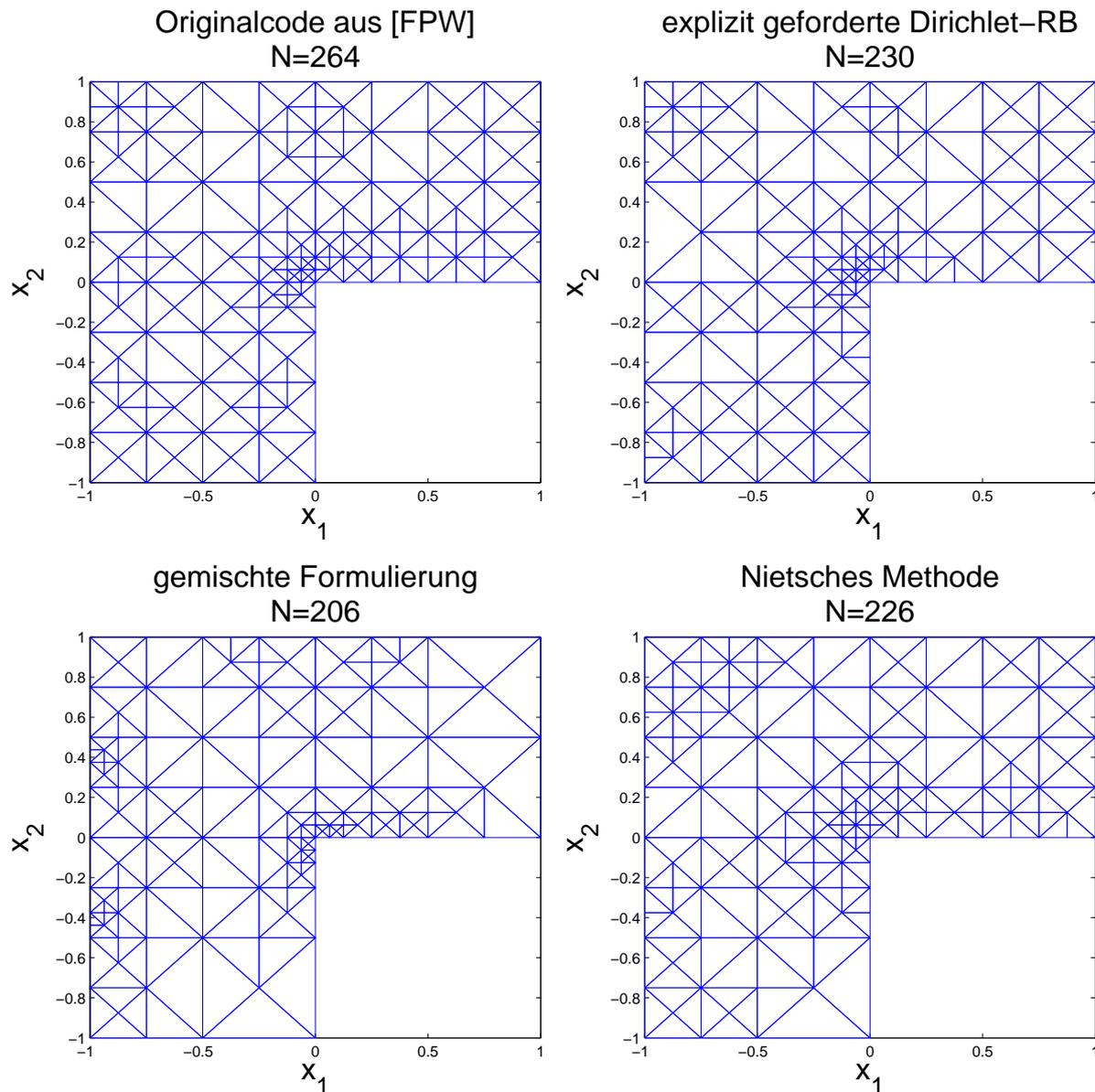


Abbildung 8.3: Triangulierungen jeweils nach dem Netzverfeinerungsschritt, welcher erstmals eine Anzahl an Dreiecken $N > 200$ lieferte.

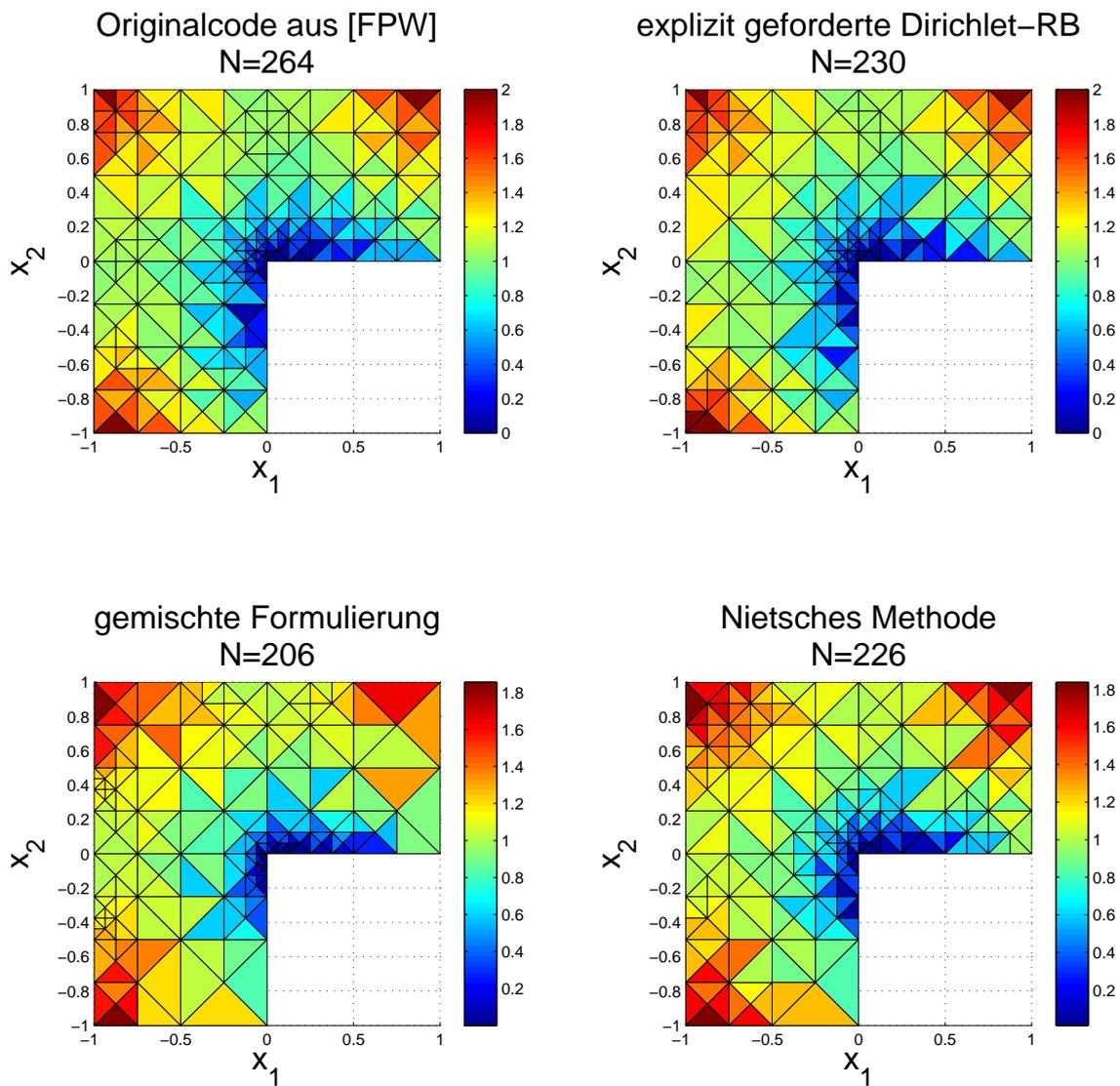


Abbildung 8.4: Numerische Lösung der Gleichung auf der Triangulierung aus der vorherigen Abbildung. Die Farbcodierung entspricht hier jeweils den Funktionswerten von u .

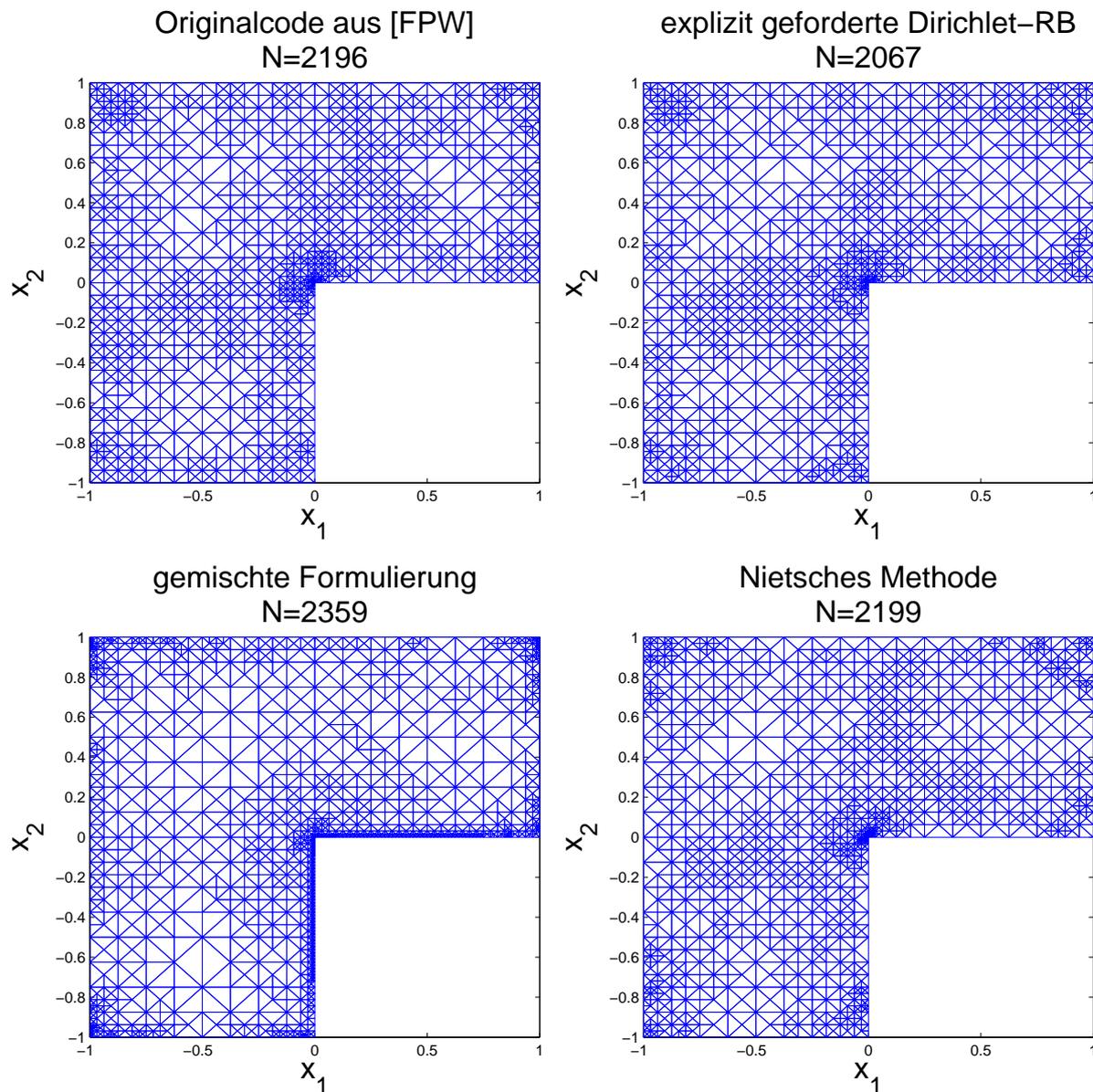


Abbildung 8.5: Triangulierungen jeweils nach dem Netzverfeinerungsschritt, welcher erstmals eine Anzahl an Dreiecken $N > 2000$ lieferte. Hier erkennt man bereits gut, dass bezüglich der Netzverfeinerung unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt werden. Da beispielsweise die gemischte Formulierung durch p_h zusätzlich zu u auch die Normalenableitung $\partial_n u$ approximiert (siehe u.a. Motivation aus Kapitel 3.3), wird am Rand eine stärkere Verfeinerung notwendig, als in den anderen Varianten. Weniger bzw. keine Randterme im Fehlerschätzer (wie z.B. beim Originalcode) verfeinern dafür das Gitter verstärkt im Inneren von Ω .

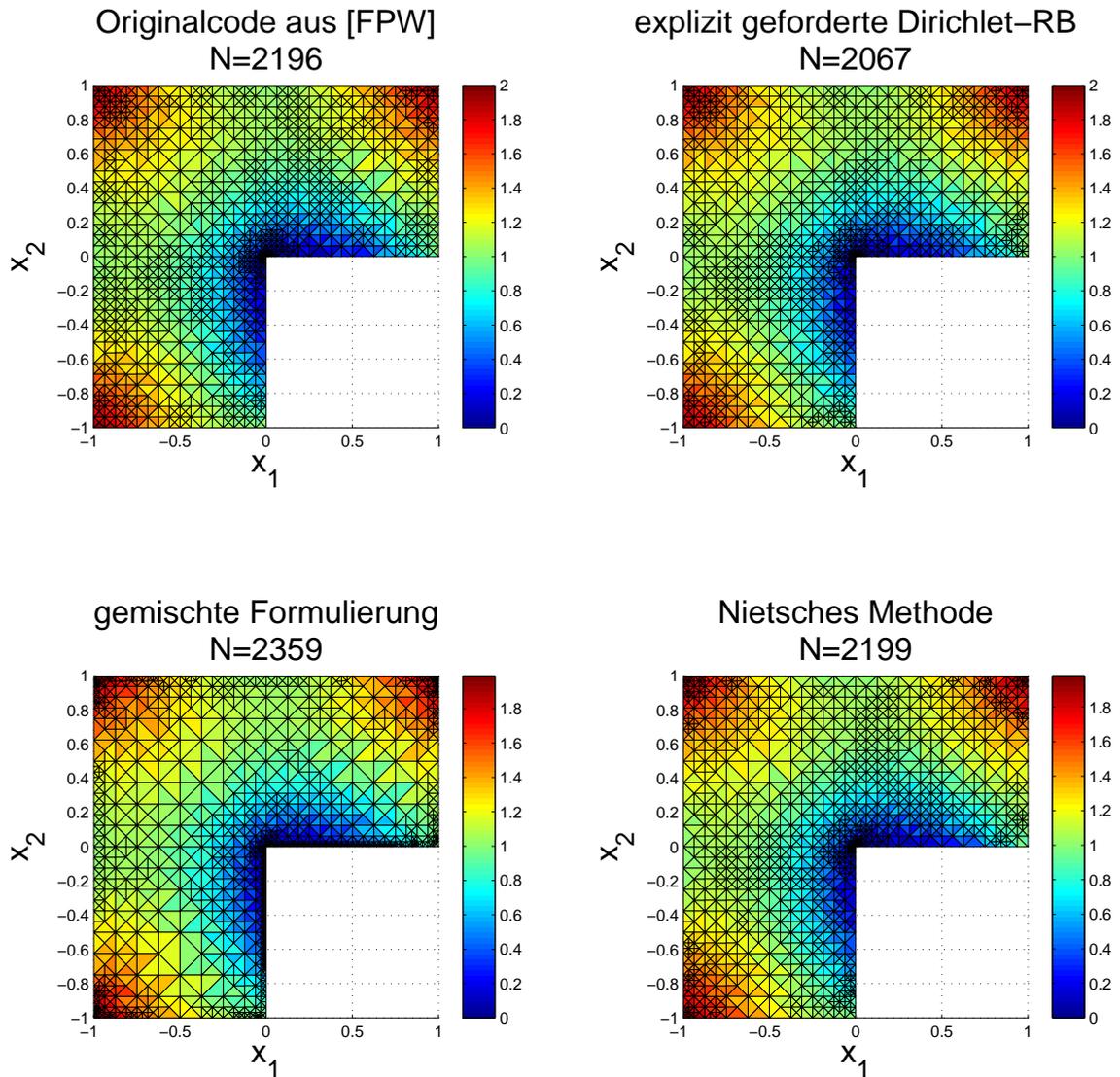


Abbildung 8.6: Numerische Lösung der Gleichung auf der Triangulierung aus der vorherigen Abbildung.

