

Unterschrift des Betreuers



DIPLOMARBEIT

Analyse adaptiver Netzverfeinerungsstrategien für eine hypersinguläre Integralgleichung in 2D

Ausgeführt am Institut für
Analysis und Scientific Computing
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.Math. Dr.techn. Dirk Praetorius

durch
Petra Goldenits
Ob. Sauerbrunn 3
7100 Neusiedl am See

Datum

Unterschrift

Danksagung

Ich bedanke mich bei Prof. Praetorius für die ausgezeichnete Betreuung und die kompetente Weise meine Fragen zu beantworten, sowie für die äußerst interessante Einführung in spannende Teilgebiete der Angewandten Mathematik. Ich habe den freundlichen und angenehmen persönlichen Umgang mit ihm und der unter seiner Leitung stehenden Arbeitsgruppe sehr geschätzt. Besonderer Dank gilt hierbei auch Samuel Ferraz-Leite, der mich vor allem in der Endphase meiner Diplomarbeit unterstützt hat.

An dieser Stelle möchte ich jenen Studienkollegen Dank aussprechen, die mir besonders ans Herz gewachsen sind. Viele fröhliche gemeinsame Stunden, die ich mit ihnen verbringen durfte, machten den Weg durch dieses Studium zu einem, an dem ich mich sicherlich immer gerne erinnern werde.

Besonderer Dank gilt meiner Familie, die mich in allen Situationen und Herausforderungen, seien es private oder universitäre Belange, immer unterstützt hat. Sie gab mir Motivation meine mir selbst gesteckten Ziele zu erreichen. Dankeschön!

Kurzfassung

Für die wenigsten partiellen Differentialgleichungen lässt sich eine Lösung in analytisch geschlossener Form darstellen und quantitativ auswerten. Daher bedient man sich numerischer Verfahren, die eine approximative Lösung auf einem endlichdimensionalen Teilraum berechnen und gleichzeitig gewährleisten, dass der Fehler in Bezug auf die exakte Lösung einer gewissen Genauigkeit genügt.

Zu einer der grundlegenden Diskretisierungstechniken zur Lösung elliptischer partieller Differentialgleichungen gehört neben der Finiten Element Methode die Randelementmethode. Dabei wird die partielle Differentialgleichung unter der Kenntnis der Fundamentallösung in eine Integralgleichung übergeführt, auf die im nächsten Schritt das Galerkin-Verfahren angewandt wird.

In dieser Arbeit werden gewisse a posteriori Fehlerabschätzungen für eine hypersinguläre Integralgleichung entwickelt. Wir betrachten dabei jene, die der Laplace-Gleichung mit gemischten Randdaten entspringt. Unsere Analysis basiert auf Lokalisierungstechniken für die Energienorm der Integralgleichung und überträgt sich somit auf andere hypersinguläre Integralgleichungen, z.B. auf die Lamé-Gleichung oder die Stokes-Gleichung.

Insgesamt werden 13 verschiedene a posteriori Fehlerschätzer eingeführt. Im Wesentlichen werden dazu aus der Literatur bekannte Techniken zur Entwicklung solcher Schätzer zusammengetragen und für den Fall einer hypersingulären Integralgleichung adaptiert. Die Bedeutung solcher Schätzer liegt zum einen darin, dass es möglich ist unabhängig von der im Allgemeinen unbekannt exakten Lösung ein Maß für die Größe des Fehlers, der durch Approximation der exakten Lösung entsteht, zu erhalten. Zum anderen ermöglicht ein a posteriori Fehlerschätzer die Kontrolle bzw. Steuerung des Approximationsfehlers in numerischen Simulationen. Dabei zielt man darauf ab, Bereiche, in denen die Lösung glatt ist, möglichst wenig aufzulösen. Dazu muss der numerische Algorithmus Kriterien beinhalten, die das lokale Verhalten der Lösung erkennen.

Im Wesentlichen kann man die in dieser Arbeit präsentierten Fehlerschätzer nach der Technik, auf der sie gründen, gliedern. Eine Klasse stellen die Fehlerschätzer basierend auf Erweiterung des Raumes dar. Die Idee hierfür wurde erstmals durch FERRAZ-LEITE/PRAETORIUS 2008 [16] vorgestellt. Eine weitere Gruppe für sich bildet der Zwei-Level-Fehlerschätzer, der auf die Arbeiten von MUND/STEPHAN/WEISSE 1998 [26] zurückgeht. Angelehnt an CARSTENSEN/PRAETORIUS 2007 [8], werden weitere Fehlerschätzer betrachtet.

Neben den Eigenschaften der Effizienz und der Zuverlässigkeit unter Voraussetzung einer gewissen Saturationsannahme wird gezeigt, dass alle 13 Fehlerschätzer zueinander äquivalent sind. Während die Effizienz eines a posteriori Fehlerschätzers ρ eine Abschätzung nach unten bereitstellt, also $\rho \leq C_{\text{eff}} \|u - u_h\|$ für eine Konstante $C_{\text{eff}} > 0$ gilt, bedeutet Zuverlässigkeit unter Existenz einer Konstanten $C_{\text{rel}} > 0$, dass $\rho \geq C_{\text{rel}} \|u - u_h\|$ erfüllt ist.

Darüber hinaus liegt einer der Schwerpunkte dieser Arbeit auf Konvergenzaussagen der adaptiven Randelementmethode. Hierfür werden die jüngsten Ideen von FERRAZ-LEITE, ORTNER, PRAETORIUS 2008 [15] für die adaptive Randelementmethode für eine hypersinguläre Integralgleichung ausgearbeitet.

Numerische Experimente schließen die Arbeit ab und belegen die analytischen Ergebnisse.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Modellproblem	1
1.1	Modellproblem	2
1.1.1	Newton-Potential	3
1.1.2	Einfachschichtpotential	3
1.1.3	Doppelschichtpotential	4
1.1.4	Darstellungsformel	4
1.2	Aufbau der Arbeit und Kernresultate	5
2	Die Randelementmethode	9
2.1	Sobolev-Räume	9
2.2	Hypersinguläre Integralgleichung	14
2.3	Stetige Randelemente	15
2.4	Galerkin-Randelementmethode	16
2.5	Konvergenz der Galerkin-Randelementmethode	17
3	A posteriori Fehlerschätzung	21
3.1	Lokalisierungstechniken	22
3.1.1	Notation	22
3.1.2	Lokale inverse Abschätzung	23
3.1.3	Lokalisierung der $H^{1/2}$ -Norm	24
3.2	Fehlerschätzung durch Erweiterung des Raumes	26
3.3	Zwei-Level-Fehlerschätzer	31
3.4	Fehlerschätzung durch Mittelung	37
3.5	Zusammenstellung aller eingeführten Fehlerschätzer	42
4	Konvergenz der adaptiven Randelementmethode	45
4.1	Kontraktionsargumente für $\mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell$ und $\tilde{\beta}$	46
4.2	Konvergenz aufgrund der Schätzerreduktion	51
5	Implementierung der 2D BEM	55
5.1	Einführende Begriffe	55
5.2	Parametrisierung von Randintegralen	57
5.3	Einfache Integrale für $\Delta < 0$	59
5.4	Approximative Berechnung des Doppelschichtpotentials	61
5.4.1	Approximation des Doppelschichtpotentials mittels affiner Funktionen	63
5.5	Numerische Berechnung der rechten Seite	64
6	Numerische Experimente	69
6.1	Numerische Aspekte	69
6.1.1	Berechnung der Systemmatrix	69
6.1.2	Sonstige Bemerkungen	71
6.2	Schlitz-Problem	72

6.3	Neumann-Problem mit glatter Lösung	85
6.4	Neumann-Problem auf L-Gebiet	95
A	Quelltexte	107
A.1	Berechnung der Systemmatrix	110
A.2	Berechnung der rechten Seite	118
A.3	Beispiel am quadratförmigen Rand	121

Kapitel 1

Einleitung und Modellproblem

Viele physikalische Probleme lassen sich durch Systeme linearer und nichtlinearer Differential- und Integralgleichungen beschreiben. Zwei der heute am häufigsten verwendeten numerischen Diskretisierungsverfahren zur näherungsweise Lösung von elliptischen Randwertproblemen sind die Finite Elemente Methode (FEM, engl. *finite element method*) und die Randelementmethode (BEM, engl. *boundary element method*). Letztgenannte Methode hat gegenüber der Finiten Elemente Methode gewisse Vor- und Nachteile.

Ein wesentlicher Nachteil der Randelementmethode gegenüber der Finiten Elemente Methode ist, dass die Fundamentallösung des Differentialoperators explizit bekannt sein muss, um die Integralgleichungen aufstellen zu können. Damit findet die Randelementmethode zwar nur in einigen wenigen, dafür aber praktisch relevanten Problemstellungen Anwendung. Außerdem sind beim Auswerten der auftretenden schwach singulären Integrale aufwändige Quadraturverfahren vonnöten. Aus der Literatur sind geeignete Methoden zur Implementierung solcher Verfahren bekannt (vgl. SAUTER/SCHWAB 2004 [30]). Ein weiterer Nachteil der Randelementmethode besteht darin, dass die auftretenden Matrizen, anders als im Fall der Finiten Elemente Methode, voll besetzt sind. Zusätzliche Kompressionstechniken, wie die schnelle Multipolmethode (GREENGARD/ROKHLIN 1997 [18]), die Methode des Panelclustering (HACKBUSCH/NOWAK 1989 [20]), hierarchische Matrizen (HACKBUSCH 1999 [19]) oder die Waveletdiskretisierung (DAHMEN/SCHNEIDER 1999 [11]), verringern dabei den Speicheraufwand.

Ein Vorteil dagegen ist, dass man durch Umformulierung des gegebenen Randwertproblems im \mathbb{R}^d in eine Randintegralgleichung lediglich eine $(d - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit zu diskretisieren hat. Weiters konvergiert die Galerkin-Randelementmethode bei fixem Polynomgrad generisch mit höherer Ordnung als die Finite Elemente Methode. Ein weiterer Vorteil ist, dass im Gegensatz zur Finiten Elemente Methode, die sich nur zum Lösen von Gleichungen auf beschränkten Gebieten eignet, die Randelementmethode auch zum Einsatz beim Lösen von Außenraumproblemen kommt.

Da die a posteriori Fehlerschätzung in Bezug auf die Randelementmethode mathematisch noch nicht so gut verstanden ist, wie z.B. für die Finite Elemente Methode, ist dieses Gebiet unter anderem Gegenstand aktueller Forschung. Die Arbeit ERATH/FERRAZ-LEITE/FUNKEN/PRAETORIUS 2009 [13] gibt einen Überblick über Energienorm-basierte a posteriori Fehlerschätzer. Es werden der Zwei-Level-Fehlerschätzer aus MUND/STEPHAN/WEISSE 1998 [26], der $(h - h/2)$ -Fehlerschätzer aus FERRAZ-LEITE/PRAETORIUS 2008 [16] sowie Glättungsschätzer aus CARSTENSEN/PRAETORIUS 2007 [9] für die Symmsche Integralgleichung studiert. Grundlegend für die Analysis dieser Fehlerschätzer sind Lokalisierungstechniken für den Energieraum $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Aufgabe der vorliegenden Arbeit war es, ausgehend von Ideen aus CARSTENSEN/PRAETORIUS 2007 [8], Lokalisierungstechniken für den Energieraum $\mathcal{H} \subseteq H^{1/2}(\Gamma)$ der hypersingulären Integralgleichung zu entwickeln. Die genannten Fehlerschätzer werden insbesondere für die hypersinguläre Integralgleichung studiert, was ein neuer Beitrag zum mathematischen Verständnis der a posteriori Fehlerschätzung in der Randelementmethode ist.

Konvergenz adaptiver Verfahren ist für die Methode der Finiten Elemente mittlerweile gut verstanden. Jüngst konnte in CASCON/KREUZER/NOCHETTO/SIEBERT 2008 [10] sogar die Optimalität

eines durch den residualen Fehlerschätzer gesteuerten adaptiven Verfahrens gezeigt werden. Dabei stellt sich im Konvergenzbeweis für adaptive Algorithmen der Finiten Elemente Methode die Fehlerschätzerreduktion als zentral heraus. Erstmals konnte eine solche Schätzerreduktion in FERRAZ-LEITE/ORTNER/PRAETORIUS 2008 [15] für die Randelementmethode im Fall des $(h-h/2)$ -Schätzers für die Symmsche Integralgleichung und damit Konvergenz des adaptiven Verfahrens gezeigt werden. Ziel war es diese erste Konvergenzaussage zu erweitern. Wir beweisen die Fehlerschätzerreduktion und als Konsequenz die Konvergenz der zugehörigen adaptiven Verfahren für die lokalen Fehlerschätzer, die auf Erweiterung des Raumes basieren sowie für die lokalen Glättungsfehlerschätzer. Damit leistet diese Arbeit einen wesentlichen Beitrag zum mathematischen Verständnis adaptiver Verfahren für die hypersinguläre Integralgleichung zum Laplace-Operator.

1.1 Modellproblem

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand $\Gamma := \partial\Omega$. Der Rand $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ sei disjunkt zerlegt in den Dirichletrand Γ_D und den Neumannrand Γ_N . Wir betrachten die Laplace-Gleichung mit gemischten Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega, \\ u &= g_D & \text{auf } \Gamma_D, \\ \partial_n u &= g_N & \text{auf } \Gamma_N. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Die Fundamentallösung des Laplace-Operators ist durch

$$G(z) = -\frac{1}{2\pi} \log |z|$$

gegeben (STEINBACH 2004 [31, Kapitel 5.1]). $G(z)$ wird auch als Newton-Kern bezeichnet. Folgendes Lemma stellt seine Eigenschaften dar. Der Beweis erfolgt durch einfaches Nachrechnen.

Lemma 1.1.1 (i) *Es gilt $G \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ mit ersten und zweiten Ableitungen*

$$\partial_j G(z) = -\frac{1}{|S_2^d|} \frac{z_j}{|z|^d} \quad \text{und} \quad \partial_{jk} G(z) = \frac{1}{|S_2^d|} \frac{\delta_{jk}|z|^2 - dz_j z_k}{|z|^{d+2}},$$

wobei $|S_2^d|$ die Größe der Einheitskugel in \mathbb{R}^d bezeichnet mit $|S_2^2| = 2\pi$ und $|S_2^3| = 4\pi$.

(ii) *Es gilt $-\Delta G(z) = 0$ für $z \neq 0$.*

(iii) *$G \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^2)$ für $1 < p/(p-1)$, insbesondere gilt $G \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$.*

(iv) *$\partial_j G \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^2)$ für $2 < p/(p-1)$, insbesondere gilt $\partial_j G \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$.*

Unser Ziel ist eine einfache Darstellung der Lösung der obigen partiellen Differentialgleichung (1.1).

Lemma 1.1.2 *Es gibt einen eindeutigen Spuroperator $\gamma_0 \in L(H^1(\Omega); H^{1/2}(\Gamma))$, sodass $\gamma_0 u = u|_\Gamma$ für alle $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ gilt.*

Lemma 1.1.3 Sei $u \in H^1(\Omega)$ und gelte $-\Delta u = f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$. Dann gilt für die Variationsformulierung des Laplace-Problems

$$\langle f; v \rangle = (\nabla u; \nabla v)_{L^2(\Omega)} - \langle \gamma_1 u; \gamma_0 v \rangle \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega), \quad (1.2)$$

dass die Konormalenableitung $\gamma_1 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ eindeutig ist. Insbesondere gilt $\gamma_1 u = \partial_n u$ für alle $u \in C^2(\bar{\Omega})$.

Mit Hilfe dieser Abbildungen lautet die Laplace-Gleichung in der schwachen Formulierung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega), \\ \gamma_0 u &= g_D \in H^{1/2}(\Gamma_D), \\ \gamma_1 u &= g_N \in H^{-1/2}(\Gamma_N), \end{aligned} \quad (1.3)$$

wobei die erste Gleichung über die erste Greensche Formel (1.2) verstanden wird.

Für die Herleitung geeigneter Randintegralgleichungen zur Bestimmung der vollständigen Cauchy-Daten müssen zunächst Integraloperatoren definiert und ihre Abbildungseigenschaften betrachtet werden.

1.1.1 Newton-Potential

Mit

$$\tilde{N}f(x) := \int_{\Omega} G(x-y)f(y)dy \quad \text{für } x \in \Omega \quad (1.4)$$

wird formal das Volumen- oder Newton-Potential einer gegebenen Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet. Es ist zu bemerken, dass das Newton-Potential nichts anderes ist als die Faltung $\tilde{N}f = G * f$ mit dem Newton-Kern.

Satz 1.1.4 (Steinbach 2004 [31, Kapitel 6.1]) Das Newton-Potential \tilde{N} kann als Operator $\tilde{N} \in L(\tilde{H}^{-1}(\Omega); H^1(\Omega))$ aufgefasst werden, und es gilt

$$-\Delta(\tilde{N}f) = f \quad \text{für alle } f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega).$$

Insbesondere sind die Anwendung des Spuoperators und der Konormalenableitung wohldefiniert und erklären lineare und stetige Operatoren

$$\begin{aligned} \gamma_0 \tilde{N} &: \tilde{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \\ \gamma_1 \tilde{N} &: \tilde{H}^{-1}(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

Bemerkung 1.1.5 Formal wird der Operator \tilde{N} für Funktionen $f \in L^\infty(\Omega)$ definiert und dann fortgesetzt auf $\tilde{H}^{-1}(\Omega)$. Dieselbe Vorgehensweise wendet man auch auf das Einfachschichtpotential \tilde{V} sowie das Doppelschichtpotential \tilde{K} an.

1.1.2 Einfachschichtpotential

Für eine gegebene Dichte $\phi \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$ wird das Einfachschichtpotential formal durch

$$\tilde{V}\phi(x) := \int_{\Gamma} G(x-y)\phi(y)ds_y \quad \text{für } x \in \Omega \quad (1.5)$$

gegeben.

Satz 1.1.6 (Steinbach 2004 [31, Kapitel 6.2]) *Das Einfachschichtpotential \tilde{V} kann als Operator $\tilde{V} \in L(H^{-1/2}(\Gamma); H^1(\Omega))$ für $\Gamma = \partial\Omega$ aufgefasst werden, und es gilt*

$$-\Delta(\tilde{V}\phi) = 0 \in \tilde{H}^{-1}(\Omega) \quad \text{für alle } \phi \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Insbesondere sind die Anwendung des Spuroperators und der Konormalenableitung wohldefiniert und erklären lineare und stetige Operatoren

$$\begin{aligned} \gamma_0 \tilde{V} &: H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \\ \gamma_1 \tilde{V} &: H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

1.1.3 Doppelschichtpotential

Für ein $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ wird das Doppelschichtpotential formal durch

$$\tilde{K}v(x) := \int_{\Gamma} \gamma_{1,y} G(x-y)v(y) ds_y \quad \text{für } x \in \Omega \quad (1.6)$$

gegeben.

Satz 1.1.7 (Steinbach 2004 [31, Kapitel 6.2]) *Das Doppelschichtpotential \tilde{K} kann als Operator $\tilde{K} \in L(H^{1/2}(\Gamma); H^1(\Omega))$ aufgefasst werden, und es gilt*

$$-\Delta(\tilde{K}v) = 0 \in \tilde{H}^{-1}(\Omega) \quad \text{für alle } v \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Insbesondere sind die Anwendung des Spuroperators und der Konormalenableitung wohldefiniert und erklären lineare und stetige Operatoren

$$\begin{aligned} \gamma_0 \tilde{K} &: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma), \\ \gamma_1 \tilde{K} &: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

1.1.4 Darstellungsformel

Mit Hilfe der nun vorgestellten Randintegraloperatoren und deren Eigenschaften können wir nun eine Darstellungsformel für die exakte Lösung u des Problems (1.3) formulieren.

Satz 1.1.8 (Darstellungsformel) *Für $u \in H^1(\Omega)$ mit $-\Delta u = f \in \tilde{H}^{-1}(\Omega)$ gilt*

$$u = \tilde{N}f + \tilde{V}(\gamma_1 u) - \tilde{K}(\gamma_0 u). \quad (1.7)$$

Insbesondere erfüllen die Cauchy-Daten $(\gamma_0 u, \gamma_1 u) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ das Calderón System

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_0 \tilde{K} & \gamma_0 \tilde{V} \\ -\gamma_1 \tilde{K} & \gamma_1 \tilde{V} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_0 \tilde{N}f \\ \gamma_1 \tilde{N}f \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Ein Beweis für die Gültigkeit der Darstellungsformel im schwachen Sinn ist in [30, Satz 3.1.6] nachzulesen. Das Calderón System ergibt sich durch Anwendung des Spuroperators γ_0 bzw. der Konormalenableitung γ_1 auf Gleichung (1.7).

Dieser Satz garantiert, dass die Lösung u der Differentialgleichung eindeutig bestimmt ist, sobald die Cauchy-Daten $(\gamma_0 u, \gamma_1 u) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ bekannt sind.

Es werden nun übliche Notationen für die Spur und Normalenableitung der drei Integraloperatoren eingeführt.

- $N_0 := \gamma_0 \tilde{N}$ $N_0 \in L(\tilde{H}^{-1}(\Omega); H^{1/2}(\Gamma))$
- $N_1 := \gamma_1 \tilde{N}$ $N_1 \in L(\tilde{H}^{-1}(\Omega); H^{-1/2}(\Gamma))$
- $V := \gamma_0 \tilde{V}$ Einfachschichtpotential $V \in L(\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma); H^{1/2}(\Gamma))$
- $K' := \gamma_1 \tilde{V} - \frac{1}{2}$ adjungiertes Doppelschichtpotential $K' \in L(\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma); H^{-1/2}(\Gamma))$
- $K := \gamma_0 \tilde{K} + \frac{1}{2}$ Doppelschichtpotential $K \in L(\tilde{H}^{1/2}(\Gamma); H^{1/2}(\Gamma))$
- $W := -\gamma_1 \tilde{K}$ hypersingulärer Integraloperator $W \in L(\tilde{H}^{1/2}(\Gamma); H^{-1/2}(\Gamma))$

Mit dieser Notation schreibt sich das Calderón System wie folgt

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - K & V \\ W & \frac{1}{2} + K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_0 f \\ N_1 f \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Bemerkung 1.1.9 *Die Operatormatrix*

$$C := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - K & V \\ W & \frac{1}{2} + K' \end{pmatrix}$$

wird Calderón-Projektor genannt. Sie erfüllt die Projektionseigenschaft $C^2 = C$.

Wir betrachten nun die zweite Gleichung des Calderón Systems (1.9)

$$\gamma_1 u = W \gamma_0 u + \left(\frac{1}{2} + K' \right) \gamma_1 u + N_1 f.$$

Dabei erhalten wir mit $\phi = \gamma_1 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ und $v = \gamma_0 u \in H^{1/2}(\Gamma)$ die hypersinguläre Integralgleichung

$$Wv = \left(\frac{1}{2} - K' \right) \phi - N_1 f, \quad (1.10)$$

kurz auch geschrieben als

$$Wv = F \quad (1.11)$$

mit Lösung $v = \gamma_0 u \in H^{1/2}(\Gamma)$ und gewisser rechter Seite $F \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$. Das Lösen der hypersingulären Integralgleichung stellt somit ein Teilproblem beim Lösen des Laplace-Problems mit gemischten Randdaten dar (vgl. (STEINBACH 2004 [31, Kapitel 7.3])). Im Fall $\Gamma_N = \Gamma$ ist die Aufgabenstellung äquivalent zum Neumann-Problem und dient dieser Arbeit als Modellproblem.

1.2 Aufbau der Arbeit und Kernresultate

Nachdem in diesem einleitenden Kapitel zum einen das Modellproblem erklärt und zum anderen die Ziele dieser Arbeit formuliert wurden, ist somit der Rahmen der Arbeit festgelegt.

In Kapitel 2 beschäftigen wir uns zunächst mit grundlegenden mathematischen Ergebnissen und erklären die Galerkin-Randelementmethode für die hypersinguläre Integralgleichung. Im Wesentlichen werden dazu Ergebnisse aus der Literatur zusammengetragen und in einheitlicher Notation zusammengestellt. Weiters werden Sätze zitiert, die dieser Arbeit zur späteren Referenzierung dienen.

In Kapitel 3 finden sich einige Kernresultate dieser Arbeit. Hierin werden a posteriori Fehlerschätzungen speziell für die hypersinguläre Integralgleichung entwickelt. Zunächst beschäftigen wir uns mit Lokalisierungstechniken, um über lokale Information des Diskretisierungsfehlers zu verfügen. Diese Techniken gehen zurück auf CARSTENSEN/PRAETORIUS 2007 [8].

Im Weiteren führen wir eine Reihe von Fehlerschätzern ein, die dann auch eingehend studiert werden. Dabei werden zuerst einfache Fehlerschätzer definiert, die auf Anreicherung des Raumes basieren. Die Erweiterung des Raumes kann dabei einerseits auf der $(h - h/2)$ -Strategie aufbauen, bei der durch uniforme Verfeinerung des Netzes neue Ansatzfunktionen gefunden werden. Diese Methode wurde erstmals in FERRAZ-LEITE/PRAETORIUS 2008 [16] für die Symmsche Integralgleichung eingehend studiert und wird hier für die hypersinguläre Integralgleichung adaptiert. Andererseits kann auch die $p - (p + 1)$ -Strategie zur Anreicherung des Raumes dienen, in der Ansatzfunktionen höherer Ordnung den Raum erweitern. Dieses Vorgehen wird in ERATH/FERRAZ-LEITE/FUNKEN/PRAETORIUS 2009 [13] für die Symmsche Integralgleichung betrachtet und hier ebenfalls erstmals mathematisch für die hypersinguläre Integralgleichung ausgearbeitet. Die zugehörige Analysis ist nahezu ident mit jener der $(h - h/2)$ -Strategie. Ausgehend von den Arbeiten MUND/STEPHAN/WEISSE 1998 [26] und HEUER/MELLADO/STEPHAN 2001 [22] werden Zwei-Level-Fehlerschätzer eingeführt. In der vorliegenden Arbeit wird ein alternativer Beweis der Effizienz und Zuverlässigkeit des Zwei-Level-Schätzers geführt, der analog zu ERATH/FERRAZ-LEITE/FUNKEN/PRAETORIUS 2009 [13] nur auf Lokalisierungsargumente für die Energienorm basiert. Als dritte Technik zur a posteriori Fehlerschätzung studieren wir Fehlerschätzer, die auf Mittelung basieren. Die Analysis dieser Schätzer wird in CARSTENSEN/PRAETORIUS 2007 [8] für die hypersinguläre Integralgleichung entwickelt. In der vorliegenden Arbeit werden die dort eingeführten Fehlerschätzer übernommen. Darüber hinaus wird eine dort vorgeschlagene Strategie übernommen und analytisch fundiert. Im Folgenden werden alle 13 hier betrachteten Fehlerschätzer aufgelistet:

- $h - h/2$ -basierte Fehlerschätzer

$$\begin{aligned}\eta_\ell &= \|\widehat{u}_\ell - u_\ell\|, & \mu_\ell &= \|h_\ell^{1/2}(\widehat{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}, \\ \tilde{\eta}_\ell &= \|\widehat{u}_\ell - I_\ell \widehat{u}_\ell\|, & \tilde{\mu}_\ell &= \|h_\ell^{1/2}(\widehat{u}_\ell - I_\ell \widehat{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)},\end{aligned}$$

- $h - h/2$ -basierte Zwei-Level-Fehlerschätzer

$$\tau_\ell := \left(\sum_{j=1}^N \tau_\ell(T_j)^2 \right)^{1/2} \quad \text{mit } \tau_\ell(T_j) := \|\mathbb{G}_{\ell,j}(\widehat{u}_\ell - u_\ell)\|,$$

- Fehlerschätzer basierend auf Mittelung

$$\begin{aligned}\alpha_\ell &= \|\widehat{u}_\ell - \widetilde{\mathbb{G}}_\ell \widehat{u}_\ell\|, & \beta_\ell &= \|h_\ell^{1/2}(\widehat{u}_\ell - \widetilde{\mathbb{G}}_\ell \widehat{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}, \\ & & \tilde{\beta}_\ell &= \|h_\ell^{1/2}(\widehat{u}'_\ell - \widetilde{\Pi}_\ell \widehat{u}'_\ell)\|_{L^2(\Gamma)},\end{aligned}$$

- $p - (p + 1)$ -basierte Fehlerschätzer

$$\begin{aligned}\eta_{P,\ell} &= \|\tilde{u}_\ell - u_\ell\|, & \mu_{P,\ell} &= \|h_\ell^{1/2}(\tilde{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}, \\ \tilde{\eta}_{P,\ell} &= \|\tilde{u}_\ell - I_\ell \tilde{u}_\ell\|, & \tilde{\mu}_{P,\ell} &= \|h_\ell^{1/2}(\tilde{u}_\ell - I_\ell \tilde{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)},\end{aligned}$$

- $p - (p + 1)$ -basierte Zwei-Level-Fehlerschätzer

$$\tau_{P,\ell} := \left(\sum_{j=1}^N \tau_{P,\ell}(T_j)^2 \right)^{1/2} \quad \text{mit } \tau_{P,\ell}(T_j) := \|\mathbb{G}_{\ell,j}(\tilde{u}_\ell - u_\ell)\|.$$

Hierbei bezeichnen $I_\ell : C(\bar{\Gamma}) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$ den nodalen Interpolanten und $\tilde{\Pi}_\ell$ die L^2 -Orthogonalprojektion auf den Raum $\mathcal{P}^1(\mathcal{T}_\ell)$. Weiters wurde der Übersichtlichkeit halber eine abgeänderte Notation im Vergleich zu Kapitel 3 sowohl für die Fehlerschätzer basierend auf Erweiterung des Raumes als auch für die Zwei-Level-Fehlerschätzer verwendet.

Es gilt zu beachten, dass die fünf globalen Fehlerschätzer, $\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \alpha_\ell, \eta_{P,\ell}$ und $\tilde{\eta}_{P,\ell}$ nur zur Schätzung des Verfahrensfehlers eingesetzt werden können. Hingegen können die verbleibenden acht lokalen Fehlerschätzer auch als Verfeinerungsindikatoren in einem adaptiven Algorithmus dienen.

Für die eingeführten Fehlerschätzer wird Effizienz und Äquivalenz von Zuverlässigkeit und Saturationsannahme bewiesen. Darüber hinaus beweisen wir, dass alle Fehlerschätzer zueinander äquivalent sind, was ebenfalls einen neuen Beitrag zum Verständnis der a posteriori Fehlerschätzung der hypersingulären Integralgleichung liefert.

Ein weiteres Kernresultat dieser Arbeit stellen die Konvergenzsätze aus Kapitel 4 dar. Diese garantieren, dass für eine Folge von Galerkin-Approximationen u_ℓ , die durch eine adaptive Randelementmethode entstehen, Konvergenz gegen die exakte Lösung u vorliegt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} u_\ell = u.$$

Bisher konnte man Konvergenz nur für uniforme Strategien zeigen. Im Falle einer adaptiven Randelementmethode war lediglich bekannt, dass die Folge der Galerkin-Lösungen u_ℓ konvergiert. Jedoch konnte nicht gezeigt werden, dass die Folge u_ℓ gegen die exakte Lösung u strebt.

Um ein solches Resultat, dessen Beweis nicht trivial ist, für mehrere Fehlerschätzer postulieren zu können, ist es nötig verschiedene Beweisansätze zu finden und zu verfolgen. Als Grundlage dienen Ergebnisse aus FERRAZ-LEITE/ORTNER/PRAETORIUS 2008 [15] zur Konvergenz der μ_ℓ - und $\tilde{\mu}_\ell$ -basierten adaptiven Netzverfeinerung im Fall der Symmschen Integralgleichung. Die darin vorgestellte Technik übernehmen wir und adaptieren sie für die hypersinguläre Integralgleichung. Wir beobachten, dass sich die Argumentation im Wesentlichen auch auf die $\mu_{P,\ell}$ -, $\tilde{\mu}_{P,\ell}$ - und $\tilde{\beta}_\ell$ -adaptive Netzverfeinerung überträgt. Um ein Konvergenzresultat für die β_ℓ -adaptive Netzverfeinerung zu erhalten, verwenden wir ähnliche Argumente wie AURADA/PRAETORIUS 2009 [3].

Kapitel 5 beschäftigt sich mit der Implementierung der Galerkin-Randelementmethode zum Lösen der hypersingulären Integralgleichung. Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt dabei auf der numerischen Berechnung der rechten Seite. Im Wesentlichen führen analytische Rechenschritte zu einer vereinfachten Darstellung der zu berechnenden Größe. Das Kapitel entstand zum besseren Verständnis der Problematik einer Implementierung der rechten Seite der hypersingulären Integralgleichung und stellt daher gleichzeitig die Grundlage für die numerischen Ergebnisse aus Kapitel 6 dar.

Numerische Experimente finden sich in Kapitel 6. Damit soll die Theorie aus Kapitel 3 und Kapitel 4 untermauert und illustriert werden. Außerdem werden Schwierigkeiten, die bei der numerischen Berechnung der Galerkin-Lösung entstehen, veranschaulicht. Wir beobachten, dass die in Kapitel 4 vorgeschlagenen adaptiven Algorithmen nicht nur konvergieren, sondern auch zu optimaler Konvergenzordnung führen.

Eine andere Herausforderung, die sich stellte, war die numerische Berechnung aller nötigen Matrizen und insbesondere der gesuchten Galerkin-Lösung, um die aus der Theorie gewonnenen Ergebnisse anhand numerischer Experimente belegen zu können. Dabei war es vonnöten sich mit der analytischen Berechnung gewisser Integraltypen auseinanderzusetzen. Dadurch konnte ein relativ schneller und stabiler Code entwickelt werden. Hierbei wird unter Stabilität die Gewährleistung sinnvoller Ergebnisse auch bei einer hohen Anzahl von adaptiv generierten Elementen unterschiedlicher Längenskalen verstanden.

Kapitel 2

Die Randelementmethode

Dieses Kapitel stellt die Grundlagen der Analysis für die Galerkin-Randelementmethode vor. Wir tragen Resultate aus der Literatur in einheitlicher Notation zusammen und passen Aussagen gegebenenfalls an unser Modellproblem an. Wir gehen in mehreren Schritten vor und halten uns dabei im Wesentlichen an die Arbeiten PRAETORIUS [28], SAUTER/SCHWAB [30] und STEINBACH [31]. Zunächst definieren wir Sobolev-Räume, die im Folgenden in der Analysis benötigt werden und formulieren für spätere Referenzierung einige fundamentalen Sätze aus der Theorie der Sobolev-Räume. Anschließend wird die hypersinguläre Integralgleichung in der Variationsformulierung diskutiert, wobei Abbildungseigenschaften des hypersingulären Integraloperators W kompakt zusammengestellt werden. Wir studieren eine konforme Diskretisierungsstrategie und geben abschließend a priori Konvergenzresultate an.

2.1 Sobolev-Räume

In diesem Abschnitt werden Sobolev-Räume auf Gebieten und Rändern definiert. Diese Räume bestehen aus Funktionen, die samt ihren partiellen Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung quadratintegrabel sind. Weiters werden Sätze wiederholt, die für die Entwicklung der Galerkin-Randelementmethode von Bedeutung sind.

Für die Definition solcher Räume müssen wir zunächst den Begriff der partiellen Differenzierbarkeit verallgemeinern.

Konvention 2.1.1 *Im Folgenden bezeichne $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes orientierbares Lipschitz-Gebiet und $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ ein relativ offenes Randstück mit $|\Gamma| > 0$.*

Definition 2.1.1 *Mit $L^1_{loc}(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum der lokal integrierbaren Funktionen.*

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \int_K |f(x)| dx < \infty \text{ für jedes Kompaktum } K \subseteq \Omega \right\}$$

Definition 2.1.2 *Eine Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt schwach differenzierbar, falls es eine Funktion $\partial_j u \in L^1_{loc}(\Omega)$ gibt, sodass die Formel der partiellen Integration*

$$\int_{\Omega} u(\partial_j v) dx = - \int_{\Omega} (\partial_j u)v dx \quad \text{für alle } v \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2.1}$$

gilt. Für $u \in C^1(\Omega)$ stimmt nach dem Hauptsatz der Variationsrechnung die schwache Ableitung $\partial_j u \in L^2(\Omega)$ mit der starken Ableitung auf Ω (fast überall) überein.

Wir führen nun Sobolev-Räume auf Gebieten ein.

Definition 2.1.3 Für $\ell \in \mathbb{N}$ ist der Sobolev-Raum $H^\ell(\Omega)$ durch

$$H^\ell(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ für alle Multiindizes } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq \ell\} \quad (2.2)$$

gegeben. Insbesondere wird der Sobolev-Raum $H^0(\Omega)$ mit $L^2(\Omega)$ identifiziert.

Satz 2.1.4 (Evans 1998 [14, Abs. 5.2 Theorem 2]) Für $\ell \in \mathbb{N}$ ist $H^\ell(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^\ell(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq \ell} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq \ell} \int_{\Omega} (\partial^\alpha u)(\partial^\alpha v) dx \quad (2.3)$$

und der dadurch induzierten Norm

$$\|u\|_{H^\ell(\Omega)} = (u, u)_{H^\ell(\Omega)}^{1/2}$$

ein Hilbert-Raum.

Weiters lässt sich auch eine Seminorm $|\cdot|_{H^\ell(\Omega)}$ definieren, indem man in (2.3) lediglich über Multiindizes mit $|\alpha| = \ell$ summiert, d.h.

$$|u|_{H^\ell(\Omega)}^2 := \sum_{|\alpha| = \ell} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Bemerkung 2.1.5 Die zu einem Sobolev-Raum $H^\ell(\Omega)$ gehörige Norm kann auch in rekursiver Form

$$\|u\|_{H^\ell(\Omega)}^2 := \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{H^{\ell-1}(\Omega)}^2$$

dargestellt werden.

Sobolev-Räume lassen sich auch für nicht-ganzzahlige Exponenten definieren. Dazu führen wir zunächst für reelle Zahlen $0 < s < 1$ die Sobolev-Slobodeckij Seminorm

$$|u|_{H^s(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2+2s}} ds_y ds_x \right)^{1/2} \quad (2.4)$$

ein. Man beachte, dass die Sobolev-Slobodeckij Seminorm analog auf Randstücken $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ definiert werden kann.

Definition 2.1.6 Für $\ell \in \mathbb{R}$ bezeichne $[\ell]$ die größte ganze Zahl mit $[\ell] \leq \ell$. Für nicht-ganzzahliges $\ell \geq 0$, d.h. $\ell = [\ell] + s$ mit $s \in (0, 1)$, definieren wir mit Hilfe der Sobolev-Slobodeckij Seminorm die Sobolev-Räume mit nicht-ganzzahliger Ordnung $\ell \geq 0$ durch

$$H^\ell(\Omega) := \{u \in H^{[\ell]}(\Omega) \mid |\partial^{[\ell]} u|_{H^s(\Omega)} < \infty\}.$$

Die zugehörige Norm wird durch

$$\|u\|_{H^\ell(\Omega)}^2 := \|u\|_{H^{[\ell]}(\Omega)}^2 + |\partial^{[\ell]} u|_{H^s(\Omega)}^2$$

gegeben. Diese Räume sind ebenfalls Hilbert-Räume.

Wir geben im Folgenden eine Definition der Sobolev-Räume auf Rändern an. Wir definieren $H^1(\Gamma)$ als den Abschluss von $\text{Lip}(\Gamma) := \{f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{Lipschitz-stetig}\}$ bezüglich $\|f\|_{H^1(\Gamma)}^2 := \|f\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|f'\|_{L^2(\Gamma)}^2$. Dabei bezeichnen $\text{Lip}(\Gamma)$ den Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen und f' die Ableitung nach der Bogenlänge.

Der Sobolev-Raum $H^{1/2}(\Gamma)$ mit $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ wird durch

$$H^{1/2}(\Gamma) := \{v \in L^2(\Gamma) \mid \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} < \infty\}$$

mit Norm

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = (\|v\|_{L^2(\Gamma)}^2 + |v|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2)^{1/2}$$

definiert, wobei $|v|_{H^{1/2}(\Gamma)}$ die Sobolev-Slobodeckij Seminorm (2.4) bezeichnet.

Weiters definieren wir den Sobolev-Raum $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ durch

$$\tilde{H}^{1/2}(\Gamma) := \{v|_{\Gamma} \mid v \in H^{1/2}(\partial\Omega) \text{ und } \text{supp}(v) \subseteq \bar{\Gamma}\}.$$

Dieser unterscheidet sich nur im Fall $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$ von $H^{1/2}(\Gamma)$.

Mit $H_*^{1/2}(\Gamma)$ bezeichnen wir den Raum

$$H_*^{1/2}(\Gamma) := \left\{ v \in H^{1/2}(\Gamma) \mid \int_{\Gamma} v \, ds = 0 \right\},$$

der Funktionen $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ mit verschwindendem Integralmittel.

Es kann gezeigt werden, dass die eben eingeführten Sobolev-Räume auf Rändern Hilbert-Räume sind. Die Dualräume der eben definierten Sobolev-Räume auf Rändern werden mit

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma) &:= (H^{1/2}(\Gamma))^*, \\ H^{-1/2}(\Gamma) &:= (\tilde{H}^{1/2}(\Gamma))^*, \\ H_*^{-1/2}(\Gamma) &:= \{g \in H^{-1/2}(\Gamma) \mid \langle g, 1 \rangle = 0\} = (H_*^{1/2}(\Gamma))^* \end{aligned}$$

bezeichnet, wobei Dualität im Sinn des erweiterten L^2 -Skalarprodukts verstanden wird.

Im Weiteren werden Sätze aus der Theorie der Sobolev-Räume zusammengetragen.

Die Frage, unter welchen Voraussetzungen Funktionen $u \in H^\ell(\Omega)$ einen stetigen Repräsentanten besitzen, beantwortet der Sobolevsche Einbettungssatz.

Satz 2.1.7 (Sobolevscher Einbettungssatz. Sauter/Schwab 2004 [30, Abs. 2.5 Satz 2.5.4])

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes C^k -Gebiet. Für $k > \ell$ und ein ganzzahliges $m < \ell - 1$ gilt

$$H^\ell(\Omega) \subset C^m(\bar{\Omega})$$

mit stetiger Einbettung:

$$\|v\|_{C^m(\bar{\Omega})} \leq C \|v\|_{H^\ell(\Omega)}, \quad \text{für alle } v \in H^\ell(\Omega).$$

Satz 2.1.8 (Meyers-Serrin. Evans 1998 [14, Abs. 5.3 Theorem 2]) Sei $\ell \geq 0$, dann ist $C^\infty \cap H^\ell(\Omega)$ ein dichter Unterraum von $H^\ell(\Omega)$. Außerdem ist $C^\infty(\bar{\Omega}) = \{v|_{\Omega} \mid v \in C^\infty(\mathbb{R}^d)\}$ ein dichter Unterraum des Sobolev-Raums $H^\ell(\Omega)$.

Geht es um die Approximierbarkeit von Funktionen aus $H^{\ell_2}(\Omega)$ bezüglich einer schwächeren Norm $\|\cdot\|_{H^{\ell_1}(\Omega)}$, d.h. $\ell_1 > \ell_2$, so spielt die Kompaktheit der Einbettung $I : H^{\ell_1}(\Omega) \rightarrow H^{\ell_2}(\Omega)$ eine entscheidende Rolle. Der Satz von Rellich klärt über kompakte Einbettungen auf.

Satz 2.1.9 (Rellich. Sauter/Schwab 2004 [30, Abs. 2.5 Satz 2.5.6])

Die Einbettung $H^k(\Omega) \subseteq H^\ell(\Omega)$ für $k \geq \ell$ ist kompakt.

Bemerkung 2.1.10 Der Satz von Rellich besagt also, dass die Identität als Operator von $H^k(\Omega)$ nach $H^\ell(\Omega)$ kompakt ist.

Aus den kompakten Einbettungen gehen die nützlichen Poincaré-Ungleichungen hervor.

Satz 2.1.11 (Nečas 1967 [27, Thm. 1.1]) Für $\ell \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|u\|_{H^\ell(\Omega)}^2 \leq C(1 + \text{diam}(\Omega)) \sum_{|\alpha|=\ell} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u|^2 dx \quad \text{für alle } u \in H_0^\ell(\Omega). \quad (2.5)$$

In der Literatur wird Abschätzung (2.5) häufig auch Friedrichs-Ungleichung genannt.

Satz 2.1.12 (Nečas 1967 [27, Thm. 1.5]) Es gilt

$$\|u\|_{H^\ell(\Omega)}^2 \leq C \left\{ \sum_{|\alpha|=\ell} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u|^2 dx + \sum_{|\alpha|<\ell} \left| \int_{\Omega} \partial^\alpha u dx \right|^2 \right\}. \quad (2.6)$$

Die Ungleichungen (2.5) und (2.6) werden erste und zweite Poincaré-Ungleichung genannt.

Bemerkung 2.1.13 Durch Einsetzen ergibt sich die für uns gebräuchliche Form der ersten Poincaré-Ungleichung:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \text{diam}(\Omega) \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \left| \int_{\Omega} u dx \right| \right) \quad \text{für alle } u \in H^1(\Omega).$$

Insbesondere erhält man die Abschätzung $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \text{diam}(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, falls $\int_{\Omega} u dx = 0$ ist. Im Fall konvexer Gebiete Ω lässt sich zeigen, dass $C = \frac{1}{\pi}$ gewählt werden kann.

Wie bereits in Kapitel 1 zitiert wurde, gibt es eine direkte Beziehung zwischen gewissen Sobolev-Räumen auf Gebieten und anderen auf Rändern. Dabei wird erklärt, wie man den Randraum aus dem Gebietsraum in eindeutiger Weise gewinnen kann. Umgekehrt gibt es auch einen stetigen und linearen Fortsetzungsoperator $\mathcal{L} \in (H^{1/2}(\Gamma), H^1(\Omega))$ [30].

Nachdem wir nun die Grundlagen aus der Sobolev-Raumtheorie zusammengefasst haben, werden jetzt einige Sätze bzw. Ergebnisse aus der Analysis, die in der Galerkin-Randelementmethode Anwendung finden, diesen Abschnitt ergänzen.

In der Theorie zur Galerkin-Randelementmethode und der zugehörigen Fehleranalyse ist es oft nützlich und notwendig Funktionenräume zu betrachten, mit denen die Differenzierbarkeit einer Funktion beschrieben werden kann. Nicht immer handelt es sich hierbei um eine ganzzahlige Ordnung. Mit Hilfe von *Interpolationsräumen* werden Glattheitsaussagen auch für einen bruchzahligen Differentiationsindex möglich sein.

Wir möchten uns lediglich mit der reellen Interpolation von ineinander stetig eingebetteten Banach-Räume beschäftigen.

Seien X_0, X_1 zwei Banach-Räume mit stetiger Einbettung $X_1 \subseteq X_0$. Für $u \in X_0$ und alle $t > 0$ definieren wir ein Funktional K wie folgt:

$$K(t, u) := \inf_{v \in X_1} (\|u - v\|_{X_0} + t\|v\|_{X_1}).$$

Damit gelten für $u \in X_1$ insbesondere die Ungleichungen

$$\begin{aligned} K(t, u) &\leq t \|u\|_{X_1}, \text{ sowie} \\ K(t, u) &\leq \|u\|_{X_0}. \end{aligned}$$

Für $0 \leq \theta \leq 1$ definiert

$$\|u\|_{X_\theta} := \left(\int_0^\infty t^{-(2\theta+1)} K(t, u)^2 dt \right)^{1/2}$$

eine Norm, mit welcher der Interpolationsraum

$$[X_0, X_1]_\theta = X_\theta := \{u \in X_0 \mid \|u\|_{X_\theta} < \infty\}$$

ein Banach-Raum ist [4].

Satz 2.1.14 (Interpolationssatz. Bergh/Löfström 1976 [4, Thm. 4.1.2]) *Seien $X_1 \subseteq X_0$ und $Y_1 \subseteq Y_0$ zwei Paare von stetig eingebetteten Banachräumen und sei $T \in L(Y_i, X_i)$ für $i = 0, 1$. Dann gilt für $0 \leq \theta \leq 1$*

$$\begin{aligned} T &\in L(Y_\theta, X_\theta) \quad \text{und} \\ \|T\|_{L(Y_\theta, X_\theta)} &\leq \|T\|_{L(Y_0, X_0)}^{1-\theta} \|T\|_{L(Y_1, X_1)}^\theta. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.1.15 *Man kann zeigen, dass die durch Interpolation zweier stetig eingebetteter Hilbert-Räume entstandene Raum wieder ein Hilbert-Raum ist. Außerdem bietet die Interpolation eine alternative Definition der Sobolev-Räume von nichtganzzahliger Ordnung mit äquivalenter Norm, z.B. $H^{1/2}(\Gamma) := [H^1(\Gamma), H^0(\Gamma)]_{1/2}$. Ebenso lassen sich die Räume $H^\theta(\Gamma)$ für $0 \leq \theta \leq 1$ definieren.*

Bemerkung 2.1.16 *Der Interpolationsraum von Produkträumen stimmt mit dem Produktraum der Interpolationsräume überein.*

Lemma 2.1.17 *Sei $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ eine Zerlegung des Randes bzw. Randstücks Γ . Dann gilt für $0 \leq \theta \leq 1$*

$$\sum_{j=1}^n \|u|_{T_j}\|_{H^\theta(T_j)}^2 \leq \|u\|_{H^\theta(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } u \in H^\theta(\Gamma).$$

Beweis: Wir betrachten $H^\theta(\mathcal{T})$ als Produktraum der Räume $H^\theta(T_j)$. Die zugehörige Norm sei durch $\|\cdot\|_{H^\theta(\mathcal{T})} := (\sum_{j=1}^n \|\cdot\|_{H^\theta(T_j)}^2)^{1/2}$ definiert. Da die L^2 -Norm eine lokale Norm ist, also $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)} := (\sum_{j=1}^n \|\cdot\|_{L^2(T_j)}^2)^{1/2}$ gilt, können wir folgende Gleichungskette aufstellen:

$$\|u\|_{H^1(\Gamma)}^2 = \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \sum_{j=1}^n (\|u\|_{L^2(T_j)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(T_j)}^2) = \sum_{j=1}^n \|u|_{T_j}\|_{H^1(T_j)}^2.$$

Damit können wir $H^j(\Gamma)$ mit $H^j(\mathcal{T})$, für $j = 0, 1$ identifizieren. Die Identität \mathbb{I} ist für $j = 0, 1$ ein Operator $\mathbb{I} \in L(H^j(\Gamma), H^j(\mathcal{T}))$ mit Operatornorm $\|\mathbb{I}\| = 1$. Nach Anwendung des Interpolationssatzes 2.1.14 und Bemerkung 2.1.16 kann die Identität als Operator $\mathbb{I} \in L(H^\theta(\Gamma), H^\theta(\mathcal{T}))$ mit Norm $\|\mathbb{I}\| \leq 1$ aufgefasst werden. Also gilt für $u \in H^\theta(\Gamma)$

$$\|u\|_{H^\theta(\mathcal{T})} = \|\mathbb{I}u\|_{H^\theta(\mathcal{T})} \leq \|u\|_{H^\theta(\Gamma)},$$

wodurch der Beweis abgeschlossen ist. □

2.2 Hypersinguläre Integralgleichung

Im Folgenden befassen wir uns mit der eindeutigen Lösbarkeit der Variationsformulierung der hypersingulären Integralgleichung. Das Vorgehen dabei ist an SAUTER/SCHWAB 2004 [30, KAPITEL 4.1] angelehnt.

Wir betrachten die hypersinguläre Integralgleichung zum Laplace-Operator

$$Wu = f \quad \text{auf } \Gamma \tag{2.7}$$

für eine relativ offene zusammenhängende Teilmenge $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ eines beschränkten Lipschitz-Gebietes $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Hierbei bezeichnet Wu den hypersingulären Integraloperator, der für $u \in C(\Gamma)$ formal durch

$$Wu(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n(x)} \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial}{\partial n(y)} \log|x-y| ds_y \quad \text{für } x \in \Gamma \tag{2.8}$$

gegeben ist.

Satz 2.2.1 (Steinbach 2004 [31, Kapitel 6.5]) *Der hypersinguläre Integraloperator W aus (2.8) lässt sich zu einem stetigen linearen Operator $W \in L(\tilde{H}^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma))$ fortsetzen.*

Die konstanten Funktionen sind im Kern des Operators W . Daher definieren wir den Energieraum

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) := \{v|_{\Gamma} \mid v \in H^{1/2}(\partial\Omega) \text{ mit } \text{supp}(v) \subseteq \bar{\Gamma}\} & \text{für } \Gamma \subsetneq \partial\Omega, \\ H_*^{1/2}(\Gamma) := \{v \in H^{1/2}(\Gamma) \mid \int_{\Gamma} v ds = 0\} & \text{für } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

Der Dualraum ist durch

$$\mathcal{H}^* = \begin{cases} H^{-1/2}(\Gamma) & \text{für } \Gamma \subsetneq \partial\Omega, \\ H_*^{-1/2}(\Gamma) := \{g \in H^{-1/2}(\Gamma) \mid \langle g, 1 \rangle = 0\} & \text{für } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

gegeben.

Satz 2.2.2 (Steinbach 2004 [31, 6.7]) *Der hypersinguläre Integraloperator W ist \mathcal{H} -elliptisch, d.h. es gilt*

$$\langle Wu, u \rangle \geq C_{\text{ell}} \|u\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Insbesondere definiert $\langle u, v \rangle := \langle Wu, v \rangle$ ein äquivalentes Skalarprodukt mit induzierter Norm $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$ auf dem Raum \mathcal{H} .

Laut Darstellungssatz von Riesz folgt für $f \in \mathcal{H}^*$ somit Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Variationsformulierung

$$\langle u, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in \mathcal{H}. \tag{2.9}$$

Satz 2.2.3 (Steinbach 2004 [31, Satz 6.3]) *Sei $\Gamma = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\}$ stückweise glatt und $u, v \in C(\Gamma)$ mit $u|_{\Gamma_i}, v|_{\Gamma_i} \in C^1(\Gamma_i)$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt Nédelécs Formel*

$$\langle Wu, v \rangle = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} v'(x) \int_{\Gamma} \log|x-y| u'(y) ds_y ds_x,$$

wobei $u'(\cdot)$ bzw. $v'(\cdot)$ die Ableitung nach der Bogenlänge bezeichnen.

Unser Interesse gilt nun einer Approximation der unbekanntes Dichtefunktion u aus (2.7) durch eine Näherung u_h . Man spricht von der Diskretisierung der Randintegralgleichung. Bei der Galerkin-Randelementmethode geschieht dies durch Einschränken der Funktionen u und v in der Variationsformulierung (2.9) auf endlichdimensionale Teilräume. Diese werden als Randelementräume bezeichnet und werden im Folgenden konstruiert.

2.3 Stetige Randelemente

Die Galerkin-Randelementmethode basiert auf der Idee einen unendlichdimensionalen Hilbert-Raum durch einen endlichdimensionalen Teilraum, den sogenannten Randelementraum, auszutauschen. Damit ist es möglich, die Lösung eines Variationsproblems durch Ansatzfunktionen in Form von stückweisen Polynomen zu approximieren.

Im Fall der Bilinearform zum hypersingulären Integraloperator ist man an einer Diskretisierung des Energieraumes \mathcal{H} interessiert. Dazu führen wir *stetige* Randelementräume ein.

Konvention 2.3.1 \mathcal{T} bezeichne eine Paneelierung des Randes Γ , d.h. $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_N\}$ ist eine disjunkte endliche Zerlegung von zusammenhängenden und relativ offenen Teilmengen von Γ , sodass $\bar{\Gamma} = \bigcup_{j=1}^N \bar{T}_j$ gilt. Wir betrachten im Folgenden affine Randelemente T_j , d.h. ein Element $T = \text{conv}\{a, b\} \in \mathcal{T}$ lässt sich durch die affine Transformation

$$\gamma_T : T_{\text{ref}} \rightarrow T, \quad s \mapsto \frac{1}{2}(a + b + s(b - a))$$

mit $T_{\text{ref}} := (-1, 1)$ parametrisieren.

Definition 2.3.1 Zu gegebener Paneelierung \mathcal{T} definieren wir die lokale Netzweite

$$h \in L^\infty(\Gamma), \quad h|_{T_j} := h_{T_j} := \sup \{|x - y| \mid x, y \in T_j\} \quad \text{für } T_j \in \mathcal{T}$$

sowie die globale Netzweite

$$h_{\max} := \|h\|_\infty.$$

Weiters charakterisieren wir das lokale Verhältnis benachbarter Elemente durch

$$\kappa(\mathcal{T}) := \max \left\{ \frac{h_{T_j}}{h_{T_k}} \mid T_j, T_k \in \mathcal{T} \text{ mit } \bar{T}_j \cap \bar{T}_k \neq \emptyset \right\}.$$

Im Folgenden wird von der Verfeinerung eines Elements $T_j \in \mathcal{T}$ gesprochen, wenn durch Teilung des Elements T_j zwei neue Elemente hervorgehen, die nunmehr halbe Länge besitzen.

Bemerkung 2.3.2 Wie wir in Kapitel 3 sehen werden, geht der maximale Quotient $\kappa(\mathcal{T})$ zweier benachbarter Elemente in die dort behaupteten Fehlerabschätzungen ein. Daher stellen wir in den numerischen Experimenten in Kapitel 6 sicher, dass $\kappa(\mathcal{T}) \leq 2\kappa(\mathcal{T}_0)$ gilt.

Um eine allgemeine Definition des Raumes stetiger Randelemente geben zu können, ist es notwendig Polynome vom Gesamtgrad p auf einem Referenzelement zu erklären.

Definition 2.3.3 Der Raum der Polynome vom Gesamtgrad $p \geq 1$ auf dem Referenzelement T_{ref} ist durch

$$\mathcal{P}^p(T_{\text{ref}}) = \text{span}\{s \mapsto s^k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq p\}$$

definiert.

Damit kommen wir nun zur Definition stetiger Randelementfunktionen vom Grad $p \geq 1$.

Definition 2.3.4 Sei \mathcal{T} eine Partitionierung des Randes Γ . Dann ist der Raum der stetigen Randelemente vom Grad $p \geq 1$ durch

$$\mathcal{S}^p(\mathcal{T}) := \{\varphi \in C^0(\Gamma) \mid \text{für alle } T \in \mathcal{T} : \varphi \circ \gamma_T \in \mathcal{P}^p(T_{\text{ref}})\} \quad (2.10)$$

gegeben. Klarerweise ist der Raum $\mathcal{S}^p(\mathcal{T})$ endlichdimensional.

Da der Raum $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \subseteq H^1(\Gamma) \subseteq H^{1/2}(\Gamma)$ in späteren Kapiteln eine zentrale Rolle spielt, geben wir dazu eine Basis an. Es bezeichne $\mathcal{K} := \{z_1, \dots, z_K\}$, die Menge aller Knoten einer Partitionierung \mathcal{T} , wobei für den Fall eines geschlossenen Randes für die Anzahl der Knoten $K = N = \#\mathcal{T}$ gilt. Handelt es sich um ein (zusammenhängendes) Randstück, so gilt $K = N + 1$. Die stückweise affinen Hutfunktionen $\varphi_j \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$, die durch die Kronecker-Eigenschaft $\varphi_j(z_k) = \delta_{jk}$ charakterisiert sind, bilden eine Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$.

Um die Notation möglichst einfach zu halten und um obigen Fallunterscheidungen bezüglich des Energieraumes beider Diskretisierungen gerecht zu werden, definieren wir

$$\mathcal{S}_0^p(\mathcal{T}) = \begin{cases} \mathcal{S}^p(\mathcal{T}) \cap \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) = \{v_h \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T}) \mid v_h|_{\partial\Gamma} = 0\} & \text{für } \Gamma \subsetneq \partial\Omega, \\ \mathcal{S}^p(\mathcal{T}) \cap H_*^{1/2}(\Gamma) = \{v_h \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T}) \mid \int_{\Gamma} v_h ds = 0\} & \text{für } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

Offensichtlich gilt $\mathcal{S}_0^p(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{H}$.

Nachdem wir nun Räume für Randelemente vom Grad $p \geq 1$ eingeführt haben, werden wir uns mit der Galerkin-Randelementmethode, als deren Anwendung, beschäftigen.

2.4 Galerkin-Randelementmethode

Um eine Approximation der Lösung unseres Modellproblems (2.9) berechnen zu können, bedienen wir uns der Galerkin-Randelementmethode für die hypersinguläre Integralgleichung.

Die Inklusion $\mathcal{S}_0^p(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{H}$ der stetigen Randelemente erlaubt uns die Galerkin-Diskretisierung für unser Modellproblem durchzuführen. Das bedeutet, dass wir sowohl die Lösung als auch die Testfunktionen durch Ansatzfunktionen aus dem endlichdimensionalen Funktionenraum approximieren.

Bemerkung 2.4.1 *Ersetzt man in der Variationsformulierung des Modellproblems (2.9) nur die Dichte $u \in \mathcal{H}$ durch eine diskrete Funktion $u_h \in \mathcal{S}_0^p(\mathcal{T})$, so kann Gleichheit im Allgemeinen nicht mehr gewährleistet werden. Daher ist es notwendig auch den Raum der Testfunktionen zu diskretisieren. Üblicherweise wählt man dazu ebenfalls den endlichdimensionalen Raum $\mathcal{S}_0^p(\mathcal{T})$.*

Das Galerkin-Verfahren für die hypersinguläre Integralgleichung lautet:

$$\text{Finde } u_h \in \mathcal{S}_0^p(\mathcal{T}) \text{ mit } \langle Wu_h, v_h \rangle = \langle f, v_h \rangle \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}_0^p(\mathcal{T}). \quad (2.11)$$

Das Finden der diskreten Dichtefunktion $u_h \in \mathcal{S}_0^p(\mathcal{T})$ von Gleichung (2.11), wobei $N = \dim(\mathcal{S}_0^p(\mathcal{T}))$ sei, ist äquivalent zum Lösen des linearen Gleichungssystems:

$$\text{Finde } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N : \quad \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{F}. \quad (2.12)$$

Hierbei besitzen die Systemmatrix $\mathbf{B} = (B_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ und die rechte Seite $\mathbf{F} = (F_j) \in \mathbb{R}^N$ unter einer Basis $b_i, i = 1, \dots, N$ von $\mathcal{S}_0^p(\mathcal{T})$ die Darstellung

$$B_{ij} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} b'_i(x) \int_{\Gamma} \log|x-y| b'_j(y) ds_y ds_x \quad \text{für } i, j = 1 \dots, N, \quad (2.13)$$

$$F_j = \int_{\Gamma} f(x) b_j(x) ds_x \quad \text{für } j = 1 \dots, N. \quad (2.14)$$

Im Fall $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$ ist eine Basis von $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ explizit bekannt. Im anderen Fall $\Gamma = \partial\Omega$ wird die Eigenschaft $\int_{\Gamma} v_h ds = 0$ für $v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ durch hinzufügen von Nebenbedingungen in das Gleichungssystem (2.12) sichergestellt. Man beachte, dass in diesem Fall die Systemmatrix für die Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ konstruiert wird.

Das lineare Gleichungssystem (2.12) besitzt laut dem Darstellungssatz von Riesz eine eindeutige Lösung, da $\mathcal{S}_0^p(\mathcal{T})$ ein abgeschlossener Unterraum von \mathcal{H} ist und $\langle f, \cdot \rangle$ insbesondere ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{S}_0^p(\mathcal{T})$ definiert.