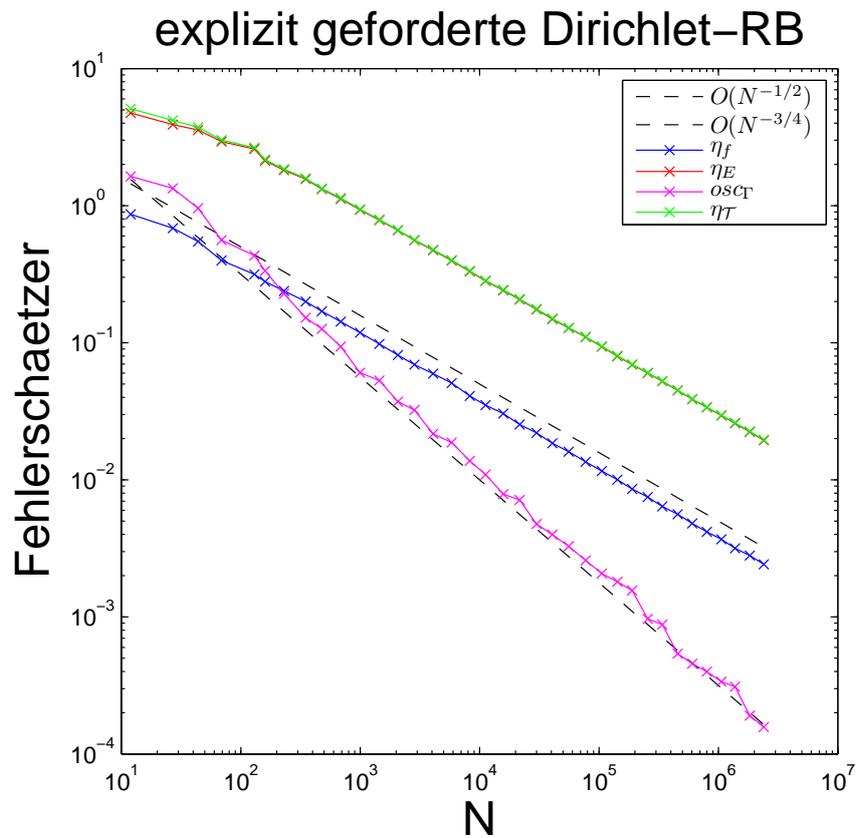
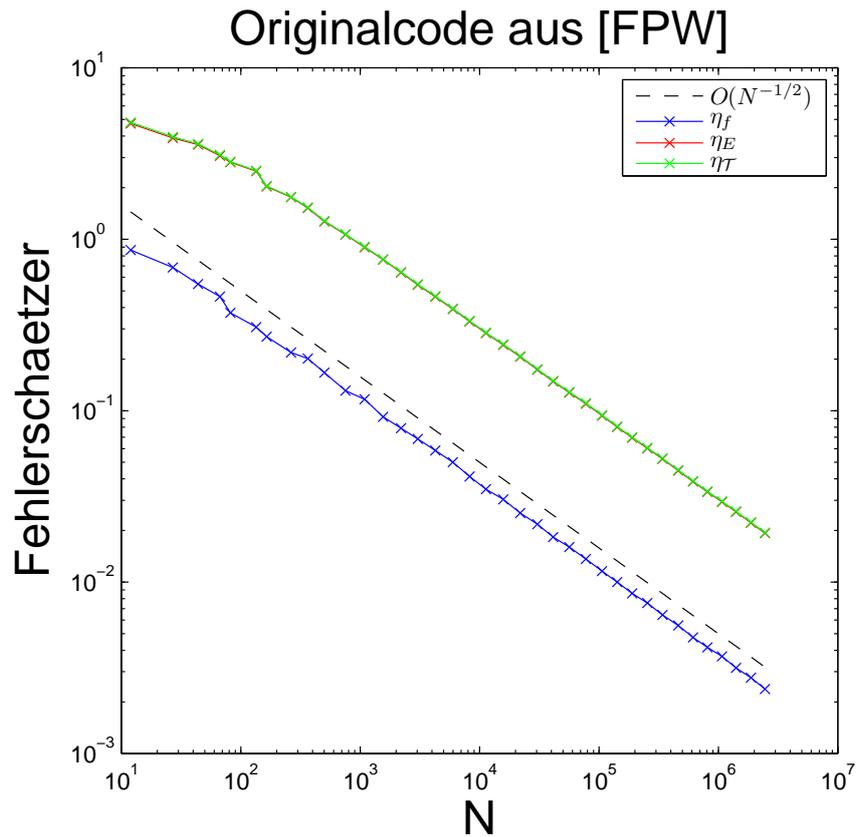


Abbildung 8.7: Die Größe der einzelnen Terme des Fehlerschätzers wurde jeweils über die Anzahl der Dreiecke in der jeweiligen Triangulierung aufgetragen. Es lassen sich gut die Ordnungen der einzelnen Komponenten ablesen, nämlich $\eta_f, \eta_E, \eta_T \in \mathcal{O}(N^{-1/2})$ und $osc_T \in \mathcal{O}(N^{-3/4})$.

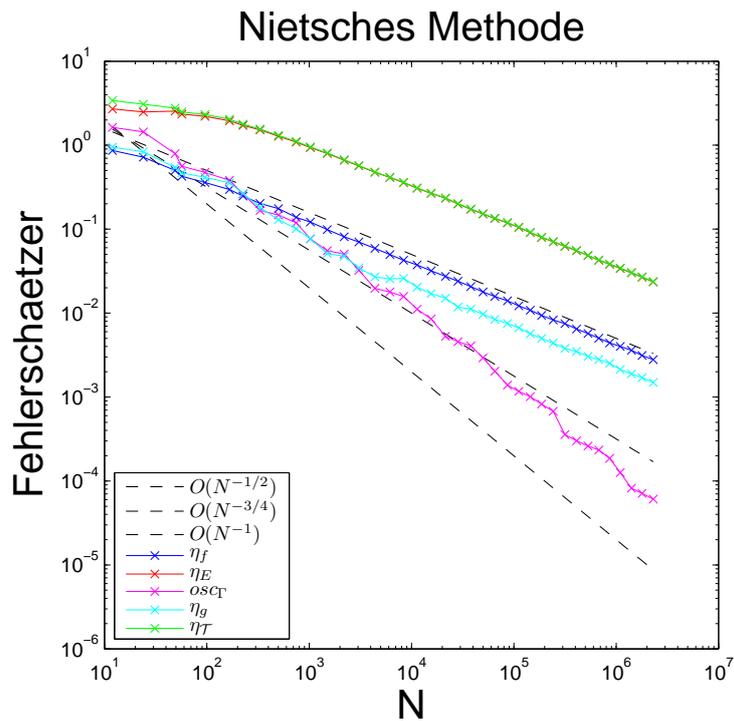
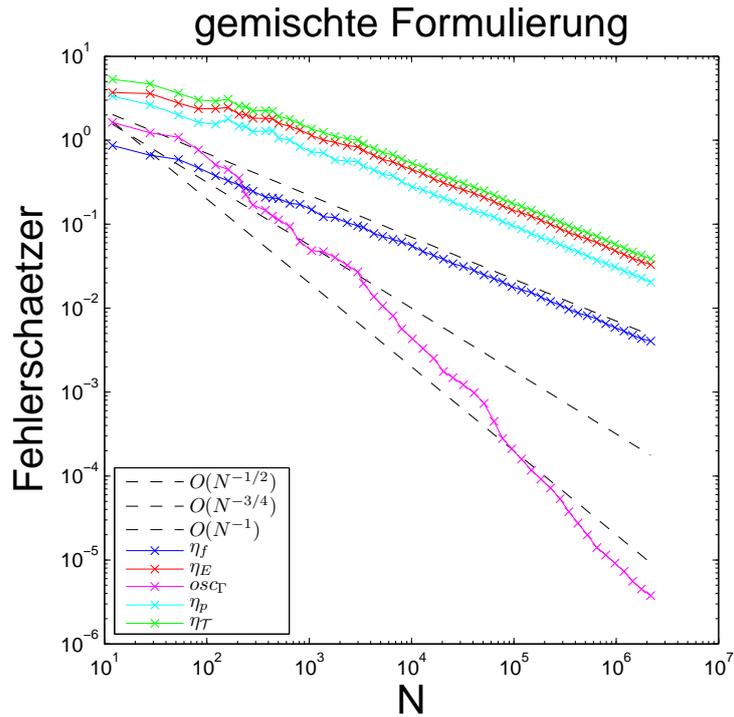


Abbildung 8.8: Der in diesen beiden Methoden jeweils zusätzliche Fehlerterm η_p bzw. η_g ist jeweils in $\mathcal{O}(N^{-1/2})$, was zur Folge hat, dass dieser Term stark zum Gesamtfehler η_T beiträgt. Dies bestätigt die Beobachtungen aus Abbildung 8.5, dass der zusätzliche Term einen signifikanten Einfluss auf die Netzverfeinerungsstrategie hat. Der Term osc_T fällt oben mit noch höherer Ordnung, als in der Variante aus der vorherigen Abbildung. Der Grund dafür dürfte vorasymptotisches Verhalten sein, das durch das Ungleichgewicht in der Verfeinerung von Randelementen und inneren Elementen verursacht wird. In den folgenden Abbildungen ist dann nämlich ersichtlich, dass die Konvergenzrate in Abhängigkeit der Randelemente jeweils ähnlich ist.

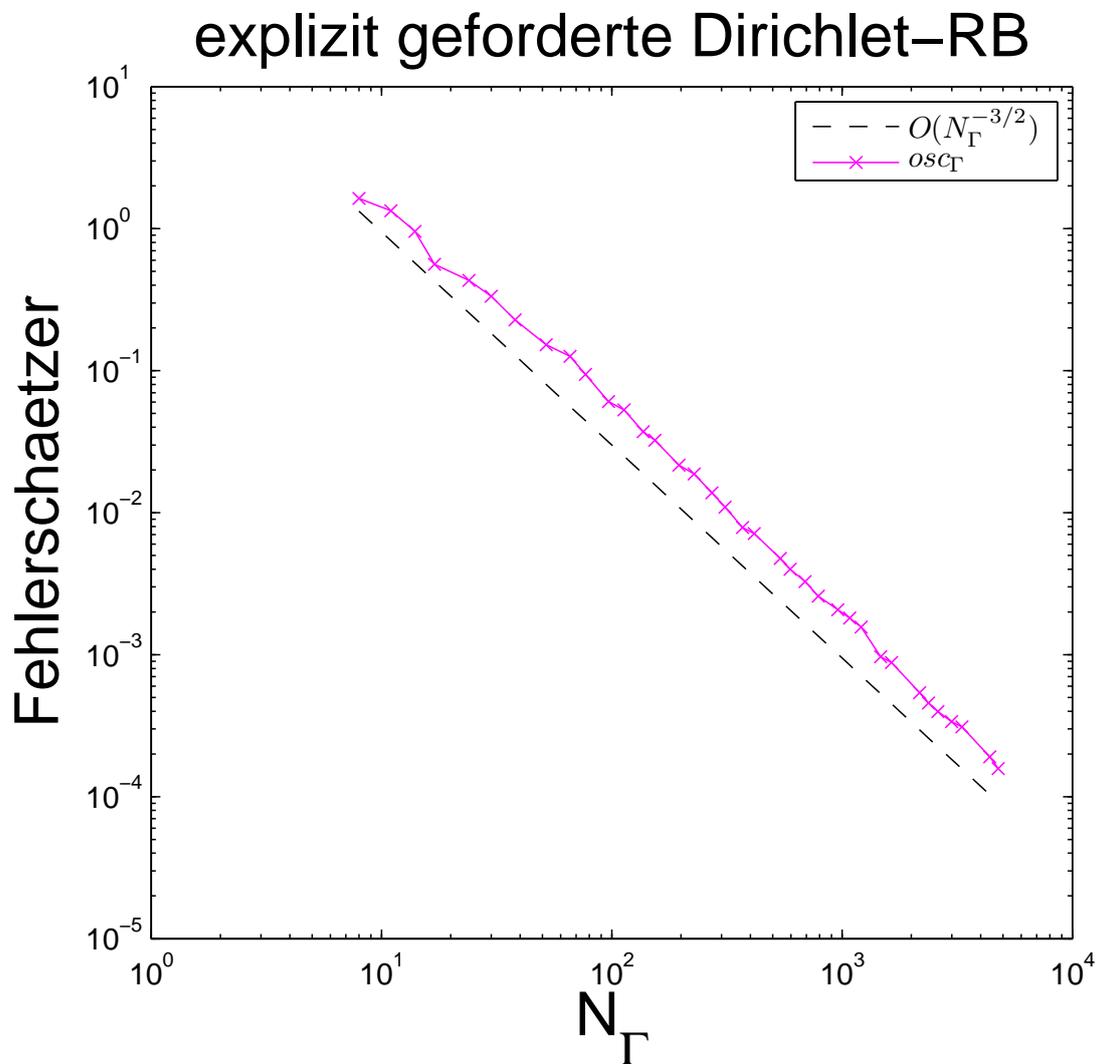


Abbildung 8.9: Der Umstand, dass in den vergangenen beiden Abbildungen die Randterme in Abhängigkeit von der Gesamtzahl der Elemente N geplottet wurden, verschleiert den Umstand, dass bei Verfeinerung der Elemente im Inneren des Gebietes sich die Randterme nur schwächer ändern als bei Verfeinerung der Randelemente. Wir haben in der Beschreibung der letzten Abbildung auch angemerkt, dass stärkere Verfeinerung der Randelemente durch die zusätzlichen Randterme im Fehlerschätzer die Ordnung der Dirichlet-Oszillationen osc_Γ verändert würde. Deshalb plotten wir hier und in der folgenden Abbildung noch einmal alle Randterme des Fehlerschätzers – jedoch in Abhängigkeit der Anzahl der Randkanten N_Γ .

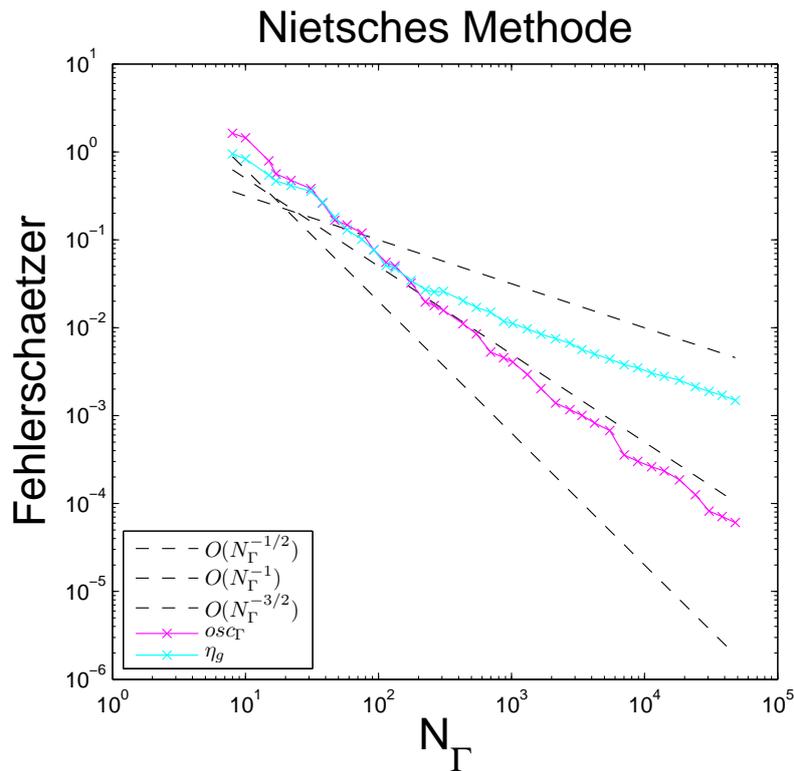
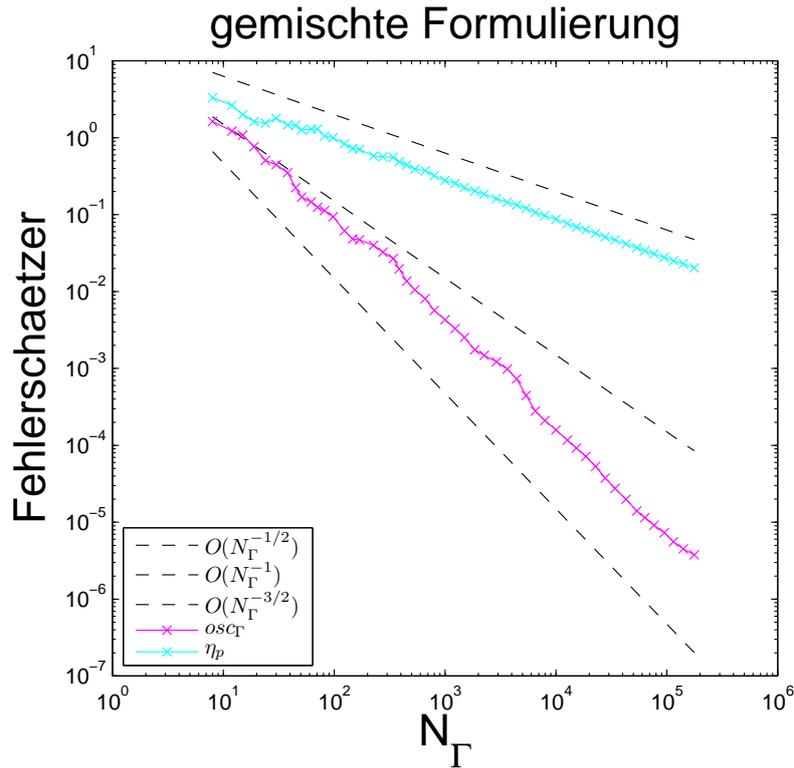


Abbildung 8.10: Im Unterschied zu den Plots mit der Gesamtanzahl der Dreiecke N aus den Abbildungen 8.7 und 8.8 zeigen diese Bilder ungefähr das Verhalten $osc_\Gamma \in \mathcal{O}(N_\Gamma^{-3/2})$. Diese Ordnung stimmt der letzten Grafik überein und bestätigt unsere Vermutung aus der zugehörigen Bildbeschreibung.