Bemerkung 2.4.2 Da die Integrale aus (2.13) schwach singulär sind, sind die Matrixeinträge wohldefiniert. Manchmal, speziell in den Ingenieurwissenschaften, wird die Systemmatrix \mathbf{B} auch als Steifigkeitsmatrix bezeichnet, während die rechte Seite \mathbf{F} Lastvektor genannt wird.

Das Céa-Lemma zeigt die Quasi-Optimalität der Galerkin-Lösung.

Satz 2.4.3 (Céa-Lemma. Sauter/Schwab 2004 [30, Abs. 4.1.8 Proposition 4.1.45])

Die Galerkin-Approximation $u_h \in \mathcal{S}_0^p(\mathcal{T})$ zur Lösung $u \in \mathcal{H}$ der hypersingulären Integralgleichung konvergiert quasioptimal

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{\|W\|}{C_{\text{ell}}} \min_{v_h \in \mathcal{S}_0^p(\mathcal{T})} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.15)$$

Der Fehler erfüllt die Galerkin-Orthogonalität

$$\langle\langle u - u_h, v_h \rangle\rangle = 0 \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}_0^p(\mathcal{T}). \quad (2.16)$$

Beweis: Zuerst wenden wir uns dem Beweis der Galerkin-Orthogonalität zu. Hierbei sei erinnert, dass sowohl die analytische Lösung u als auch die Galerkin-Lösung u_h die Gleichung $\langle\langle u, v_h \rangle\rangle = \langle f, v_h \rangle$ bzw. $\langle\langle u_h, v_h \rangle\rangle = \langle f, v_h \rangle$ erfüllen. Durch Subtraktion beider Gleichungen erhalten wir

$$\langle\langle u - u_h, v_h \rangle\rangle = \langle\langle u, v_h \rangle\rangle - \langle\langle u_h, v_h \rangle\rangle = \langle f, v_h \rangle - \langle f, v_h \rangle = 0 \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{S}_0^p(\mathcal{T}).$$

Bezeichne $e_h = u - u_h$ den Verfahrensfehler. Unter Ausnutzung der Galerkin-Orthogonalität, der Elliptizität und der Stetigkeit des Randintegraloperators W erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} C_{\text{ell}} \|u - u_h\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \langle\langle e_h, e_h \rangle\rangle = \langle\langle e_h, u - u_h \rangle\rangle \\ &= \langle\langle e_h, u \rangle\rangle - \langle\langle e_h, u_h \rangle\rangle = \langle\langle e_h, u \rangle\rangle - \langle\langle e_h, v_h \rangle\rangle = \langle\langle e_h, u - v_h \rangle\rangle \\ &\leq \|W\| \|e_h\|_{\mathcal{H}} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

für alle $v_h \in \mathcal{S}_0^p(\mathcal{T})$.

Division durch die Elliptizitätskonstante C_{ell} , kürzen von $\|e_h\|_{\mathcal{H}}$ und minimieren über $v_h \in \mathcal{S}_0^p(\mathcal{T})$ schließt den Beweis ab. \square

Bemerkung 2.4.4 Quasioptimalität bedeutet, dass der Galerkin-Fehler $\|u - u_h\|_{\mathcal{H}}$ bis auf eine multiplikative Konstante mit der Größe des Fehlers der besten Approximation von u in $\mathcal{S}_0^p(\mathcal{T})$ beschränkt ist. Das Céa-Lemma sagt insbesondere aus, dass die Galerkin-Lösung $u_h \in \mathcal{S}_0^p(\mathcal{T})$ die Bestapproximation von u im Raum $\mathcal{S}_0^p(\mathcal{T})$ bezüglich der Energienorm ist. Die Orthogonalprojektion $\mathbb{G}_h : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}_0^p(\mathcal{T})$ bezüglich des Energieskalarprodukts $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ ist also durch $\mathbb{G}_h u = u_h$ gegeben. Der Operator \mathbb{G}_h heißt Galerkin-Projektion.

2.5 Konvergenz der Galerkin-Randelementmethode

Satz 2.5.1 (Steinbach 2003[31, Abs. 8.1]) Sei $X_\ell \subseteq X_{\ell+1}$ eine Folge von geschachtelten diskreten Räumen mit der Eigenschaft

$$\limsup_{\ell \rightarrow \infty} \inf_{v \in X_\ell} \|v - v_\ell\| = 0.$$

Dann konvergiert das Galerkin-Verfahren.

Unsere bisherigen Überlegungen führten zu Aussagen über Randelementmethoden und speziell das Galerkin-Verfahren. Der Gedanke, dass rechnerische Ungenauigkeiten Einfluss auf die Lösung des Galerkin-Verfahrens und damit auch auf die Güte der Approximation der exakten Lösung ausüben, fand bislang noch keinen Platz. Tatsächlich lässt sich in einer praktischen Implementierung der Galerkin-Randelementmethode der Integraloperator W im Allgemeinen nicht exakt realisieren. Quadratur und die eventuelle Approximation von Daten bedingen Störungen.

Das Lemma von Strang zeigt, dass Störungen der Daten bzw. des Operators, sofern sie zumindest von gleicher Ordnung wie der Verfahrensfehler sind, keinen negativen Einfluss auf die Konvergenzordnung des Verfahrens haben.

Lemma 2.5.2 (Strang, Steinbach 2003 [31, Abs. 8.2]) *Sei $F \in \mathcal{H}^*$ gegeben und sei $u \in \mathcal{H}$ mit $\langle u, \cdot \rangle = F \in \mathcal{H}^*$. Für einen Diskretisierungsparameter $h > 0$ sei der Raum $X_h \leq \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ eine stetige Bilinearform auf X_h und $F_h \in X_h^*$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Falls*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{v_h, w_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{|\langle v_h, w_h \rangle - \langle v_h, w_h \rangle_h|}{\|v_h\|_{\mathcal{H}} \|w_h\|_{\mathcal{H}}} = 0$$

gilt, so folgt

$$\exists h_0 > 0, \exists \tilde{\alpha} > 0 \quad \text{für alle } h < h_0, \quad \text{für alle } v_h \in X_h : \tilde{\alpha} \|v_h\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle v_h, v_h \rangle_h. \quad (2.17)$$

Für hinreichend kleines $h > 0$ ist die Form $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ gleichmäßig elliptisch auf X_h und es existiert somit ein eindeutiges $u_h \in X_h$, sodass $\langle u_h, \cdot \rangle_h = F_h \in X_h^$ gilt.*

(ii) *Es gelte (2.17). Dann folgt*

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \lesssim \inf_{v_h \in X_h} (\|u - v_h\|_{\mathcal{H}} + \|\langle v_h, \cdot \rangle - \langle v_h, \cdot \rangle_h\|_{X_h^*}) + \|F - F_h\|_{X_h^*}.$$

Mit Hilfe des Lemmas von Strang zeigen wir nun die Konvergenz des gestörten Galerkin-Verfahrens.

Satz 2.5.3 *Sei $F \in \mathcal{H}^*$ gegeben. Sei $u \in \mathcal{H}$ so gewählt, dass $\langle u, \cdot \rangle = F \in \mathcal{H}^*$ gilt. Für $h > 0$ sei der Raum $X_h \leq \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum des Hilbert-Raumes \mathcal{H} , $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ eine stetige Bilinearform auf X_h und $F_h \in X_h^*$, sodass*

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \|F - F_h\|_{X_h^*} &= 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \alpha_h &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist, wobei

$$\alpha_h = \sup_{v_h, w_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{|\langle v_h, w_h \rangle - \langle v_h, w_h \rangle_h|}{\|v_h\|_{\mathcal{H}} \|w_h\|_{\mathcal{H}}}$$

gilt. Weiters sei $u_h \in X_h$ so gewählt, dass $\langle u_h, \cdot \rangle_h = F_h \in X_h^$ gilt. Gibt es eine dichte Teilmenge $D \subseteq \mathcal{H}$, sodass*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \min_{v_h \in X_h} \|v - v_h\|_{\mathcal{H}} = 0, \quad \text{für } v \in D$$

gilt, so folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Beweis: Sie $v \in D$ beliebig. Unter Anwendung des Lemmas von Strang und der Dreiecksungleichung gilt folgende Abschätzung nach Einsetzen obiger Voraussetzungen:

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{\mathcal{H}} &\lesssim \inf_{v_h \in X_h} (\|u - v_h\|_{\mathcal{H}} + \|\langle v_h, \cdot \rangle - \langle v_h, \cdot \rangle_h\|_{X_h^*}) + \|F - F_h\|_{X_h^*} \\
&\leq \inf_{v_h \in X_h} (\|u - v\|_{\mathcal{H}} + \|v - v_h\|_{\mathcal{H}} + \alpha_h \|v_h\|_{X_h}) + \|F - F_h\|_{X_h^*} \\
&\leq \inf_{v_h \in X_h} (\|u - v\|_{\mathcal{H}} + \|v - v_h\|_{\mathcal{H}} + \alpha_h \|v - v_h\|_{\mathcal{H}} + \alpha_h \|v\|_{\mathcal{H}}) + \|F - F_h\|_{X_h^*} \\
&\leq \|u - v\|_{\mathcal{H}} + (1 + \alpha_h) \inf_{v_h \in X_h} \|v - v_h\|_{\mathcal{H}} + \alpha_h \|v\|_{\mathcal{H}} + \|F - F_h\|_{X_h^*}.
\end{aligned}$$

Bildet man nun den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ folgt die Behauptung, da $v \in D$ beliebig war und D eine dichte Teilmenge ist. \square

Bemerkung 2.5.4 *Man kann zeigen, dass die Räume $X_h := \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ mit $h_{\max} \rightarrow 0$ den dichten Teilraum $D = H^1(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}$ geeignet im Sinne von Satz 2.5.3 approximiert.*

Wir haben zwar gesehen, dass die Galerkin-Randelementmethode für $\|h_\ell\|_\infty \rightarrow 0$ konvergiert, jedoch können wir noch keine Aussage darüber treffen, mit welcher Ordnung $\mathcal{O}(\|h\|_\infty^\alpha)$ dies passiert. Im Folgenden werden wir Approximationsaussagen treffen, mit deren Hilfe auch solche Fragen beantwortet werden können.

Für spätere Zitation führen wir der Vollständigkeit halber den Transformationssatz an.

Satz 2.5.5 (Transformationssatz. Sauter/Schwab 2004 [30, Abs. 4.3 Lemma 4.3.6]) *Sei T das affine Bild eines Referenzelements T_{ref} unter der zugehörigen Parametrisierung γ_T . Dann gilt*

$$v \in H^k(T) \iff v_{\text{ref}} := v \circ \gamma_T \in H^k(T_{\text{ref}}).$$

Weiters gelten für alle $0 \leq \ell \leq k$ folgende Ungleichungen

$$\begin{aligned}
|v|_{H^\ell(T)} &\lesssim h_T^{1-\ell} |v_{\text{ref}}|_{H^\ell(T_{\text{ref}})}, \\
|\widehat{v}|_{H^\ell(T_{\text{ref}})} &\lesssim h_T^{\ell-1} |v|_{H^\ell(T)}
\end{aligned}$$

mit Konstanten, die jeweils nur von k abhängen.

Der Beweis dieses Satzes beschränkt sich hauptsächlich auf lange und technische Rechnungen.

Satz 2.5.6 (Steinbach 2003 [31, Satz 10.3]) *Sei Γ hinreichend glatt. Sei $u \in H_*^2(\Gamma)$ bzw. $u \in \widetilde{H}^2(\Gamma)$. Dann gilt für $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ die Approximationseigenschaft*

$$\inf_{v_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})} \|u - v_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq Ch_{\max}^{3/2} |u|_{H^2(\Gamma)}.$$

Korollar 2.5.7 *Die uniforme $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ -Galerkin-Randelementmethode konvergiert für hinreichend glatte Lösung $u \in H^2(\Gamma)$ mit Ordnung $\mathcal{O}(h_{\max}^{3/2})$. Unter uniform verstehen wir hier, dass ausgehend von einem Startnetz \mathcal{T}_0 in jedem Verfeinerungsschritt alle Elemente geteilt werden.*

Mit Hilfe sogenannter inverser Abschätzungen lässt sich zeigen, dass dies die optimale Konvergenzrate des Verfahrens ist.

Kapitel 3

A posteriori Fehlerschätzung

Bei praktischen Aufgabenstellungen stößt man für gewöhnlich auf die Schwierigkeit, dass die exakte Lösung u des betrachteten Problems nicht bekannt ist und oft nicht die nötigen Voraussetzungen an die Regularität erfüllt. Daher können die a priori Fehlerabschätzungen aus Kapitel 2 zur Analyse der Güte einer diskreten Lösung u_h nicht herangezogen werden.

In diesem Kapitel möchten wir uns mit a posteriori Fehlerschätzern, die auf der Energienorm basieren, beschäftigen. Wir werden sehen, dass diese unter gewissen Annahmen gute Aussagen über den Fehler $\|u - u_h\|$ bringen, ohne von der exakten Lösung u abzuhängen. Außerdem ermöglichen Lokalisierungstechniken das Arbeiten mit lokalen a posteriori Fehlerschätzern, womit in adaptiven Algorithmen die Verfeinerung des Netzes gesteuert werden kann. Es liegt also gewisse Information darüber vor, wo im Netz inakzeptable Fehler entstehen.

Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit Lokalisierungstechniken, die es ermöglichen die Energienorm $\|\cdot\|$ durch eine gewichtete H^1 -Seminorm $\|h^{1/2}(\cdot)'\|_{L^2(\Gamma)}$, wobei $(\cdot)'$ die Ableitung nach der Bogenlänge bezeichnet, zu ersetzen. Danach entwickeln wir Fehlerschätzer für die hypersinguläre Integralgleichung, in dem wir den ursprünglichen Raum der Ansatzfunktionen anreichern. Im nachfolgenden Abschnitt werden wir die mathematischen Zusammenhänge zwischen dem $(h - h/2)$ -Fehlerschätzer aus FERRAZ-LEITE/PRAETORIUS 2008 [16], dem Zwei-Level-Schätzer aus MUND/STEPHAN/WEISSE 1997 [26] und dem Mittelungsfehlerschätzer aus CARSTENSEN/PRAETORIUS 2007 [8] analysieren. Daraus wird resultieren, dass all diese Fehlerschätzer äquivalent sind.

Bevor wir uns den Resultaten nähern, stellen wir klar, dass wir im Folgenden speziell die hypersinguläre Integralgleichung

$$Wu = f \quad \text{auf } \Gamma$$

mit einer relativ offenen Teilmenge $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ des Randes eines zusammenhängenden Lipschitz-Gebiets $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ betrachten. Wir wiederholen der Übersichtlichkeit halber den abgeschlossenen Unterraum von $H^{1/2}(\Gamma)$, auf dem der hypersinguläre Integraloperator W operiert mit \mathcal{H} , wobei folgende Fallunterscheidung zu beachten ist:

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) := \{v|_{\Gamma} \mid v \in H^{1/2}(\partial\Omega) \text{ mit } \text{supp}(v) \subseteq \bar{\Gamma}\} & \text{für } \Gamma \subsetneq \partial\Omega, \\ H_*^{1/2}(\Gamma) := \{v \in H^{1/2}(\Gamma) \mid \int_{\Gamma} v \, ds = 0\} & \text{für } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

Aufgrund der Eigenschaft, dass $W : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ ein symmetrischer und elliptischer Isomorphismus zwischen dem Sobolev-Raum \mathcal{H} und seinem Dualraum \mathcal{H}^* ist, definiert $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wie in Kapitel 2 ein äquivalentes Skalarprodukt auf dem Energieraum \mathcal{H} durch $\langle u, v \rangle := \langle Wu, v \rangle$, wobei die duale Klammer auf der rechten Seite auf das erweiterte L^2 -Skalarprodukt Bezug nimmt. Mit $\|\cdot\|$ wird die zugehörige Energienorm notiert.

Um obigen Fallunterscheidungen bezüglich des Raumes der diskreten Ansatzfunktionen gerecht zu

werden, wird dieser allgemein als $\mathcal{S}_0^p(\mathcal{T})$ bezeichnet mit

$$\mathcal{S}_0^p(\mathcal{T}_h) = \begin{cases} \mathcal{S}^p(\mathcal{T}_h) \cap \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) = \{v_h \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T}_h) \mid v_h|_{\partial\Gamma} = 0\} & \text{für } \Gamma \subsetneq \partial\Omega, \\ \mathcal{S}^p(\mathcal{T}_h) \cap H_*^{1/2}(\Gamma) = \{v_h \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T}_h) \mid \int_{\Gamma} v_h ds = 0\} & \text{für } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei $\mathcal{S}^p(\mathcal{T}_h) := \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_h) \cap C(\Gamma)$.

Es sei klargestellt, dass wir im Folgenden von *Verfeinerung* eines Elements $T_j \in \mathcal{T}_h$ sprechen, wenn aus T_j zwei neue Elemente hervorgehen, die nun halbe Länge haben.

Zwei grundlegende Eigenschaften, die man sich von a posteriori Fehlerschätzern wünscht, sind Zuverlässigkeit und Effizienz.

Ein Fehlerschätzer ϱ heißt zuverlässig, wenn es eine Konstante C_{rel} gibt, sodass

$$\|u - u_h\| \leq C_{\text{rel}} \varrho(u_h)$$

gilt. Er wird als effizient bezeichnet, falls eine Konstante C_{eff} existiert, sodass

$$\varrho(u_h) \leq C_{\text{eff}} \|u - u_h\|$$

gilt. Die beiden Konstanten C_{rel} , C_{eff} sind unabhängig von den Lösungen u und u_h , jedoch nicht unbedingt unbeeinflusst von der rechten Seite $f \in \mathcal{H}^*$ und der Formregularitätskonstanten $\kappa(\mathcal{T}_h)$. Es gilt zu bemerken, dass der Fehlerschätzer ϱ eine berechenbare Größe ist, die nur von den gegebenen Daten und bereits berechneten Galerkin-Lösungen abhängt.

Erfüllen zwei Fehlerschätzer

$$C_{\text{low}}^{-1} \xi \leq \varrho \leq C_{\text{high}} \xi$$

mit Konstanten $C_{\text{low}}, C_{\text{high}} > 0$, die nur von der Formregularitätskonstanten $\kappa(\mathcal{T}_h)$ abhängen, dann sind sie äquivalent zueinander.

Spricht man von einem lokalen Fehlerschätzer, so erfüllt ϱ für eine Partition $\mathcal{T}_h := \{T_1, \dots, T_N\}$

$$\varrho = \left(\sum_{j=1}^N \varrho(T_j)^2 \right)^{1/2},$$

wobei mit $\varrho(T_j)$ sogenannte Verfeinerungsindikatoren bezeichnet sind, die zumindest heuristisch über den lokalen Beitrag zum Gesamtfehler $\|u - u_h\|$ auf einem Paneel T_j informieren.

Mit diesen vorbereitenden Erläuterungen können wir uns nun dem ersten Gegenstand der a posteriori Fehlerschätzung zuwenden, den Lokalisierungstechniken.

3.1 Lokalisierungstechniken

Um Missverständnisse zu vermeiden, wollen wir eine gebräuchliche Notation einführen, die wir in den kommenden Abschnitten verwenden werden.

3.1.1 Notation

Wenn nicht explizit anders erwähnt, sind folgende Definitionen gültig

$$X_\ell := \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell), \quad \hat{X}_\ell := \mathcal{S}_0^1(\hat{\mathcal{T}}_\ell), \quad \tilde{X}_\ell := \mathcal{S}_0^2(\mathcal{T}_\ell),$$

wobei $\widehat{\mathcal{T}}_\ell$ jene Triangulierung bezeichnet, die aus einer uniformen Verfeinerung des Netzes \mathcal{T}_ℓ hervorgeht. Hierbei bezeichnet ℓ den Level der adaptiven Verfeinerung. Allgemeiner werden wir in späteren Abschnitten mit \overline{X}_ℓ entweder \widehat{X}_ℓ oder \widetilde{X}_ℓ bezeichnen, also

$$\overline{X}_\ell \in \{\widehat{X}_\ell, \widetilde{X}_\ell\}.$$

Für die jeweils entsprechenden Galerkin-Approximationen verwenden wir die Bezeichnungen $u_\ell, \widehat{u}_\ell, \widetilde{u}_\ell$ und \overline{u}_ℓ . Außerdem wird wie üblich die Galerkin-Projektion mit \mathbb{G} notiert. Bezieht sie sich speziell auf obige Räume, so verwendet man die entsprechende Notation. Beispielsweise bezeichnet $\widetilde{\mathbb{G}}_\ell$ die Galerkin-Projektion auf den Raum \widetilde{X}_ℓ etc.

Weiters stellt $h_\ell \in L^\infty(\Gamma)$ jene Funktion dar, die die lokale Netzweite $h_\ell(T) := \text{diam}(T)$ für $T \in \mathcal{T}_\ell$ und $h_\ell|_T := h_\ell(T)$ zurückgibt.

3.1.2 Lokale inverse Abschätzung

Im Bezug auf das Studium von a posteriori Fehlerschätzern hat sich gezeigt, dass die inverse Abschätzung ein nützliches Werkzeug ist. Wir stellen im Folgenden eine lokale inverse Abschätzung in der Energienorm vor. Der Beweis benützt im Wesentlichen die Aussage, dass Sobolev-Räume über Interpolation charakterisiert werden können (vgl. Bemerkung 2.1.15).

Bemerkung 3.1.1 *Es sei erinnert, dass der Sobolev-Raum $H^1(\Gamma)$ definiert werden kann als die Vervollständigung des Raumes aller Lipschitz-stetigen Funktionen $\text{Lip}(\Gamma)$ mit der Norm $\|u\|_{H^1(\Gamma)}^2 = \|u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|u'\|_{L^2(\Gamma)}^2$. Definiert man $\widetilde{H}^1(\Gamma)$ als die Vervollständigung des Raumes $\{u \in \text{Lip}(\Gamma) : u|_{\partial\Gamma} = 0\}$, dann erfüllen die Sobolev-Räume $H^\alpha(\Gamma)$ und $\widetilde{H}^\alpha(\Gamma)$ mit der komplexen Interpolation $[\cdot; \cdot]_\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$*

$$H^\alpha(\Gamma) = [L^2(\Gamma); H^1(\Gamma)]_\alpha \quad \text{und} \quad \widetilde{H}^\alpha(\Gamma) = [L^2(\Gamma); \widetilde{H}^1(\Gamma)]_\alpha.$$

Die Normen der durch Interpolation definierten Räume $H^\alpha(\Gamma)$ und $\widetilde{H}^\alpha(\Gamma)$ sind äquivalent.

Lemma 3.1.2 (Carstensen/Praetorius 2007 [8, Abs. 3.3]) *Es gibt eine Konstante $C > 0$, die nur von Γ , dem Interpolationsindex α und dem Polynomgrad p abhängt, sodass*

$$\|h_\ell^{1-\alpha} v'_\ell\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|v_\ell\|_{H^\alpha(\Gamma)} \quad \text{für alle } v_\ell \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T}_\ell) \quad (3.1)$$

gilt. Insbesondere ist die Konstante C unabhängig von \mathcal{T}_ℓ .

Beweis: Wir wollen den Beweis in vier Schritten führen.

- Sei X ein endlichdimensionaler Vektorraum und $Y := \{x \in X \mid |x| = 0\}$ ein abgeschlossener Teilraum von X . Hierbei bezeichnet $|\cdot|$ eine Halbnorm auf X . Dann betrachten wir den Faktorraum X/Y . Nach der Funktionalanalysis sind $|x + Y| := \inf_{y \in Y} |x + y|$ und $\|x + Y\| := \inf_{y \in Y} \|x + y\|$ Normen auf X/Y . Darüber hinaus gilt für die Kodimension $\dim(X/Y) = \dim X - \dim Y < \infty$. Also schließen wir mit Hilfe der Normäquivalenz auf endlichdimensionalen Räumen

$$|x| = |x + Y| \lesssim \|x + Y\| \leq \|x\|.$$

- Wir wollen nun das Resultat des ersten Schritts auf $\mathcal{P}^p(T_{\text{ref}})$ anwenden, wobei T_{ref} das Referenzelement eines Elements T der Partitionierung \mathcal{T}_ℓ bezeichnet. Es gilt

$$\|v'_{\text{ref}}\| \leq C_{\text{ref}} \|v_{\text{ref}}\|_{L^2(T_{\text{ref}})} \quad \text{für alle } v_{\text{ref}} \in \mathcal{P}^p(T_{\text{ref}}),$$

da $\|(\cdot)'\|$ eine Seminorm auf $L^2(T_{\text{ref}})$ darstellt.

- Mit einem Skalierungsargument gewinnen wir für $\mathcal{P}^p(T)$ die Aussage

$$\|v'_\ell\|_{L^2(T)} \leq C_{\text{ref}} h_T^{-1} \|v_\ell\|_{L^2(T)} \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T} \text{ und für alle } v_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_\ell).$$

Damit haben wir nun eine lokale inverse Abschätzung gefunden.

- Betrachten wir das Resultat aus dem dritten Schritt und summieren wir über alle Elemente $T_j \in \mathcal{T}_\ell$, so führt dies schließlich zu

$$\|h_\ell v'_\ell\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_{\text{ref}} \|v_\ell\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (3.2)$$

Abschätzung (3.2) erlaubt zusammen mit der trivialen Abschätzung $\|v'_\ell\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|v_\ell\|_{H^1(\Gamma)}$ ein Interpolationsargument für den Operator

$$T_\alpha : (\mathcal{S}^p(\mathcal{T}_\ell), \|\cdot\|_{H^\alpha(\Gamma)}) \rightarrow (\mathcal{P}^{p-1}(\mathcal{T}_\ell), \|h_\ell^{1-\alpha}(\cdot)\|_{L^2(\Gamma)}), \quad v_\ell \mapsto v'_\ell$$

anzuwenden. Nach [4, Abschnitt 5.4] wird der Interpolationsraum von $(L^2, \|h_\ell(\cdot)\|_{L^2(\Gamma)})$ und $(L^2, \|\cdot\|_{L^2(\Gamma)})$ für $0 \leq \alpha \leq 1$ durch $(L^2, \|h_\ell^{1-\alpha}(\cdot)\|_{L^2(\Gamma)})$ gegeben. Damit sind T_0 und T_1 stetige Operatoren mit Operatornorm $\|T_0\| \leq C_0$ bzw. $\|T_1\| \lesssim 1$ und der Operator T_α ist wohldefiniert und stetig mit Operatornorm $\|T_\alpha\| \lesssim C_0^{1-\alpha}$.

Schließlich kann die Konstante $C = C_{\text{ref}}^{1-\alpha}$ gewählt werden, wodurch der Beweis nun vollständig ist. \square

3.1.3 Lokalisierung der $H^{1/2}$ -Norm

Ziel ist es, die Energienorm für diskrete Funktionen $v_\ell \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell)$ zu lokalisieren. Da die Energienorm $\|\cdot\|$ eine äquivalente Norm auf dem Unterraum \mathcal{H} von $H^{1/2}(\Gamma)$ ist, bietet es sich an die Lokalisierung mittels einer h -gewichteten H^1 -Seminorm $\|h_\ell^{1/2}(\cdot)'\|_{L^2(\Gamma)}$, wobei $(\cdot)'$ die Ableitung nach der Bogenlänge meint, zu erreichen.

Lemma 3.1.3 (i) Sei $v_\ell \in \mathcal{S}_0^p(\mathcal{T}_\ell)$ beliebig. Dann gilt die inverse Abschätzung

$$\|h_\ell^{1/2} v'_\ell\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_1 \|v_\ell\| \quad \text{für alle } v_\ell \in \mathcal{S}_0^p(\mathcal{T}_\ell), \quad (3.3)$$

wobei die Konstante $C_1 > 0$ nur von Γ und dem Polynomgrad $p \geq 0$ abhängt.

(ii) Sei der Operator der nodalen Interpolation gegeben durch

$$I_\ell : C(\bar{\Gamma}) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell), \quad I_\ell v := \sum_{z \in \mathcal{K}_\ell} v(z) \phi_z.$$

Dann stehen für $p = 1$ der Operator I_ℓ und die L^2 -Orthogonalprojektion $\Pi_\ell : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ wie folgt in Relation:

$$(I_\ell v)' = \Pi_\ell v' \quad \text{für alle } v \in H^1(\Gamma). \quad (3.4)$$

(iii) Es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|v - I_\ell v\| \leq C_2 \|h_\ell^{1/2} (v - I_\ell v)'\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_2 \|h_\ell^{1/2} v'\|_{L^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } v \in H^1(\Gamma) \cap \mathcal{H} \quad (3.5)$$

mit einer Konstanten C_2 , die nur von Γ und der Formregularitätskonstanten $\kappa(\mathcal{T}_\ell)$ abhängt.

- (iv) Sei X_ℓ ein endlichdimensionaler Unterraum von \mathcal{H} , wobei $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell) \subseteq X_\ell \subseteq \mathcal{H}$ gilt. Dann erfüllt die entsprechende Galerkin-Projektion $\mathbb{G}_\ell : \mathcal{H} \rightarrow X_\ell$

$$\|v - \mathbb{G}_\ell v\| \leq C_2 \min \{ \|h_\ell^{1/2} v'\|_{L^2(\Gamma)}, \|h_\ell^{1/2} (v - \mathbb{G}_\ell v)'\|_{L^2(\Gamma)} \} \quad \text{für alle } v \in H^1(\Gamma) \cap \mathcal{H} \quad (3.6)$$

mit Konstante C_2 aus (iii).

Beweis:

- (i) Unter Verwendung von Abschätzung (3.1) erreichen wir mit $\alpha = 1/2$ und der Nutzung der Normäquivalenz auf \mathcal{H} den Beweis der Behauptung (3.3).
- (ii) Da die Gleichung $v - I_\ell v = 0$ in allen Knoten des Netzes \mathcal{T}_ℓ erfüllt ist, gilt

$$\int_T (v - I_\ell v)' ds = 0 \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_\ell. \quad (3.7)$$

Da $\Pi_\ell v' - v'$ orthogonal auf den Raum $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ steht, gilt $(\Pi_\ell v', \chi_T)_{L^2} = (v', \chi_T)_{L^2} = \int_T v' dx$. Andererseits folgt $(\Pi_\ell v', \chi_T)_{L^2} = |T|(\Pi_\ell v')|_T$, da $\Pi_\ell v'|_T \in \mathbb{R}$ gilt. Verwendet man nun für die L^2 -Orthogonalprojektion $\Pi_\ell|_T$ mit $T = [a, b]$ eben gezeigte Integraldarstellung und formt um, so erhält man

$$\Pi_\ell v'|_T = \frac{1}{|T|} \int_T v' dx = \frac{1}{b-a} (v(b) - v(a)) = (I_\ell v|_T)'.$$

Insbesondere sieht man ein, dass Gleichung (3.7) äquivalent zu Aussage (3.4) ist.

- (iii) Zunächst wollen wir den ersten Teil der Ungleichungskette (3.5) beweisen. Dazu betrachten wir ein Ergebnis aus [7, Theorem 1], wonach

$$\|v - I_\ell v\|_{H^\alpha(\Gamma)} \leq \widetilde{C}_2 \|h_\ell^{1-\alpha} v'\|_{L^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } v \in H^1(\Gamma)$$

gilt. Die Konstante \widetilde{C}_2 hängt hierbei von $\Gamma, \alpha \geq 0$ und der Formregularitätskonstanten $\kappa(\mathcal{T}_\ell)$ ab. Für $\alpha = 1/2$ definieren wir

$$\widehat{I}_\ell v := \begin{cases} I_\ell v & \text{für } \Gamma \subsetneq \partial\Omega, \\ I_\ell v - \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma I_\ell v ds & \text{für } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

Nach Definition von \widehat{I}_ℓ sehen wir, dass $\widehat{I}_\ell v \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}) \subset H^1(\Gamma) \cap \mathcal{H}$ erfüllt ist und daher gilt für alle $v \in H^1(\Gamma) \cap \mathcal{H}$ die Gleichheit $\|v - \widehat{I}_\ell v\| = \|v - I_\ell v\|$. Es sei hierbei an die Definition der Energienorm erinnert $\|\cdot\|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle W\cdot, \cdot \rangle$ und an die Eigenschaft, dass Konstanten in den Kern des hypersingulären Integraloperators W abgebildet werden.

Nützt man nun die Normäquivalenz auf \mathcal{H} aus, so erhält man

$$\|v - \widehat{I}_\ell v\| = \|v - I_\ell v\| \leq C_2 \|h_\ell^{1/2} v'\|_{L^2(\Gamma)} \quad \text{für alle } v \in H^1(\Gamma) \cap \mathcal{H}.$$

Dieses Ergebnis kann klarerweise auch auf $w := v - \widehat{I}_\ell v$ angewandt werden, da $w \in H^1(\Gamma) \cap \mathcal{H}$ gilt. Unter Beachtung, dass \widehat{I}_ℓ eine Projektion auf $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ ist und damit $(\widehat{I}_\ell)^2 = \widehat{I}_\ell$ gilt, und mit der Gültigkeit von $(I_\ell v)' = (\widehat{I}_\ell v)'$ folgt

$$\|v - I_\ell v\| = \|v - \widehat{I}_\ell v\| = \|w - \widehat{I}_\ell w\| \leq C_2 \|h_\ell^{1/2} w'\|_{L^2(\Gamma)} = C_2 \|h_\ell^{1/2} (v - I_\ell v)'\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Für den zweiten Teil der Ungleichungskette (3.5) verwenden wir die \mathcal{T}_ℓ -elementweise gültige Bestapproximationseigenschaft der L^2 -Orthogonalprojektion Π_ℓ auf $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ und erhalten zusammen mit Gleichung (3.4)

$$\|(v - I_\ell v)'\|_{L^2(T)}^2 = \|v' - \Pi_\ell v'\|_{L^2(T)}^2 \leq \|v'\|_{L^2(T)}^2 \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_\ell.$$

Multiplizieren wir diese Abschätzung mit der Netzweite h_ℓ und summieren über alle Elemente $T \in \mathcal{T}_\ell$, so erhalten wir

$$\|h_\ell^{1/2}(v - I_\ell v)'\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|h_\ell^{1/2}v'\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Damit ist der Beweis zur Ungleichungskette (3.5) abgeschlossen.

- (iv) Um die letzte Aussage des Lemmas zu zeigen, nützen wir die Bestapproximationseigenschaft bezüglich der Energienorm der Galerkin-Projektion \mathbb{G}_ℓ aus und erhalten für alle $v \in H^1 \cap \mathcal{H}$

$$\|v - \mathbb{G}_\ell v\| = \min_{v_\ell \in X_\ell} \|v - v_\ell\| \leq \|v - \hat{I}_\ell v\| = \|v - I_\ell v\| \leq C_2 \|h_\ell^{1/2}v'\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Wir betrachten $w := v - \mathbb{G}_\ell v \in H^1(\Gamma) \cap \mathcal{H}$. Verwendung der Projektionseigenschaft der Galerkin-Projektion $\mathbb{G}_\ell^2 = \mathbb{G}_\ell$ führt auf

$$\|v - \mathbb{G}_\ell v\| = \|w - \mathbb{G}_\ell w\| \leq C_2 \|h_\ell^{1/2}w'\|_{L^2(\Gamma)} = C_2 \|h_\ell^{1/2}(v - \mathbb{G}_\ell v)'\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Daher kann $\|v - \mathbb{G}_\ell v\|$ durch das Minimum der beiden rechten Seiten abgeschätzt werden. Dies schließt den Beweis des Lemmas ab. \square

3.2 Fehlerschätzung durch Erweiterung des Raumes

Eine Möglichkeit, effiziente und zuverlässige a posteriori Fehlerschätzer zu entwickeln, basiert auf Anreicherung des diskreten Raumes, in dem die Galerkin-Approximationen liegen. Wie die daraus resultierenden Fehlerschätzer aussehen und der Nachweis der Effizienz- und Zuverlässigkeitseigenschaft wird in diesem Unterkapitel dargebracht.

Wir betrachten im Folgenden die diskreten Unterräume X_ℓ und \bar{X}_ℓ von \mathcal{H} und deren zugehörige Galerkin-Lösungen $u_\ell \in X_\ell$ und $\bar{u}_\ell \in \bar{X}_\ell$. Zunächst setzen wir die Inklusion $X_\ell \subset \bar{X}_\ell$ voraus. Damit können wir mit der Bestapproximationseigenschaft der Galerkin-Projektion und den zugehörigen Lösungen die Behauptung

$$\|u - \bar{u}_\ell\| \leq \|u - u_\ell\| \tag{3.8}$$

rechtfertigen.

Wir werden sehen, dass diese Abschätzung die Sinnhaftigkeit der Definition eines Fehlerschätzers motiviert, da dadurch der Fehler $\|u - u_\ell\|$ unabhängig von der exakten Lösung geschätzt werden kann.

Wir führen nun den Fehlerschätzer η_ℓ ein.

Satz 3.2.1 *Der Fehlerschätzer*

$$\eta_\ell := \|\bar{u}_\ell - u_\ell\|. \tag{3.9}$$

ist stets effizient mit Konstante $C_{\text{eff}} = 1$.

Die Saturationsannahme

$$\|u - \bar{u}_\ell\| \leq q_S \|u - u_\ell\| \quad \text{mit einer } \ell\text{-unabhängigen Konstanten } q_S \in (0, 1) \tag{3.10}$$

ist äquivalent zur Zuverlässigkeit von η_ℓ mit einer Konstanten $C_{\text{rel}} = (1 - q_S^2)^{-1/2}$.

Beweis: Zunächst wollen wir die Effizienz einsehen. Hierfür nützen wir die Galerkin-Orthogonalität für \overline{X}_ℓ aus und erhalten sofort

$$\|u - u_\ell\|^2 = \|u - \overline{u}_\ell\|^2 + \|\overline{u}_\ell - u_\ell\|^2 = \|u - \overline{u}_\ell\|^2 + \eta_\ell^2.$$

Da $\|\cdot\|$ eine Norm ist und daher der zweite Summand der rechten Seite größer oder gleich Null ist, gilt

$$\eta_\ell \leq \|u - u_\ell\|.$$

Damit ist die Effizienz mit Konstanten $C_{\text{eff}} = 1$ des Fehlerschätzers η_ℓ bewiesen. Unter der Saturationsannahme (3.10) gilt

$$\|u - u_\ell\|^2 = \|u - \overline{u}_\ell\|^2 + \eta_\ell^2 \leq q_S^2 \|u - u_\ell\|^2 + \eta_\ell^2.$$

Umformung dieser Ungleichung führt zur Zuverlässigkeitsabschätzung

$$\|u - u_\ell\| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - q_S^2}} \eta_\ell.$$

Andererseits folgt aus der Galerkin-Orthogonalität

$$\|u - \overline{u}_\ell\|^2 + \eta_\ell^2 = \|u - u_\ell\|^2$$

und mit der Zuverlässigkeit

$$\|u - \overline{u}_\ell\|^2 + C_{\text{rel}}^{-2} \|u - u_\ell\| \leq \|u - u_\ell\|^2.$$

Dies führt auf die Saturationsannahme (3.10)

$$\|u - \overline{u}_\ell\|^2 \leq (1 - C_{\text{rel}}^{-2}) \|u - u_\ell\|^2,$$

wodurch der Beweis nun vollständig ist. □

Bemerkung 3.2.2 *Aus numerischen Experimenten ist die Gültigkeit der Saturationsannahme (3.10) ersichtlich. Ein analytischer Beweis wird in [12] für die Finite Elemente Methode unter schwachen Bedingungen an die Netzverfeinerung dargebracht.*

Weiters stellt die Saturationsannahme (3.10) eine Verschärfung der Abschätzung (3.8) dar und kann nur erfüllt sein, wenn der Raum \overline{X}_ℓ hinreichend größer ist als X_ℓ .

Wir wollen nun die Anreicherung des Raumes X_ℓ konkretisieren, indem wir als erstes die sogenannte $h - h/2$ -Strategie betrachten. Wir gehen analog zu [16] vor, worin diese Methode für die Symmsche Integralgleichung studiert wurde. Dabei geht man von einer Triangulierung \mathcal{T}_ℓ von Γ aus, aus der durch uniforme Verfeinerung eine neue Triangulierung $\widehat{\mathcal{T}}_\ell$ gewonnen wird. Dies führt zu den Spezifizierungen

$$X_\ell := \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell) \quad \text{und} \quad \overline{X}_\ell := \mathcal{S}_0^1(\widehat{\mathcal{T}}_\ell).$$

Alternativ dazu betrachten wir eine $p - (p + 1)$ -Strategie um den Raum der diskreten Lösungen zu erweitern. Dies führt zu den Spezifizierungen

$$X_\ell := \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell) \quad \text{und} \quad \overline{X}_\ell := \mathcal{S}_0^2(\mathcal{T}_\ell).$$

In beiden Fällen liegt jedoch die unbefriedigende Tatsache vor, dass der Fehlerschätzer η_ℓ über die Energienorm $\|\cdot\|$ definiert wurde. Daher wird keine lokale Information über den Fehler bereitgestellt,

wodurch sich η_ℓ nicht zur Schrittweitensteuerung in einem adaptiven Algorithmus eignet.

Bezüglich des numerischen Rechenaufwandes ist zu sagen, dass wir nicht nur die zum Raum X_ℓ zugehörige Galerkin-Lösung u_ℓ , sondern zusätzlich die numerisch aufwändigere Galerkin-Approximation \bar{u}_ℓ berechnen müssen. Nach (3.8) ist zwar \bar{u}_ℓ die bessere Approximation der exakten Lösung u , geschätzt wird jedoch nach wie vor der Fehler $\|u - u_\ell\|$.

Im folgenden Satz führen wir weitere Fehlerschätzer ein. Darunter auch solche, die eine lokale Information über den Fehler geben. Außerdem werden wir zeigen, dass alle bisher eingeführten Fehlerschätzer äquivalent sind.

Satz 3.2.3 *Sei durch $I_\ell : C(\bar{\Gamma}) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$ mit $I_\ell v := \sum_{z \in \mathcal{K}_\ell} v(z) \phi_z$ der Operator der nodalen Interpolation bezeichnet. Damit definieren wir den Fehlerschätzer $\tilde{\eta}_\ell$ durch*

$$\tilde{\eta}_\ell := \|\bar{u}_\ell - I_\ell \bar{u}_\ell\|. \quad (3.11)$$

Weiters führen wir h -gewichtete Fehlerschätzer ein, die auf der L^2 -Norm basieren. Wir definieren

$$\mu_\ell := \|h_\ell^{1/2} (\bar{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)} \quad (3.12)$$

und

$$\tilde{\mu}_\ell := \|h_\ell^{1/2} (\bar{u}_\ell - I_\ell \bar{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}. \quad (3.13)$$

Mit den Konstanten $C_1, C_2 > 0$ aus Lemma 3.1.3 gelten die Abschätzungen

$$\eta_\ell \leq \tilde{\eta}_\ell \leq C_2 \tilde{\mu}_\ell, \quad \tilde{\mu}_\ell \leq \mu_\ell \leq \sqrt{2} C_1 \eta_\ell. \quad (3.14)$$

Daher sind alle Fehlerschätzer stets effizient, und Zuverlässigkeit ist äquivalent zur Saturationsannahme (3.10).

Beweis: Sei \mathbb{G}_ℓ die Galerkin-Projektion auf X_ℓ . Dann gilt $\mathbb{G}_\ell \bar{u}_\ell = u_\ell$ aufgrund der Inklusion der Räume $X_\ell \subset \bar{X}_\ell$. Mit der Bestapproximationseigenschaft der Galerkin-Projektion zeigt man

$$\eta_\ell = \|\bar{u}_\ell - u_\ell\| = \|\bar{u}_\ell - \mathbb{G}_\ell \bar{u}_\ell\| \leq \|\bar{u}_\ell - I_\ell \bar{u}_\ell\| = \tilde{\eta}_\ell.$$

Mit Abschätzung (3.5) aus Lemma 3.1.3 erhalten wir

$$\tilde{\eta}_\ell = \|\bar{u}_\ell - I_\ell \bar{u}_\ell\| \leq C_2 \|h_\ell^{1/2} (\bar{u}_\ell - I_\ell \bar{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)} = C_2 \tilde{\mu}_\ell.$$

Damit ist die erste Ungleichungskette bewiesen.

Wir verwenden die Aussage $(I_\ell v)' = \Pi_\ell v'$ aus Lemma 3.1.3, wobei Π_ℓ die \mathcal{T}_ℓ -elementweise L^2 -Orthogonalprojektion auf $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ bezeichnet, um folgende Abschätzung zu erhalten

$$h_T \|(\bar{u}_\ell - I_\ell \bar{u}_\ell)'\|_{L^2(T)}^2 = h_T \|\bar{u}_\ell' - \Pi_\ell \bar{u}_\ell'\|_{L^2(T)}^2 \leq h_T \|(\bar{u}_\ell - \mathbb{G}_\ell \bar{u}_\ell)'\|_{L^2(T)}^2 \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_\ell.$$

Summieren wir über alle Elemente $T \in \mathcal{T}_\ell$, so erhalten wir unter Beachtung von $\mathbb{G}_\ell \bar{u}_\ell = u_\ell$

$$\tilde{\mu}_\ell \leq \mu_\ell.$$

Aus der inversen Abschätzung (3.3) aus Lemma 3.1.3 schließen wir

$$\mu_\ell = \|h_\ell^{1/2} (\bar{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)} \leq \sqrt{2} C_1 \|\bar{u}_\ell - u_\ell\| = \sqrt{2} C_1 \eta_\ell.$$

Es sei bemerkt, dass der Faktor $\sqrt{2}$ nur im Fall der $h - h/2$ -Strategie auftritt, da hierbei für die Differenz $\bar{u}_\ell - u_\ell \in \bar{X}_\ell := \mathcal{S}_0^1(\hat{\mathcal{T}}_\ell)$ gilt und daher folgende Gleichheit resultiert

$$\|h_\ell^{1/2} (\bar{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)} = \sqrt{2} \left\| \left(\frac{h_\ell}{2} \right)^{1/2} (\bar{u}_\ell - u_\ell)'\right\|_{L^2(\Gamma)} = \sqrt{2} \left\| \left(\hat{h}_\ell \right)^{1/2} (\bar{u}_\ell - u_\ell)'\right\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Während durch die erste Ungleichungskette die Äquivalenz von Zuverlässigkeit und Saturationsannahme (3.10) für alle Fehlerschätzer aus (3.14) gewährleistet wird, stellt die zweite Ungleichungskette aus (3.14) die Effizienz sicher. \square

Der Fehlerschätzer $\tilde{\mu}_\ell$ ist über die L^2 -Norm definiert und daher lokal. Wir können nun einen adaptiven Algorithmus zur isotropen Verfeinerung des Netzes anstreben. Dazu stellen wir den Fehlerschätzer $\tilde{\mu}_\ell$ dar als

$$\tilde{\mu}_\ell = \left(\sum_{j=1}^N \tilde{\mu}_\ell(T_j)^2 \right)^{1/2},$$

wobei

$$\tilde{\mu}_\ell(T_j) := h_{T_j}^{1/2} \|(\bar{u}_\ell - I_\ell \bar{u}_\ell)'\|_{L^2(T_j)}$$

gilt. Die lokale Größe $\tilde{\mu}_\ell(T_j)$ dient dem Algorithmus als lokaler Verfeinerungsindikator.

Da auch der Fehlerschätzer μ_ℓ lokal ist, könnte dieser ebenso zur Markierung der zu verfeinernden Elemente verwendet werden. Aufgrund geringeren Rechenaufwandes wird ihm jedoch in der Praxis $\tilde{\mu}_\ell$ vorgezogen.

Bemerkung 3.2.4 *Möchte man die Galerkin-Lösung u_ℓ berechnen, so ist es notwendig ein lineares Gleichungssystem mit dicht besetzter Systemmatrix zu lösen. Die Berechnung von $I_\ell \bar{u}_\ell$ kostet jedoch nur linearen Aufwand $\mathcal{O}(N)$.*

Als Kriterium zur adaptiven Netzverfeinerung setzen wir im folgenden Algorithmus das sogenannte *Dörfler-Marking* ein. Dabei geht man von einer gegebenen Triangulierung \mathcal{T}_ℓ aus und betrachtet einen lokalen Fehlerschätzer ϱ_ℓ . Nun spricht man von einer nach Dörfler markierten Triangulierung, wenn es eine Konstante $\theta \in (0, 1]$ gibt, sodass

$$\theta \sum_{T_j \in \mathcal{T}_\ell} \varrho_\ell(T_j)^2 \leq \sum_{T_j \in \mathcal{M}_\ell} \varrho_\ell(T_j)^2 \quad (3.15)$$

gilt, wobei \mathcal{M}_ℓ die Menge der markierten Elemente $T \in \mathcal{T}_\ell$ bezeichnet.

Folgender Algorithmus verwendet den lokalen Fehlerschätzer $\tilde{\mu}_\ell$ bzw. den Verfeinerungsindikator $\tilde{\mu}_\ell(T_j)$ zur Bestimmung der zu verfeinernden Elemente.

Algorithmus 3.2.5 Input: Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 , Toleranz $\tau > 0$, Adaptivitätsparameter θ mit $0 < \theta \leq 1$.

- (i) Berechnung der Galerkin-Lösung $\bar{u}_\ell \in \bar{X}_\ell$ und des nodalen Interpolanten $I_\ell \bar{u}_\ell \in X_\ell$.
- (ii) Stop, falls $\tilde{\eta}_\ell \leq \tau$.
- (iii) Andernfalls Berechnung der Verfeinerungsindikatoren $\tilde{\mu}_\ell(T_j)$ für alle Elemente $T_j \in \mathcal{T}_\ell$.
- (iv) Finde $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$ minimaler Kardinalität, sodass

$$\theta \sum_{T_j \in \mathcal{T}_\ell} \tilde{\mu}_\ell(T_j)^2 \leq \sum_{T_j \in \mathcal{M}_\ell} \tilde{\mu}_\ell(T_j)^2 \quad (3.16)$$

gilt.

- (v) Rekursive Markierung zusätzlicher Elemente, sodass stets $\kappa(\mathcal{T}_{\ell+1}) \leq 2\kappa(\mathcal{T}_0)$ gilt.

(vi) Aufbau eines neuen Netzes $\mathcal{T}_{\ell+1}$ durch Halbierung aller markierten Elemente.

(vii) Erhöhe Zähler $\ell \mapsto \ell + 1$, Rücksprung nach (i).

Output: Galerkin-Approximation $\bar{u}_\ell \in \bar{X}_\ell$ und Fehlerschätzer $\tilde{\eta}_\ell$.

Bemerkung 3.2.6 Es gilt zu beachten, dass $\tilde{\eta}_\ell$ den Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$ unter Kontrolle hält und nicht $\|u - \bar{u}_\ell\|$. Außerdem geschieht dies ohne exakte Berechnung von u_ℓ .

Nach Lemma 3.1.3 müssen wir sicherstellen, dass $\sup_{\ell \in \mathbb{N}} \kappa(\mathcal{T}_\ell) < \infty$ gilt, da die Konstante C_2 mit $\kappa(\mathcal{T}_\ell)$ gegen ∞ strebt. Im folgenden Algorithmus wird die Menge $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$ von markierten Elementen deshalb erweitert.

Algorithmus 3.2.7 Input: Menge $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$ markierter Elemente, Parameter $C_{\text{mark}} > 0$.

(i) Bestimmung der Menge $U := \bigcup_{T_j \in \mathcal{M}_\ell} \{T_k \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell \mid \bar{T}_j \cap \bar{T}_k \neq \emptyset \text{ und } h_\ell(T_k) > C_{\text{mark}} h_\ell(T_j)\}$.

(ii) Stop, falls $U = \emptyset$.

(iii) Andernfalls Erweiterung der markierten Elemente $\mathcal{M}_\ell \mapsto \mathcal{M}_\ell \cup U$.

(iv) Start eines neuen Durchlaufes des Algorithmus bei (ii).

Output: Erweiterte Menge \mathcal{M}_ℓ markierter Elemente.

Lemma 3.2.8 Algorithmus 3.2.7 terminiert, da nach maximal $\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{M}_\ell$ Durchläufen $U = \emptyset$ gilt. Die Einbettung von Algorithmus 3.2.7 in Schritt (v) Algorithmus 3.2.5 garantiert

$$\kappa(\mathcal{T}_\ell) \leq \max\{\kappa(\mathcal{T}_0), 2C_{\text{mark}}\} \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}. \quad (3.17)$$

Beweis: Seien $\hat{T}, \hat{T}' \in \mathcal{T}_{\ell+1}$ mit $\bar{\hat{T}} \cap \bar{\hat{T}}' \neq \emptyset$. Es ist

$$\frac{h_{\ell+1}(\hat{T})}{h_{\ell+1}(\hat{T}')} \leq \max\{\kappa(\mathcal{T}_\ell), 2C_{\text{mark}}\}$$

zu zeigen. Seien $T, T' \in \mathcal{T}_\ell$ die Väter von \hat{T}, \hat{T}' , d.h. es gilt $\hat{T} \subseteq T$ und $\hat{T}' \subseteq T'$. Insbesondere gilt $\bar{T} \cap \bar{T}' \neq \emptyset$ und deshalb

$$\frac{h_\ell(T)}{h_\ell(T')} \leq \kappa(\mathcal{T}_\ell).$$

Wir wollen nun alle möglichen Relationen zwischen zwei benachbarten Elementen T und T' betrachten. Hierfür führen wir folgende Fallunterscheidungen durch:

- Seien $T, T' \in \mathcal{M}_\ell$. In diesem Fall zeigt sich, dass die Relation

$$\frac{h_{\ell+1}(\hat{T})}{h_{\ell+1}(\hat{T}')} = \frac{h_\ell(T)}{h_\ell(T')} \leq \kappa(\mathcal{T}_\ell)$$

erhalten bleibt, da Verfeinerung eines Elements durch Halbierung geschieht.

- Seien $T, T' \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell$. Da keines der beiden Elemente zur Verfeinerung markiert wurde, gilt

$$\frac{h_{\ell+1}(\hat{T})}{h_{\ell+1}(\hat{T}')} = \frac{h_\ell(T)}{h_\ell(T')} \leq \kappa(\mathcal{T}_\ell).$$

- Seien $T \in \mathcal{M}_\ell$ und $T' \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell$. Insbesondere gilt hierbei, dass $T' = \widehat{T}'$ gilt. In diesem Fall zeigt sich

$$\frac{h_{\ell+1}(\widehat{T})}{h_{\ell+1}(\widehat{T}')} = \frac{\frac{1}{2}h_\ell(T)}{h_\ell(T')} \leq \frac{1}{2}\kappa(\mathcal{T}_\ell).$$

- Seien $T \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell$ und $T' \in \mathcal{M}_\ell$. Insbesondere gilt hierbei, dass $T = \widehat{T}$ gilt. Da T nicht durch Algorithmus 3.2.7 markiert wurde, gilt $h_\ell(T) < C_{\text{mark}}h_\ell(T')$, also

$$\frac{h_{\ell+1}(\widehat{T})}{h_{\ell+1}(\widehat{T}')} = \frac{h_\ell(T)}{\frac{1}{2}h_\ell(T')} < 2C_{\text{mark}}.$$

Diesen Überlegungen zu Folge können wir für alle benachbarten Elemente $\widehat{T}, \widehat{T}' \in \mathcal{T}_{\ell+1}$ zusammenfassend folgende Abschätzung festhalten

$$\frac{h_{\ell+1}(\widehat{T})}{h_{\ell+1}(\widehat{T}')} \leq \max\{\kappa(\mathcal{T}_\ell), 2C_{\text{mark}}\}.$$

Damit gilt insbesondere

$$\kappa(\mathcal{T}_{\ell+1}) \leq \max\{\kappa(\mathcal{T}_\ell), 2C_{\text{mark}}\}. \quad (3.18)$$

Um den Beweis nun zu vervollständigen, zeigen wir mittels Induktion $\kappa(\mathcal{T}_{\ell+1}) \leq \max\{\kappa(\mathcal{T}_0), 2C_{\text{mark}}\}$: Für $\ell = 0$ gilt $\kappa(\mathcal{T}_1) \leq \max\{\kappa(\mathcal{T}_0), 2C_{\text{mark}}\}$. Wir dürfen also annehmen, dass die Aussage für $\ell = 0, \dots, \ell$ wahr ist.

Aus der Induktionsbehauptung $\kappa(\mathcal{T}_\ell) \leq \max\{\kappa(\mathcal{T}_0), 2C_{\text{mark}}\}$ folgt

$$\kappa(\mathcal{T}_{\ell+1}) \leq \max\{\kappa(\mathcal{T}_\ell), 2C_{\text{mark}}\} \leq \max\{\kappa(\mathcal{T}_0), 2C_{\text{mark}}\}$$

und damit die Aussage des Lemmas. \square

Bemerkung 3.2.9 Die Wahl von $C_{\text{mark}} = \kappa(\mathcal{T}_0)$ in Algorithmus 3.2.7 garantiert nach Lemma 3.2.8 gerade $\sup_\ell \kappa(\mathcal{T}_\ell) \leq 2\kappa(\mathcal{T}_0) < \infty$.

Bemerkung 3.2.10 Um die Beschränktheit $\sup_\ell \kappa(\mathcal{T}_\ell) < \infty$ sicherzustellen, eignen sich auch andere Strategien zur erweiterten Verfeinerung.

3.3 Zwei-Level-Fehlerschätzer

In diesem Abschnitt wollen wir Techniken vorstellen, die es ermöglichen Fehlerschätzer zu definieren, die numerisch geringeren Aufwand erfordern und dabei gleichzeitig keinen Verlust der Aussagen über die Effizienz einer Verfeinerung nach sich ziehen. Konkret bedeutet dies, dass man hierbei nur jene Galerkin-Lösung u_ℓ berechnen muss, die zum groben Gitter gehört. Dies steht im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Techniken, bei denen insbesondere die Lösung \bar{u}_ℓ am verfeinerten Netz gefragt war.

In der Arbeit von MUND/STEPHAN/WEISSE 1998 [26] wurde der Zwei-Level-Fehlerschätzer erstmalig eingeführt. Anders als in der vorliegenden Arbeit findet sich darin ein Zugang zur Berechnung dieses Fehlerschätzers, der auf exaktes Lösen zur Kalkulation von u_ℓ verzichtet und dabei gleichzeitig die Störung unter Kontrolle hält.

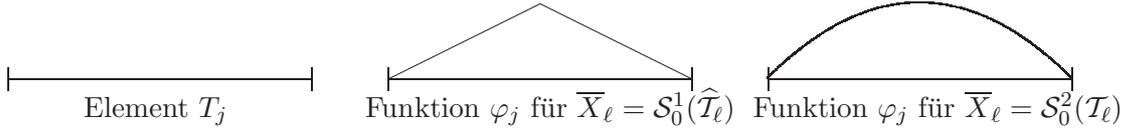


Abbildung 3.1: Darstellung der möglichen Basisfunktionen $\varphi_j \in \overline{X}_\ell \setminus X_\ell$, sodass für jedes Element $\varphi_j \in \overline{X}_\ell \setminus X_\ell$ die Inklusion $\text{supp}(\varphi_j) \subseteq T_j$ und die Gleichung $I_\ell \varphi_j = 0$ erfüllt sind.

Wir halten uns an die eingeführten Notationen. Insbesondere bezeichnet \overline{X}_ℓ entweder $\widehat{X}_\ell := \mathcal{S}_0^1(\widehat{\mathcal{T}}_\ell)$ oder $\widetilde{X}_\ell := \mathcal{S}_0^2(\mathcal{T}_\ell)$. Weiters geben wir für jedes Element $T_j \in \mathcal{T}_\ell$ eine Funktion $\varphi_j \in \overline{X}_\ell \setminus X_\ell$ an, deren Träger $\text{supp}(\varphi_j) \subseteq T_j$ erfüllt und für deren nodalen Interpolanten $I_\ell \varphi_j = 0$ gilt. Abbildung 3.1 illustriert solche Funktionen.

Zusätzlich definieren wir

$$\begin{aligned} X_{\ell,0} &:= X_\ell, \\ X_{\ell,j} &:= \text{span}\{\varphi_j\}, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Entsprechend bezeichnet $\mathbb{G}_{\ell,j}$ die Galerkin-Projektion auf den Raum $X_{\ell,j}$.

Mit der nun erweiterten Notation und den eingeführten Funktionen $\varphi_j \in \overline{X}_\ell \setminus X_\ell$ stellt folgendes Lemma eine entsprechende Darstellung für die Funktionen aus dem Raum \overline{X}_ℓ bereit.

Lemma 3.3.1 *Es existieren reelle Koeffizienten $\lambda_j \in \mathbb{R}$, sodass jede Funktion $\overline{v}_\ell \in \overline{X}_\ell$ die Darstellung*

$$\overline{v}_\ell = I_\ell \overline{v}_\ell + \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_j \quad (3.19)$$

besitzt. Darüber hinaus gilt, dass die Summe $\bigoplus_{j=1, \dots, N} X_{\ell,j}$ eine direkte Summe im Sinne der linearen Algebra darstellt.

Beweis: Sei $\mathcal{B} = \{\phi_1, \dots, \phi_K\}$ die nodale Basis des Raumes $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$, wobei K die Anzahl der Knoten des Netzes \mathcal{T}_ℓ beschreibt. Im Fall $\Gamma = \partial\Omega$ gilt $K = N$, während sich für $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$, also einen offenen Rand, $K = N + 1$ ergibt.

Erweitert man diese Basis zu $\widehat{\mathcal{B}} := \mathcal{B} \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$, so ist dies eine linear unabhängige Teilmenge des Raumes $\mathcal{S}^1(\widehat{\mathcal{T}}_\ell)$ bzw. $\mathcal{S}^2(\mathcal{T}_\ell)$. Außerdem geht aus elementaren Beobachtungen hervor, dass die Menge $\widehat{\mathcal{B}}$ aus genau $\dim(\mathcal{S}^1(\widehat{\mathcal{T}}_\ell))$ bzw. $\dim(\mathcal{S}^2(\mathcal{T}_\ell))$ Elementen besteht. Also ist $\widehat{\mathcal{B}}$ eine Basis der Räume $\mathcal{S}^1(\widehat{\mathcal{T}}_\ell)$ bzw. $\mathcal{S}^2(\mathcal{T}_\ell)$, die aus Anreicherung des Raumes $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$ hervorgegangen ist.

Damit ergibt sich für $\overline{v}_\ell \in \overline{X}_\ell$ die Darstellung

$$\overline{v}_\ell = \sum_{k=1}^N \mu_k \phi_k + \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_j \quad (3.20)$$

mit passenden Koeffizienten $\mu_k, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

Nun gilt jedoch für jeden Knoten z_ℓ der Triangulierung \mathcal{T}_ℓ die Kroneckereigenschaft $\phi_k(z_\ell) = \delta_{k\ell}$. Weiters gilt $\varphi_j(z_\ell) = 0$ aufgrund der Tatsache, dass $\text{supp}(\varphi_j) \subseteq T_j$ gilt. Dies zeigt einerseits $\overline{v}_\ell(z_\ell) = \mu_\ell$ und andererseits vereinfacht sich damit die erste Summe aus (3.20) zu $\sum_{k=1}^K \mu_k \phi_k = I_\ell \overline{v}_\ell$, was den Beweis zur Darstellung (3.19) abschließt.