8.2 Zweites Beispiel

Hier wählen wir leicht abgeänderte Daten aus [FPP, Chapter 7.1]. Im Unterschied zum Beispiel des vorherigen Kapitels sind sie so gewählt, dass man die Lösung leicht in analytischer Form angeben kann. Mit $(r, \phi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$ bezeichnen wir die Polarkoordinaten des Punktes $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, d.h. es gelte $(x_1, x_2) = r(\cos(\phi), \sin(\phi))$. Wir setzen damit:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &:= -2 \\ g(x_1, x_2) &:= r^{4/7} \cos\left(\frac{4\phi}{7}\right) + x_1^2 \end{aligned}$$

Unmittelbares Nachrechnen liefert $\Delta r^{4/7} \cos\left(\frac{4\phi}{7}\right) = 0$ und damit erfüllt $u(x_1, x_2) = r^{4/7} \cos\left(\frac{4\phi}{7}\right) + x_1^2$ sogar die starke Formulierung des Modellproblems aus Definition 3.1. Sie ist in den Abbildungen 8.11 und 8.12 dargestellt. Die entsprechenden Plots entnehme man dann wieder wieder den darauf folgenden Grafiken.

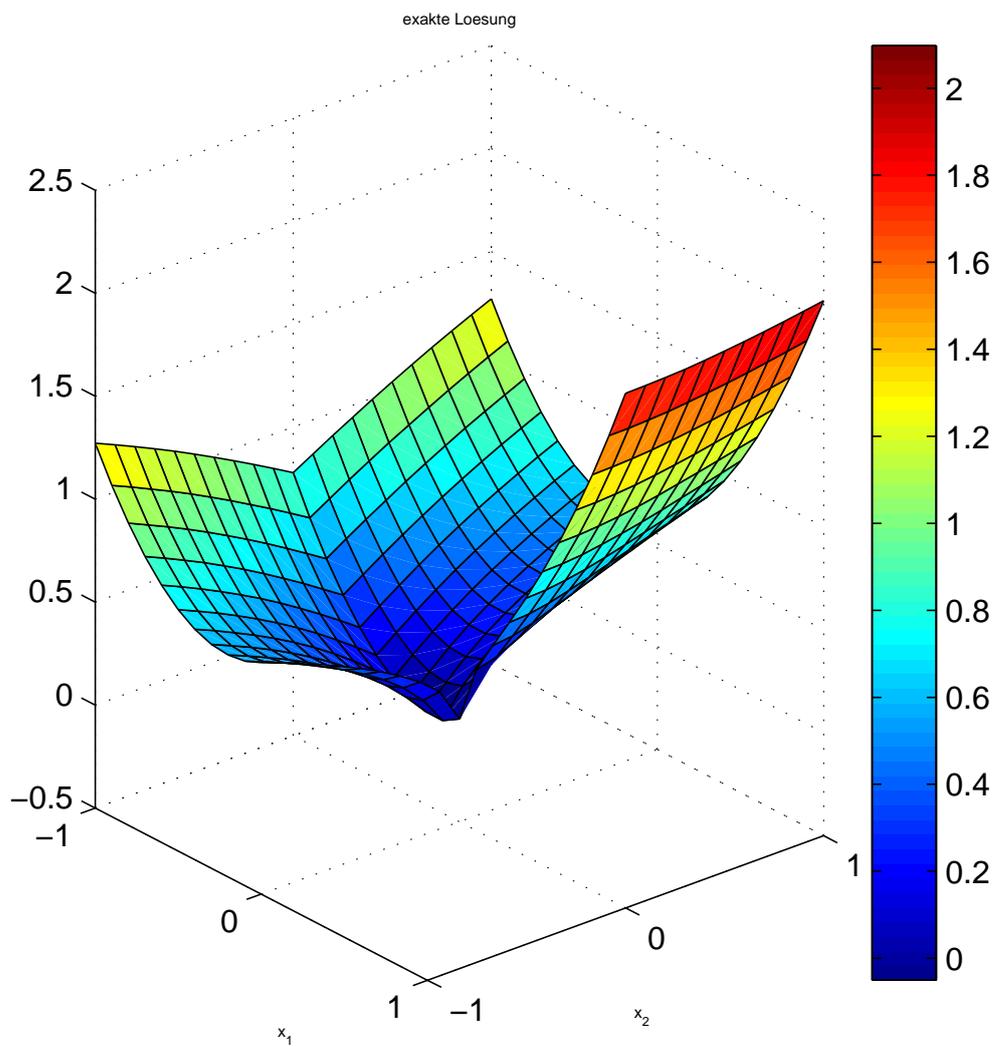


Abbildung 8.11: Die Abbildung stellt die Funktion $u(x_1, x_2) = r^{4/7} \cos\left(\frac{4\phi}{7}\right) + x_1^2$ auf dem Gebiet Ω grafisch dar.

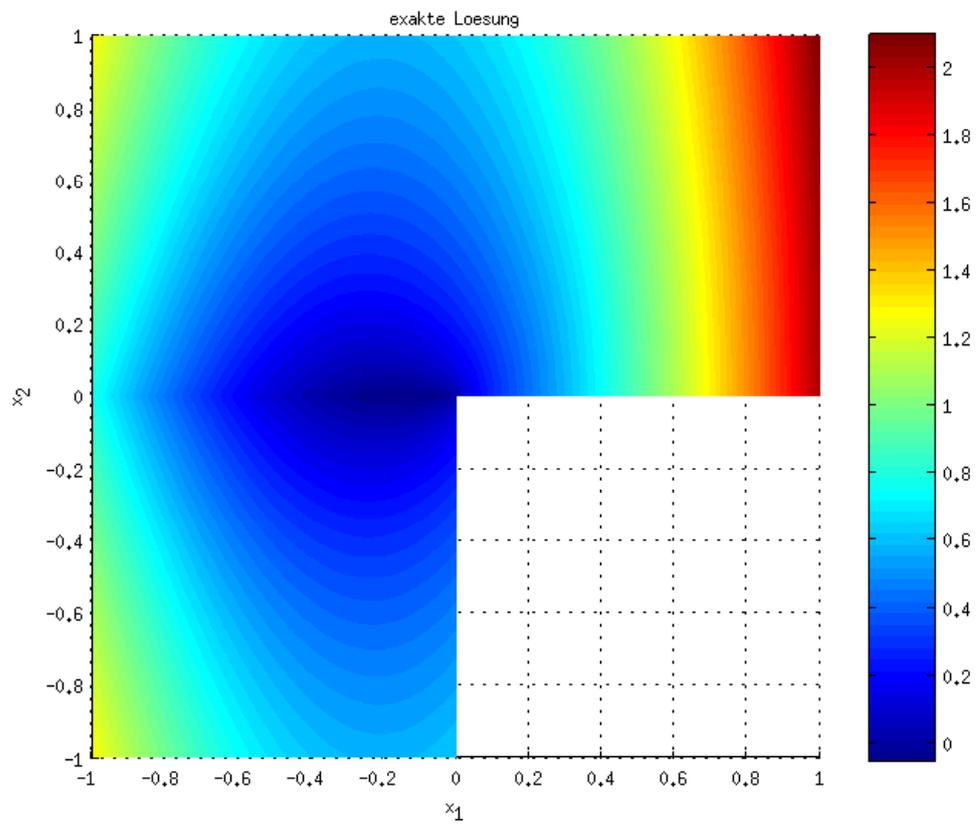


Abbildung 8.12: Die Abbildung stellt die Funktion $u(x_1, x_2) = r^{4/7} \cos\left(\frac{4\phi}{7}\right) + x_1^2$ auf dem Gebiet Ω grafisch dar.

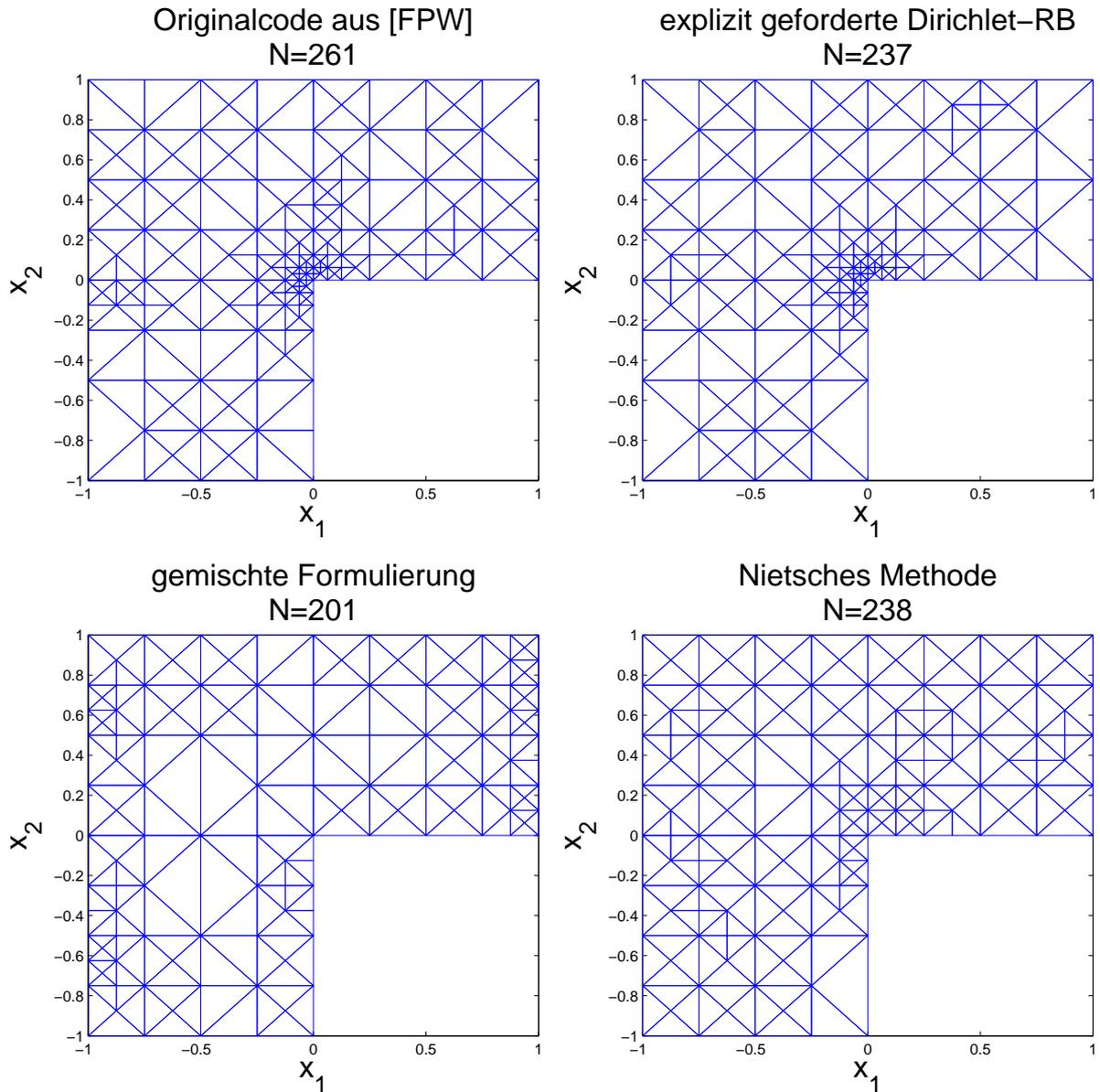


Abbildung 8.13: Triangulierungen jeweils nach dem Netzverfeinerungsschritt, welcher erstmals eine Anzahl an Dreiecken $N > 200$ lieferte. Wir erkennen bereits hier gut, dass die Netzverfeinerungen an unterschiedlichen Stellen verstärkt werden. Während in den oberen beiden Bildern vor allem die einspringende Ecke verfeinert wird, ist in den unteren beiden Bildern die Netzverfeinerung mehr über den gesamten Rand des Gebiets verteilt.

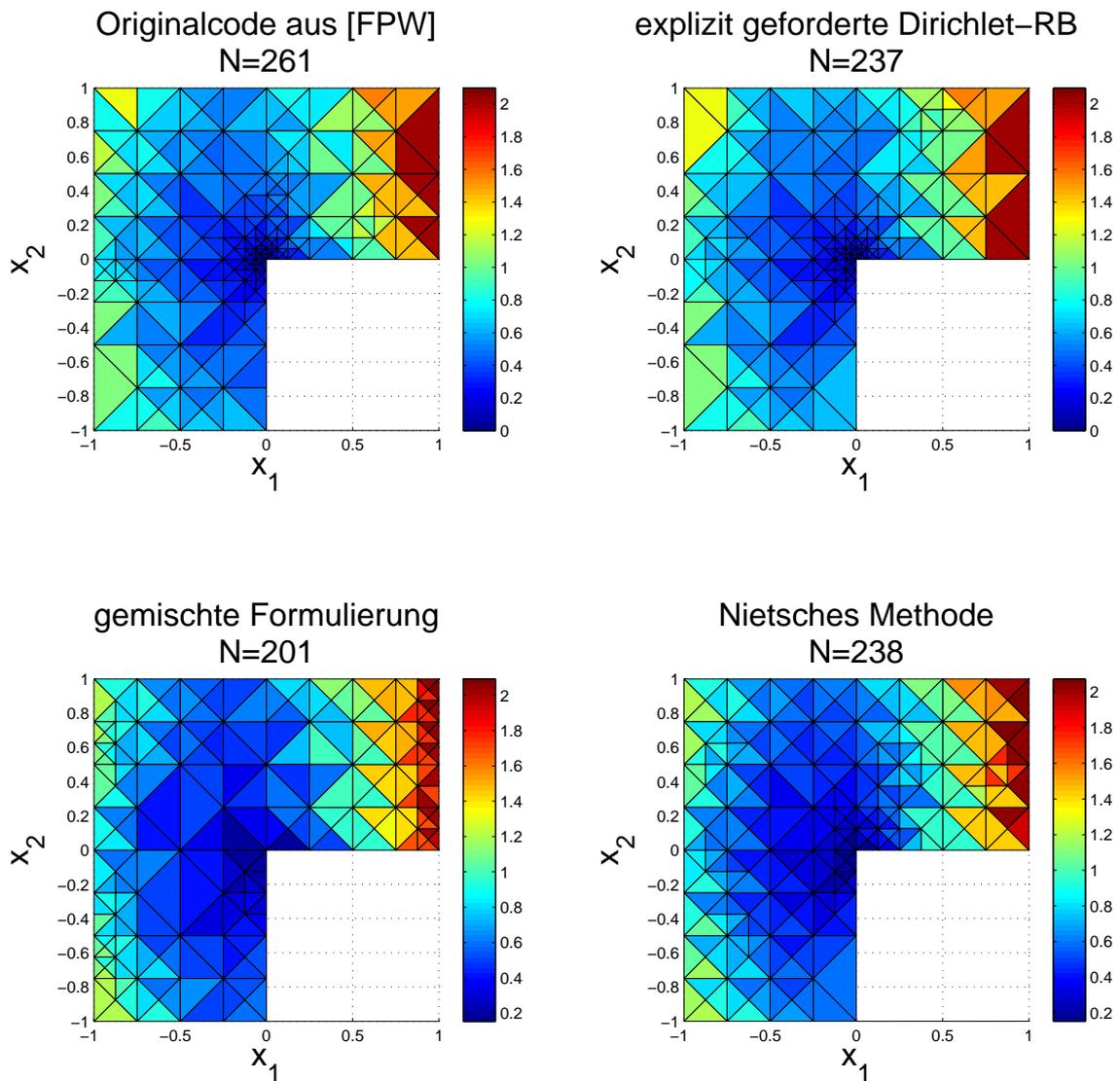


Abbildung 8.14: Numerische Lösung der Gleichung auf der Triangulierung aus der vorherigen Abbildung. Da wir in hier (im Gegensatz zum Beispiel aus dem letzten Abschnitt) auch die exakte Lösung kennen, können wir durch Vergleich mit Abbildung 8.12 auch die Qualität der Approximationslösung zumindest optisch beurteilen.