Um einzusehen, dass $\bigoplus_{j=1, \dots, N} X_{\ell,j}$ tatsächlich eine direkte Summe darstellt, betrachten wir zunächst den Durchschnitt $X_{\ell,j} \cap X_{\ell,k}$ für $j \neq k$. Da beide Räume durch den Bildraum der Funktion φ_j bzw. φ_k aufgespannt werden und deren Träger $\text{supp}(\varphi_j) \subseteq T_j$ bzw. $\text{supp}(\varphi_k) \subseteq T_k$ erfüllt, ist der Durchschnitt trivial, da $X_{\ell,j} \cap X_{\ell,k} = \{0\}$ gilt. Andererseits findet nach Gleichung (3.19) jedes Element $\overline{v}_\ell \in \overline{X}_\ell$ mit Hilfe der zusätzlich eingeführten Basisfunktionen φ_j , $j = 1, \dots, N$ eine Darstellung. Daher muss

die Summe $\sum_{j=1}^N X_{\ell,j}$ den Raum $\overline{X}_\ell \setminus X_\ell$ gänzlich bilden, wodurch der Beweis nun vollständig ist. \square

Der folgende Satz stellt das Hauptresultat dieses Abschnitts dar.

Satz 3.3.2 *Wir definieren den Zwei-Level-Fehlerschätzer τ_ℓ durch*

$$\tau_\ell := \left(\sum_{j=1}^N \tau_\ell(T_j)^2 \right)^{1/2}$$

mit

$$\tau_\ell(T_j) := \|\mathbb{G}_{\ell,j}(\overline{u}_\ell - u_\ell)\|.$$

(i) *Für den Fehlerschätzer η_ℓ aus Abschnitt 3.2 gilt*

$$C_6^{-1}\eta_\ell \leq \tau_\ell \leq C_7\eta_\ell. \quad (3.21)$$

Die Konstanten $C_6, C_7 > 0$ sind aus Satz 3.3.6 bekannt.

(ii) *Der Verfeinerungsindikator $\tau_\ell(T_j)$ kann auch dargestellt werden als*

$$\tau_\ell(T_j) = \frac{|\langle \overline{u}_\ell - u_\ell, \varphi_j \rangle|}{\|\varphi_j\|} = \frac{|\langle f - Wu_\ell, \varphi_j \rangle|}{\|\varphi_j\|} \quad \text{für } j = 1, \dots, N.$$

(iii) *Die Fehlerschätzer η_ℓ und τ_ℓ sind äquivalent, weshalb Effizienz und Äquivalenz von Saturationsannahme (3.10) und Zuverlässigkeit für τ_ℓ stets garantiert sind.*

Um diesen Satz zu beweisen, studieren wir zunächst eine Reihe analytischer und abstrakt wirkender Abschätzungen. Diese führen uns schließlich zum Beweis von Satz 3.3.2.

Bemerkung 3.3.3 *Für den Fall einer uniformen Verfeinerung in 2D und 3D wurde der Satz bereits von MAISCHAK/MUND/STEPHAN in [25] bewiesen. Ergebnisse für adaptive Gitter in 2D wurden von HEUER/MELLADO/STEPHAN in [22] und in 3D von HEUER in [21] dargebracht. Obiger Satz stellt eine solche Behauptung für den Fall einer adaptiven Netzverfeinerung in 2D bereit, dessen Beweis wir hier alternativ im Rahmen der Lokalisierungstechniken führen werden.*

Lemma 3.3.4 *Für jede Funktion $\overline{v}_\ell \in \overline{X}_\ell$ gilt die Abschätzung*

$$\|(\mathbb{I} - I_\ell)\overline{v}_\ell\| \leq C_3\|\overline{v}_\ell\|, \quad (3.22)$$

wobei mit \mathbb{I} die Identität $\mathbb{I} : \overline{X}_\ell \rightarrow \overline{X}_\ell$ bezeichnet wird und die Konstante C_3 nur von den Konstanten C_1, C_2 aus Lemma 3.1.3 beeinflusst wird.

Beweis: Aus Lemma 3.1.3 geht die Ungleichungskette

$$\|(\mathbb{I} - I_\ell)\overline{v}_\ell\| \leq C_2\|h_\ell^{1/2}\overline{v}'_\ell\|_{L^2(\Gamma)} \leq \sqrt{2}C_1C_2\|\widehat{v}_\ell\|$$

hervor, wobei der Faktor $\sqrt{2}$ nur im Fall der $h - h/2$ -Strategie auftritt. Setzen wir $C_3 = \sqrt{2}C_1C_2$, so ist der Beweis abgeschlossen. \square

Lemma 3.3.5 *Es existieren Konstanten $C_4, C_5 \geq 1$, die nur von den Konstanten C_1 und C_2 aus Lemma 3.1.3 abhängen, sodass für Funktionen $v_j \in X_{\ell,j}$ die Abschätzung*

$$C_4^{-1} \left(\sum_{j=1}^N \|v_j\|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{j=1}^N v_j \right\| \leq C_5 \left(\sum_{j=1}^N \|v_j\|^2 \right)^{1/2} \quad (3.23)$$

gilt.

Beweis: Zunächst wollen wir einsehen, dass die beiden Konstanten C_4 und C_5 jeweils größer oder gleich eins sind. Dazu wählen wir $v_j \in X_{\ell,j}$ so, dass $v_j \equiv 0$ für alle $j > 1$ gilt. Nun muss jedoch $C_4, C_5 \geq 1$ gelten, damit obige Ungleichungskette erfüllt sein kann, denn alle drei Summen in (3.23) reduzieren sich zu $\|v_1\|$.

Da $X_{\ell,j} = \text{span}\{\varphi_j\}$ ist und $I_\ell \varphi_j = 0$ gilt, folgt $v_j = (\mathbb{I} - I_\ell)v_j$ und $\text{supp}(v_j) \subseteq T_j$. Wir schätzen daher wie folgt ab

$$\|v_j\| = \|(\mathbb{I} - I_\ell)v_j\| \leq C_2 \|h_\ell^{1/2} v_j'\|_{L^2(\Gamma)} = C_2 \|h_\ell^{1/2} v_j'\|_{L^2(T_j)}.$$

Summation über alle Elemente $T_j \in \mathcal{T}_\ell$, $j = 1, \dots, N$ ergibt

$$\sum_{j=1}^N \|v_j\|^2 \leq C_2^2 \sum_{j=1}^N \|h_\ell^{1/2} v_j'\|_{L^2(T_j)}^2 = C_2^2 \|h_\ell^{1/2} \sum_{j=1}^N v_j'\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Nützt man die lokale inverse Abschätzung für $\bar{v}_\ell = \sum_{j=1}^N v_j \in \bar{X}_\ell$ aus, so erhält man

$$C_2^2 \left\| h^{1/2} \sum_{j=1}^N v_j' \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq 2C_1^2 C_2^2 \left\| \sum_{j=1}^N v_j \right\|^2.$$

Division durch den konstanten Vorfaktor und Wurzelziehen ergeben $C_4 = \sqrt{2}C_1C_2$. Dies schließt den Beweis für die erste Ungleichung ab.

Mit denselben Argumenten wird die zweite Ungleichung bewiesen. Es gilt

$$\sum_{j=1}^N v_j = (\mathbb{I} - I_\ell) \sum_{j=1}^N v_j.$$

Unter Beachtung, dass die Träger $\text{supp}(v_j) \subseteq T_j$ paarweise disjunkt sind, erhalten wir

$$\left\| \sum_{j=1}^N v_j \right\|^2 \leq C_2^2 \left\| h_\ell^{1/2} \sum_{j=1}^N v_j' \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 = C_2^2 \sum_{j=1}^N \|h_\ell^{1/2} v_j'\|_{L^2(T_j)}^2 \leq 2C_1^2 C_2^2 \sum_{j=1}^N \|v_j\|^2.$$

Nun können wir auch die Konstante $C_5 = \sqrt{2}C_1C_2$ festlegen und haben damit obige Ungleichungskette vollständig bewiesen. \square

Als Anwendung des vorhergehenden Lemmas beweisen wir folgenden Satz.

Satz 3.3.6 *Für jede Funktion $\bar{v}_\ell \in \bar{X}_\ell$ gilt*

$$C_6^{-1} \|\bar{v}_\ell\| \leq \left(\sum_{j=0}^N \|G_{\ell,j} \bar{v}_\ell\|^2 \right)^{1/2} \leq C_7 \|\bar{v}_\ell\|, \quad (3.24)$$

wobei die Konstante $C_6 > 0$ von den Konstanten C_3, C_4 aus Lemma 3.3.4 und 3.3.5 abhängt, während $C_7 > 0$ nur von der Konstante C_5 aus Lemma 3.3.5 beeinflusst wird.

Beweis: Zunächst nützen wir die Symmetrie und die Projektionseigenschaft der Galerkin-Projektion aus, um die Gültigkeit der Abschätzung

$$\sum_{j=0}^N \|\mathbb{G}_{\ell,j}\bar{v}_\ell\|^2 = \sum_{j=0}^N \langle \mathbb{G}_{\ell,j}\bar{v}_\ell, \bar{v}_\ell \rangle \leq \left\| \sum_{j=0}^N \mathbb{G}_{\ell,j}\bar{v}_\ell \right\| \|\bar{v}_\ell\|$$

sicherzustellen.

Nun wollen wir den Term $\left\| \sum_{j=0}^N \mathbb{G}_{\ell,j}\bar{v}_\ell \right\|$ abschätzen. Dazu benutzen wir die Dreiecksungleichung und erhalten

$$\left\| \sum_{j=0}^N \mathbb{G}_{\ell,j}\bar{v}_\ell \right\| \leq \|\mathbb{G}_{\ell,0}\bar{v}_\ell\| + \left\| \sum_{j=1}^N \mathbb{G}_{\ell,j}\bar{v}_\ell \right\| \leq \sqrt{2} \left(\|\mathbb{G}_{\ell,0}\bar{v}_\ell\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^N \mathbb{G}_{\ell,j}\bar{v}_\ell \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

Darauf kann nun Lemma 3.3.5 angewandt werden, und wir haben insgesamt

$$\left\| \sum_{j=0}^N \mathbb{G}_{\ell,j}\bar{v}_\ell \right\| \leq \sqrt{2} \left(\|\mathbb{G}_{h,0}\bar{v}_\ell\|^2 + C_5^2 \sum_{j=1}^N \|\mathbb{G}_{\ell,j}\bar{v}_\ell\|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \underbrace{\max\{1, C_5\}}_{=C_5} \left(\sum_{j=0}^N \|\mathbb{G}_{\ell,j}\bar{v}_\ell\|^2 \right)^{1/2}$$

gezeigt.

Kombiniert man nun diese Ergebnisse, so ist die obere Abschätzung in (3.24) bewiesen, da

$$\left(\sum_{j=0}^N \|\mathbb{G}_{\ell,j}\bar{v}_\ell\|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} C_5 \|\bar{v}_\ell\|.$$

gilt. Für Konstante C_7 gilt $C_7 = \sqrt{2} C_5$.

Um die untere Abschätzung zu zeigen, schließen wir zuerst aus Lemma 3.3.1 die Darstellung

$$\bar{v}_\ell = \sum_{j=0}^N \lambda_j \varphi_j \tag{3.25}$$

mit $\lambda_0 = 1$, $\varphi_0 := I_\ell \bar{v}_\ell$ und geeigneten reellen Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$. Nützen wir nun die Darstellung der Funktion \bar{v}_ℓ aus, so erhalten wir aufgrund der Symmetrie der Galerkin-Projektion $\mathbb{G}_{\ell,j}$

$$\|\bar{v}_\ell\|^2 = \sum_{j=0}^N \langle \bar{v}_\ell, \lambda_j \varphi_j \rangle = \sum_{j=0}^N \langle \mathbb{G}_{\ell,j}\bar{v}_\ell, \lambda_j \varphi_j \rangle.$$

Dies können wir mit der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung abschätzen

$$\sum_{j=0}^N \langle \mathbb{G}_{\ell,j}\bar{v}_\ell, \lambda_j \varphi_j \rangle \leq \left(\sum_{j=0}^N \|\mathbb{G}_{\ell,j}\bar{v}_\ell\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^N \|\lambda_j \varphi_j\|^2 \right)^{1/2}.$$

Wenn wir den letzten Faktor der rechten Seite durch einen mit einer Konstanten gewichteten Faktor $\|\bar{v}_\ell\|$ abschätzen können, dann ist der Beweis vollständig.

Lemma 3.3.5 stellt die Abschätzung

$$\left(\sum_{j=1}^N \|\lambda_j \varphi_j\|^2 \right)^{1/2} \leq C_4 \left\| \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_j \right\| = C_4 \|(\mathbb{I} - I_\ell)\bar{v}_\ell\|$$

bereit. Mit diesem Resultat und der Darstellung (3.25) schließen wir

$$\sum_{j=0}^N \|\lambda_j \varphi_j\|^2 = \|I_\ell \bar{v}_\ell\|^2 + \sum_{j=1}^N \|\lambda_j \varphi_j\|^2 \leq \|I_\ell \bar{v}_\ell\|^2 + C_4^2 \|(\mathbb{I} - I_\ell)\bar{v}_\ell\|^2 \leq 2\|\bar{v}_\ell\|^2 + (2 + C_4^2) \|(\mathbb{I} - I_\ell)\bar{v}_\ell\|^2.$$

Lemma 3.3.4 leistet nun die gewünschte Abschätzung

$$\left(\sum_{j=0}^N \|\lambda_j \varphi_j\|^2 \right)^{1/2} \leq (2 + (2 + C_4^2)C_3^2)^{1/2} \|\bar{v}_\ell\|.$$

Damit ergibt sich $C_6 = (2 + (2 + C_4^2)C_3^2)^{1/2}$.

Zusammensetzen eben gefundener Feststellungen schließt den Beweis nun vollständig ab. \square

Nun haben wir alle nötigen Resultate zusammengetragen und können daher Satz 3.3.2 beweisen.

Beweis (zu Satz 3.3.2):

- Um obere und untere Abschätzung aus (3.21) zu zeigen, wenden wir Satz 3.3.6 auf $\bar{v}_\ell = \bar{u}_\ell - u_\ell \in \bar{X}_\ell$ an. Für $j = 0$ verschwindet der Summand, da $\mathbb{G}_\ell \bar{u}_\ell = u_\ell$ gilt. Nachdem $\eta_\ell = \|\bar{u}_\ell - u_\ell\|$ gilt, ist die erste Aussage des Satzes bewiesen.
- Die Darstellung des Verfeinerungsindikators $\tau_\ell(T_j)$ geht von der folgenden Schreibweise für die Orthogonalprojektion $\mathbb{G}_{\ell,j}$ aus

$$\mathbb{G}_{\ell,j} v = \frac{\langle v, \varphi_j \rangle}{\|\varphi_j\|^2} \varphi_j \quad \text{für alle } v \in \mathcal{H}, \text{ denn } X_{\ell,j} = \text{span}\{\varphi_j\}.$$

Damit gilt

$$\tau_\ell(T_j) := \|\mathbb{G}_{\ell,j}(\bar{u}_\ell - u_\ell)\| = \left\| \frac{\langle \bar{u}_\ell - u_\ell, \varphi_j \rangle}{\|\varphi_j\|^2} \varphi_j \right\| = \frac{|\langle \bar{u}_\ell - u_\ell, \varphi_j \rangle|}{\|\varphi_j\|},$$

wobei im letzten Schritt die Homogenität der Energienorm ausgenutzt wurde. Nun folgt aus der Galerkin-Formulierung für \bar{u}_ℓ

$$\langle \bar{u}_\ell - u_\ell, \varphi_j \rangle = \langle f - W u_\ell, \varphi_j \rangle \quad \text{für } j = 1, \dots, N.$$

Dies schließt den Beweis zur Darstellung von $\tau_\ell(T_j)$ ab.

- Um die letzte Aussage des Satzes einzusehen, beachte man, dass die Ungleichungskette (3.21) die Äquivalenz der beiden Fehlerschätzer η_ℓ und τ_ℓ zeigt. Dass daraus Effizienz und Äquivalenz von Saturationsannahme (3.10) und Zuverlässigkeit für τ_ℓ folgen, ist trivial. \square

Satz 3.3.2 motiviert einen Algorithmus zur adaptiven Netzverfeinerung, der ähnlich zu Algorithmus 3.2.5 ist.

Algorithmus 3.3.7 Input: Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 , Toleranz $\tau > 0$, Adaptivitätsparameter θ mit $0 < \theta \leq 1$.

- (i) Berechnung der Galerkin-Lösung $u_\ell \in X_\ell$.
- (ii) Berechnung der Verfeinerungsindikatoren $\tau_\ell(T_j)$ für alle Elemente $T_j \in \mathcal{T}_\ell$.
- (iii) Stop, falls $\tau_\ell \leq \tau$.
- (iv) Finde $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$ minimaler Kardinalität, sodass

$$\theta \sum_{T_j \in \mathcal{T}_\ell} \tau_\ell(T_j)^2 \leq \sum_{T_j \in \mathcal{M}_\ell} \tau_\ell(T_j)^2 \tag{3.26}$$

gilt.

- (v) *Rekursive Markierung zusätzlicher Elemente, sodass stets $\kappa(\mathcal{T}_{\ell+1}) \leq 2\kappa(\mathcal{T}_0)$ gilt.*
- (vi) *Aufbau eines neuen Netzes $\mathcal{T}_{\ell+1}$ durch Halbierung aller markierten Elemente.*
- (vii) *Erhöhe Zähler $\ell \mapsto \ell + 1$, Rücksprung nach (i).*

Output: Galerkin-Approximation $u_\ell \in X_\ell$ und Fehlerschätzer τ_ℓ .

Bemerkung 3.3.8 *Schritt (v) wird analog zu oben durch Algorithmus 3.2.7 realisiert und garantiert für die Wahl von $C_{\text{mark}} = \kappa(\mathcal{T}_0)$ in Algorithmus 3.2.7 $\sup_\ell \kappa(\mathcal{T}_\ell) < 2\kappa(\mathcal{T}_0) < \infty$ nach Lemma 3.2.8.*

Bemerkung 3.3.9 *Im Vergleich zu den Fehlerschätzern des vorhergehenden Abschnitts, bietet der Glättungsfehlerschätzer τ_ℓ zwei gewichtige Vorteile. Einerseits vermeiden wir verhältnismäßig teure Berechnungen zur Kontrolle des Fehlers $\|u - u_\ell\|$ zur Galerkin-Lösung $u_\ell \in X_\ell$. Wir berechnen nämlich nicht die verfeinerte Galerkin-Approximation $\bar{u}_\ell \in \bar{X}_\ell$, obwohl wir die dazugehörige Systemmatrix zur Berechnung der Verfeinerungsindikatoren $\tau_\ell(\mathcal{T}_j)$ benötigen. Andererseits sind die Größen $\tau_\ell(\mathcal{T}_j)$ für den Fall $\bar{X}_\ell = \mathcal{S}_0^1(\hat{\mathcal{T}}_\ell)$ in gewissem Sinne natürlich definiert. Sie regulieren lokal den Galerkin-Fehler und messen gleichzeitig die Verbesserung der Fehlerschätzung, wenn wir den diskreten Raum X_ℓ durch die Basisfunktionen $\varphi_j \in \bar{X}_\ell$ anreichern.*

3.4 Fehlerschätzung durch Mittelung

In diesem Unterkapitel wollen wir uns mit Fehlerschätzern, die auf Mittelung gründen, beschäftigen. Diese werden häufig auch als Glättungsfehlerschätzer bezeichnet.

Wir betrachten speziell den auf der $h - h/2$ -Strategie basierenden verfeinerten Raum $\hat{X}_\ell = \mathcal{S}_0^1(\hat{\mathcal{T}}_\ell)$. Ziel ist die Kontrolle des Fehlers $\|u - \hat{u}_\ell\|$.

Wir halten uns an die eingangs eingeführte Notation

$$X_\ell := \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell), \quad \hat{X}_\ell := \mathcal{S}_0^1(\hat{\mathcal{T}}_\ell), \quad \tilde{X}_\ell := \mathcal{S}_0^2(\mathcal{T}_\ell),$$

wobei $\hat{\mathcal{T}}_\ell$ jene Triangulierung bezeichnet, die aus einer uniformen Verfeinerung des Netzes \mathcal{T}_ℓ hervorgeht. Entsprechende Bezeichnungen werden für die zugehörigen Galerkin-Approximationen verwendet. Wir definieren einen neuen Fehlerschätzer α_ℓ .

Satz 3.4.1 (Carstensen/Praetorius 2007 [8, Abs. 4.2]) *Der Fehlerschätzer α_ℓ ist gegeben durch*

$$\alpha_\ell := \|\hat{u}_\ell - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell\|.$$

Er erfüllt

$$\alpha_\ell - \|u - \tilde{u}_\ell\| \leq \|u - \hat{u}_\ell\|.$$

Unter der Annahme

$$\lambda_A := \max_{\tilde{v}_\ell \in \tilde{X}_\ell} \min_{\hat{v}_\ell \in \hat{X}_\ell} \frac{\|\tilde{v}_\ell - \hat{v}_\ell\|}{\|\tilde{v}_\ell\|} < 1 \tag{3.27}$$

gilt die a posteriori Fehlerabschätzung

$$\|u - \hat{u}_\ell\| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_A^2}} (\alpha_\ell + \|u - \tilde{u}_\ell\|). \tag{3.28}$$

Damit ist der Mittelungsfehlerschätzer α_ℓ kombiniert mit dem Galerkin-Fehler $\|u - \tilde{u}_\ell\|$ ein effizienter und zuverlässiger Schätzer für den Galerkin-Fehler $\|u - \hat{u}_\ell\|$.

Beweis: Um Effizienz einzusehen, betrachten wir mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Projektionseigenschaft von $\tilde{\mathbb{G}}_\ell$ folgende Umformungen

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_\ell - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell\| &= \|(1 - \tilde{\mathbb{G}}_\ell)\hat{u}_\ell\| \\ &\leq \|(1 - \tilde{\mathbb{G}}_\ell)(u - \hat{u}_\ell)\| + \|(1 - \tilde{\mathbb{G}}_\ell)u\| \\ &\leq \|u - \hat{u}_\ell\| + \|u - \tilde{\mathbb{G}}_\ell u\| \\ &= \|u - \hat{u}_\ell\| + \|u - \tilde{u}_\ell\|. \end{aligned}$$

Damit bleibt noch die Zuverlässigkeitsabschätzung zu zeigen. Dazu führen wir zunächst eine vereinfachte Notation ein

$$\hat{e}_\ell := u - \hat{u}_\ell, \quad \tilde{e}_\ell := \tilde{\mathbb{G}}_\ell(u - \hat{u}_\ell).$$

Also ist die beste Näherung an \hat{e}_ℓ im Raum \tilde{X}_ℓ durch \tilde{e}_ℓ gegeben, d.h. es gilt

$$\|\hat{e}_\ell - \tilde{e}_\ell\| = \min_{\tilde{v}_\ell \in \tilde{X}_\ell} \|\hat{e}_\ell - \tilde{v}_\ell\|.$$

Insbesondere folgt aus Annahme (3.27), dass

$$\min_{\tilde{v}_\ell \in \tilde{X}_\ell} \|\tilde{e}_\ell - \tilde{v}_\ell\| \leq \lambda_A \|\tilde{e}_\ell\|$$

gilt. Nun stellen wir aufgrund der Tatsache, dass jede Orthogonalprojektion selbstadjungiert ist, und unter Ausnutzung weiterer Eigenschaften der Galerkin-Projektion folgendes fest

$$\begin{aligned} \|\tilde{e}_\ell\|^2 &= \langle \tilde{e}_\ell, \tilde{e}_\ell \rangle = \langle \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{e}_\ell, \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{e}_\ell \rangle = \langle \hat{e}_\ell, \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{e}_\ell \rangle = \langle \hat{e}_\ell, \tilde{e}_\ell \rangle = \langle \hat{e}_\ell, \tilde{e}_\ell - \hat{v}_\ell \rangle = \min_{\hat{v}_\ell \in \hat{X}_\ell} \langle \hat{e}_\ell, \tilde{e}_\ell - \hat{v}_\ell \rangle \\ &\leq \lambda_A \|\tilde{e}_\ell\| \|\hat{e}_\ell\|. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\|\tilde{e}_\ell\| \leq \lambda_A \|\hat{e}_\ell\|.$$

Nun findet der Satz von Pythagoras Anwendung. Dies führt zu

$$\|\hat{e}_\ell\|^2 = \|\hat{e}_\ell - \tilde{e}_\ell\|^2 + \|\tilde{e}_\ell\|^2 \leq \|\hat{e}_\ell - \tilde{e}_\ell\|^2 + \lambda_A^2 \|\hat{e}_\ell\|^2.$$

Elementare Umformung zeigt

$$\begin{aligned} \|\hat{e}_\ell\| &\leq \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_A^2}} \|\hat{e}_\ell - \tilde{e}_\ell\| = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_A^2}} \|(1 - \tilde{\mathbb{G}}_\ell)\hat{e}_\ell\| \leq \sqrt{1 - \lambda_A^2} (\|\hat{u}_\ell - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell\| + \|u - \tilde{\mathbb{G}}_\ell u\|) \\ &\leq \sqrt{1 - \lambda_A^2} (\alpha_\ell + \|u - \tilde{u}_\ell\|), \end{aligned}$$

wodurch der Beweis nun vollständig ist. \square

Bemerkung 3.4.2 *Der Fehlerschätzer α_ℓ , der auf Mittelung basiert, ist vom numerischen Rechenaufwand aus gesehen relativ teuer. Dies verursacht die aufwändige Berechnung der Galerkin-Projektion $\tilde{\mathbb{G}}_\ell$.*

Eine Konsequenz aus Satz 3.4.1 ist folgendes Resultat.

Korollar 3.4.3 Für den Fehlerschätzer α_ℓ gilt Effizienz

$$\alpha_\ell \leq (1 + q_A) \|u - \hat{u}_\ell\| \quad (3.29)$$

mit einer Konstanten $q_A := \|u - \tilde{u}_\ell\| / \|u - \hat{u}_\ell\|$. Unter der Bedingung $\lambda_A^2 + q_A^2 < 1$, wobei λ_A aus Satz 3.4.1 bekannt ist, gilt Zuverlässigkeit

$$\|u - \hat{u}_\ell\| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_A^2 - q_A}} \alpha_\ell. \quad (3.30)$$

Beweis: Um die Effizienz von α_ℓ einzusehen, gehen wir von der Abschätzung $\alpha_\ell - \|u - \tilde{u}_\ell\| \leq \|u - \hat{u}_\ell\|$ aus, die aus Satz 3.4.1 bekannt ist. Damit erhalten wir

$$\alpha_\ell \leq \|u - \tilde{u}_\ell\| + \|u - \hat{u}_\ell\| = \left(1 + \frac{\|u - \tilde{u}_\ell\|}{\|u - \hat{u}_\ell\|}\right) \|u - \hat{u}_\ell\| = \alpha_\ell \leq (1 + q_A) \|u - \hat{u}_\ell\|.$$

Für den Beweis zur Zuverlässigkeit von α_ℓ schreiben wir zunächst die Forderung $\lambda_A^2 + q_A^2 < 1$ um und erhalten die Bedingungen $q_A / \sqrt{1 - \lambda_A^2} < 1$ bzw. $\sqrt{1 - \lambda_A^2} - q_A > 0$. Nun schließen wir mit Hilfe der a posteriori Fehlerabschätzung (3.28)

$$\|u - \hat{u}_\ell\| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_A^2}} (\alpha_\ell + \|u - \tilde{u}_\ell\|) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_A^2}} (\alpha_\ell + q_A \|u - \hat{u}_\ell\|).$$

Schlichtes Ausmultiplizieren der rechten Seite und Subtraktion zeigen

$$\left(1 - \frac{q_A}{\sqrt{1 - \lambda_A^2}}\right) \|u - \hat{u}_\ell\| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_A^2}} \alpha_\ell.$$

Elementare Umformungen führen auf

$$\|u - \hat{u}_\ell\| \leq \left(1 - \frac{q_A}{\sqrt{1 - \lambda_A^2}}\right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_A^2}} \alpha_\ell = \left(\frac{\sqrt{1 - \lambda_A^2}}{\sqrt{1 - \lambda_A^2} - q_A}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_A^2}} \alpha_\ell = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_A^2} - q_A} \alpha_\ell$$

und somit zur Aussage des Korollars. \square

Bemerkung 3.4.4 Die Forderung (3.27) und deren stärkere Fassung $\lambda_A^2 + q_A^2 < 1$ können wir in der Praxis nicht als gegeben sehen, da sie nicht überprüft werden können.

Entsprechend des Resultats von Lemma 3.1.3 können wir zeigen

$$\min_{v_H \in X_H} \|\tilde{v}_\ell - v_H\| \leq C_2 \|H^{1/2}(\tilde{v}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_1 C_2 \|H/h\|_{L^\infty(\Gamma)}^{1/2} \|\tilde{v}_\ell\| \quad \text{für alle } \tilde{v}_\ell \in \tilde{X}_\ell.$$

Geht die Triangulierung \mathcal{T}_H durch k -malige uniforme Verfeinerung aus dem Netz \mathcal{T}_ℓ hervor, so gilt $\|H/h\|_{L^\infty(\Gamma)} = 2^{-k}$. Damit ergibt sich für ein genügend großes k

$$\lambda_A := \max_{\tilde{v}_\ell \in \tilde{X}_\ell} \min_{v_H \in X_H} \frac{\|\tilde{v}_\ell - v_H\|}{\|\tilde{v}_\ell\|} \leq 2^{-k} C_1 C_2 < 1.$$

Die numerischen Experimente in [8] belegen die Behauptung, dass $k = 1$ für obige Abschätzung hinreichend ist. Damit ist ein Verfeinerungsschritt mit $H = h/2$ ausreichend, um zumindest für experimentelle Zwecke die Bedingung (3.27) zu erfüllen.

Bemerkung 3.4.5 *Gehen wir von einer stückweise glatten Lösung $u \in H^{2+\varepsilon}(\mathcal{T}_\ell)$ und uniformer Netzverfeinerung aus, so liegt für den Galerkin-Fehler $\|u - \tilde{u}_\ell\|$ die Ordnung $\mathcal{O}(h^{3/2+\varepsilon})$ vor. Dies ist vergleichsweise höher als die Ordnung $\mathcal{O}(h^{3/2})$ des Galerkin-Fehlers $\|u - \hat{u}_\ell\|$, d.h. es gilt $q_A = \mathcal{O}(h^\varepsilon)$.*

Mit denselben Techniken wie in Abschnitt 2 können wir den Mittelungsfehlerschätzer α_ℓ lokalisieren.

Der folgende Satz stellt eine Erweiterung der Ergebnisse aus [8, Korollar 4.3, 4.4] und [9, Theorem 7.2] dar.

Satz 3.4.6 *Um den Mittelungsfehlerschätzer α_ℓ zu lokalisieren, führen wir h -gewichtete Fehlerschätzer ein, die auf der L^2 -Norm basieren. Wir definieren*

$$\beta_\ell := \|h_\ell^{1/2}(\hat{u}_\ell - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}$$

und

$$\tilde{\beta}_\ell := \|h_\ell^{1/2}(\hat{u}'_\ell - \tilde{\Pi}_\ell \hat{u}'_\ell)\|_{L^2(\Gamma)},$$

wobei $\tilde{\Pi}_\ell$ die L^2 -Orthogonalprojektion auf den Raum $\mathcal{P}^1(\mathcal{T}_\ell)$ der stückweise affinen Funktionen bezeichnet. Es gilt die Abschätzung

$$\tilde{\beta}_\ell \leq \beta_\ell \leq \sqrt{2}C_1\alpha_\ell. \quad (3.31)$$

Weiters wiederholen wir die $(h - h/2)$ -Fehlerschätzer

$$\eta_\ell := \|\hat{u}_\ell - u_\ell\|$$

und

$$\tilde{\mu}_\ell := \|h_\ell^{1/2}(\hat{u}_\ell - I_\ell \hat{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}$$

ein. Es gelten die Abschätzungen

$$\alpha_\ell \leq \eta_\ell \leq C_2\tilde{\mu}_\ell, \quad \text{sowie} \quad \tilde{\mu}_\ell = 2\tilde{\beta}_\ell. \quad (3.32)$$

Insbesondere sind daher alle Fehlerschätzer äquivalent, und damit garantiert die Effizienz eines Fehlerschätzers mit Bezug auf $\|u - u_\ell\|$ eine entsprechende Eigenschaft für alle anderen. Ferner ist die Zuverlässigkeit der Mittelungsfehlerschätzer α_ℓ, β_ℓ und $\tilde{\beta}_\ell$ mit Bezug auf $\|u - u_\ell\|$ äquivalent zur Saturationsannahme. Umgekehrt ist die Saturationsannahme hinreichend für die Zuverlässigkeit der Mittelungsfehlerschätzer mit Bezug auf $\|u - \hat{u}_\ell\|$.

Beweis: Zunächst gilt es zu beachten, dass $\tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell \in \mathcal{S}_0^2(\mathcal{T}_\ell)$ und daher dessen Ableitung $(\tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell)' \in \mathcal{P}^1(\mathcal{T}_\ell)$ ist. Da $\tilde{\Pi}_\ell$ die \mathcal{T}_ℓ -elementweise L^2 -Orthogonalprojektion auf den Raum der stückweise affinen Funktionen ist, nützen wir die Bestapproximationseigenschaft aus und schätzen wie folgt ab:

$$h_{T_j} \|\hat{u}'_\ell - \tilde{\Pi}_\ell \hat{u}'_\ell\|_{L^2(T_j)} \leq h_{T_j} \|\hat{u}'_\ell - (\tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell)'\|_{L^2(T_j)} \quad \text{für alle } T_j \in \mathcal{T}_\ell.$$

Summation über alle Elemente $T_j \in \mathcal{T}_\ell$ zeigt die erste Ungleichung in (3.31). Zum Beweis der Abschätzung nach oben in (3.31) greift Lemma 3.1.3.

Es sei erinnert, dass $u_\ell \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell) \subset \mathcal{S}_0^2(\mathcal{T}_\ell)$ gilt. Aus der Bestapproximationseigenschaft der Galerkin-Projektion $\tilde{\mathbb{G}}_\ell$ folgt sofort

$$\alpha_\ell = \|\hat{u}_\ell - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell\| \leq \|\hat{u}_\ell - u_\ell\| = \eta_\ell.$$

Die obere Abschätzung $\eta_\ell \leq C_2 \tilde{\mu}_\ell$ wurde bereits in Satz 3.2.3 bewiesen.

Wir wollen nun die Gleichheit $\tilde{\mu}_\ell = 2\tilde{\beta}_\ell$ zeigen. Zunächst sei erinnert an die Gültigkeit von $(I_\ell v)' = \Pi_\ell v'$, wobei Π_ℓ die L^2 -Orthogonalprojektion auf die \mathcal{T}_ℓ -stückweise konstanten Funktionen bezeichnet. Daher reicht es aus die folgende Gleichung für jedes $T_j \in \mathcal{T}_\ell$ zu zeigen

$$\|\widehat{u}'_\ell - \Pi_\ell \widehat{u}'_\ell\|_{L^2(T_j)} = 2\|\widehat{u}'_\ell - \tilde{\Pi}_\ell \widehat{u}'_\ell\|_{L^2(T_j)} \quad \text{für alle } T_j \in \mathcal{T}_\ell.$$

Die Gleichung stellt einen Spezialfall aus [13, Theorem 5.5] dar, wo der Beweis für beliebiges $\widehat{\psi}_\ell \in \mathcal{P}^0(\widehat{\mathcal{T}}_\ell)$ geführt wurde. Also insbesondere kann $\widehat{\psi}_\ell = \widehat{u}'_\ell$ gesetzt werden. \square

Bemerkung 3.4.7 Der Fehlerschätzer $\tilde{\beta}_\ell$ lässt sich darstellen als

$$\tilde{\beta}_\ell = \left(\sum_{j=1}^N \tilde{\beta}_\ell(T_j)^2 \right)^{1/2}$$

mit

$$\tilde{\beta}_\ell(T_j) := h_{T_j}^{1/2} \|\widehat{u}'_\ell - \tilde{\Pi}_\ell \widehat{u}'_\ell\|_{L^2(T_j)}.$$

Der lokale Verfeinerungsindikator $\tilde{\beta}_\ell(T_j)$ kann in einem adaptiven Algorithmus zur Verfeinerung des Netzes eingesetzt werden, um die zu verfeinernden Elemente $T_j \in \mathcal{T}_\ell$ zu markieren.

Algorithmus 3.4.8 Input: Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 , Toleranz $\tau > 0$, Adaptivitätsparameter θ mit $0 < \theta \leq 1$.

- (i) Berechnung der Galerkin-Lösung $\widehat{u}_\ell \in \widehat{X}_\ell$ und der Galerkin-Projektion $\tilde{\Pi}_\ell \widehat{u}'_\ell \in \mathcal{P}^1(\mathcal{T}_\ell)$.
- (ii) Berechnung der Verfeinerungsindikatoren $\tilde{\beta}_\ell(T_j)$ für alle Elemente $T_j \in \mathcal{T}_\ell$.
- (iii) Stop, falls $\tilde{\beta}_\ell \leq \tau$.
- (iv) Finde $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$ minimaler Kardinalität, sodass

$$\theta \sum_{T_j \in \mathcal{T}_\ell} \tilde{\beta}_\ell(T_j)^2 \leq \sum_{T_j \in \mathcal{M}_\ell} \tilde{\beta}_\ell(T_j)^2 \tag{3.33}$$

gilt.

- (v) Rekursive Markierung zusätzlicher Elemente, sodass stets $\kappa(\mathcal{T}_{\ell+1}) \leq 2\kappa(\mathcal{T}_0)$ gilt.
- (vi) Aufbau eines neuen Netzes $\mathcal{T}_{\ell+1}$ durch Halbierung aller markierten Elemente.
- (vii) Erhöhe Zähler $\ell \mapsto \ell + 1$, Rücksprung nach (i).

Output: Galerkin-Approximation $\widehat{u}_\ell \in \widehat{X}_\ell$ und Fehlerschätzer $\tilde{\beta}_\ell$.

Bemerkung 3.4.9 Um $\sup_\ell \kappa(\mathcal{T}_\ell) < 2\kappa(\mathcal{T}_0) < \infty$ zu garantieren, wird Schritt (v) analog zu oben durch Algorithmus 3.2.7 realisiert, wobei darin $C_{\text{mark}} = \kappa(\mathcal{T}_0)$ zu wählen ist.

3.5 Zusammenstellung aller eingeführten Fehlerschätzer

Wir wollen in diesem Abschnitt einen Überblick der in diesem Kapitel eingeführten a posteriori Fehlerschätzer geben. Dazu sei \mathcal{T}_ℓ eine Partitionierung des Randes Γ und $\widehat{\mathcal{T}}_\ell$ bezeichnet eine uniforme Verfeinerung von \mathcal{T}_ℓ . Zusammen mit den Räumen

$$X_\ell := \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell), \quad \widehat{X}_\ell := \mathcal{S}_0^1(\widehat{\mathcal{T}}_\ell), \quad \widetilde{X}_\ell := \mathcal{S}_0^2(\mathcal{T}_\ell),$$

den zugehörigen Galerkin-Lösungen u_ℓ, \widehat{u}_ℓ und \widetilde{u}_ℓ sowie den Galerkin-Projektionen $\mathbb{G}_\ell, \widehat{\mathbb{G}}_\ell$ und $\widetilde{\mathbb{G}}_\ell$ betrachten wir die folgenden 13 Fehlerschätzer, die zuvor eingeführt wurden:

- $h - h/2$ -basierte Fehlerschätzer

$$\begin{aligned} \eta_\ell &= \|\widehat{u}_\ell - u_\ell\|, & \mu_\ell &= \|h_\ell^{1/2}(\widehat{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}, \\ \widetilde{\eta}_\ell &= \|\widehat{u}_\ell - I_\ell \widehat{u}_\ell\|, & \widetilde{\mu}_\ell &= \|h_\ell^{1/2}(\widehat{u}_\ell - I_\ell \widehat{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}, \end{aligned}$$

- $h - h/2$ -basierte Zwei-Level-Fehlerschätzer

$$\tau_\ell := \left(\sum_{j=1}^N \tau_\ell(T_j)^2 \right)^{1/2} \quad \text{mit } \tau_\ell(T_j) := \|\mathbb{G}_{\ell,j}(\widehat{u}_\ell - u_\ell)\|,$$

- Fehlerschätzer basierend auf Mittelung

$$\begin{aligned} \alpha_\ell &= \|\widehat{u}_\ell - \widetilde{\mathbb{G}}_\ell \widehat{u}_\ell\|, & \beta_\ell &= \|h_\ell^{1/2}(\widehat{u}_\ell - \widetilde{\mathbb{G}}_\ell \widehat{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}, \\ & & \widetilde{\beta}_\ell &= \|h_\ell^{1/2}(\widehat{u}_\ell' - \widetilde{\Pi}_\ell \widehat{u}_\ell')\|_{L^2(\Gamma)}, \end{aligned}$$

- $p - (p + 1)$ -basierte Fehlerschätzer

$$\begin{aligned} \eta_{P,\ell} &= \|\widetilde{u}_\ell - u_\ell\|, & \mu_{P,\ell} &= \|h_\ell^{1/2}(\widetilde{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}, \\ \widetilde{\eta}_{P,\ell} &= \|\widetilde{u}_\ell - I_\ell \widetilde{u}_\ell\|, & \widetilde{\mu}_{P,\ell} &= \|h_\ell^{1/2}(\widetilde{u}_\ell - I_\ell \widetilde{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}, \end{aligned}$$

- $p - (p + 1)$ -basierte Zwei-Level-Fehlerschätzer

$$\tau_{P,\ell} := \left(\sum_{j=1}^N \tau_{P,\ell}(T_j)^2 \right)^{1/2} \quad \text{mit } \tau_{P,\ell}(T_j) := \|\mathbb{G}_{\ell,j}(\widetilde{u}_\ell - u_\ell)\|.$$

Hierbei bezeichnen $I_\ell : C(\overline{\Gamma}) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$ den nodalen Interpolanten und $\widetilde{\Pi}_\ell$ die L^2 -Orthogonalprojektion auf den Raum $\mathcal{P}^1(\mathcal{T}_\ell)$. Weiters wurde der Übersichtlichkeit halber eine abgeänderte Notation sowohl für die Fehlerschätzer basierend auf Erweiterung des Raumes als auch für die Zwei-Level-Fehlerschätzer verwendet.

Es gilt zu beachten, dass die fünf globalen Fehlerschätzer $\eta_\ell, \widetilde{\eta}_\ell, \alpha_\ell, \eta_{P,\ell}$ und $\widetilde{\eta}_{P,\ell}$ nur zur Schätzung des Verfahrensfehlers eingesetzt werden können. Hingegen können die verbleibenden acht lokalen Fehlerschätzer auch als Verfeinerungsindikatoren in einem adaptiven Algorithmus verwendet werden.

Wir wollen nun die Äquivalenzen der $h - h/2$ -basierten Schätzer und der Fehlerschätzer basierend auf Mittelung zusammenfassen. Es gelten folgende Abschätzungen mit bekannter Konstante 1

$$\alpha_\ell \leq \eta_\ell \leq \widetilde{\eta}_\ell, \quad 2\widetilde{\beta}_\ell = \widetilde{\mu}_\ell \leq \mu_\ell,$$

wobei die μ -Abschätzungen sogar \mathcal{T}_ℓ -elementweise gelten. Alle anderen Äquivalenz-Abschätzungen hängen von Konstanten aus Lemma 3.1.3 ab. Dies gilt insbesondere auch für den Fehlerschätzer τ_ℓ . Aus der zugehörigen Analysis geht hervor, dass all diese a posteriori Fehlerschätzer stets effizient

sind und dabei Zuverlässigkeit äquivalent zur Saturationsannahme (3.10) ist. Diese besagt, dass $q_S := \|u - \hat{u}_\ell\| / \|u - u_\ell\| < 1$ gilt. Dies führt zu folgender Abschätzung

$$\alpha_\ell \leq \eta_\ell \leq \|u - u_\ell\| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - q_S^2}} \eta_\ell.$$

Analoge Resultate können wir für $p - (p + 1)$ -basierte Fehlerschätzer zusammenfassen. Dazu sind folgende Abschätzungen mit bekannter Konstante 1 zusammenzustellen

$$\eta_{P,\ell} \leq \tilde{\eta}_{P,\ell}, \quad \tilde{\mu}_{P,\ell} \leq \mu_{P,\ell}.$$

Die übrigen Äquivalenz-Aussagen sind auch in diesem Fall abhängig von Konstanten aus Lemma 3.1.3. Die fünf Fehlerschätzer $\eta_{P,\ell}, \tilde{\eta}_{P,\ell}, \mu_{P,\ell}, \tilde{\mu}_{P,\ell}$ und $\tau_{P,\ell}$ sind äquivalent und stets effizient. Außerdem gilt, dass Zuverlässigkeit äquivalent zur Saturationsannahme (3.10) ist. Diese besagt, dass $q_{S,P} := \|u - \tilde{u}_\ell\| / \|u - u_\ell\| < 1$ gilt. Dies impliziert

$$\eta_{P,\ell} \leq \|u - u_\ell\| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - q_{S,P}^2}} \eta_{P,\ell}.$$

Schließlich gilt für den Mittelungsfehlerschätzer α_ℓ zusätzlich noch die Ungleichungskette

$$\frac{1}{1 + q_A} \alpha_\ell \leq \|u - \hat{u}_\ell\| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda_A^2 - q_A \alpha_\ell}},$$

wobei $\lambda_A^2 + q_A^2 < 1$ vorausgesetzt wird mit $q_A := q_{S,P}/q_S$ und λ_A^2 in (3.27) definiert wurde. Unter dieser Annahme ist daher α_ℓ ein zuverlässiger und effizienter Fehlerschätzer für den verbesserten Galerkin-Fehler $\|u - \hat{u}_\ell\|$.

Kapitel 4

Konvergenz der adaptiven Randelementmethode

Möchte man die Galerkin-Randelementmethode bezüglich Konvergenz analysieren, so ergibt sich zunächst die Aussage, dass die adaptive Randelementmethode stets konvergiert. Wir formulieren dies im folgenden Lemma, das später für Galerkin-Projektionen $\mathbb{G} = \mathbb{P}$ angewendet wird.

Lemma 4.0.1 *Sei H ein Hilbert-Raum und $X_n \subseteq H$ ein endlichdimensionaler Teilraum, wobei die Räume $X_n \subseteq X_{n+1}$ geschachtelt sind. Weiters bezeichne $\mathbb{P}_n : H \rightarrow X_n$ eine Orthogonalprojektion. Dann gilt für alle $x \in H$, dass der Grenzwert*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n x =: \mathbb{P}_\infty x \in H \quad (4.1)$$

existiert, wobei \mathbb{P}_∞ die Orthogonalprojektion des Raumes H auf $X_\infty := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}$ bezeichnet.

Beweis: X_∞ ist als abgeschlossener Teilraum des Hilbert-Raumes H wieder ein Hilbert-Raum. Insbesondere geht aus der Definition des Raumes X_∞ hervor, dass es eine abzählbare Teilmenge gibt, die in diesem Raum dicht liegt. Also ist X_∞ ein separabler Hilbert-Raum. Daher kann eine abzählbare Orthonormalbasis $\{\varphi_j\}$ gefunden werden, sodass die Darstellung des Bildes der Orthogonalprojektion \mathbb{P}_∞

$$\mathbb{P}_\infty x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \varphi_j \quad \in H, \quad \text{mit } x_j = (x, \varphi_j)_H$$

zulässig ist. Außerdem kann diese abzählbare Orthonormalbasis $\{\varphi_j\}$ derart zerlegt werden, sodass $\bigcup_{j=1}^n \varphi_j$ eine Orthonormalbasis des Raumes X_n ist, wobei o.B.d.A. $\dim(X_n) = n$ angenommen wird. Damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j \varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \varphi_j = \mathbb{P}_\infty x,$$

wodurch der Beweis nun vollständig ist. □

Bemerkung 4.0.2 *Für uniforme Netzverfeinerung gilt $X_\infty = H$. Dies muss jedoch für eine adaptiv verfeinerte Triangulierung nicht der Fall sein. Es gilt im Allgemeinen $X_\infty \subsetneq H$.*

Durch die Konvergenzaussage aus Lemma 4.0.1 ist aber nicht geklärt, ob mit $u_\infty = \lim_\ell u_\ell$

$$u_\infty = u$$

gilt und daher Konvergenz gegen die exakte Lösung u vorliegt.

4.1 Kontraktionsargumente für μ_ℓ , $\tilde{\mu}_\ell$ und $\tilde{\beta}$

In diesem Abschnitt werden wir uns mit der Frage der Konvergenz gegen die exakte Lösung u der hypersingulären Integralgleichung beschäftigen. Dabei halten wir uns an jüngste Ideen der adaptiven Finite Element Methode von CASCON, KREUZER, NOCHETTO, SIEBERT 2008 [10], die von FERRAZ-LEITE, ORTNER, PRAETORIUS 2008 [15] für den $h - h/2$ -Fehlerschätzer der Symmschen Integralgleichung modifiziert und erstmalig in der adaptiven Randelementmethode angewandt wurden.

Zunächst wollen wir für den Fehlerschätzer μ_ℓ , der auf Anreicherung des Raumes basiert, einen Konvergenzsatz formulieren.

Wir halten uns an die bisherige Notation und ergänzen diese, indem wir Größen einführen, die eine verkürzte Schreibweise ermöglichen:

$$\begin{aligned} e_\ell &= \|u - u_\ell\|^2, & E_\ell &= \|u_{\ell+1} - u_\ell\|^2 \\ \bar{e}_\ell &= \|u - \bar{u}_\ell\|^2, & \bar{E}_\ell &= \|\bar{u}_{\ell+1} - \bar{u}_\ell\|^2. \end{aligned}$$

Außerdem sei an die Notation aus Kapitel 3 erinnert, worin folgende Definitionen festgelegt wurden

$$X_\ell := \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell), \quad \hat{X}_\ell := \mathcal{S}_0^1(\hat{\mathcal{T}}_\ell), \quad \tilde{X}_\ell := \mathcal{S}_0^2(\mathcal{T}_\ell),$$

wobei $\hat{\mathcal{T}}_\ell$ jene Triangulierung bezeichnet, die aus einer uniformen Verfeinerung des Netzes \mathcal{T}_ℓ hervorgeht. Im Folgenden bezeichnen wir mit \bar{X}_ℓ entweder den Raum \hat{X}_ℓ oder \tilde{X}_ℓ .

Aufgrund der Galerkin-Orthogonalität für die Räume $X_\ell \subset X_{\ell+1}$ und $\bar{X}_\ell \subset \bar{X}_{\ell+1}$ können wir nun die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} e_{\ell+1} &= e_\ell - E_\ell \\ \bar{e}_{\ell+1} &= \bar{e}_\ell - \bar{E}_\ell \end{aligned}$$

finden.

Lemma 4.1.1 (Young-Ungleichung) *Aus der Young-Ungleichung*

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad \text{für alle } a, b \geq 0 \tag{4.2}$$

folgt die Ungleichung

$$(a + b)^2 \leq (1 + \varepsilon)a^2 + (1 + \varepsilon^{-1})b^2 \quad \text{für alle } a, b \geq 0 \text{ und alle } \varepsilon > 0. \tag{4.3}$$

Beweis: Durch elementare Rechenschritte und Anwendung der Young-Ungleichung (4.2) erhalten wir

$$ab = (\varepsilon^{1/2}a)\left(\frac{b}{\varepsilon^{1/2}}\right) \leq \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}.$$

Aus dem binomischen Lehrsatz und durch das Einsetzen des eben gewonnenen Ergebnisses folgt

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon} + b^2 = (1 + \varepsilon)a^2 + (1 + \varepsilon^{-1})b^2$$

und schließt somit den Beweis ab. □

Wir betrachten zunächst den $(h - h/2)$ - bzw. $p - (p + 1)$ -basierten Fehlerschätzer

$$\mu_\ell := \|h_\ell^{1/2}(\bar{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)},$$

wobei $u_\ell \in X_\ell$ und $\bar{u}_\ell \in \bar{X}_\ell$ die Galerkin-Lösungen sind.

Satz 4.1.2 *Wir betrachten den adaptiven Algorithmus 3.2.5 mit $\theta \in (0, 1]$ und verwenden die lokalen Beiträge von μ_ℓ im Dörfler-Marking. Dann gilt die Schätzerreduktion*

$$\mu_{\ell+1} \leq q\mu_\ell + C_1(\|\bar{u}_{\ell+1} - \bar{u}_\ell\| + \|u_{\ell+1} - u_\ell\|), \quad (4.4)$$

wobei $q = (1 - \theta/2)^{1/2} \in (0, 1)$ und $C_1 > 0$ aus Lemma 3.1.3 bekannt ist.

Unter der Saturationsannahme (3.10) existieren Parameter $\kappa, \gamma \in (0, 1)$, sodass die Größe

$$\Delta_\ell := \|u - u_\ell\|^2 + \|u - \bar{u}_\ell\|^2 + \gamma\mu_\ell^2 \quad (4.5)$$

die Kontraktionseigenschaft

$$\Delta_{\ell+1} \leq \kappa\Delta_\ell \quad (4.6)$$

erfüllt. Damit gilt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \Delta_\ell = 0. \quad (4.7)$$

Insbesondere folgt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|u - u_\ell\| = 0 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \mu_\ell.$$

Beweis: Im Wesentlichen gliedert sich der Beweis in zwei Schritte: Zunächst führen abstrakte Argumente zur gewünschten Kontraktionseigenschaft, wobei man hierfür die Fehlerschätzerreduktion (4.4) benötigt. Diese wird in einem zweiten Schritt bewiesen.

(i) Mit obiger Notation stellen wir Δ_ℓ wie folgt dar

$$\Delta_\ell = e_\ell + \bar{e}_\ell + \gamma\mu_\ell^2.$$

Nun gehen wir von der Fehlerschätzerreduktion 4.4 aus. Demnach gibt es Konstanten $q \in (0, 1)$ und $C > 0$, sodass

$$\mu_{\ell+1} \leq q\mu_\ell + C(\|u_{\ell+1} - u_\ell\| + \|\bar{u}_{\ell+1} - \bar{u}_\ell\|) = q\mu_\ell + C(E_\ell^{1/2} + \bar{E}_\ell^{1/2})$$

gilt. Anwenden der modifizierten Young-Ungleichung (4.3) führt auf

$$\mu_{\ell+1}^2 \leq q^2(1 + \delta)\mu_\ell^2 + C_\delta(E_\ell + \bar{E}_\ell)$$

mit $C_\delta = 2C^2(1 + \delta^{-1})$.

Wir wählen nun zwei Konstanten $\delta, \gamma > 0$, wobei $q^2(1 + \delta) < 1$ und $\gamma C_\delta \leq 1$ gelten soll. Damit schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \Delta_{\ell+1} &= e_{\ell+1} + \bar{e}_{\ell+1} + \gamma\mu_{\ell+1}^2 \\ &= e_\ell + \bar{e}_\ell - (E_\ell + \bar{E}_\ell) + \gamma\mu_{\ell+1}^2 \\ &\leq e_\ell + \bar{e}_\ell + \gamma q^2(1 + \delta)\mu_\ell^2 + (\gamma C_\delta - 1)(E_\ell + \bar{E}_\ell) \\ &\leq e_\ell + \bar{e}_\ell + \gamma q^2(1 + \delta)\mu_\ell^2 \\ &= (e_\ell - \gamma\beta\mu_\ell^2) + \bar{e}_\ell + \gamma[q^2(1 + \delta) + \beta]\mu_\ell^2. \end{aligned}$$

Da β ein beliebiges Skalar ist, das eingeschoben wurde, können wir fordern, dass $\beta > 0$ und $q^2(1 + \delta) + \beta < 1$ gilt. Nachdem die Saturationsannahme (3.10) Zuverlässigkeit $e_\ell \leq C_{\text{rel}}^2\mu_\ell^2$ impliziert, sogar äquivalent dazu ist, können wir diese ausnützen und erhalten somit

$$\Delta_{\ell+1} \leq (1 - \gamma\beta C_{\text{rel}}^{-2})e_\ell + \bar{e}_\ell + \gamma[q^2(1 + \delta) + \beta]\mu_\ell^2.$$

Im nächsten Schritt schieben wir ein Skalar $\varepsilon > 0$ ein mit $\varepsilon < \gamma\beta C_{\text{rel}}^{-2}$. Und nützen die Abschätzung $\bar{e}_\ell \leq e_\ell$ aus, um

$$\Delta_{\ell+1} \leq (1 - \gamma\beta C_{\text{rel}}^{-2} + \varepsilon)e_\ell + (1 - \varepsilon)\bar{e}_\ell + \gamma[q^2(1 + \delta) + \beta]\mu_\ell^2$$

zu zeigen. Nun schließen wir daraus unter der Definition von κ durch

$$\kappa := \max\{1 - \gamma\beta C_{\text{rel}}^{-2} + \varepsilon, 1 - \varepsilon, q^2(1 + \delta) + \beta\}$$

die Kontraktionseigenschaft

$$\Delta_{\ell+1} \leq \kappa(e_\ell + \bar{e}_\ell + \gamma\mu_\ell^2) = \kappa\Delta_\ell,$$

da $\kappa < 1$ gilt.

- (ii) Nun wollen wir uns dem Beweis oben verwendeter Fehlerschätzerreduktion (4.4) zuwenden. Dabei gehen wir vom Fehlerschätzer $\mu_{\ell+1}$ aus und wenden die Dreiecksungleichung sowie eine inverse Abschätzung an und erhalten

$$\begin{aligned} \mu_{\ell+1} &= \|h_{\ell+1}^{1/2}(\bar{u}_{\ell+1} - u_{\ell+1})'\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|h_{\ell+1}^{1/2}(\bar{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)} + \|h_{\ell+1}^{1/2}[(\bar{u}_{\ell+1} - u_{\ell+1}) - (\bar{u}_\ell - u_\ell)]'\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|h_{\ell+1}^{1/2}(\bar{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)} + C_1 \|(\bar{u}_{\ell+1} - u_{\ell+1}) - (\bar{u}_\ell - u_\ell)\|. \end{aligned}$$

Weiters gilt nach Definition der Netzverfeinerung

$$h_{\ell+1}|_T = \frac{1}{2}h_\ell|_T \quad \text{für } T \in \mathcal{M}_\ell$$

sowie

$$h_{\ell+1}|_T = h_\ell|_T \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell.$$

Daher schätzen wir den ersten Summanden wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \|h_{\ell+1}^{1/2}(\bar{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \|h_{\ell+1}^{1/2}(\bar{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell} \|h_{\ell+1}^{1/2}(\bar{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(T)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(\bar{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(\bar{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(T)}^2 \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(\bar{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(\bar{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(T)}^2. \end{aligned}$$

Zur Markierung der zu verfeinernden Elemente wird Dörfler-Marking mit einem Parameter $\theta \in (0, 1]$ verwendet. Daher gilt

$$\theta \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(\bar{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(T)}^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(\bar{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(T)}^2.$$

Eine Kombination dieser beiden Abschätzungen zeigt

$$\|h_{\ell+1}^{1/2}(\bar{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq (1 - \frac{\theta}{2}) \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(\bar{u}_\ell - u_\ell)'\|_{L^2(T)}^2 = (1 - \frac{\theta}{2})\mu_\ell^2.$$

Insgesamt führen uns diese Ergebnisse mit $q = (1 - \theta/2)^{1/2} \in (0, 1)$ zur Fehlerschätzerreduktion (4.4).

Damit ist der Beweis vollständig. \square

Als nächstes betrachten wir den zu μ_ℓ äquivalenten Fehlerschätzer

$$\tilde{\mu}_\ell := \|h_\ell^{1/2}(\bar{u}_\ell - I_\ell \bar{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)},$$

wobei $I_\ell : C(\bar{\Gamma}) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$ die nodale Interpolation bezeichnet.

Satz 4.1.3 *Wir betrachten den adaptiven Algorithmus 3.2.5 mit $\theta \in (0, 1]$ und verwenden die lokalen Beiträge von $\tilde{\mu}_\ell$ im Dörfler-Marking. Dann gilt die Schätzerreduktion*

$$\tilde{\mu}_{\ell+1} \leq q\tilde{\mu}_\ell + C_1(\|\bar{u}_{\ell+1} - \bar{u}_\ell\|), \quad (4.8)$$

wobei $q = (1 - \theta/2)^{1/2} \in (0, 1)$ und $C_1 > 0$ aus Lemma 3.1.3 bekannt ist.

Unter der Saturationsannahme (3.10) existieren Parameter $\kappa, \gamma \in (0, 1)$, sodass die Größe

$$\Delta_\ell := \|u - u_\ell\|^2 + \|u - \bar{u}_\ell\|^2 + \gamma\tilde{\mu}_\ell^2 \quad (4.9)$$

die Kontraktionseigenschaft

$$\Delta_{\ell+1} \leq \kappa\Delta_\ell \quad (4.10)$$

erfüllt. Damit gilt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \Delta_\ell = 0. \quad (4.11)$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|u - u_\ell\| = 0 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_\ell.$$

Beweis: Nachdem der Fehlerschätzer $\tilde{\mu}$ zuverlässig ist und dies äquivalent zur Saturationsannahme ist, wird auf den Beweis der Kontraktionseigenschaft verzichtet. Er verläuft wortgleich zum Beweis der Kontraktionseigenschaft aus Satz 4.1.2.

Um die Schätzerreduktion (4.8) einzusehen, setzen wir die Dreiecksungleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{\ell+1} &= \|h_{\ell+1}^{1/2}(\bar{u}_{\ell+1} - I_{\ell+1}u_{\ell+1})'\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|h_{\ell+1}^{1/2}(\bar{u}_\ell - I_{\ell+1}\bar{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)} + \|h_{\ell+1}^{1/2}[(\bar{u}_{\ell+1} - I_{\ell+1}\bar{u}_{\ell+1}) - (\bar{u}_\ell - I_{\ell+1}\bar{u}_\ell)]'\|_{L^2(\Gamma)} \\ &= \|h_{\ell+1}^{1/2}(\bar{u}_\ell - I_{\ell+1}\bar{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)} + \|h_{\ell+1}^{1/2}[(1 - I_{\ell+1})(\bar{u}_{\ell+1} - \bar{u}_\ell)]'\|_{L^2(\Gamma)} \\ &= \|h_{\ell+1}^{1/2}(\bar{u}_\ell - I_{\ell+1}\bar{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)} + \|h_{\ell+1}^{1/2}(1 - \Pi_{\ell+1})(\bar{u}_{\ell+1} - \bar{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|h_{\ell+1}^{1/2}(\bar{u}_\ell - I_{\ell+1}\bar{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)} + \|h_{\ell+1}^{1/2}(\bar{u}_{\ell+1} - \bar{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt einging, dass $\Pi_{\ell+1}$ die elementweise L^2 -Orthogonalprojektion auf $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell)$ bezeichnet. Ferner wurde die Identität $(I_{\ell+1}v)' = \Pi_{\ell+1}v'$ verwendet.