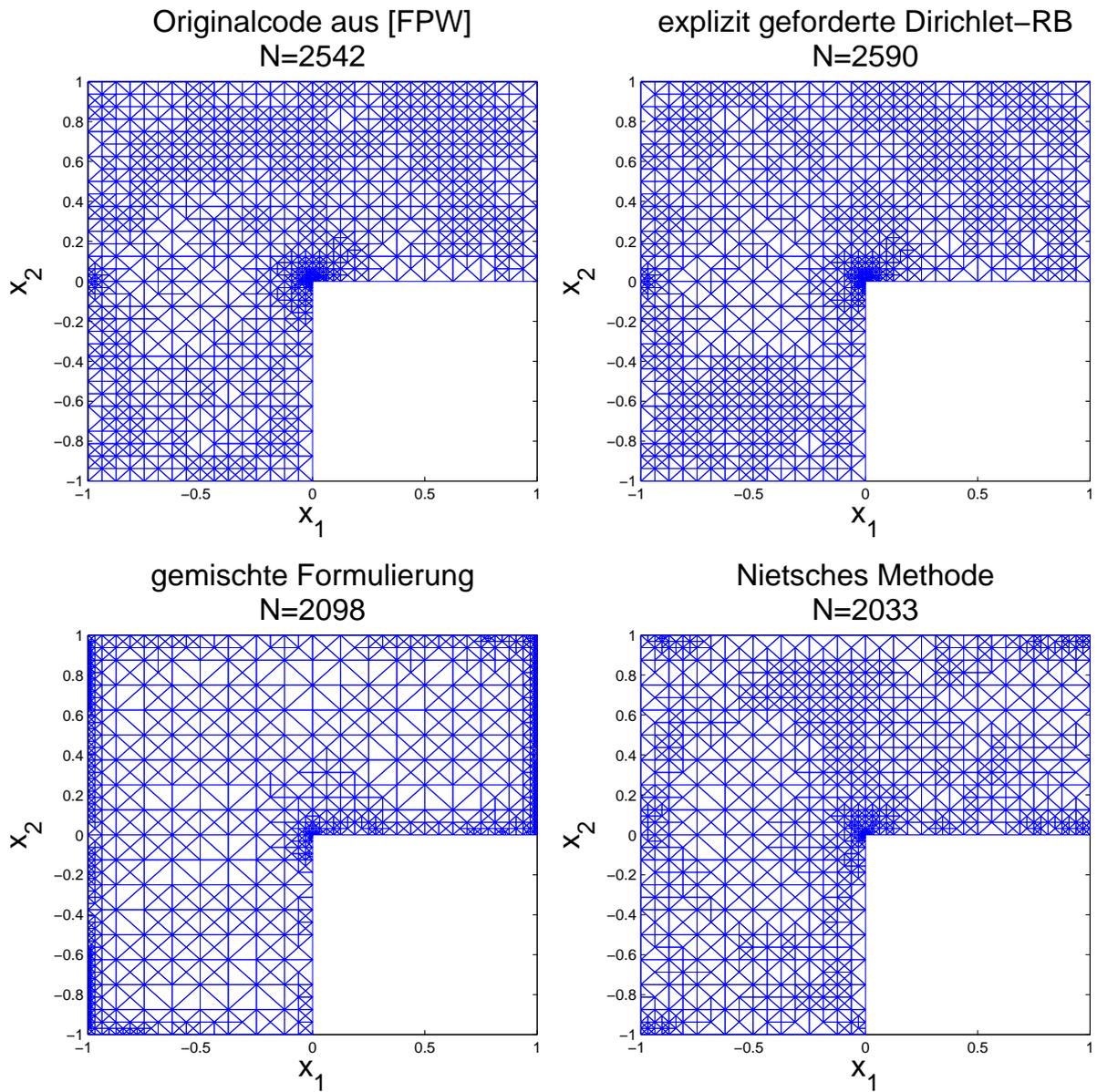


Abbildung 8.15: Triangulierungen jeweils nach dem Netzverfeinerungsschritt, welcher erstmals eine Anzahl an Dreiecken $N > 2000$ lieferte. Hier sind ähnliche Schlussfolgerungen möglich, wie bereits in Abbildung 8.5.

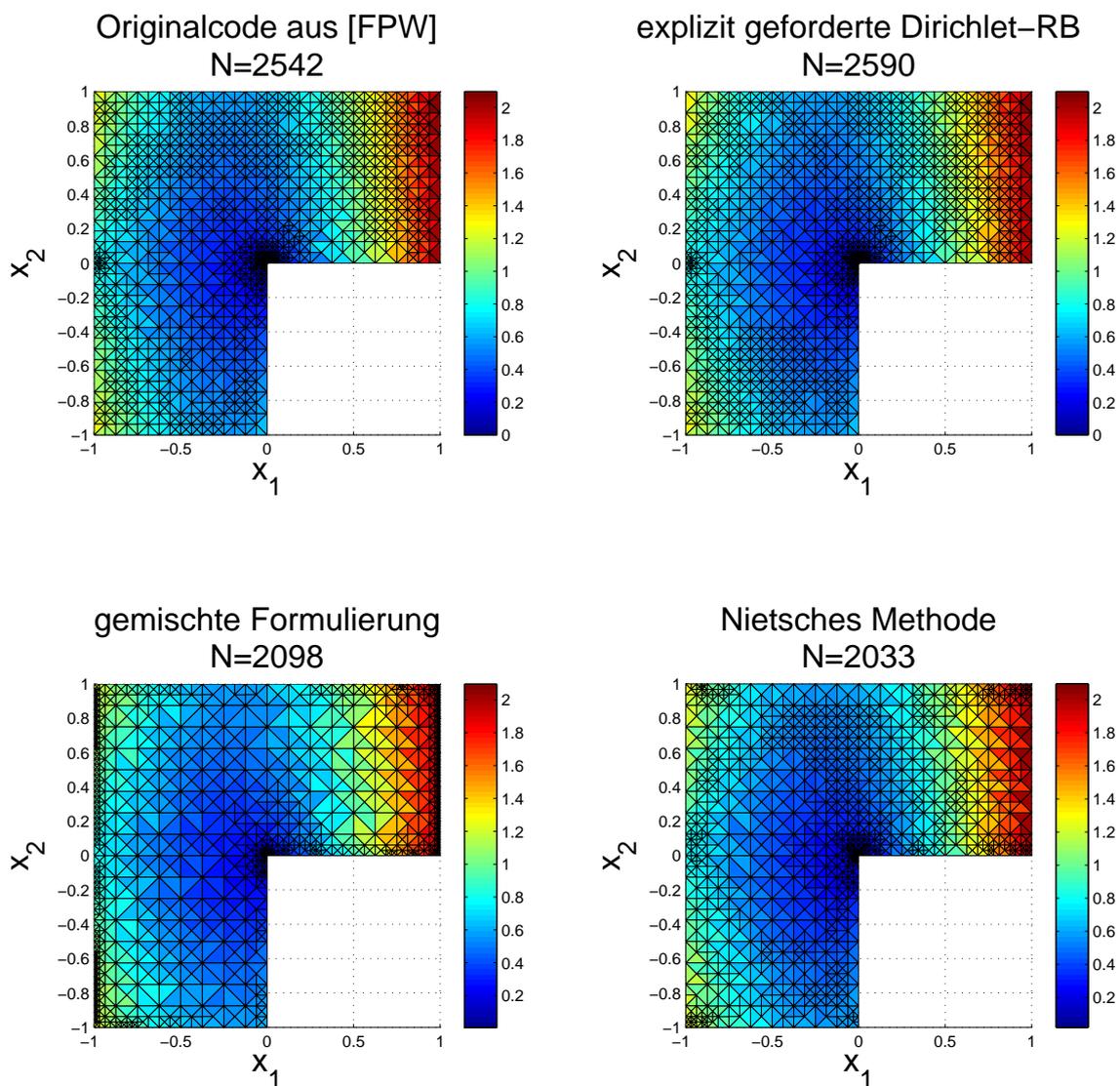


Abbildung 8.16: Numerische Lösung der Gleichung auf der Triangulierung aus der vorherigen Abbildung. Wieder stimmt die Lösung in allen Varianten gut mit der exakten Lösung aus Abbildung 8.12 überein.

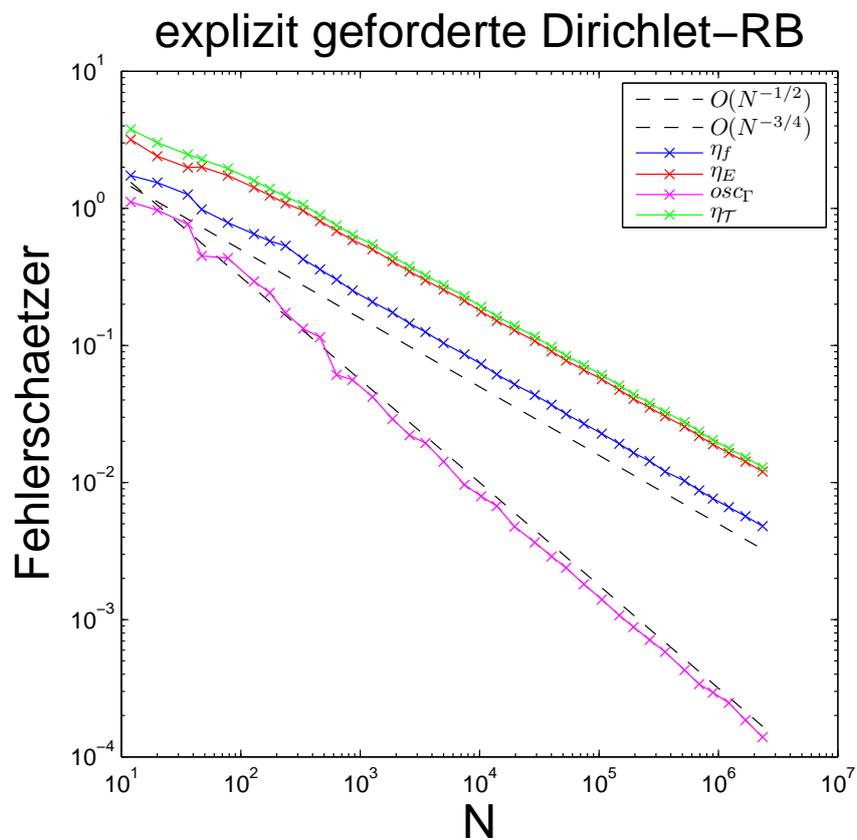
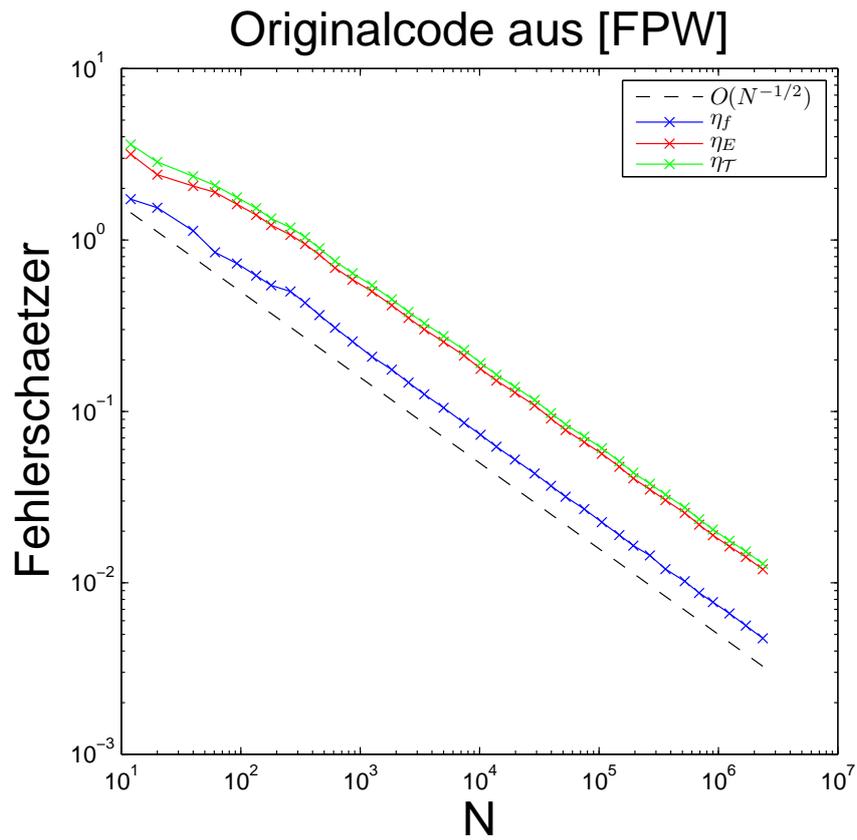


Abbildung 8.17: Wir erhalten in diesem Beispiel analoge Ordnungen wie schon im ersten Beispiel in Abbildung 8.7.

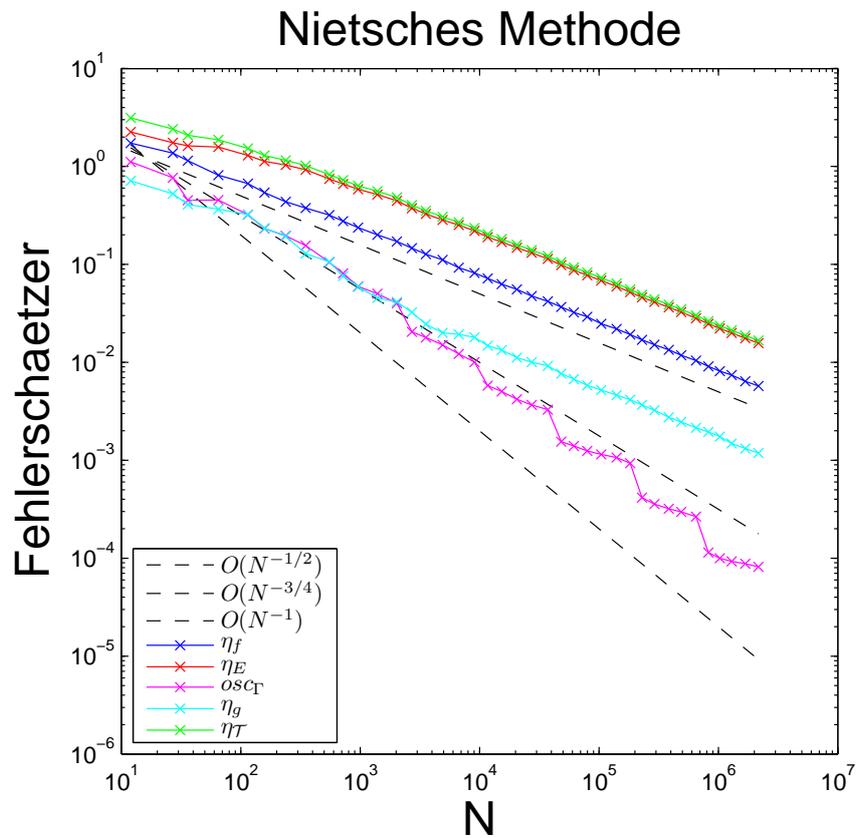
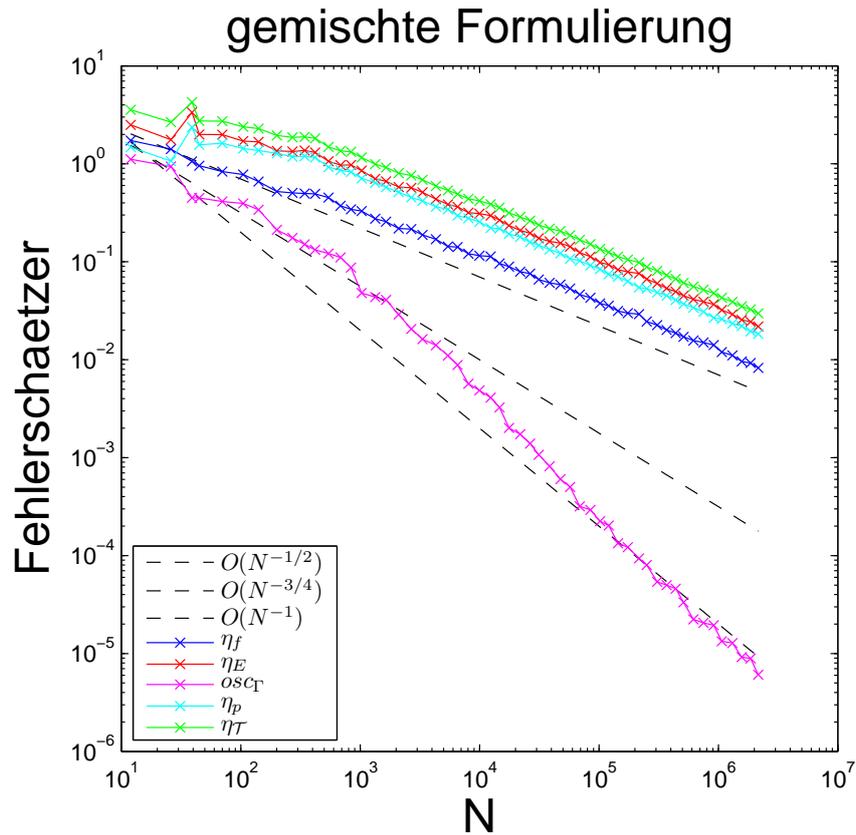


Abbildung 8.18: Auch hier zeigt sich ein Ergebnis, welches dem aus Abbildung 8.8 entspricht. Auffallend ist hier das sprungartige Verhalten von osc_Γ , welches wir im expliziten Fehlerplot der Randterme in Abbildung 8.20 genauer beschreiben werden.