Nach Definition der Netzverfeinerung gilt

$$h_{\ell+1}|_T = \frac{1}{2}h_\ell|_T \quad \text{für } T \in \mathcal{M}_\ell$$

sowie

$$h_{\ell+1}|_T = h_\ell|_T \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell.$$

Daher wird nun der erste Summand wie folgt abgeschätzt:

$$\begin{aligned}
\|h_{\ell+1}^{1/2}((1 - I_{\ell+1})\bar{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= \|h_{\ell+1}^{1/2}(1 - \Pi_{\ell+1})\bar{u}'_\ell\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\
&= \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \|h_{\ell+1}^{1/2}(1 - \Pi_{\ell+1})\bar{u}'_\ell\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{I}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell} \|h_{\ell+1}^{1/2}(1 - \Pi_{\ell+1})\bar{u}'_\ell\|_{L^2(T)}^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(1 - \Pi_\ell)\bar{u}'_\ell\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{I}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(1 - \Pi_\ell)\bar{u}'_\ell\|_{L^2(T)}^2 \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(1 - \Pi_\ell)\bar{u}'_\ell\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{I}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(1 - \Pi_{\ell+1})\bar{u}'_\ell\|_{L^2(T)}^2.
\end{aligned}$$

Zur Markierung der zu verfeinernden Elemente wird Dörfler-Marking mit einem Parameter $\theta \in (0, 1]$ verwendet. Daher gilt

$$\theta \sum_{T \in \mathcal{I}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(1 - \Pi_\ell)\bar{u}'_\ell\|_{L^2(T)}^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(1 - \Pi_\ell)\bar{u}'_\ell\|_{L^2(T)}^2.$$

Damit erhalten wir

$$\|h_{\ell+1}^{1/2}((1 - I_{\ell+1})\bar{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)} \leq (1 - \frac{\theta}{2})^{1/2} \|h_\ell^{1/2}(1 - \Pi_\ell)\bar{u}'_\ell\|_{L^2(\Gamma)} = (1 - \frac{\theta}{2})^{1/2} \tilde{\mu}_\ell.$$

Wenden wir auf den zweiten Summanden der ersten Ungleichungskette eine inverse Abschätzung an, so erhalten wir insgesamt

$$\tilde{\mu}_{\ell+1} \leq (1 - \frac{\theta}{2})^{1/2} \tilde{\mu}_\ell + \|h_{\ell+1}^{1/2}(\bar{u}_{\ell+1} - \bar{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)} \leq (1 - \frac{\theta}{2})^{1/2} \tilde{\mu}_\ell + C_1 \|\bar{u}_{\ell+1} - \bar{u}_\ell\|$$

und damit die Aussage der Fehlerschätzerreduktion (4.8). Hiermit ist der Beweis nun vollständig. \square

Als letztes betrachten wir den mittelungsbasierten Schätzer

$$\tilde{\beta}_\ell := \|h_\ell^{1/2}(\tilde{u}'_\ell - \tilde{\Pi}_\ell \tilde{u}'_\ell)\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Korollar 4.1.4 *Wir betrachten den adaptiven Algorithmus 3.2.5 mit $\theta \in (0, 1]$ und verwenden die lokalen Beiträge von $\tilde{\beta}_\ell$ im Dörfler-Marking. Unter der Saturationsannahme (3.10) existieren Parameter $\kappa, \gamma \in (0, 1)$, sodass die Größe*

$$\Delta_\ell := \|u - u_\ell\|^2 + \|u - \bar{u}_\ell\|^2 + \gamma \tilde{\beta}_\ell^2$$

die Kontraktionseigenschaft

$$\Delta_{\ell+1} \leq \kappa \Delta_\ell$$

erfüllt. Damit gilt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \Delta_\ell = 0.$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|u - u_\ell\| = 0 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_\ell.$$

Beweis: Aus dem vorhergehenden Abschnitt ist bekannt, dass

$$\tilde{\beta}_\ell(T) = \frac{1}{2} \tilde{\mu}_\ell(T)$$

gilt. Demnach und nach Satz 4.1.3, der die Konvergenz für den Fehlerschätzer $\tilde{\mu}_\ell$ präsentiert, ist die Aussage belegt. \square

4.2 Konvergenz aufgrund der Schätzerreduktion

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir für die Fehlerschätzer $\mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell$ und $\tilde{\beta}_\ell$ und die zugehörigen adaptiven Verfahren Konvergenzresultate bewiesen. Unsere Beweise basierten auf der Schätzerreduktion, gewissen Orthogonalitätseigenschaften von Galerkin-Lösungen sowie der Saturationsannahme. Für den Fehlerschätzer β_ℓ konnten diese Beweise nicht adaptiert werden, da wir lediglich eine Schätzerreduktion der Gestalt

$$\beta_{\ell+1} \leq q\beta_\ell + C(\|\tilde{\mathbb{G}}_{\ell+1}\hat{u}_{\ell+1} - \tilde{\mathbb{G}}_\ell\hat{u}_\ell\| + \|\hat{u}_{\ell+1} + \hat{u}_\ell\|)$$

beweisen können. Es gilt $\tilde{\mathbb{G}}_\ell\hat{u}_\ell = \tilde{\mathbb{G}}_\ell\hat{\mathbb{G}}_\ell u_\ell$, und $\tilde{\mathbb{G}}_\ell\hat{\mathbb{G}}_\ell$ ist im Allgemeinen keine Orthogonalprojektion. Daher fehlen die nötigen Orthogonalitätseigenschaften für einen analogen Beweis der Kontraktionseigenschaft. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass adaptive Randelementmethode bezüglich des Fehlerschätzers β_ℓ unter der Saturationsannahme auf Konvergenz $\lim_{\ell \rightarrow \infty} u_\ell = u$ führt. Dabei zeigen wir zunächst, dass unabhängig von der Saturationsannahme $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \beta_\ell = 0$ gilt. Dieselbe Argumentation lässt sich auf die Fehlerschätzer $\mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell$ und $\tilde{\beta}_\ell$ anwenden und liefert analoge Ergebnisse.

Zunächst wollen wir eine fundamentale analytische Aussage festhalten, die für den Beweis des späteren Konvergenzsatzes unentbehrlich ist.

Lemma 4.2.1 *Seien $(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ Folgen, wobei (y_n) eine Nullfolge ist*

$$y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

gilt und die Folgenglieder x_n für eine Konstante $\kappa \in (0, 1)$ die Relation

$$x_{n+1} \leq \kappa x_n + y_n \tag{4.12}$$

erfüllen. Dann ist auch (x_n) eine Nullfolge

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Beweis: Wir wollen den Beweis in zwei Schritten führen. Dabei wird zuerst gezeigt, dass die Eigenschaft (4.12) bereits Beschränktheit der Folge (x_n) impliziert. Dieses Ergebnis führt im zweiten Schritt letztlich zur Konvergenz der Folge (x_n) gegen 0.

(i) Zunächst betrachten wir der Einfachheit halber die Relationen

$$x_1 \leq \kappa x_0 + y_0 \quad x_2 \leq \kappa x_1 + y_1 \leq \kappa^2 x_0 + \kappa y_0 + y_1.$$

Wir erkennen ein Bildungsgesetz und können daher wie folgt induktiv umformen

$$x_n \leq \kappa x_{n-1} + y_{n-1} \leq \kappa^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \kappa^{n-i} y_i.$$

Nun stellen wir fest, dass

$$\sup_n y_n < \infty$$

gilt, da (y_n) eine konvergente Folge ist. Daher gilt

$$\begin{aligned} x_n &\leq \kappa^n x_0 + \|(y_n)\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1} \kappa^{n-i} \leq \kappa^n x_0 + \|(y_n)\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1} \kappa^i \leq \kappa^n x_0 + \|(y_n)\|_\infty \frac{1}{1-\kappa} \\ &\leq x_0 + \|(y_n)\|_\infty \frac{1}{1-\kappa}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\sup_n x_n < \infty$$

gezeigt. Somit haben wir gezeigt, dass eine Folge (x_n) mit der Eigenschaft (4.12) beschränkt ist.

- (ii) Sei $M := \limsup_n x_n < \infty$. Dies ist zulässig, da (x_n) nach dem ersten Schritt des Beweises beschränkt ist. Aus der Angabe folgt

$$0 \leq \liminf_n x_n \leq M < \infty.$$

Somit gilt unter Verwendung der Linearität der Limesbildung und der Tatsache, dass (y_n) eine Nullfolge ist

$$M = \limsup_n x_{n+1} \leq \limsup_n (\kappa x_n + y_n) \leq \kappa \limsup_n x_n = \kappa M.$$

Da $\kappa \in (0, 1)$ gilt muss $M = 0$ sein. Dies impliziert, dass $\liminf_n x_n$ und $M = \limsup_n x_n = 0$ übereinstimmen und daher (x_n) eine Nullfolge ist

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit ist der Beweis nun vollständig. □

Wir wollen nun mit diesem neuen Ansatz für den Fehlerschätzer

$$\beta_\ell := \|h^{1/2}(\widehat{u}_\ell - \widetilde{\mathbb{G}}_\ell \widehat{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}$$

Konvergenz des adaptiven Algorithmus beweisen.

Satz 4.2.2 (Konvergenz von β_ℓ) *Wir betrachten den adaptiven Algorithmus 3.4.8 mit $\theta \in (0, 1]$ und verwenden die lokalen Beiträge von β_ℓ im Dörfler-Marking. Dann gilt die Schätzerreduktion*

$$\beta_{\ell+1} \leq q\beta_\ell + C_1 (\|\widetilde{\mathbb{G}}_{\ell+1} \widehat{u}_{\ell+1} - \widetilde{\mathbb{G}}_\ell \widehat{u}_\ell\| + \|\widehat{u}_{\ell+1} + \widehat{u}_\ell\|), \quad (4.13)$$

wobei $q = (1 - \theta/2)^{1/2} \in (0, 1)$ und $C_1 > 0$ aus Lemma 3.1.3 bekannt ist. Für den Fehlerschätzer β_ℓ liegt dann Konvergenz vor, sodass

$$\beta_\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$$

gilt.

Beweis: Zunächst sind wir an einer Fehlerschätzerreduktion (4.13) von β_ℓ interessiert, da wir schließlich Lemma 4.2.1 anwenden wollen, um die Konvergenz gegen 0 zu zeigen.

Wir setzen die Dreiecksungleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} \beta_{\ell+1} &= \|h_{\ell+1}^{1/2}(\widehat{u}_{\ell+1} - \widetilde{\mathbb{G}}_{\ell+1} \widehat{u}_{\ell+1})'\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|h_{\ell+1}^{1/2}(\widehat{u}_\ell - \widetilde{\mathbb{G}}_\ell \widehat{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)} + \|h_{\ell+1}^{1/2}[(\widehat{u}_{\ell+1} - \widetilde{\mathbb{G}}_{\ell+1} \widehat{u}_{\ell+1})' - (\widehat{u}_\ell - \widetilde{\mathbb{G}}_\ell \widehat{u}_\ell)']\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|h_{\ell+1}^{1/2}(\widehat{u}_\ell - \widetilde{\mathbb{G}}_\ell \widehat{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)} + C_1 \|(1 - \widetilde{\mathbb{G}}_{\ell+1})\widehat{u}_{\ell+1} - (1 - \widetilde{\mathbb{G}}_\ell)\widehat{u}_\ell\|. \end{aligned}$$

Weiters gilt nach Definition der Netzverfeinerung

$$h_{\ell+1}|_T = \frac{1}{2}h_\ell|_T \quad \text{für } T \in \mathcal{M}_\ell$$

sowie

$$h_{\ell+1}|_T = h_\ell|_T \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell.$$

Daher schätzen wir den ersten Summanden wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \|h_{\ell+1}^{1/2}(\hat{u}_\ell - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \|h_{\ell+1}^{1/2}(\hat{u}_\ell - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell)'\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell} \|h_{\ell+1}^{1/2}(\hat{u}_\ell - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell)'\|_{L^2(T)}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(\hat{u}_\ell - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell)'\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(\hat{u}_\ell - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell)'\|_{L^2(T)}^2 \\ &\leq -\frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(\hat{u}_\ell - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell)'\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(\hat{u}_\ell - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell)'\|_{L^2(T)}^2. \end{aligned}$$

Zur Markierung der zu verfeinernden Elemente wird Dörfler-Marking mit einem Parameter $\theta \in (0, 1]$ verwendet. Daher gilt

$$\theta \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(\hat{u}_\ell - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell)'\|_{L^2(T)}^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(\hat{u}_\ell - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell)'\|_{L^2(T)}^2.$$

Kombiniert man beide Aussagen, so erhält man

$$\|h_{\ell+1}^{1/2}(\hat{u}_\ell - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell)'\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \|h_\ell^{1/2}(\hat{u}_\ell - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell)'\|_{L^2(T)}^2 = \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) \beta_\ell^2.$$

Damit haben wir die Schätzerreduktion (4.13) mit $q = (1 - \theta/2)^{1/2}$ bewiesen.

Um Lemma 4.2.1 anzuwenden, müssen wir noch zeigen, dass die Energienorm in (4.13) für $\ell \rightarrow \infty$ verschwindet. Dazu beobachten wir zunächst

$$\|(1 - \tilde{\mathbb{G}}_{\ell+1})\hat{u}_{\ell+1} - (1 - \tilde{\mathbb{G}}_\ell)\hat{u}_\ell\| \leq \|\hat{u}_{\ell+1} - \hat{u}_\ell\| + \|\tilde{\mathbb{G}}_{\ell+1}\hat{u}_{\ell+1} - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell\|$$

Da $\hat{\mathbb{G}}_\ell$ und $\tilde{\mathbb{G}}_\ell$ Orthogonalprojektionen sind und $\hat{u}_\ell = \hat{\mathbb{G}}_\ell u$ gilt, folgt aus Lemma 4.0.1, dass die Grenzwerte $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \hat{u}_\ell = \hat{u}_\infty$ sowie $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\ell = \tilde{u}_\infty$ existieren. Es bleibt nur zu zeigen, dass

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{\mathbb{G}}_\ell u = \tilde{u}_\infty$$

gilt. Dazu argumentieren wir mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{\mathbb{G}}_\ell u - \tilde{u}_\infty\| &\leq \|\tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{\mathbb{G}}_\ell u - \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\infty\| + \|\tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\infty - \tilde{u}_\infty\| \\ &\leq \|\hat{\mathbb{G}}_\ell u - \hat{u}_\infty\| + \|\tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{u}_\infty - \tilde{u}_\infty\|, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt ausgenutzt wurde, dass $\tilde{\mathbb{G}}_\ell$ eine Orthogonalprojektion ist. Nach obigen Bemerkungen konvergieren nun beide Summanden gegen Null, wonach $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \tilde{\mathbb{G}}_\ell \hat{\mathbb{G}}_\ell u = \tilde{u}_\infty$ gilt.

Mit dieser Tatsache folgt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|(1 - \tilde{\mathbb{G}}_{\ell+1})\hat{u}_{\ell+1} - (1 - \tilde{\mathbb{G}}_\ell)\hat{u}_\ell\| = 0.$$

Nun können wir Lemma 4.2.1 anwenden und erhalten die Konvergenz

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \beta_\ell = 0.$$

Damit ist der Beweis vollständig. \square

Satz 4.2.3 (Konvergenzsatz) *Unter Verwendung eines zuverlässigen Fehlerschätzers ϱ_ℓ , für den*

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \varrho_\ell = 0$$

gilt, ist das adaptive Galerkin-Verfahren konvergent. Daher gilt für den Grenzwert der Galerkin-Approximationen

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} u_\ell = u_\infty = u.$$

Beweis: Aus der Zuverlässigkeit des Fehlerschätzers ϱ folgt

$$\|u - u_\ell\| \leq C_{\text{rel}}\varrho_\ell.$$

Da nach obiger Voraussetzung (ϱ_ℓ) eine Nullfolge ist, gilt

$$0 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|u - u_\ell\| = \|u - u_\infty\|.$$

Damit ist das gewünschte Resultat bewiesen. □

Kapitel 5

Implementierung der 2D BEM für die hypersinguläre Integralgleichung

Für die Durchführung numerischer Experimente ist es notwendig die Randelementmethode in 2D zu implementieren. Dabei wird großer Wert auf Effizienz und Schnelligkeit der Berechnung gelegt, während der damit verbundene Rechenfehler sich in einem akzeptablen Rahmen halten soll. Solche Forderungen führen auf eine nicht triviale Implementierung. Wie diese speziell für die Berechnung der rechten Seite der hypersingulären Integralgleichung aussieht soll in diesem Kapitel dargelegt werden. Nach einer kurzen Einführung in die Problemstellung und der im Folgenden benötigten Begriffe wird im ersten Abschnitt auf die Parametrisierung von Randintegralen eingegangen. Danach widmen wir uns spezielleren Integralen, die uns dann auf die approximative Berechnung des Doppelschichtpotentials führen. Im darauffolgenden Abschnitt wird die konkrete Berechnung der rechten Seite der hypersingulären Integralgleichung durchgeführt.

5.1 Einführende Begriffe

Zunächst werden jene Begriffe eingeführt bzw. wiederholt, die im Folgenden eine Rolle spielen werden. Man ist an der Lösung der hypersingulären Integralgleichung

$$Wu = f \quad \text{auf } \Gamma_N \tag{5.1}$$

interessiert, wobei Γ_N die Neumann-Randdaten meint. Hierzu betrachten wir das Galerkin-Verfahren mit $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ -Funktionen, wobei $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine Triangulierung des Randstücks Γ sei und mit

$$\mathcal{S}^1(\mathcal{T}) = \text{span}\{\phi_i^1\}_{i=1}^N$$

der Ansatzraum der stückweise linearen und stetigen Basisfunktionen ϕ_i^1 bezeichnet wird.

Üblicherweise assembliert man die Galerkin-Matrix und die rechte Seite für alle Hutfunktionen $\eta_j \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$, da man sich auf Referenzelemente zurückzieht. Eine bijektive Parametrisierung $\gamma_j : [-1, 1] \rightarrow T_j = [z_{j-1}, z_j]$, $\gamma_j(s) = \frac{1}{2}[(1-s)z_{j-1} + (1+s)z_j]$ mit $j = 1, \dots, N$ garantiert, dass alle Elemente der Triangulierung affin sind. Damit können wir den Raum der stückweise linearen und stetigen Ansatzfunktionen als $\mathcal{S}_T^1 := \{\phi_h \in C^0(\Gamma) | \phi_h \circ \gamma_j \in \mathcal{P}^1([-1, 1]) \forall j\}$ definieren. Die vorhin genannten Hutfunktionen bilden eine Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$. Sie erfüllen bei einer (äquidistanten) Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit Knoten $z_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N+1$, $h = (b-a)/(N+1)$

$$\eta_j \circ \gamma_j^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-z_{j-1}}{h} & \text{für } x \in [z_{j-1}, z_j], \\ \frac{z_{j+1}-x}{h} & \text{für } x \in [z_j, z_{j+1}], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei j von 1 bis N läuft.

Für die Anzahl an Knoten $\mathcal{K} = \{z_1, \dots, z_K\}$ von \mathcal{T} gilt $K = N$ im Fall eines geschlossenen Randes und $K = N + 1$ im Fall eines (zusammenhängenden) Schlitzes. Die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^K$ zur hypersingulären Integralgleichung wird gegeben durch

$$\begin{aligned} b_\ell &:= \left\langle \left(\frac{1}{2} - K' \right) \phi, \eta_\ell \right\rangle = \left\langle \phi, \left(\frac{1}{2} - K \right) \eta_\ell \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_{\text{supp}(\eta_\ell)} \phi(x) \eta_\ell(x) ds_x - \int_{\Gamma} \phi(x) (K \eta_\ell)(x) ds_x \\ &= \frac{1}{2} \int_{\text{supp}(\eta_\ell)} \phi(x) \eta_\ell(x) ds_x - \sum_{j=1}^N \int_{T_j} \phi(x) (K \eta_\ell)(x) ds_x. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dabei bezeichnet $\text{supp}(\eta_\ell)$ den Träger der Hutfunktion η_ℓ , die durch die Kronecker-Eigenschaft $\eta_\ell(z_k) = \delta_{k\ell}$ festgelegt ist. Man beachte, dass der Träger einer Hutfunktion aus maximal 2 Elementen besteht (und genau 2 im Falle eines geschlossenen Randes). Des Weiteren ist das Element $T_j = [z_k, z_\ell]$ nur in den Trägern von η_k und η_ℓ enthalten, d.h. auf jedem Element $T_j \in \mathcal{T}$ leben genau zwei Hutfunktionen. Mit dieser Feststellung, haben die beiden Summen

$$\int_{\text{supp}(\eta_\ell)} \phi(x) \eta_\ell(x) ds_x = \sum_{\substack{j=1 \\ T_j \subseteq \text{supp}(\eta_\ell)}}^N \int_{T_j} \phi(x) \eta_\ell(x) ds_x$$

sowie

$$\begin{aligned} (K \eta_\ell)(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\text{supp}(\eta_\ell)} \eta_\ell(y) \frac{(y-x) \cdot n_y}{|y-x|^2} ds_y \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ T_k \subseteq \text{supp}(\eta_\ell)}}^N \left(-\frac{1}{2\pi} \int_{T_k} \eta_\ell(y) \frac{(y-x) \cdot n_y}{|y-x|^2} ds_y \right) = \sum_{\substack{k=1 \\ T_k \subseteq \text{supp}(\eta_\ell)}}^N (K_{T_k} \eta_\ell)(x) \end{aligned}$$

maximal zwei Summanden. Mit der Notation K_{T_k} wird die Einschränkung des Doppelschichtpotentials K auf das Element T_k bezeichnet.

Es gilt also insgesamt

$$b_\ell = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ T_j \subseteq \text{supp}(\eta_\ell)}}^N \int_{T_j} \phi(x) \eta_\ell(x) ds_x - \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ T_k \subseteq \text{supp}(\eta_\ell)}}^N \int_{T_j} \phi(x) (K_{T_k} \eta_\ell)(x) ds_x. \quad (5.3)$$

Mit der Funktion

$$\text{dIp}(x, T_k, \eta_\ell) := (K_{T_k} \eta_\ell)(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{T_k} \eta_\ell(y) \frac{(y-x) \cdot n_y}{|y-x|^2} ds_y \quad (5.4)$$

sieht der Pseudo-Code zu (5.2) bzw. (5.3) insgesamt grob wie folgt aus:

```

N = size(elements,1);
K = size(coordinates,1);
b = zeros(K,1);
for j = 1:N
    nodes = elements(j,:);
    b(nodes) = b(nodes)
        + [ \int_{T_j} \phi(x) \eta_{\{nodes(1)\}}(x) ds_x ;
          \int_{T_j} \phi(x) \eta_{\{nodes(2)\}}(x) ds_x ] / 2;

```

```

end
for j = 1:N
    for k = 1:N
        nodes = elements(k,:);
        b(nodes) = b(nodes)
            - [ \int_{T_j}\phi(x) dlp(x,T_k,\eta_{nodes(1)}) ds_x
              \int_{T_j}\phi(x) dlp(x,T_k,\eta_{nodes(2)}) ds_x ];
    end
end

```

Im Folgenden soll die Integration

$$\int_{T_j} \phi(x) \, dlp(x, T_k, \eta_\ell) \, ds_x \quad (5.5)$$

aus (5.3) durch Transformation auf Integrale zurückgeführt werden, die mittels (gewichteter) Gauss-Quadratur niedriger Ordnung nahezu exakt berechnet werden können. Dazu werden wir zunächst das Singularitätsverhalten von

$$dlp(x, a, b, \eta_\ell) = -\frac{1}{2\pi} \int_{[a,b]} \eta_\ell(y) \frac{(y-x) \cdot n_y}{|y-x|^2} \, ds_y$$

in Abhängigkeit von x studieren, d.h. Aufteilung in glatten und logarithmisch-singulären Anteil durchführen. Dabei bedarf es vorerst allgemeinen Wissens über die Parametrisierung von Randintegralen.

5.2 Parametrisierung von Randintegralen

Für $a, b \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$ sei $[a, b] = \text{conv}\{a, b\}$. Wir wollen ein Oberflächenintegral über $[a, b]$ berechnen. Dazu transformieren wir $[a, b]$ auf das Referenzintervall $[-1, 1]$, d.h. wir parametrisieren $[a, b]$ (bijektiv) mittels

$$\gamma : [-1, 1] \rightarrow [a, b], \quad s \mapsto \frac{1}{2}[(a+b) + s(b-a)] = \frac{1}{2}[(1-s)a + (1+s)b].$$

Dann gilt für das Oberflächenintegral

$$\int_{[a,b]} \dots \, ds_y = \frac{|d|}{2} \int_{-1}^1 \dots \, ds.$$

Denkt man an die Implementierung der Funktion (5.4), so ist die Parametrisierung γ ein wertvolles Hilfsmittel wie wir nun sehen werden.

Für $y = \gamma(s)$ berechnen wir mit $d := b - a$, $c := a + b - 2x$

$$\begin{aligned}
|x - y|^2 &= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \\
&= \left(x_1 - \frac{1}{2}[(a_1 + b_1) + s(b_1 - a_1)]\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}[(a_2 + b_2) + s(b_2 - a_2)]\right)^2 \\
&= \frac{1}{4} \left(2x_1 - (a_1 + b_1) - s(b_1 - a_1)\right)^2 + \frac{1}{4} \left(2x_2 - (a_2 + b_2) - s(b_2 - a_2)\right)^2 \\
&= \frac{1}{4} \left(\underbrace{((a_1 + b_1) - 2x_1)}_{=c_1} + s \underbrace{(b_1 - a_1)}_{=d_1}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\underbrace{((a_2 + b_2) - 2x_2)}_{=c_2} + s \underbrace{(b_2 - a_2)}_{=d_2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4} \left\{ (c_1 + sd_1)^2 + (c_2 + sd_2)^2 \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \underbrace{[d_1^2 + d_2^2]}_{:=p=|d|^2 > 0} s^2 + 2 \underbrace{[c_1 d_1 + c_2 d_2]}_{:=q=2\langle c, d \rangle} s + \underbrace{[c_1^2 + c_2^2]}_{:=r=|c|^2} \right\} \\
&= \frac{ps^2 + qs + r}{4} \\
&= \frac{p}{4} \left(s^2 + \frac{q}{p}s + \frac{r}{p} \right)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Wir betrachten mit $\alpha := \frac{q}{p}$, $\beta := \frac{r}{p}$ das Polynom

$$s^2 + \alpha s + \beta \tag{5.7}$$

und dessen Diskriminante

$$\Delta := \alpha^2 - 4\beta. \tag{5.8}$$

Bemerkung 5.2.1 Die Diskriminante erfüllt in unserem Fall stets $\Delta \leq 0$, denn nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\Delta = \alpha^2 - 4\beta = \frac{q^2}{p^2} - 4\frac{r}{p} = \frac{4}{p^2} \left(\frac{q^2}{4} - rp \right) = \frac{4}{p^2} \underbrace{(\langle c, d \rangle^2 - |c|^2 |d|^2)}_{\leq 0} \leq 0. \tag{5.9}$$

Bemerkung 5.2.2 Überhaupt bedeutet der Fall $\Delta = 0$ nach (5.9) die Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\langle c, d \rangle = |c||d|$. Damit sind c, d linear abhängig, genauer gilt wegen $d = b - a \neq 0$

$$c = td \quad \text{mit} \quad t := \frac{\langle c, d \rangle}{\langle d, d \rangle} \stackrel{!}{=} \frac{\alpha}{2}.$$

Es folgt

$$x = \frac{1}{2} \{ a + b - t(b - a) \},$$

d.h. x liegt auf der Geraden \overline{ab} .

Im nächsten Abschnitt wollen wir uns mit einfachen Integralen beschäftigen, für die $\Delta < 0$ gilt. Dies ist von Notwendigkeit wie man erkennt, wenn man Gleichung (5.4) parametrisiert.

5.3 Einfache Integrale für $\Delta < 0$

Nun wollen wir Integrale der Form

$$I_n := \int_{-1}^1 \frac{s^{n-1}}{s^2 + \alpha s + \beta} ds \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (5.10)$$

ausrechnen, die bei der analytischen Auswertung von Doppelschichtpotential und adjungiertem Doppelschichtpotential auftreten.