explizit geforderte Dirichlet–RB

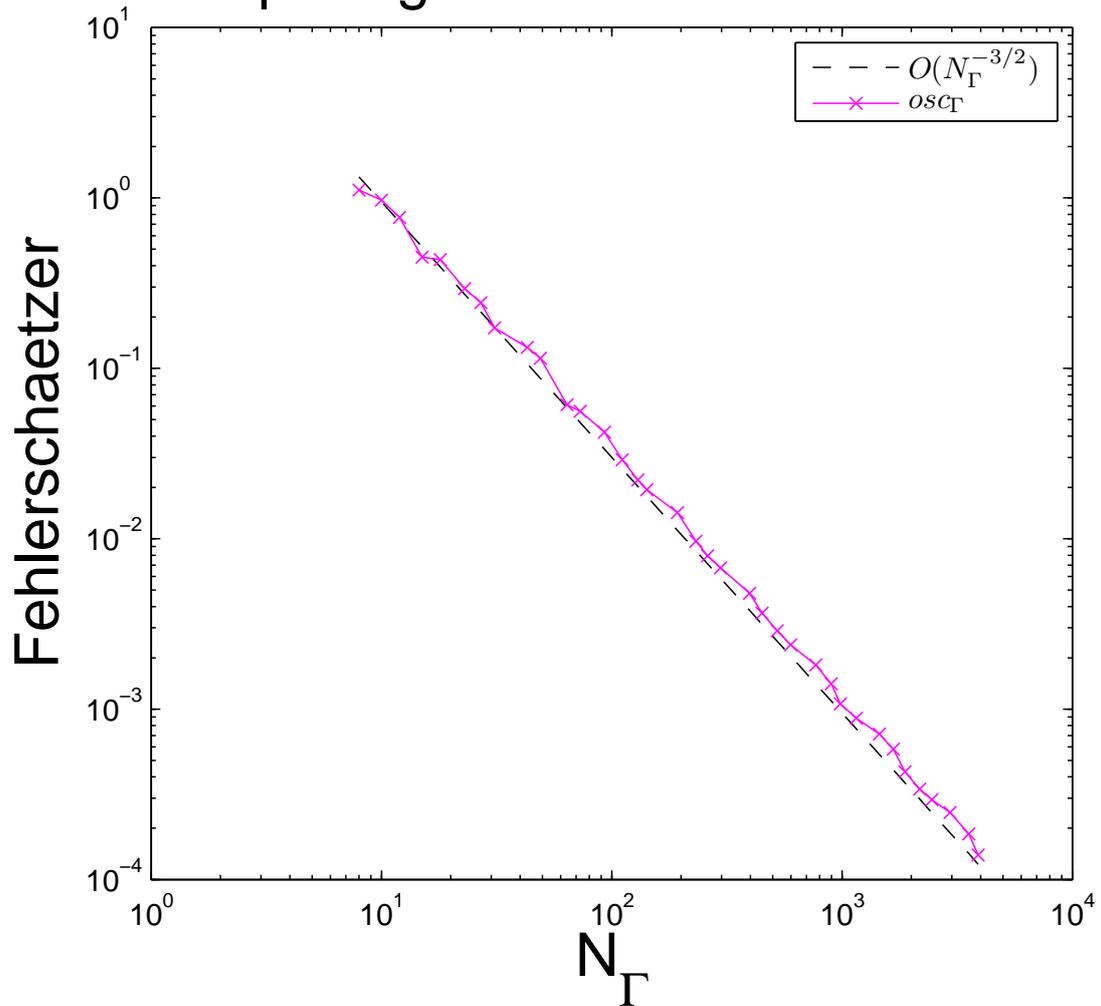


Abbildung 8.19: In dieser und der nächsten Abbildung ist wieder die Abhängigkeit von den Randkanten N_Γ dargestellt. Die Ergebnisse sind wieder ähnlich wie im ersten Beispiel.

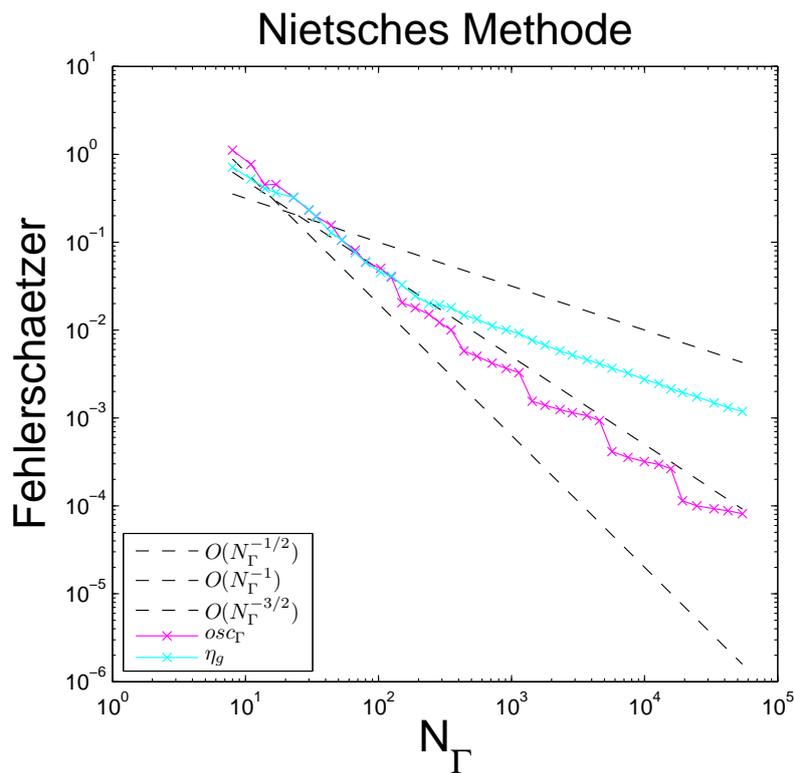
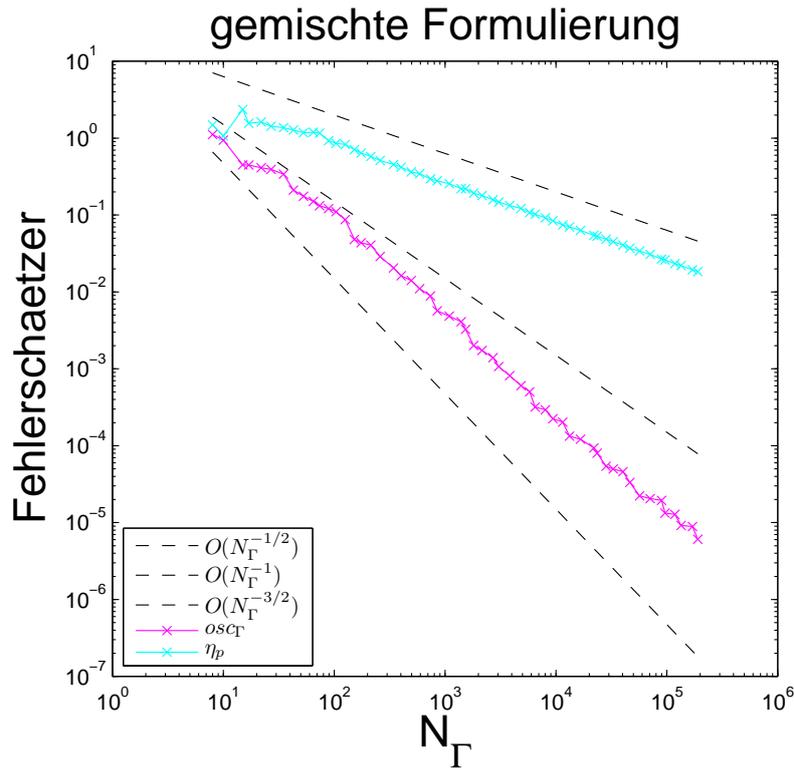


Abbildung 8.20: Bei Betrachtung der Dirichlet-Oszillationen osc_Γ fällt auf, dass stufenweise fallen und dazwischen ein relativ flaches Gefälle aufweisen. Dies legt die Vermutung nahe, dass durch die beiden Randanteile osc_Γ und η_g jeweils unterschiedliche Randelemente bevorzugt verfeinert werden und die Verfeinerung der durch osc_Γ markieren Elemente diesen Oszillationsterm sehr stark verringern. Das bedeutet also in den flachen Bereichen wird die Verfeinerung durch η_g gesteuert und in den steilen trägt osc_Γ dazu bei.

Kapitel 9

Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit stets das inhomogene Dirichlet-Problem aus Definition (1.1) betrachtet und dafür drei Varianten präsentiert, wie einerseits eine schwache Formulierung aussehen kann und wie man diese mit adaptiver Netzverfeinerung lösen kann.

Wir wollen nun am Ende noch ein paar Ideen und Denkanstöße geben, welche in dieser Arbeit nicht näher ausgeführt wurden, da sie

- (i) entweder den Rahmen vom Umfang her sprengen würden,
- (ii) zu sehr von der eigentlichen Zielsetzung abschweifen würden, sodass beim Bearbeiten die Gefahr bestand, den roten Faden vom Modellproblem bis zum adaptiven FEM-Algorithmus zu verlieren,
- (iii) oder auch einfach weggelassen wurden, da man sowieso in keiner mathematischen Arbeit davon ausgehen kann, die jeweilige Thematik vollständig umfassen zu können.

Wir listen ein paar Punkte im Folgenden einfach auf, wobei natürlich auf keinen Fall behauptet wird, dass sich sämtliche Resultate die wir ausgearbeitet haben, auf diese Fälle problemlos übertragen lassen.

- Wir beschränkten uns in der Arbeit lediglich auf einen reinen Dirichlet-Rand Γ . In [FPP] und [AFKPP] wurde für unsere erste Variante mit explizit geforderten Dirichlet-Randbedingungen auch ein Neumann-Teil berücksichtigt. Diesen könnte man bei gemischter Formulierung und Nietches Methode natürlich auch versuchen einfließen lassen – genauso wie Robin-Randbedingungen. Dabei ist zu beachten, dass die veränderten Randbedingungen im Allgemeinen die schwachen Formulierungen verändern und dies beispielsweise auch in Zuverlässigkeitsabschätzungen der Fehlerschätzer jeweils berücksichtigt werden muss.
- Als diskrete Funktionenräume verwendeten wir $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ bzw. $\mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ – also stückweise affine Funktionen. Diese könnten auch durch Polynome höheren Grades ersetzt werden. Dies würde jedoch vor allem bei der Implementierung einen Mehraufwand bedeuten, da es sich oft als nützlich erwies, dass die Ableitung konstant auf den Elementen ist (siehe z.B. Kapitel 7.4). Außerdem ist beispielsweise zu beachten, dass der elementweise Laplace Δu_h zusätzlich im Fehlerschätzer auftaucht, wie es z.B. in [AFKPP, Section 2.3] der Fall ist.

- Im Hauptteil der Arbeit setzten wir die Dimension $d = 2$, d.h. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Man könnte jedoch natürlich auch $d \geq 2$ betrachten, wie in [AFKPP] für explizit geforderter Dirichlet-Randbedingung. Dabei wäre jedoch beispielsweise zu beachten, dass in höheren Dimensionen der Knoteninterpolationsoperator \mathbb{K}_h aus Kapitel 2.3.1 höhere Regularität der Funktionenräume erfordert, da Einbettungen von Sobolevräumen im Allgemeinen dimensionsabhängig sind.
- Wir begnügten uns hier mit damit, auf Zuverlässigkeit und Effizienz der Fehlerschätzer einzugehen. Natürlich könnte man unsere konstruierten Fehlerschätzer aus Kapitel 6 auch auf weitere Eigenschaften überprüfen. Insbesondere haben wir für die gemischte Formulierung keine Effizienz gezeigt, da die nichtlokale $H^{-1/2}(\Gamma)$ -Norm in Abschätzungen oft schwierig zu behandeln ist.
- In Kapitel 5 wäre bestimmt noch Platz, die Zusammenhänge der diskreten Lösungen aus den verschiedenen Varianten noch etwas ausführlicher zu untersuchen. Dies könnte sowohl theoretisch, als auch numerisch anhand geeignet gewählter Beispiele erfolgen.
- Wir gaben in Kapitel 6 jeweils nur ein einziges Beispiel für einen Fehlerschätzer in den jeweiligen drei Varianten an. Man könnte durchaus auch versuchen, alternative Fehlerschätzer zu konstruieren und diese dann auch miteinander zu vergleichen.
- In den Kapiteln 7 und 8 zur Implementierung ging es uns hier in erster Linie darum, das davor theoretisch Hergeleitete zu testen und das Verhalten des Fehlerschätzers grob zu analysieren. Man kann dabei natürlich auch weiter in die Tiefe gehen und verschiedenste Plots bei unterschiedlichen Beispielen ausgeben. Besonders interessant sind natürlich Fragen wie: Wie verhält sich der echte Fehler $\|u - u_h\|$ (in geeigneter Norm)? Was nützt es, dass z.B. bei gemischter Formulierung der Rand so verstärkt verfeinert wird (siehe Abbildung 8.5? Wie gut approximiert p_h in dieser Variante dann $\partial_n u$? Wie wirkt sich unsere Wahl von $\chi = 17$ bei Nietches Methode genau aus?

Anhang A

Ergänzende Resultate

Am Ende des Beweises zur ersten Version des Céa-Lemmas, Lemma 4.6, haben wir verwendet, dass in Gleichung (4.3) das Infimum durch ein Minimum ersetzt werden darf. Wir wollen das im folgenden Lemma genauer erläutern.

Lemma A.1. Sei $u \in H^1(\Omega)$ beliebig und g_h eine stückweise affine Funktion auf Γ . Dann existiert eine Funktion $v_h^* \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ mit $\gamma v_h^* = g_h$, für die gilt

$$\|u - v_h^*\|_{H^1(\Omega)} = \inf_{\substack{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \\ \gamma v_h = g_h}} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)},$$

d.h. insbesondere gilt

$$\|u - v_h^*\|_{H^1(\Omega)} = \min_{\substack{v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \\ \gamma v_h = g_h}} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

Beweis. Wir wollen Lemma 1.30 anwenden und müssen daher die Voraussetzungen für die Menge

$$S := \{u - v_h \mid v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}), \gamma v_h = g_h\}$$

prüfen.

Wegen $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \subset H^1(\Omega)$ ist S auf alle Fälle eine Teilmenge des Hilbertraums $H^1(\Omega)$. Aufgrund von Bemerkung 3.11 können wir g_h auf unterschiedliche Arten zu einer Funktion $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ fortsetzen, also ist S nichtleer.

Für die Konvexität betrachte mit $\lambda \in (0, 1)$ die beliebige Konvexkombination

$$\lambda(u - v_{h1}) + (1 - \lambda)(u - v_{h2}) = u - \underbrace{[\lambda v_{h1} + (1 - \lambda)v_{h2}]}_{=: v_{h3}}$$

aus zwei Elementen $u - v_{h1}, u - v_{h2} \in S$. Da $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ ein Vektorraum ist, ist v_{h3} als Linearkombination von v_{h1} und v_{h2} ebenfalls wieder ein Element von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$. Außerdem gilt aufgrund der Linearität des Spuroperators γ

$$\gamma v_{h3} = \gamma(\lambda v_{h1} + (1 - \lambda)v_{h2}) = \lambda \gamma v_{h1} + (1 - \lambda) \gamma v_{h2} = \lambda g_h + (1 - \lambda)g_h = g_h,$$

womit $v_{h3} \in S$ und S also konvex ist.

Um schlussendlich die Abgeschlossenheit nachzuprüfen, schreiben wir S zunächst als

$$S = u - (\mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \cap \gamma^{-1}g_h).$$

$\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ ist nach Lemma 2.35 (ii) abgeschlossen, genauso ist $\gamma^{-1}g_h$ als Urbild einer ein-elementigen (und damit abgeschlossenen) Menge unter einem stetigen Operator ebenfalls abgeschlossen. Der Durchschnitt zweier abgeschlossenen Mengen ist wieder abgeschlossen und da die Translation mit der Funktion u ein Homöomorphismus (siehe auch [BKW, Lemma 2.1.3]) auf $H^1(\Omega)$ darstellt, folgt schließlich die Abgeschlossenheit von S . Damit folgt die Aussage dieses Lemmas schließlich aus Lemma 1.30. \square

Lemma A.2. Seien \mathcal{T} eine reguläre Triangulierung, $v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ und $\bar{\mathcal{L}}$ der diskrete Fortsetzungsoperator aus (4.9). Dann gilt mit einer von \mathcal{T} unabhängigen Konstanten $\tilde{C} > 0$ die Abschätzung:

$$\|\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{C} \|h^{-1/2}v_h\|_{L^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$$

Beweis. Wir nehmen für den Beweis vereinfachend an, dass es für jeden Randknoten $z \in \mathcal{K}_\Gamma$ genau zwei angrenzende Kanten $E_1, E_n \in \mathcal{E}_\Gamma$ existieren, die nicht zum selben Dreieck gehören. Dieser Umstand ist bei Polygonzügen als Rand durch geeignete Netzverfeinerung immer erreichbar. Die an z angrenzenden Dreiecke $T \in \omega_z$ sind daher zwischen den Kanten E_1 und E_n direkt aneinander grenzend, wie in Abbildung A.1 anschaulich dargestellt.

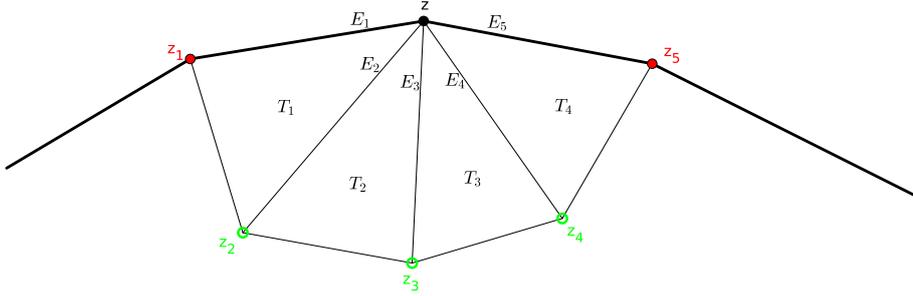


Abbildung A.1: Die fetten Kanten stellen einen Abschnitt des Randes Γ dar. Man beachte, dass die Funktionswerte von v_h auf z_2, z_3 und z_4 verschwinden und daher auf den Kanten $\overline{z_2z_3}$ und $\overline{z_3z_4}$ ebenfalls konstant gleich 0 sind.

Wir betrachten also einen beliebigen Knoten z in \mathcal{K}_Γ und sind fertig, wenn wir zeigen können, dass

$$\|\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{H^1(\omega_z)}^2 \leq C(h_{E_1}^{-1}\|v_h\|_{L^2(E_1)}^2 + h_{E_n}^{-1}\|v_h\|_{L^2(E_n)}^2) \quad (\text{A.1})$$

mit einer von \mathcal{T} unabhängigen Konstanten $C > 0$ gilt, denn dann erhalten wir durch Aufsummieren über alle Randknoten $z \in \mathcal{K}_\Gamma$ die Abschätzung

$$\|\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \sum_{z \in \mathcal{K}_\Gamma} \|\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{H^1(\omega_z)}^2 \leq 2C \sum_{E \in \mathcal{E}_\Gamma} \|h_E^{-1}v_h\|_{L^2(E)}^2 = 2C \|h_E^{-1}v_h\|_{L^2(\Gamma)}^2,$$

da jede Randkante $E \in \mathcal{E}_\Gamma$ in der obigen Beschriftung zu genau zwei Randknoten gehört. Wir betrachten also die oben geschilderte Situation mit $z \in \mathcal{K}_\Gamma$, $z_1, z_n \in \mathcal{K}_\Gamma$ dessen Nachbarknoten entlang der Randkanten $E_1, E_n \in \mathcal{E}_\Gamma$ und $z_2, \dots, z_{n-1} \in \mathcal{K}_\Omega$ die Nachbarknoten von z im Inneren von Ω , die wir im mathematisch positiven Umlaufsinn durchnummerieren. Dazu definieren wir die inneren Kanten $E_i := \overline{zz_i} \in \mathcal{E}_\Omega$ für alle $i = 2, \dots, n-1$ und die Dreiecke $T_i = \text{conv}\{z, z_i, z_{i+1}\}$ für alle $i = 1, \dots, n-1$ (vgl. Abbildung A.1). Wir zeigen nun zunächst die Abschätzungen

$$\|\overline{\mathcal{L}}v_h\|_{H^1(T_i)}^2 \leq C_i h_{E_1}^{-1} \|v_h\|_{L^2(E_1)}^2 \quad (\text{A.2})$$

mit von \mathcal{T} unabhängigen Konstanten $C_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, n-2$ durch vollständige Induktion nach i .

Induktionsanfang $i = 1$:

Die zu zeigende Ungleichung in diesem Fall ist

$$\|\overline{\mathcal{L}}v_h\|_{H^1(T_1)}^2 = \|\overline{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(T_1)}^2 + \|\nabla \overline{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(T_1)}^2 \leq C_1 h_{E_1}^{-1} \|v_h\|_{L^2(E_1)}^2,$$

welche wir durch separates Abschätzen der beiden Summanden auf der linken Seite zeigen. Wir bezeichnen mit \widehat{T} das Referenzelement und mit \widehat{E} das Bild der Kante E_1 bei Transformation von T_1 auf \widehat{T} (vgl. Lemma 2.29). Man beachte in der folgenden Abschätzung, dass für die Funktion $\overline{\mathcal{L}}v_h \circ \Phi$ auf \widehat{T} einerseits $\|\cdot\|_{L^2(\widehat{E})}$ eine positiv definite Norm darstellt (der diskrete Fortsetzungsoperator $\overline{\mathcal{L}}$ setzt die Funktion v_h auf den inneren Knoten gemäß (4.9) durch 0 fort) und wegen der Endlichdimensionalität des Funktionenraums die Normen $\|\cdot\|_{L^2(\widehat{T})}$ und $\|\cdot\|_{L^2(\widehat{E})}$ äquivalent mit von \mathcal{T} unabhängiger Konstante C_{norm} sind. Daher gilt

$$\begin{aligned} \|\overline{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(T_1)}^2 &\stackrel{(2.17)}{\leq} h_{T_1}^2 \|\overline{\mathcal{L}}v_h \circ \Phi\|_{L^2(\widehat{T})}^2 \\ &\leq C_{norm} h_{T_1}^2 \|\overline{\mathcal{L}}v_h \circ \Phi\|_{L^2(\widehat{E})}^2 \\ &\stackrel{(2.20)}{\leq} \sqrt{2} C_{norm} h_{T_1}^2 h_{E_1}^{-1} \|\overline{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(E_1)}^2 \end{aligned}$$

und mit ähnlicher Argumentation auch

$$\begin{aligned} \|\nabla \overline{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(T_1)}^2 &\stackrel{(2.19)}{\leq} 2\overline{\gamma}^2 \|\nabla(\overline{\mathcal{L}}v_h \circ \Phi)\|_{L^2(\widehat{T})}^2 \\ &\leq 2\overline{\gamma}^2 C'_{norm} \|\overline{\mathcal{L}}v_h \circ \Phi\|_{L^2(\widehat{E})}^2 \\ &\stackrel{(2.20)}{\leq} 2\sqrt{2}\overline{\gamma}^2 C'_{norm} h_{E_1}^{-1} \|\overline{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(E_1)}^2. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir mit der Abschätzung $h_{T_1} \leq \text{diam}(\Omega)$ also

$$\|\overline{\mathcal{L}}v_h\|_{H^1(T_1)}^2 \leq \underbrace{\sqrt{2}(C_{norm} \text{diam}(\Omega)^2 + 2\overline{\gamma}^2 C'_{norm})}_{=: C_1} h_{E_1}^{-1} \|\overline{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(E_1)}^2. \quad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung:

Für beliebiges $i \leq n-3$ gilt

$$\|\overline{\mathcal{L}}v_h\|_{H^1(T_i)}^2 = \|\overline{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(T_i)}^2 + \|\nabla \overline{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(T_i)}^2 \leq C_i h_{E_1}^{-1} \|v_h\|_{L^2(E_1)}^2. \quad (\text{A.3})$$

Induktionsschritt:

Wir zeigen, dass aus (A.3) die Abschätzung

$$\|\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{H^1(T_{i+1})}^2 = \|\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(T_{i+1})}^2 + \|\nabla\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(T_{i+1})}^2 \leq C_{i+1}h_{E_1}^{-1}\|v_h\|_{L^2(E_1)}^2 \quad (\text{A.4})$$

folgt. Wir teilen die H^1 -Norm dafür wie bereits im Induktionsanfang in ihre beiden Summanden auf. Die Beweisidee ist es, die Abschätzung über die gemeinsame Kante E_i vom Dreieck T_{i+1} in das Dreieck T_i überzuführen. Man beachte, dass T_{i+1} aufgrund unserer Annahmen (vgl. Abbildung A.1) in jedem Fall nur einen einzigen Knoten z mit dem Rand Γ gemeinsam hat und $\bar{\mathcal{L}}v_h$ auf zwei Knoten durch 0 fortsetzt und daher $\|\cdot\|_{L^2(E_i)}$ eine zu $\|\cdot\|_{L^2(T_{i+1})}$ und $\|\nabla(\cdot)\|_{L^2(T_{i+1})}$ äquivalente Norm auf T_{i+1} darstellt. Selbiges gilt natürlich auch nach Transformation auf das Referenzelement. Völlig analoge Rechnung wie im Induktionsanfang liefert also

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(T_{i+1})}^2 &\leq \sqrt{2}C_{norm}h_{T_{i+1}}^2h_{E_{i+1}}^{-1}\|\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(E_{i+1})}^2 \\ (2.13) \quad &\leq \sqrt{2}C_{norm}\bar{\gamma}^2h_{E_{i+1}}\|\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(E_{i+1})}^2 \\ (2.21) \quad &\leq \sqrt{2}C_{norm}\bar{\gamma}^2h_{E_{i+1}}^2\|\bar{\mathcal{L}}v_h \circ \Phi\|_{L^2(\hat{E})}^2 \\ &\leq \sqrt{2}C_{norm}C_{norm}''\bar{\gamma}^2h_{E_{i+1}}^2\|\bar{\mathcal{L}}v_h \circ \Phi\|_{L^2(\hat{T})}^2 \\ (2.16) \quad &\leq \sqrt{2}C_{norm}C_{norm}''\bar{\gamma}^3h_{E_{i+1}}^2h_{T_i}^{-2}\|\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(T_i)}^2 \\ \text{Bem. 2.21 (vii)} \quad &\leq \sqrt{2}C_{norm}C_{norm}''\bar{\gamma}^3\|\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(T_i)}^2 \\ \text{Ind.Vor.} \quad &\leq \sqrt{2}C_{norm}C_{norm}''\bar{\gamma}^3C_ih_{E_1}^{-1}\|v_h\|_{L^2(E_1)}^2. \end{aligned}$$

Ähnliche Rechnung führt im zweiten Summanden auf

$$\begin{aligned} \|\nabla\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(T_{i+1})}^2 &\leq 2\sqrt{2}C'_{norm}\bar{\gamma}^2h_{E_{i+1}}^{-1}\|\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(E_{i+1})}^2 \\ (2.21) \quad &\leq 2\sqrt{2}C'_{norm}\bar{\gamma}^2\|\bar{\mathcal{L}}v_h \circ \Phi\|_{L^2(\hat{E})}^2 \\ &\leq 2\sqrt{2}C'_{norm}C_{norm}'''\bar{\gamma}^2\|\nabla(\bar{\mathcal{L}}v_h \circ \Phi)\|_{L^2(\hat{T})}^2 \\ (2.18) \quad &\leq 4\sqrt{2}C'_{norm}C_{norm}'''\bar{\gamma}^3\|\nabla\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{L^2(T_i)}^2 \\ \text{Ind.Vor.} \quad &\leq 4\sqrt{2}C'_{norm}C_{norm}'''\bar{\gamma}^3C_ih_{E_1}^{-1}\|v_h\|_{L^2(E_1)}^2. \end{aligned}$$

Fassen wir die \mathcal{T} -unabhängigen Konstanten mittels $C_{i+1} := \sqrt{2}\bar{\gamma}^3C_i(C_{norm}C_{norm}'' + C'_{norm}C_{norm}''')$ zusammen, erhalten wir genau die gewünschte Abschätzung.

Wir erhalten also (A.2) für alle $i = 1, \dots, n-2$. Man beachte, dass der Induktionsbeweis den Fall $i = n-1$ nicht abdecken kann, da $\|\cdot\|_{L^2(E_{n-1})}$ lediglich eine Seminorm und keine Norm auf T_{n-1} darstellt. Wir können stattdessen jedoch

$$\|\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{H^1(T_{n-1})}^2 \leq C_{n-1}h_{E_n}^{-1}\|v_h\|_{L^2(E_n)}^2$$

zeigen, was in völliger Analogie zur Abschätzung

$$\|\bar{\mathcal{L}}v_h\|_{H^1(T_1)}^2 \leq C_1h_{E_1}^{-1}\|v_h\|_{L^2(E_1)}^2$$

möglich ist, die wir bereits im Induktionsanfang gezeigt haben. Bemerken wir schlussendlich, dass wegen Lemma 2.31 die Anzahl der Elemente pro Patch ω_z immer gleichmäßig beschränkt ist, gilt $n \leq N$ mit einem globalen (von z unabhängigen) $N \in \mathbb{N}$. Definieren wir nun $C := \max \left\{ \sum_{i=1}^{N-2} C_i, C_{N-1} \right\}$, so erhalten wir genau die gewünschte Ungleichung aus (A.1). □

Die Beweisidee zum folgenden Lemma stammt aus [CT, Chapter 1].

Lemma A.3. Sei $g \in L^2(\Gamma)$ beliebig, \mathcal{T}_h eine reguläre Triangulierung von Ω und $\mathbb{P}_h^\Gamma : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ die L^2 -Orthogonalprojektion auf dem Rand. Dann gilt

$$\|h^{-1/2}\mathbb{P}_h^\Gamma g\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|h^{-1/2}g\|_{L^2(\Gamma)}$$

mit einer Konstanten $C > 0$, die nur von $\sigma(\mathcal{T}_h)$ abhängt.

Beweis. Zunächst gilt wegen der Projektionseigenschaft aus Proposition 2.49 (iii)

$$\langle \mathbb{P}_h^\Gamma g, \zeta_z \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle g, \zeta_z \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } z \in \mathcal{K}_\Gamma,$$

wobei ζ_z die Hutfunktion zum Randknoten z bezeichnet. Wegen $\mathbb{P}_h^\Gamma g \in \mathcal{S}^1(\mathcal{E}_\Gamma)$ und da die Menge aller Hutfunktionen eine Basis dieses Raumes bildet, gilt außerdem $\mathbb{P}_h^\Gamma g = \sum_{z \in \mathcal{K}_\Gamma} \mu_z \zeta_z$ für geeignet gewählte Koeffizienten μ_z . Nummerieren wir die Knoten z_i mit $i = 1, \dots, |\mathcal{K}_\Gamma|$ derart, dass die benachbarten Eckpunkte innerhalb eines Polygonzugs jeweils unmittelbar aneinandergereiht sind, so lässt sich die obige Bedingung als Gleichungssystem in der Form $M\mu = b$ mit

$$\begin{aligned} M_{ij} &:= \langle \zeta_{z_i}, \zeta_{z_j} \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ \mu_j &:= \mu_{z_j} \\ b_i &:= \langle g, \zeta_{z_i} \rangle_{L^2(\Gamma)} \end{aligned}$$

schreiben. Da nur Hutfunktionen von unmittelbar benachbarten Knoten aus dem selben Polygonzug nicht verschwindende Beiträge zur Matrix M liefern, zerfällt die Matrix in eine Blockdiagonalform, wobei jeder Block genau einem geschlossenen Polygonzug entspricht und die Form

$$\begin{pmatrix} \star & \star & & & \star \\ \star & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \star \\ \star & & & \star & \star \end{pmatrix}$$

hat, wobei \star die nichttrivialen Matrixeinträge markiert. Wir nehmen im weiteren Verlauf des Beweises o.B.d.A an, dass Γ nur aus einem einem Polygonzug und M daher nur aus einem einzigen derartigen Block besteht. Für den allgemeinen Fall müssen die folgenden Überlegungen lediglich auf die einzelnen Blöcke übertragen werden. Sei also $n := |\mathcal{K}_\Gamma|$ und $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix der obigen Gestalt und seien die einzelnen Kanten innerhalb des Polygonzugs für alle $i = 1, \dots, n$ durch $E_i := \text{conv}\{z_i, z_{i+1}\}$ nummeriert, wobei wir in den Indizes $n + 1$ mit 1 und 0 mit n identifizieren werden, um Fallunterschiedungen zu

vermeiden. Direkt aus Lemma [CT, Lemma 2] oder durch Addition der entsprechenden Kantenintegrale aus Lemma 7.6 erhalten wir

$$\begin{aligned} M_{ii} &= \langle \zeta_{z_i}, \zeta_{z_i} \rangle_{L^2(\Gamma)} = \frac{1}{3}(h_{E_{i-1}} + h_{E_i}), \\ M_{i-1,i} &= \langle \zeta_{z_i}, \zeta_{z_{i-1}} \rangle_{L^2(\Gamma)} = \frac{1}{6}h_{E_{i-1}}, \\ M_{i+1,i} &= \langle \zeta_{z_i}, \zeta_{z_{i+1}} \rangle_{L^2(\Gamma)} = \frac{1}{6}h_{E_i}. \end{aligned}$$

Wir schreiben nun die Matrix M in der Form $M = D(I + K)$ mit $K := D^{-1}(M - D)$, wobei D eine Diagonalmatrix mit $D_{ii} := M_{ii}$ für alle $i = 1, \dots, n$ und I die Einheitsmatrix bezeichnet. Wegen $K = D^{-1}(M - D)$ gilt für die Einträge der Matrix K , dass

$$\begin{aligned} K_{i,i-1} &= \frac{M_{i,i-1}}{D_{ii}} = \frac{h_{E_{i-1}}}{2(h_{E_{i-1}} + h_{E_i})}, \\ K_{i,i+1} &= \frac{M_{i,i+1}}{D_{ii}} = \frac{h_{E_i}}{2(h_{E_{i-1}} + h_{E_i})} \end{aligned}$$

und dass alle restlichen Einträge gleich 0 sind. Bezeichne $\|\cdot\|_\infty$ die Zeilensummennorm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ definiert durch

$$\|K\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |K_{ij}|$$

welche bekanntermaßen durch die ℓ_∞ -Norm in \mathbb{R}^n induziert wird. Wegen der oben angeführten Form der Einträge von K gilt $\|K\|_\infty = 1/2 < 1$. Damit ist die Matrix $(I + K)$ invertierbar mit $(I + K)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^j$ (vgl. [CT, Section 1]) und es gilt

$$\|(I + K)^{-1}\|_\infty \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|K\|_\infty^j = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$

Analog bezeichnet $\|\cdot\|_1$ die Spaltensummennorm

$$\|K\|_1 := \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |K_{ij}|.$$

Für die j -te Spalte von K gilt dann

$$\sum_{i=1}^n |K_{ij}| = |K_{j-1,j}| + |K_{j+1,j}| = \frac{h_{E_{j-1}}}{2(h_{E_{j-2}} + h_{E_{j-1}})} + \frac{h_{E_j}}{2(h_{E_j} + h_{E_{j+1}})} \stackrel{\text{Lem. 2.32}}{\leq} \frac{1}{1 + \bar{\gamma}^{-C_\sigma}}$$

und damit folgt $\|K\|_1 \leq 1/(1 + \bar{\gamma}^{-C_\sigma}) =: q < 1$ und wie oben

$$\|(I + K)^{-1}\|_1 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|K\|_1^j \leq \frac{1}{1 - q} = 1 + \bar{\gamma}^{C_\sigma}.$$

Für die Spektralnorm $\|\cdot\|_2$, welche durch die ℓ_2 -Norm induziert wird, gilt daher die bekannte Abschätzung

$$\|(I + K)^{-1}\|_2 \leq (\|(I + K)^{-1}\|_1 \|(I + K)^{-1}\|_\infty)^{1/2} \leq (2(1 + \bar{\gamma}^{C_\sigma}))^{1/2} =: \tilde{C}. \quad (\text{A.5})$$

Mit diesen Ergebnissen können wir nun die gewünschte Ungleichung zeigen. Dazu berechnen wir zunächst noch für eine beliebige Kante E_k die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|h^{-1/2}\mathbb{P}_h^\Gamma g\|_{L^2(E_k)}^2 &= h_{E_k}^{-1}\|\mathbb{P}_h^\Gamma g\|_{L^2(E_k)}^2 \\
&= h_{E_k}^{-1}\left\|\sum_{i=1}^n \mu_i \zeta_{z_i}\right\|_{L^2(E_k)}^2 \\
&= h_{E_k}^{-1}\int_{E_k}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i \zeta_{z_i}\right)^2 d\mu \\
&= h_{E_k}^{-1}\int_{E_k}(\mu_k \zeta_{z_k} + \mu_{k+1} \zeta_{z_{k+1}})^2 d\mu \\
&\leq 2h_{E_k}^{-1}\int_{E_k}(\mu_k^2 \zeta_{z_k}^2 + \mu_{k+1}^2 \zeta_{z_{k+1}}^2) d\mu \\
&\stackrel{\text{Lem.7.6}}{=} 2h_{E_k}^{-1}\left(\mu_k^2 \frac{h_{E_k}}{3} + \mu_{k+1}^2 \frac{h_{E_k}}{3}\right) \\
&= \frac{2}{3}(\mu_k^2 + \mu_{k+1}^2).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
\|h^{-1/2}\mathbb{P}_h^\Gamma g\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= \sum_{k=1}^n \|h^{-1/2}\mathbb{P}_h^\Gamma g\|_{L^2(E_k)}^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^n \frac{2}{3}(\mu_k^2 + \mu_{k+1}^2) \\
&= \frac{4}{3}\|\mu\|_{\ell_2}^2 \\
&= \frac{4}{3}\|(I+K)^{-1}D^{-1}b\|_{\ell_2}^2 \\
&\leq \frac{4}{3}\|(I+K)^{-1}\|_2^2 \|D^{-1}b\|_{\ell_2}^2 \\
&\stackrel{\text{(A.5)}}{\leq} \frac{4}{3}\tilde{C}^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{3}{h_{E_{i-1}} + h_{E_i}} |b_i|\right)^2 \\
&= 12\tilde{C}^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{|\langle g, \zeta_{z_i} \rangle_{L^2(\Gamma)}|}{h_{E_{i-1}} + h_{E_i}}\right)^2 \\
&\leq 12\tilde{C}^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{|\langle g, \zeta_{z_i} \rangle_{L^2(E_{i-1})}| + |\langle g, \zeta_{z_i} \rangle_{L^2(E_i)}|}{h_{E_{i-1}} + h_{E_i}}\right)^2 \\
&\leq 12\tilde{C}^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\|g\|_{L^2(E_{i-1})}\|\zeta_{z_i}\|_{L^2(E_{i-1})} + \|g\|_{L^2(E_i)}\|\zeta_{z_i}\|_{L^2(E_i)}}{h_{E_{i-1}} + h_{E_i}}\right)^2 \\
&\stackrel{\text{Lem.7.6}}{=} 4\tilde{C}^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\|g\|_{L^2(E_{i-1})}h_{E_{i-1}}^{1/2} + \|g\|_{L^2(E_i)}h_{E_i}^{1/2}}{h_{E_{i-1}} + h_{E_i}}\right)^2 \\
&\leq 8\tilde{C}^2 \sum_{i=1}^n \frac{\|g\|_{L^2(E_{i-1})}^2 h_{E_{i-1}} + \|g\|_{L^2(E_i)}^2 h_{E_i}}{(h_{E_{i-1}} + h_{E_i})^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 8 \tilde{C}^2 \sum_{i=1}^n \frac{\|g\|_{L^2(E_{i-1})}^2 + \|g\|_{L^2(E_i)}^2}{h_{E_{i-1}} + h_{E_i}} \\
&\stackrel{\text{Lem. 2.32}}{\leq} 16 \frac{\tilde{C}^2}{1 + \bar{\gamma}^{-C_\sigma}} \sum_{i=1}^n h_{E_i}^{-1} \|g\|_{L^2(E_i)}^2 \\
&= 16 \frac{\tilde{C}^2}{1 + \bar{\gamma}^{-C_\sigma}} \|h^{-1/2} g\|_{L^2(\Gamma)}^2
\end{aligned}$$

und Wurzelziehen auf beiden Seiten liefert die behauptete Ungleichung. \square

Anhang B

Programmiercode

B.1 Originalcode aus [FPW]

B.1.1 solveLaplace.m

```
1 function [x,energy] = solveLaplace(coordinates,elements,dirichlet,neumann,f,g,uD)
2
3 %solveLaplace: computes P1-finite element solution for the two dimensional
4 %               Laplace equation with mixed Dirichlet-Neumann boundary
5 %               condition
6 %
7 %   solveLaplace solves Laplace equation
8 %       - div(grad(u)) = f           in Omega
9 %               u = u_D             on the Dirichlet boundary
10 %            d/dn u = g             on the Neumann boundary
11 %   on a geometry described by triangles.
12 %
13 %Usage:
14 %
15 %[x,energy] = solveLaplace(coordinates,elements,dirichlet,neumann,f,g,ud)
16 %
17 %Comments:
18 %
19 %   solveLaplace expects as input a finite element mesh described by the
20 %   fields coordinates, elements, dirichlet and neumann. The volume
21 %   force f, the Neumann data g, and the (inhomogeneous) Dirichlet data
22 %   uD are given as M-files <f.m>, <g.m>, and <uD.m>. Either of these
23 %   M-files is assumed to take n evaluation points as (n x 2) matrix and to
24 %   return an (n x 1) column vector.
25 %
26 %   solveLaplace assembles the Galerkin data and solves the resulting
27 %   linear system of equations to obtain the P1 finite element solution
28 %   of the Laplace problem. The function returns a column vector X which
29 %   contains the nodal values of the FEM solution. Additionally, solveLaplace
30 %   provides the energy of the discrete solution uh, i.e.
31 %   energy = || grad(uh) ||_{L2(Omega)}^2.
32 %
33 %Remark:
34 %
35 %   This program is a supplement to the paper
36 %   >> Efficient Implementation of Adaptive P1-FEM in Matlab <<
37 %   by S. Funken, D. Praetorius, and P. Wissgott. The reader should
38 %   consult that paper for more information.
39 %
40 %Authors:
41 %
42 %   S. Funken, D. Praetorius, P. Wissgott 10-07-08
43
44 nE = size(elements,1);
45 nC = size(coordinates,1);
46 x = zeros(nC,1);
47 %*** First vertex of elements and corresponding edge vectors
```

```

48 c1 = coordinates(elements(:,1),:);
49 d21 = coordinates(elements(:,2),:) - c1;
50 d31 = coordinates(elements(:,3),:) - c1;
51 %*** Vector of element areas 4*[T]
52 area4 = 2*(d21(:,1).*d31(:,2)-d21(:,2).*d31(:,1));
53 %*** Assembly of stiffness matrix
54 I = reshape(elements(:,[1 2 3 1 2 3 1 2 3]),9*nE,1);
55 J = reshape(elements(:,[1 1 1 2 2 2 3 3 3]),9*nE,1);
56 a = (sum(d21.*d31,2)./area4)';
57 b = (sum(d31.*d31,2)./area4)';
58 c = (sum(d21.*d21,2)./area4)';
59 A = [-2*a+b+c;a-b;a-c;a-b;b;-a;a-c;-a;c];
60 A = sparse(I,J,A(:));
61 %*** Prescribe values at Dirichlet nodes
62 dirichlet = unique(dirichlet);
63 x(dirichlet) = feval(uD,coordinates(dirichlet,:));
64 %*** Assembly of right-hand side
65 fsT = feval(f,c1+(d21+d31)/3);
66 b = accumarray(elements(:),repmat(12\area4.*fsT,3,1),[nC 1]) - A*x;
67 if ~isempty(neumann)
68     cn1 = coordinates(neumann(:,1),:);
69     cn2 = coordinates(neumann(:,2),:);
70     gmE = feval(g,(cn1+cn2)/2);
71     b = b + accumarray(neumann(:),...
72         repmat(2\sqrt(sum((cn2-cn1).^2,2)).*gmE,2,1),[nC 1]);
73 end
74 %*** Computation of P1-FEM approximation
75 freenodes = setdiff(1:nC, dirichlet);
76 x(freenodes) = A(freenodes, freenodes)\b(freenodes);
77 %*** Compute energy || grad(uh) ||^2 of discrete solution
78 energy = x'*A*x;

```

B.1.2 computeEtaR.m

```

1 function etaR = computeEtaR(x, coordinates, elements, dirichlet, neumann, f, g)
2
3 %computeEtaR: computes residual-based error estimator for finite element
4 %               solution of Laplace problem with mixed Dirichlet-Neumann
5 %               boundary conditions.
6 %
7 %Usage:
8 %
9 %etaR = computeEtaR(x, coordinates, elements, dirichlet, neumann, f, g)
10 %
11 %Comments:
12 %
13 %   The column vector X contains the nodal values of the P1 finite element
14 %   solution. The corresponding finite element mesh is given in terms of
15 %   coordinates, elements, dirichlet and neumann. The volume force <f.m> and
16 %   the Neumann data <g.m> are given as M-files. Either file is assumed
17 %   to take N evaluation points as (N x 2) matrix and to return an (N x 1)
18 %   column vector.
19 %
20 %   The function returns the column vector etaR where etaR(J) is the
21 %   squared error indicator associated with the j-th element. These values
22 %   may be used to mark triangles for refinement. In particular, the
23 %   value of the residual error estimator is given by sqrt(sum(etaR)).
24 %
25 %Remark:
26 %
27 %   This program is a supplement to the paper
28 %   >> Efficient Implementation of Adaptive P1-FEM in Matlab <<
29 %   by S. Funken, D. Praetorius, and P. Wissgott. The reader should
30 %   consult that paper for more information.
31 %
32 %Authors:
33 %
34 %   S. Funken, D. Praetorius, P. Wissgott 10-07-08
35
36 [edge2nodes, element2edges, dirichlet2edges, neumann2edges] ...
37     = provideGeometricData(elements, dirichlet, neumann);
38 %*** First vertex of elements and corresponding edge vectors

```

```

39 c1 = coordinates(elements(:,1),:);
40 d21 = coordinates(elements(:,2),:) - c1;
41 d31 = coordinates(elements(:,3),:) - c1;
42 %*** Vector of element volumes 2*|T|
43 area2 = d21(:,1).*d31(:,2)-d21(:,2).*d31(:,1);
44 %*** Compute curl(uh) = (-duh/dy, duh/dx)
45 u21 = repmat(x(elements(:,2))-x(elements(:,1)), 1,2);
46 u31 = repmat(x(elements(:,3))-x(elements(:,1)), 1,2);
47 curl = (d31.*u21 - d21.*u31)./repmat(area2,1,2);
48 %*** Compute edge terms hE*(duh/dn) for uh
49 dudn21 = sum(d21.*curl,2);
50 dudn13 = -sum(d31.*curl,2);
51 dudn32 = -(dudn13+dudn21);
52 etaR = accumarray(element2edges(:),[dudn21;dudn32;dudn13],[size(edge2nodes,1) 1]);
53 %*** Incorporate Neumann data
54 if ~isempty(neumann)
55     cn1 = coordinates(neumann(:,1),:);
56     cn2 = coordinates(neumann(:,2),:);
57     gmE = feval(g,(cn1+cn2)/2);
58     etaR(element2edges) = etaR(neumann2edges) - sqrt(sum((cn2-cn1).^2,2)).*gmE;
59 end
60 %*** Incorporate Dirichlet data
61 etaR(dirichlet2edges) = 0;
62 %*** Assemble edge contributions of indicators
63 etaR = sum(etaR(element2edges).^2,2);
64 %*** Add volume residual to indicators
65 fsT = feval(f,(c1+(d21+d31)/3));
66 etaR = etaR + (0.5*area2.*fsT).^2;

```

B.2 Code für explizit geforderte Dirichlet-Randbedingung

B.2.1 solveLaplace1.m

Code ist ident zu *solveLaplace.m*.

B.2.2 computeEtaR1.m

```

1 function [etaR,etaVol,etaJump,etaDir] = ...
2 computeEtaR1(x,coordinates,elements,dirichlet,f,g)
3
4
5 [edge2nodes,element2edges,dirichlet2edges] ...
6     = provideGeometricData(elements,dirichlet);
7 %*** First vertex of elements and corresponding edge vectors
8 c1 = coordinates(elements(:,1),:);
9 d21 = coordinates(elements(:,2),:) - c1;
10 d31 = coordinates(elements(:,3),:) - c1;
11 %*** Vector of element volumes 2*|T|
12 area2 = d21(:,1).*d31(:,2)-d21(:,2).*d31(:,1);
13 %*** Compute curl(uh) = (-duh/dy, duh/dx)
14 u21 = repmat(x(elements(:,2))-x(elements(:,1)), 1,2);
15 u31 = repmat(x(elements(:,3))-x(elements(:,1)), 1,2);
16 curl = (d31.*u21 - d21.*u31)./repmat(area2,1,2);
17 %*** Compute edge terms hE*(duh/dn) for uh
18 dudn21 = sum(d21.*curl,2);
19 dudn13 = -sum(d31.*curl,2);
20 dudn32 = -(dudn13+dudn21);
21 etaR = accumarray(element2edges(:),[dudn21;dudn32;dudn13],[size(edge2nodes,1) 1]);
22 %*** Incorporate Dirichlet data
23 etaR(dirichlet2edges) = 0;
24
25 etaJump = sum(etaR(element2edges).^2,2); %Summierung der Jump-Terme auf den inneren
26 % Kanten um jedes Element herum
27
28
29 %*** Bestimme Koordinaten aller Dirichlet-Punkte
30 d1 = coordinates(dirichlet(:,1),:);
31 d2 = coordinates(dirichlet(:,2),:);
32 %*** Bestimme Dirichlet-Rand-rhs

```

```

33 gsT = [ feval(g,d1), feval(g,0.5*(d1+d2)), feval(g,d2)]; %Funktionsauswertungen an
34 % Dirichlet-Knoten und Kantenmittelpunkten
35
36
37 %*** Berechnung des Randintegrals
38 etaDir = zeros(size(edge2nodes,1),1);
39 etaDir(dirichlet2edges) = 4*(gsT(:,1)-2*gsT(:,2)+gsT(:,3)).^2/3;
40 etaDir = sum(etaDir(element2edges),2);
41
42 %*** Add volume residual to indicators
43 fsT = feval(f,(c1+(d21+d31)/3)); %Schwerpunkt des Dreiecks
44 etaVol = (0.5*area2.*fsT).^2;
45
46
47 %*** Alle drei Fehleranteile zusammen ergeben insgesamten Fehler
48 etaR = etaJump + etaDir + etaVol;

```

B.3 Code für gemischte Formulierung

B.3.1 solveLaplace2.m

```

1 function [x,energy] = solveLaplace2(coordinates,elements,dirichlet,f,g)
2
3
4 [edge2nodes,element2edges,dirichlet2edges] = provideGeometricData(elements,dirichlet);
5
6
7 nE = size(elements,1); %number of elements
8 nC = size(coordinates,1); %number of nodes
9 nD = length(dirichlet2edges); %number of Dirichlet-nodes
10 dirichletedges = unique(dirichlet(:,1));
11 x = zeros(2*nC,1);
12 %*** First vertex of elements and corresponding edge vectors
13 c1 = coordinates(elements(:,1),:);
14 d21 = coordinates(elements(:,2),:) - c1;
15 d31 = coordinates(elements(:,3),:) - c1;
16 %*** Vector of element areas 4*|T|
17 area4 = 2*(d21(:,1).*d31(:,2)-d21(:,2).*d31(:,1)); %entspricht 2*det(M)
18 %*** Assembly of stiffness matrix
19 I = reshape(elements(:,[1 2 3 1 2 3 1 2 3]),9*nE,1);
20 J = reshape(elements(:,[1 1 1 2 2 2 3 3 3]),9*nE,1);
21 a = (sum(d21.*d31,2)./area4)';
22 b = (sum(d31.*d31,2)./area4)';
23 c = (sum(d21.*d21,2)./area4)';
24 A = [-2*a+b+c;a-b;a-c;a-b;b;-a;a-c;-a;c];
25
26
27 %*** Bestimme Koordinaten aller Dirichlet-Punkte
28 d1 = coordinates(dirichlet(:,1),:);
29 d2 = coordinates(dirichlet(:,2),:);
30 %*** Bestimme Dirichlet-Rand-Stiffness-Matrix
31 I2 = reshape(dirichlet(:,[1 2 1 2]),4*nD,1);
32 J2 = reshape(dirichlet(:,[1 1 2 2]),4*nD,1);
33 a2 = sqrt(sum((d2-d1).^2,2)); %Laengen der Dirichlet-Kanten
34 B = [a2/3;a2/6;a2/6;a2/3];
35
36 C = sparse([I;I2+nC;J2],[J;J2;I2+nC],[A(:);B(:);B(:)]); %Baue die Mixed-Method Matrix
37
38
39
40
41 %*** Assembly of right-hand side
42 fsT = feval(f,c1+(d21+d31)/3); %Funktionsauswertungen am Schwerpunkt
43 b1 = accumarray(elements(:),repmat(12\area4.*fsT,3,1),[nC 1]); %Summation fuer jeden
44 % Knoten ueber alle Elemente - das Integral ueber ein Element ist das Volumen von einer
45 % Pyramide!
46
47 gsT = feval(g,(d1+d2)/2); %Funktionsauswertungen an den Kantenmittelpunkten
48 b2 = accumarray(dirichlet(:),repmat(2\ a2'.*gsT,2,1),[nC 1]);
49
50

```

```

51
52 *** Computation of P1-FEM approximation
53 x([1:nC, dirichletedges'+nC]) = ...
54 C([1:nC, dirichletedges'+nC],[1:nC, dirichletedges'+nC])\[b1;b2(dirichletedges)];
55
56
57 *** Compute energy || grad(uh) ||^2 of discrete solution
58 energy = x([1:nC, dirichletedges'+nC])'*C([1:nC, dirichletedges'+nC],...
59 [1:nC, dirichletedges'+nC])*x([1:nC, dirichletedges'+nC]);

```

B.3.2 computeEtaR2.m

```

1 function [etaR, etaVol, etaJump, etaDir, etaPh] = ...
2 computeEtaR2(x, coordinates, elements, dirichlet, f, g)
3
4
5
6 [edge2nodes, element2edges, dirichlet2edges] ...
7 = provideGeometricData(elements, dirichlet);
8
9 nEdges = size(edge2nodes, 1);
10 *** First vertex of elements and corresponding edge vectors
11 c1 = coordinates(elements(:, 1), :);
12 d21 = coordinates(elements(:, 2), :) - c1;
13 d31 = coordinates(elements(:, 3), :) - c1;
14 *** Vector of element volumes 2*|T|
15 area2 = d21(:, 1).*d31(:, 2) - d21(:, 2).*d31(:, 1);
16 *** Compute curl(uh) = (-duh/dy, duh/dx)
17 u21 = repmat(x(elements(:, 2)) - x(elements(:, 1)), 1, 2);
18 u31 = repmat(x(elements(:, 3)) - x(elements(:, 1)), 1, 2);
19 curl = (d31.*u21 - d21.*u31)./repmat(area2, 1, 2);
20 *** Compute edge terms hE*(duh/dn) for uh
21 dudn21 = sum(d21.*curl, 2);
22 dudn13 = -sum(d31.*curl, 2);
23 dudn32 = -(dudn13+dudn21);
24 etaJump = accumarray(element2edges(:), [dudn21; dudn32; dudn13], [size(edge2nodes, 1) 1]);
25 etaPh = etaJump;
26 *** Incorporate Dirichlet data
27 etaJump(dirichlet2edges) = 0;
28 etaPh = etaPh - etaJump; %In etaPh stehen bei den Dirichletkanten die
29 % Normalableitungen
30
31 etaJump = sum(etaJump(element2edges).^2, 2); %Summierung der Jump-Terme auf den inneren
32 % Kanten um jedes Element herum
33
34
35
36 *** Bestimme Koordinaten aller Dirichlet-Punkte
37 nC = size(coordinates, 1);
38 d1 = coordinates(dirichlet(:, 1), :);
39 d2 = coordinates(dirichlet(:, 2), :);
40 a = sqrt(sum((d2-d1).^2, 2))'; %Laengen der Dirichlet-Kanten
41 *** Bestimme Dirichlet-Rand-rhs
42 gsT = [feval(g, d1), feval(g, 0.5*(d1+d2)), feval(g, d2)]; %Funktionsauswertungen an
43 % Dirichlet-Knoten und Kantenmittelpunkten
44
45
46 *** Berechnung des Randintegrals
47 etaDir = zeros(size(edge2nodes, 1), 1);
48 etaDir(dirichlet2edges) = 4*(gsT(:, 1) - 2*gsT(:, 2) + gsT(:, 3)).^2/3;
49 etaDir = sum(etaDir(element2edges), 2);
50
51
52
53
54
55 *** Berechnung des Randintegrals mit ph
56 etaPh(dirichlet2edges) = a'.^2.*((x(nC+dirichlet(:, 2))+etaPh(dirichlet2edges)).^3 - ...
57 (x(nC+dirichlet(:, 1))+etaPh(dirichlet2edges)).^3)/...
58 (3*(x(nC+dirichlet(:, 2))-x(nC+dirichlet(:, 1))))
59 etaPh = sum(etaPh(element2edges), 2);
60

```

```

61
62
63
64 %*** Add volume residual to indicators
65 fsT = feval(f, (c1+(d21+d31)/3)); %Schwerpunkt des Dreiecks
66 etaVol = (0.5*area2.*fsT).^2;
67
68
69 %*** Alle drei Fehleranteile zusammen ergeben insgesamten Fehler
70 etaR = etaJump + etaDir + etaPh + etaVol;

```

B.4 Code für Nietches Methode

B.4.1 solveLaplace3.m

```

1 function [x,energy] = solveLaplace3(coordinates,elements,dirichlet,f,g,chi)
2
3
4
5 nE = size(elements,1); %number of elements
6 nC = size(coordinates,1); %number of nodes
7 nD = size(dirichlet,1); %number of Dirichlet-nodes
8 x = zeros(nC,1);
9 %*** First vertex of elements and corresponding edge vectors
10 c1 = coordinates(elements(:,1),:);
11 d21 = coordinates(elements(:,2),:) - c1;
12 d31 = coordinates(elements(:,3),:) - c1;
13 %*** Vector of element areas 4*|T|
14 area4 = 2*(d21(:,1).*d31(:,2) - d21(:,2).*d31(:,1)); %entspricht 2*det(M)
15 %*** Assembly of stiffness matrix
16 I = reshape(elements(:,[1 2 3 1 2 3 1 2 3]),9*nE,1);
17 J = reshape(elements(:,[1 1 1 2 2 2 3 3 3]),9*nE,1);
18 a = (sum(d21.*d31,2)./area4)';
19 b = (sum(d31.*d31,2)./area4)';
20 c = (sum(d21.*d21,2)./area4)';
21 A = [-2*a+b+c;a-b;a-c;a-b;b;-a;a-c;-a;c];
22
23
24 %ermittelt zu jeder Dirichletkante den fehlenden Eckpunkt des Elements
25 dirichletmissing = zeros(nD,1);
26 for i=1:nD
27     tmp = ((elements==dirichlet(i,1)) + (elements==dirichlet(i,2)));
28     tmp2 = elements(repmat(sum(tmp,2)==2,1,3));
29     tmp2 = tmp2(tmp2~=dirichlet(i,1));
30     tmp2 = tmp2(tmp2~=dirichlet(i,2));
31     dirichletmissing(i) = tmp2;
32 end
33
34
35 %*** Bestimme Koordinaten aller Dirichlet-Punkte und
36 %Missingdirichlet-Punkte
37 d1 = coordinates(dirichlet(:,1),:);
38 d2 = coordinates(dirichlet(:,2),:);
39 d3 = coordinates(dirichletmissing,:);
40 e21 = d2-d1;
41 e31 = d3-d1;
42 %*** Vektor von 2*Randelementvolumenflaeche
43 area2 = e21(:,1).*e31(:,2) - e21(:,2).*e31(:,1);
44 %*** Bestimme Dirichlet-Rand-Stiffness-Matrix
45 I2 = reshape([dirichlet(:,[1 2 1 2]),dirichletmissing(:,[1 1])],6*nD,1);
46 J2 = reshape(dirichlet(:,[1 1 2 2 1 2]),6*nD,1);
47 %*** Bestimme Normalenableitung auf Dirichletkante fuer alle drei
48 %Hutfunktionen um das Element
49 bb = (sum(e21.*e31,2)./area2)';
50 cc = -(sum(e21.*e21,2)./area2)';
51 aa = -(bb+cc);
52
53 B = [aa;bb;aa;bb;cc;cc]/2;
54
55
56 %*** Bestimme Dirichlet-Rand-Stiffness-Matrix

```

```

57 I3 = reshape(dirichlet(:,[1 2 1 2])',4*nD,1);
58 J3 = reshape(dirichlet(:,[1 1 2 2])',4*nD,1);
59 C = chi*[ones(1,nD)/3;ones(1,nD)/6;ones(1,nD)/6;ones(1,nD)/3];
60
61
62
63 D = sparse([I;I2;J2;I3],[J;J2;I2;J3],[A(:);-B(:);-B(:);C(:)]); %Baue die Nietches-Method
64 % Matrix
65
66
67
68 %*** Assembly of right-hand side
69 fsT = feval(f,c1+(d21+d31)/3); %Funktionsauswertungen am Schwerpunkt
70 b1 = accumarray(elements(:),repmat(12\area4.*fsT,3,1),[nC 1]); %Summation fuer jeden
71 % Knoten ueber alle Elemente - das Integral ueber ein Element ist das Volumen von einer
72 % Pyramide!
73
74
75 gsT = feval(g,(d1+d2)/2); %Funktionsquaswertungen an den Kantenmittelpunkten
76 b2 = accumarray([dirichlet(:);dirichletmissing],[aa'.*gsT;bb'.*gsT;cc'.*gsT],[nC 1]);
77
78
79 b3 = chi*accumarray(dirichlet(:),repmat(2\ones(nD,1).*gsT,2,1),[nC 1]);
80
81 b = b1-b2+b3;
82
83 %*** Computation of P1-FEM approximation
84 x = D\b;
85 %*** Compute energy || grad(uh) ||^2 of discrete solution
86 energy = x'*D*x;

```

B.4.2 computeEtaR3.m

```

1 function [etaR,etaVol,etaJump,etaDir,etaH] = ...
2 computeEtaR3(x,coordinates,elements,dirichlet,f,g,chi)
3
4
5 [edge2nodes,element2edges,dirichlet2edges] ...
6 = provideGeometricData(elements,dirichlet);
7 %*** First vertex of elements and corresponding edge vectors
8 c1 = coordinates(elements(:,1),:);
9 d21 = coordinates(elements(:,2),:)-c1;
10 d31 = coordinates(elements(:,3),:)-c1;
11 %*** Vector of element volumes 2*|T|
12 area2 = d21(:,1).*d31(:,2)-d21(:,2).*d31(:,1);
13 %*** Compute curl(uh) = (-duh/dy, duh/dx)
14 u21 = repmat(x(elements(:,2))-x(elements(:,1)),1,2);
15 u31 = repmat(x(elements(:,3))-x(elements(:,1)),1,2);
16 curl = (d31.*u21 - d21.*u31)./repmat(area2,1,2);
17 %*** Compute edge terms hE*(duh/dn) for uh
18 dudn21 = sum(d21.*curl,2);
19 dudn13 = -sum(d31.*curl,2);
20 dudn32 = -(dudn13+dudn21);
21 etaR = accumarray(element2edges(:),[dudn21;dudn32;dudn13],[size(edge2nodes,1) 1]);
22 %*** Incorporate Dirichlet data
23 etaR(dirichlet2edges) = 0;
24
25 etaJump = sum(etaR(element2edges).^2,2); %Summierung der Jump-Terme auf den inneren...
26 % Kanten um jedes Element herum
27
28
29 %*** Bestimme Koordinaten aller Dirichlet-Punkte
30 d1 = coordinates(dirichlet(:,1),:);
31 d2 = coordinates(dirichlet(:,2),:);
32 %*** Bestimme Dirichlet-Rand-rhs
33 gsT = [feval(g,d1),feval(g,0.5*(d1+d2)),feval(g,d2)]; %Funktionsauswertungen an
34 % Dirichlet-Knoten und Kantenmittelpunkten
35
36
37 %*** Berechnung des Randintegrals
38 etaDir = zeros(size(edge2nodes,1),1);
39 etaDir(dirichlet2edges) = 4*(gsT(:,1)-2*gsT(:,2)+gsT(:,3)).^2/3;

```

```

40 etaDir = sum(etaDir(element2edges),2);
41
42
43 %*** Berechnung des Randintegrals mit h^-1/2
44 etaH = zeros(size(edge2nodes,1),1);
45 etaH(dirichlet2edges) = ((gsT(:,3)-x(dirichlet(:,2))).^3-(gsT(:,1)-...
46 x(dirichlet(:,1))).^3)./(3*((gsT(:,3)-x(dirichlet(:,2)))-(gsT(:,1)-x(dirichlet(:,1))))));
47 etaH = sum(etaH(element2edges),2);
48
49
50
51 %*** Add volume residual to indicators
52 fsT = feval(f,(c1+(d21+d31)/3)); %Schwerpunkt des Dreiecks
53 etaVol = (0.5*area2.*fsT).^2;
54
55
56 %*** Alle drei Fehleranteile zusammen ergeben insgesamten Fehler
57 etaR = etaJump + etaDir + etaH + etaVol;

```

Literaturverzeichnis

- [AFKPP] AURADA M., FEISCHL M., KEMETMÜLLER J., PAGE M., PRAETORIUS D.: *Each $H^{1/2}$ -stable projection yields convergence and quasi-optimality of adaptive FEM with inhomogeneous Dirichlet data in \mathbb{R}^d* . ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 47 (2013), no. 4, 1207–1235.
- [BKW] BLÜMLINGER M., KALTENBÄCK M., WORACEK H.: *Funktionalanalysis*. Skriptum zur Vorlesung an der TU Wien, 2011.
- [BBF] BOFFI D., BREZZI F., FORTIN M.: *Mixed Finite Element Methods and Applications*. Springer Verlag, Berlin u.a. 2013.
- [FPP] FEISCHL M., PAGE M., PRAETORIUS D.: *Convergence and quasi-optimality of adaptive FEM with inhomogeneous Dirichlet data*. J. Comput. Appl. Math. 255 (2014), 481–501.
- [CT] CROUZEIX M., THOMÉE V.: *The stability in L^p and $W^{1,p}$ of the L^2 -projection onto finite element function spaces*. Math. Comput. 48 (1987) 521—532.
- [FPW] FUNKEN S., PRAETORIUS D., WISSGOTT P.: *Efficient implementation of adaptive P1-FEM in Matlab*. Comput. Methods Appl. Math. 11 (2011), no. 4, 460-490.
- [Han] HANSBO P.: *Nitsche’s method for interface problems in computational mechanics*. GAMM-Mitt. 28 (2005), no. 2, 183–206.
- [Hav] HAVLICEK H.: *Lineare Algebra für Technische Mathematiker*. Heldermann Verlag, Lemgo 2006.
- [Jue] JÜNGEL A.: *Partielle Differentialgleichungen*. Skriptum zur Vorlesung an der TU Wien, 2011.
- [Kal] KALTENBÄCK M.: *Analysis 3*. Skriptum zur Vorlesung an der TU Wien, 2009.
- [KPP] KARKULIK M., PAVLICEK D., PRAETORIUS D.: *On 2D newest vertex bisection: optimality of mesh-closure and H^1 -stability of L^2 -projection*. Constr. Approx. 38 (2013), no. 2, 213–234.
- [Kus] KUSOLITSCH N.: *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Verlag, Berlin u.a. 2014.
- [Pra] PRAETORIUS D.: *Finite elements methode*. Skriptum zur Vorlesung an der TU Wien, 2014.
- [Pra2] PRAETORIUS D.: *Numerische Mathematik*. Skriptum zur Vorlesung an der TU Wien, 2006.

- [Soe] SCHÖBERL J.: *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Skriptum zur Vorlesung an der TU Wien, 2009.
- [Tho] THOMÉE V.: *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Springer-Verlag, Berlin u.a. 2006.
- [Ver] VERFÜRTH R.: *A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. J. Comp. Appl. Math., 50 (1994), pp. 67-83.