Lemma 5.3.1 *Für $\Delta < 0$ gilt*

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{2}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}} \arctan \frac{2s + \alpha}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}} \right]_{s=-1}^{s=1}, \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left[\log(s^2 + \alpha s + \beta) \right]_{s=-1}^{s=1} - \frac{\alpha}{2} I_1. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ferner gilt für $n \geq 3$ die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1 - (-1)^n}{n-2} - \alpha I_{n-1} - \beta I_{n-2} \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{n-2} - \frac{2\langle c, d \rangle I_{n-1} + |c|^2 I_{n-2}}{|d|^2}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

Beweis: Für $\Delta < 0$ gelten die Gleichungen (5.11) nach [23, Heuser I,446]. Um die Rekursionsformel (5.12) zu verstehen betrachte man den Integranden

$$\begin{aligned} \frac{s^{n-1}}{s^2 + \alpha s + \beta} &= s^{n-3} \frac{s^2}{s^2 + \alpha s + \beta} = s^{n-3} \left\{ 1 - \frac{\alpha s}{s^2 + \alpha s + \beta} - \frac{\beta}{s^2 + \alpha s + \beta} \right\} \\ &= s^{n-3} - \alpha \frac{s^{n-2}}{s^2 + \alpha s + \beta} - \beta \frac{s^{n-3}}{s^2 + \alpha s + \beta}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^1 s^{n-3} ds - \alpha I_{n-1} - \beta I_{n-2} = \left[\frac{s^{n-2}}{n-2} \right]_{s=-1}^{s=1} - \alpha I_{n-1} - \beta I_{n-2} \\ &= \left(\frac{1}{n-2} - \frac{(-1)^{n-2}}{n-2} \right) - \alpha I_{n-1} - \beta I_{n-2} \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{n-2} - \alpha I_{n-1} - \beta I_{n-2}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $\alpha := \frac{q}{p} = \frac{2\langle c, d \rangle}{|d|^2}$ und $\beta := \frac{r}{p} = \frac{|c|^2}{|d|^2}$ erhält man obige Aussage. \square

Um nun einen weiteren Einblick in die Problematik solcher Integrale zu erreichen, ist es notwendig, folgende Definition bzw. Vereinfachungen der in (5.11) auftretenden Terme durchzuführen:

$$D := \sqrt{|d|^2 |c|^2 - \langle c, d \rangle^2}. \quad (5.13)$$

Bemerkung 5.3.2 *Mit dieser Definition gelten die Äquivalenzen*

$$\begin{aligned} D = 0 &\iff \Delta = 0, \\ D > 0 &\iff \Delta < 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Damit lassen sich nun folgende Vereinfachungen anstellen:

$$\begin{aligned}\sqrt{4\beta - \alpha^2} &= \sqrt{4\frac{r}{p} - \frac{q^2}{p^2}} = \sqrt{\frac{4pr - q^2}{p^2}} = \sqrt{\frac{4|d|^2|c|^2 - 4\langle c, d \rangle^2}{|d|^4}} \stackrel{(5.13)}{=} \frac{2D}{|d|^2}, \\ \frac{2}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}} &= \frac{|d|^2}{D}, \\ \frac{2s + \alpha}{\sqrt{4\beta - \alpha^2}} &= \frac{(2s + \alpha)|d|^2}{2D} = \frac{2|d|^2s + q}{2D} = \frac{|d|^2s + \langle c, d \rangle}{D}, \\ \frac{\alpha}{2} &= \frac{q}{2p} = \frac{\langle c, d \rangle}{|d|^2}.\end{aligned}$$

Lemma 5.3.3 *Die Formeln aus (5.11) lassen sich darstellen wie folgt:*

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{|d|^2}{D} \left(\arctan \frac{|d|^2 + \langle c, d \rangle}{D} + \arctan \frac{|d|^2 - \langle c, d \rangle}{D} \right), \\ I_2 &= \log \frac{|x - b|}{|x - a|} - \frac{\langle c, d \rangle}{|d|^2} I_1\end{aligned}$$

Beweis: Das erste Resultat ist einfach einzusehen, indem man für s auswertet. Der logarithmische Term in (5.11) schreibt sich mit

$$\begin{aligned}\log(s^2 + \alpha s + \beta) &= \log\left(\frac{4}{p} \frac{ps^2 + qs + r}{4}\right) = \log(4/p) + \log\left(\frac{ps^2 + qs + r}{4}\right) \\ &\stackrel{(5.6)}{=} \log(4/p) + \log|x - \gamma(s)|^2 \\ &= \log(4/p) + 2 \log|x - \gamma(s)|\end{aligned}$$

kurz

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left[\log(s^2 + \alpha s + \beta) \right]_{s=-1}^{s=1} &= \frac{1}{2} \left[\log(4/p) + 2 \log|x - \gamma(s)| \right]_{s=-1}^{s=1} \\ &= \log|x - \gamma(1)| - \log|x - \gamma(-1)| \\ &= \log|x - b| - \log|x - a| = \log \frac{|x - b|}{|x - a|}.\end{aligned}$$

Einsetzen für $\alpha = \frac{2\langle c, d \rangle}{|d|^2}$ schließt den Beweis ab. □

Nützlich scheint sicherlich folgendes Resultat:

Lemma 5.3.4 (Additionstheorem) *Für den Arcustangens gilt das Additionstheorem*

$$\arctan x + \arctan y = \begin{cases} \arctan \frac{x+y}{1-xy} & \text{für } xy < 1, \\ \arctan \frac{x+y}{1-xy} + \pi & \text{für } xy > 1 \text{ und } x > 0, \\ \arctan \frac{x+y}{1-xy} - \pi & \text{für } xy > 1 \text{ und } x < 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Lemma 5.3.5

$$\begin{aligned}\arctan(x, a, b) &:= \arctan \frac{|d|^2 + \langle c, d \rangle}{D} + \arctan \frac{|d|^2 - \langle c, d \rangle}{D} \\ &= \begin{cases} \arctan \frac{D}{2\langle a-x, b-x \rangle} & \text{für } |d| < |c|, \\ \arctan \frac{D}{2\langle a-x, b-x \rangle} + \pi & \text{für } |d| > |c|, \\ \arctan x + \arctan y & \text{für } |d| = |c|. \end{cases} \quad (5.16)\end{aligned}$$

Beweis: Dieses Resultat ist aus dem **Additionstheorem** 5.3.4 ableitbar. In unserem Fall ist

$$\begin{aligned} x &= \frac{|d|^2 + \langle c, d \rangle}{D} = \frac{2\langle b - x, d \rangle}{D}, \\ y &= \frac{|d|^2 - \langle c, d \rangle}{D} = \frac{2\langle x - a, d \rangle}{D}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

also

$$\begin{aligned} \frac{x + y}{1 - xy} &= \frac{\frac{2|d|^2}{D}}{1 - \frac{|d|^4 - \langle c, d \rangle^2}{D^2}} = \frac{\frac{2|d|^2}{D}}{\frac{D^2 - (|d|^4 - \langle c, d \rangle^2)}{D^2}} \stackrel{(5.13)}{=} \frac{2D|d|^2}{|d|^2|c|^2 - \langle c, d \rangle^2 - (|d|^4 - \langle c, d \rangle^2)} \\ &= \frac{2D}{|c|^2 - |d|^2}. \end{aligned}$$

Wir schreiben den Nenner mit

$$|c|^2 - |d|^2 = 4\langle a - x, b - x \rangle.$$

Damit vereinfacht sich die Arcustangens-Summe im Fall

$$\begin{aligned} xy \neq 1 &\iff |d|^4 - \langle c, d \rangle^2 \neq D^2 \stackrel{(5.13)}{=} |d|^2|c|^2 - \langle c, d \rangle^2 &\iff |d|^2 \neq |c|^2 \\ & &\iff |d| \neq |c|. \end{aligned}$$

Man beachte die Äquivalenzen

$$xy < 1 \iff |d| < |c|, \text{ sowie } \quad xy > 1 \iff |d| > |c|.$$

Ferner gilt

$$\langle b - x, d \rangle = \langle b - x, b - x \rangle + \langle b - x, x - a \rangle = |b - x|^2 + \frac{1}{4}(|d|^2 - |c|^2)$$

Insbesondere folgt für $|d| > |c|$ sofort $\langle b - x, d \rangle > 0$, d.h. der Fall $xy > 1$ mit $x < 0$ in (5.15) kann nicht auftreten. Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

Bemerkung 5.3.6 Die Gleichung (5.16) realisieren wir als Matlab-Funktion `arctan.m`. Weiters sei bemerkt, dass die Matlab-Funktion `I(x,a,b,N)` die Werte I_1, \dots, I_N rekursiv berechnet und einen Zeilenvektor in \mathbb{R}^N wiedergibt, wobei auch $x, a, b \in \mathbb{R}^2$ als Zeilenvektoren gegeben seien und der Normalenvektor von a nach b nach rechts weise.

5.4 Approximative Berechnung des Doppelschichtpotentials

Wie zu Beginn dieses Kapitels bemerkt, wollen wir für $x \in \Gamma$ das Doppelschichtpotential

$$(K\eta)(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \eta(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \log |x - y| ds_y = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \eta(y) \frac{(y - x) \cdot n_y}{|x - y|^2} ds_y$$

(approximativ) berechnen. Ist $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine Triangulierung von Γ , so zerlegen wir das Integral mittels

$$(K_{T_j}\eta)(x) := (K[\eta\chi_{T_j}])(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{T_j} \eta(y) \frac{(y - x) \cdot n_y}{|x - y|^2} ds_y$$

als Summe

$$(K\eta)(x) = \sum_{j=1}^N (K_{T_j}\eta)(x).$$

Wir betrachten im Folgenden nur ein affines Randstück $T_j = [a, b]$. Der Normalenvektor $n = n_y$ auf $[a, b]$ zeige nach rechts, vom Tangentialvektor $b - a$ aus gesehen, d.h.

$$n = \frac{(b_2 - a_2, a_1 - b_1)}{|b - a|} = \frac{(d_2, -d_1)}{|d|} \quad (y \in [a, b]). \quad (5.18)$$

Hierbei bezeichnen die indizierten Variablen die jeweiligen Komponenten der Anfangs- bzw. Endknoten der Elemente $T_j = [a, b]$ bzw. der daraus resultierenden Größen.

Da durch die vorhergehenden Abschnitte die benötigten Hilfsmittel gegeben sind, ist es einfach einzusehen, dass wir mit der Parametrisierung $\gamma : [-1, 1] \rightarrow [a, b]$ folgendes Ergebnis erhalten:

$$(K_{[a,b]}\eta)(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{[a,b]} \eta(y) \frac{(y-x) \cdot n_y}{|x-y|^2} ds_y = -\frac{1}{2\pi} \frac{|d|}{2} \int_{-1}^1 \eta(\gamma(s)) \frac{(\gamma(s)-x) \cdot n}{|x-\gamma(s)|^2} ds.$$

Für $y = \gamma(s)$ vereinfachen wir den Zähler des Integranden zu

$$\langle y-x, n \rangle = \frac{1}{2} \langle (a+b) + s(b-a) - 2x, n \rangle = \frac{1}{2} \langle a+b-2x, n \rangle = \frac{1}{2} \langle c, n \rangle = \frac{\langle c, (d_2, -d_1) \rangle}{2|d|},$$

d.h. der Zähler ist konstant. Ferner gilt, unter Verwendung der in den vorhergehenden Abschnitten berechneten Größen c, d und D die Äquivalenzkette

$$\langle y-x, n \rangle = 0 \iff c \perp n \iff c, d \text{ linear abhängig} \iff D = 0, \quad (5.19)$$

d.h. für $D = 0$ verschwindet das Doppelschichtpotential. Wir müssen also nur den Fall $D > 0$ betrachten. Unsere Überlegungen führen bisher auf

$$\begin{aligned} (K_{[a,b]}\eta)(x) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{|d|}{2} \frac{\langle c, (d_2, -d_1) \rangle}{2|d|} \int_{-1}^1 \eta(\gamma(s)) \frac{1}{|x-\gamma(s)|^2} ds \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{|d|}{2} \frac{\langle c, (d_2, -d_1) \rangle}{2|d|} \frac{4}{p} \int_{-1}^1 \eta(\gamma(s)) \frac{1}{s^2 + \alpha s + \beta} ds \\ &= \underbrace{\frac{\langle c, (-d_2, d_1) \rangle}{2\pi|d|^2}}_{=: \lambda} \int_{-1}^1 \eta(\gamma(s)) \frac{1}{s^2 + \alpha s + \beta} ds. \end{aligned}$$

Nun ist dieses Integral für allgemeines $\eta \circ \gamma$ nicht mehr lösbar. Deshalb ersetzen wir η durch ein Polynom η_h in der Bogenlänge, d.h. $\eta_h \circ \gamma$ ist ein Polynom auf $[-1, 1]$. Als Ansatz wählen wir die Approximation von η auf $[a, b]$ durch ein Polynom η_h vom Grad $N-1$, d.h.

$$\eta \circ \gamma(s) \approx \eta_h \circ \gamma(s) := \sum_{n=1}^N \mu_n s^{n-1} \quad (s \in [-1, 1]) \quad (5.20)$$

mit geeigneten Skalaren $\mu_n \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir

$$(K_{[a,b]}\eta)(x) \approx (K_{[a,b]}\eta_h)(x) = \lambda \sum_{n=1}^N \mu_n \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{s^{n-1}}{s^2 + \alpha s + \beta} ds}_{=: I_n}. \quad (5.21)$$

Die Integrale I_n können nach (5.11) bzw. (5.12) im Fall $D > 0$ rekursiv berechnet werden. Wie eingangs erwähnt, wird diese Berechnung des Doppelschichtpotentials mittels der Funktion

$$\text{dlp}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{eta}) := (K_{[a,b]}\eta_h)(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{[a,b]} \eta_h(y) \frac{(y-x) \cdot n_y}{|x-y|^2} ds_y \quad (5.22)$$

realisiert. Dieser werden $x \in \mathbb{R}^2$, die Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}^2$ sowie ein Spaltenvektor von Funktionswerten $\Phi \in \mathbb{R}^N$ übergeben. Durch den Vektor Φ wird ein eindeutiges Interpolationspolynom vom Grad $N-1$ definiert, wobei wir voraussetzen, dass die Funktionswerte äquidistant gegeben sind. Das Interpolationspolynom $P := \eta \circ \gamma$ erfülle in den äquidistanten Stützstellen $x_j \in [-1, 1]$ die punktweise Interpolation, d.h.

$$P(x_j) = \Phi_j := \eta(\gamma(x_j)) \quad (1 \leq j \leq N).$$

Für uns ist die Approximation des Doppelschichtpotentials mittels affiner Funktionen von Bedeutung, daher führe ich für diesen speziellen Fall die Berechnung genauer aus.

5.4.1 Approximation des Doppelschichtpotentials mittels affiner Funktionen

Wir betrachten auf $[-1, 1]$ die (eindeutige) affine Funktion $P = \eta_h \circ \gamma$ mit $P(-1) = \eta(a)$ und $P(1) = \eta(b)$ als Approximation von $\eta \circ \gamma$. P ist auf $[-1, 1]$ gegeben durch

$$P(s) = \frac{1}{2} \{ \eta(a) + \eta(b) + s(\eta(b) - \eta(a)) \} = \underbrace{\frac{\eta(a) + \eta(b)}{2}}_{=: \mu_1} + s \underbrace{\frac{\eta(b) - \eta(a)}{2}}_{=: \mu_2}. \quad (5.23)$$

Lemma 5.4.1 *Das Doppelschichtpotential berechnet sich approximativ unter Verwendung der Polynome aus (5.23) wie folgt:*

$$\begin{aligned} (K_{[a,b]}\eta_h)(x) &= \frac{\langle c, (-d_2, d_1) \rangle}{2\pi|d|^2} \left\{ \frac{\langle \Phi, e \rangle}{D} \arctan(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2} \log \frac{|x-b|}{|x-a|} \right\} \\ &= \text{dlp}(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{eta}) \end{aligned} \quad (5.24)$$

für $\Phi = (\eta(a), \eta(b)) \in \mathbb{R}^2$.

Beweis: Unter Betrachtung des Polynoms aus (5.23) ergibt sich

$$\begin{aligned} (K_{[a,b]}\eta_h)(x) &= \lambda \left\{ \mu_1 I_1 + \mu_2 I_2 \right\} = \lambda \left\{ \mu_1 I_1 + \mu_2 \log \frac{|x-b|}{|x-a|} - \mu_2 \frac{\langle c, d \rangle}{|d|^2} I_1 \right\} \\ &= \lambda \left\{ \left(\mu_1 - \mu_2 \frac{\langle c, d \rangle}{|d|^2} \right) I_1 + \mu_2 \log \frac{|x-b|}{|x-a|} \right\} \\ &= \lambda \left\{ \frac{\mu_1 |d|^2 - \mu_2 \langle c, d \rangle}{|d|^2} I_1 + \mu_2 \log \frac{|x-b|}{|x-a|} \right\}. \end{aligned}$$

Den Vorfaktor von I_1 können wir vereinfachen wie folgt

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1 |d|^2 - \mu_2 \langle c, d \rangle}{|d|^2} &= \frac{(\eta(a) + \eta(b)) |d|^2 - (\eta(b) - \eta(a)) \langle c, d \rangle}{2|d|^2} \\ &= \frac{\phi(a)(|d|^2 + \langle c, d \rangle) + \phi(b)(|d|^2 - \langle c, d \rangle)}{2|d|^2} \\ &\stackrel{(5.17)}{=} \frac{2\eta(a)\langle b-x, d \rangle + 2\eta(b)\langle x-a, d \rangle}{2|d|^2} \\ &= \frac{\eta(a)\langle b-x, d \rangle + \eta(b)\langle x-a, d \rangle}{|d|^2} \\ &= \frac{\langle \Phi, e \rangle}{|d|^2}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichne Φ nun den Vektor $\Phi = (\eta(a), \eta(b))$ und $e := (\langle b - x, d \rangle, \langle x - a, d \rangle)$. Nun erhalten wir durch schlichtes Einsetzen

$$\begin{aligned} (K_{[a,b]}\eta_h)(x) &= \lambda \left\{ \frac{\langle \Phi, e \rangle}{|d|^2} I_1 + \mu_2 \log \frac{|x - b|}{|x - a|} \right\} \\ &= \frac{\langle c, (-d_2, d_1) \rangle}{2\pi|d|^2} \left\{ \frac{\langle \Phi, e \rangle}{D} \arctan(x, a, b) + \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2} \log \frac{|x - b|}{|x - a|} \right\}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

□

Bemerkung 5.4.2 *In diesem speziellen Fall der Approximation mittels affiner Funktionen, wird auf die rekursive Berechnung der I_n verzichtet, da Rekursion (unnötige) Rechenfehler birgt.*

5.5 Numerische Berechnung der rechten Seite

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie für ein $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ -basiertes Galerkin-Verfahren zur hypersingulären Integralgleichung die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^N$ aus (5.2) numerisch berechnet werden kann. Im Folgenden untersuchen wir also schrittweise die dafür benötigten Integrale auf Singularitäten oder andere besondere Eigenschaften.

Für das erste Integral aus (5.2) können wir die übliche Gauss-Quadraturformel benutzen. Probleme treten hingegen nur bei Integralen

$$\int_{[a,b]} \phi(x) (K_{T_k} \eta_\ell)(x) ds_x \quad (5.26)$$

mit $T_j = [a, b]$, $T_k = [a, b]$ und $\eta_\ell|_{[a,b]}$ affin auf.

Lemma 5.5.1 *Für das Integral aus (5.26) gilt folgende Gleichung:*

$$\begin{aligned} &\int_{[a,b]} \phi(x) (K_{[a,b]}\eta)(x) ds_x \\ &= \int_{[a,b]} \phi(x) \frac{\langle c, (-d_2, d_1) \rangle}{2\pi|d|^2} \frac{\eta(a)\langle b - x, d \rangle + \eta(b)\langle x - a, d \rangle}{D} \arctan(x, a, b) ds_x \\ &\quad + \int_{[a,b]} \phi(x) \frac{\langle c, (-d_2, d_1) \rangle}{2\pi|d|^2} \frac{\eta(b) - \eta(a)}{2} \log \frac{|x - b|}{|x - a|} ds_x. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Beweis: Einsetzen von Gleichung (5.25) in den Integranden zeigt die Behauptung. □

Bemerkung 5.5.2 *Unter Betrachtung der obigen Darstellung der rechten Seite der hypersingulären Integralgleichung (Gleichung (5.26)) ist festzustellen, dass das erste Integral einen glatten Term darstellt, während im zweiten Integral der logarithmische Term unter Umständen Probleme machen kann, nämlich genau dann wenn $a = b$ oder $b = a$.*

Im Weiteren führen wir eine Fallunterscheidung bezüglich der Verhältnisse der Randintervalle $T_j = [a, b]$ und $T_k = [a, b]$ durch, um eine möglichst sparsame und effiziente Implementierung zu erreichen.

Fall 1. $a \neq b$ und $b \neq a$

In diesem Fall treten keine Probleme auf, da die Integrationsvariable $x \in [a, b]$ von den Intervallgrenzen a und b weg ist und daher der logarithmische Term glatt ist. Das Integral (5.27) kann deshalb über Gauss-Quadratur in Verbindung mit `d1p.m` berechnet werden.

Fall 2. $a = \mathfrak{b}$ oder $b = \mathfrak{a}$

Tritt einer dieser beiden Fälle ein, so bedarf es weiterer Fallunterscheidungen.

Fall 2.1. $D = 0$

Es treten keine Probleme auf, denn $\int_{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]} \phi(x)(K_{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]}\eta)(x) ds_x = 0$, wie wir bereits in Abschnitt 5.3 gesehen haben.

Fall 2.2. $D > 0$

Wie schon erwähnt, stoßen wir in diesem Fall auf Probleme im logarithmischen Term. Zur genaueren Ausführung der Problematik unterscheiden wir im Folgenden erneut zwei Fälle.

Fall 2.2.1. $a = \mathfrak{b}$

Nun ist es notwendig den logarithmischen Term weiter umzuformen. Der Übersichtlichkeit halber fassen wir die Vorfaktoren des Logarithmus $\phi(x) \frac{(c, (-d_2, d_1))}{2\pi|d|^2} \frac{\eta(b) - \eta(a)}{2}$ in einer Funktion $g(x)$ zusammen und betrachten daher zunächst folgendes Integral:

$$\int_{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]} g(x) \log \frac{|x - b|}{|x - a|} ds_x = \int_{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]} g(x) \log |x - b| ds_x - \int_{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]} g(x) \log |x - a| ds_x. \quad (5.28)$$

Da das erste Integral auf der rechten Seite von (5.28) einen glatten Integranden hat, kann es mittels Gauss-Quadratur berechnet werden. Der zweite Summand muss aufgrund der Gleichheit von a und \mathfrak{b} weiter behandelt werden. Folgendes Lemma bringt das gewünschte Resultat.

Lemma 5.5.3 *Unter der Parametrisierung $\gamma : [0, 1] \rightarrow [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$, $s \mapsto \mathfrak{a} + s\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{d} := \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ gilt folgende Gleichung:*

$$\int_{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]} g(x) \log |x - a| ds_x = |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(1 - t)) \log t dt + \int_{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]} g(x) \log |\mathfrak{d}| ds_x. \quad (5.29)$$

Beweis: Mit obiger Parametrisierung erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]} g(x) \log |x - a| ds_x &= |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(s)) \log |\mathfrak{a} + s\mathfrak{d} - a| ds \\ &= |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(s)) \log |(s - 1)\mathfrak{d}| ds \\ &= |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(s)) (\log(1 - s) + \log |\mathfrak{d}|) ds \\ &= |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(s)) \log(1 - s) ds + |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(s)) \log |\mathfrak{d}| ds \\ &= |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(1 - t)) \log t dt + \int_{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]} g(x) \log |\mathfrak{d}| ds_x. \end{aligned}$$

□

Rückeinsetzen in (5.28) ergibt

$$\begin{aligned} &\int_{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]} g(x) \log \frac{|x - b|}{|x - a|} ds_x \\ &= \int_{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]} g(x) \log |x - b| ds_x - \int_{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]} g(x) \log |\mathfrak{d}| ds_x - |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(1 - t)) \log t dt \\ &= \int_{[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]} g(x) \log \frac{|x - b|}{|\mathfrak{d}|} ds_x - |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(1 - t)) \log t dt. \end{aligned}$$

Anwendung des Lemmas 5.5.3 führt unter der Beachtung, dass $c = a + b - 2x$ gilt, also c abhängig von der Integrationsvariablen x ist und daher nicht als konstanter Faktor behandelt werden kann, zu folgendem Ergebnis:

$$\begin{aligned} & \int_{[a,b]} \phi(x)(K\eta_\ell)(x) ds_x \\ &= \int_{[a,b]} \phi(x) \frac{\langle c, (-d_2, d_1) \rangle \eta(a) \langle b-x, d \rangle + \eta(b) \langle x-a, d \rangle}{2\pi|d|^2 D} \arctan(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) ds_x \\ &+ \frac{\eta(b) - \eta(a)}{2} \int_{[a,b]} \phi(x) \frac{\langle c, (-d_2, d_1) \rangle}{2\pi|d|^2} \log \frac{|x-b|}{|d|} ds_x \\ &- |d| \frac{\eta(b) - \eta(a)}{2} \int_{[0,1]} \phi(\gamma(1-t)) \frac{\langle a+b-2(\gamma(1-t)), (-d_2, d_1) \rangle}{2\pi|d|^2} \log t dt. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.5.4 *Bezüglich der Implementierung ergibt sich nun, dass der erste Summand in (5.29) mittels gewöhnlicher Gauss-Quadratur berechnet wird, während der zweite Summand mit einer Gauss-Quadratur zur Gewichtsfunktion $\omega(t) = \log(t)$ berechnet wird. Solche Quadraturformeln sind beispielsweise in Büchern wie SECREST-STROUD [32] oder ABRAMOWITZ [1] tabelliert.*

Fall 2.2.2. $b = a$

Auch in diesem Fall besteht die Notwendigkeit den logarithmischen Term entsprechend umzuformen. Analog zu Obigem führen wir auch hier die Substitution $\phi(x) \frac{\langle c, (-d_2, d_1) \rangle \eta(b) - \eta(a)}{2\pi|d|^2} = g(x)$ durch, um mehr Übersichtlichkeit gewährleisten zu können. Bei Betrachtung der Gleichung (5.28) ist festzustellen, dass der erste Summand aufgrund der Fallunterscheidung so nicht berechnet werden kann und daher behandelt werden muss. Folgendes Lemma leistet das Gewünschte.

Lemma 5.5.5 *Unter der Parametrisierung $\gamma : [0, 1] \rightarrow [a, b]$, $s \mapsto \mathbf{a} + s\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{d} := \mathbf{b} - \mathbf{a}$ gilt folgende Gleichung:*

$$\int_{[a,b]} g(x) \log |x-b| ds_x = |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(s)) \log s ds + \int_{[a,b]} g(x) \log |\mathfrak{d}| ds_x.$$

Beweis: Mit obiger Parametrisierung und analogem Vorgehen wie in Lemma 5.5.3 erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} g(x) \log |x-b| ds_x &= |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(s)) \log |\mathbf{a} + s\mathfrak{d} - b| ds \\ &= |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(s)) \log |s\mathfrak{d}| ds \\ &= |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(s)) (\log s + \log |\mathfrak{d}|) ds \\ &= |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(s)) \log s ds + |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(s)) \log |\mathfrak{d}| ds \\ &= |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(s)) \log s ds + \int_{[a,b]} g(x) \log |\mathfrak{d}| ds_x. \end{aligned}$$

□

Einsetzen dieses Resultats in (5.28) ergibt nun

$$\begin{aligned}
& \int_{[a,b]} g(x) \log \frac{|x-b|}{|x-a|} ds_x \\
&= |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(s)) \log s ds + \int_{[a,b]} g(x) \log |\mathfrak{d}| ds_x - \int_{[a,b]} g(x) \log |x-a| ds_x \\
&= |\mathfrak{d}| \int_0^1 g(\gamma(s)) \log s ds + \int_{[a,b]} g(x) \log \frac{|\mathfrak{d}|}{|x-a|} ds_x.
\end{aligned}$$

Rücksubstitution und Einsetzen dieses Ergebnisses führt unter Beachtung dass $c = a + b - 2x$ gilt, also c abhängig von der Integrationsvariablen x ist und daher nicht als konstanter Faktor behandelt werden kann, zu folgendem Ergebnis:

$$\begin{aligned}
& \int_{[a,b]} \phi(x) (K\eta_\ell)(x) ds_x \\
&= \int_{[a,b]} \phi(x) \frac{\langle c, (-d_2, d_1) \rangle \eta(a) \langle b-x, d \rangle + \eta(b) \langle x-a, d \rangle}{2\pi|d|^2 D} \arctan(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) ds_x \\
&+ \frac{\eta(b) - \eta(a)}{2} \int_{[a,b]} \phi(x) \frac{\langle c, (-d_2, d_1) \rangle}{2\pi|d|^2} \log \frac{|\mathfrak{d}|}{|x-a|} ds_x \\
&+ |\mathfrak{d}| \frac{\eta(b) - \eta(a)}{2} \int_{[0,1]} \phi(\gamma(s)) \frac{\langle a+b-2(\gamma(s)), (-d_2, d_1) \rangle}{2\pi|d|^2} \log s ds.
\end{aligned}$$

Bemerkung 5.5.6 *In Analogie zum vorhergehenden Fall werden zur Berechnung der Integrale gewöhnliche sowie logarithmisch gewichtete Gauss-Quadraturen eingesetzt.*

Mit Hilfe der ausgeführten Fallunterscheidungen und deren Ergebnissen ist es nun möglich die Berechnung der rechten Seite der hypersingulären Integralgleichung in 2D wesentlich effizienter und schneller durchzuführen, als dies mittels primitiver Gauss-Quadratur zu einer hohen Anzahl an Stützstellen möglich ist. In der Praxis wird in der Regel großer Wert auf die Effizienz einer solchen Implementierung gelegt, da es ansonsten zu unakzeptablen Rechenzeiten kommt.

Kapitel 6

Numerische Experimente

Dieses Kapitel ist numerischen Experimenten gewidmet. Dabei sollen die Aussagen, die aus der Theorie der vorhergehenden Abschnitte gewonnen wurden, beobachtet werden. Dazu gehören beispielsweise Effizienz und Zuverlässigkeit der eingeführten Fehlerschätzer. Insbesondere werden wir damit also auch die Gültigkeit der Saturationsannahme

$$\|u - \bar{u}_\ell\| \leq q_S \|u - u_\ell\| \quad \text{mit einer } \ell\text{-unabhängigen Konstanten } q_S \in (0, 1) \quad (6.1)$$

beobachten.

Weiters werden uniforme und adaptive Verfahren einander gegenübergestellt. Es wird sich der adaptive Algorithmus durch eine bessere Konvergenzordnung auszeichnen.

Außerdem werden verschiedene Experimente zeigen, dass nicht anhand jedes Problems Verifizierung der Analysis der in Kapitel 3 entwickelten Fehlerschätzer geleistet werden kann. Möglicherweise beeinflussen nämlich auch unerwünschte Datenfehler das Verhalten der Schätzer.

Insgesamt werden wir drei numerische Beispiele betrachten. Dabei wird jeweils die Galerkin-Randelementmethode für die hypersinguläre Integralgleichung angewandt, wobei der Raum und auch die rechte Seite variieren. Darüber hinaus sei gesagt, dass wir in den folgenden Abschnitten exemplarisch ausgewählte Fehlerschätzer in Betracht ziehen und daher auf die Darstellung aller in Kapitel 3 eingeführten Fehlerschätzer, dieser sind es insgesamt 13 Stück, verzichten, vgl. Abschnitt 3.5.

6.1 Numerische Aspekte

In diesem Abschnitt sollen zunächst einige Aspekte dargebracht werden, die für numerische Berechnungen relevant sind. Es wird dabei auf die Implementierung der Systemmatrix $\mathbf{A} := \langle Wb_i, b_j \rangle$ eingegangen, wobei $b_i, b_j \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell)$ gilt. Zusätzlich wird eine Erklärung zur Berechnung des Galerkin-Fehlers $\|u - u_h\|$ bzw. $\|u - u_\ell\|$ gegeben. Die Berechnungen zur Implementierung der rechten Seite finden sich im gleichnamigen Kapitel wieder, da hierbei umfangreiche analytische Berechnungen durchgeführt werden, die den Rahmen dieses Kapitels sprengen würden.

6.1.1 Berechnung der Systemmatrix

Einleitend wollen wir uns mit der Berechnung der Systemmatrix $\mathbf{A} := \langle Wb_i, b_j \rangle$ befassen, wobei $b_i, b_j \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell)$. Dazu bedienen wir uns Nédélec's Formel

$$\langle Wu, v \rangle = \langle Vu', v' \rangle \quad \text{für alle } u, v \in \mathcal{H}. \quad (6.2)$$

Daher reduziert sich die Berechnung der Systemmatrix \mathbf{A} im Wesentlichen auf die Berechnung der zum Einfachschichtpotential \mathbf{V} zugehörigen Systemmatrix.

Eine Implementierung in Matlab stellt den Zusammenhang der beiden Operatoren dar.

```

N = size(elements,1);
C = size(coordinates,1);

h = zeros(N,1);
for j = 1:N
    h(j) = norm( [1 -1] * coordinates(elements(j,:),:) );
end

V = stimaV(elements,coordinates);
A = zeros(C,C);
flag = zeros(C,1);

for j = 1:N
    flag(elements(j,:)) = flag(elements(j,:)) + 1;
    for k = 1:N
        A(elements(j,:),elements(k,:)) = A(elements(j,:),elements(k,:))
            + V(j,k) /h(j) /h(k) * [1 -1 ; -1 1];
    end
end
end

```

Um die Berechnung der Systemmatrix \mathbf{A} zu beschleunigen, wurde der Sourcecode sowohl für das Einfachschichtpotential als auch für den hypersingulären Integraloperator nach C ausgelagert. Betrachtet man die zu berechnenden Einträge der Matrix \mathbf{A} genauer, so ergibt sich aufgrund von (6.2) zunächst die Aufgabe, das Doppelintegral

$$\frac{-1}{2\pi} \frac{1}{|T_j|} \frac{1}{|T_i|} \int_{T_j} \int_{T_i} \log|x-y| ds_x ds_y \quad (6.3)$$

für zwei Intervalle T_i, T_j zu berechnen.

Ist die Länge des Intervalls T_i im Vergleich zur Länge des Intervalls T_j sehr klein, so kann es bei der inneren Integration zu Auslöschungsfehler kommen, die dann durch die äußere Integration zusätzlich noch aufgeblasen werden. Um höhere Stabilität zu gewährleisten, stellt man zuerst sicher, dass die äußere Integration über das kleinere der beiden Intervalle verläuft. Nun ist man an einer möglichst effizienten Berechnung des Doppelintegrals interessiert. Einerseits kann dies vollanalytisch geschehen. Dabei wird der Wert des Integrals bestimmt, indem man mit Hilfe zahlreicher Fallunterscheidungen bezüglich der Lage der beiden Intervalle T_i und T_j zueinander das Integral in einen glatten und einen schwachsingulären Term aufspaltet. Andererseits ist es aber auch möglich unter gewissen Bedingungen das äußere Integral mittels einer 16-Punkt Gauss-Quadratur zu berechnen. Es kann gezeigt werden, dass die semianalytische Berechnung der Systemmatrix auf einen Fehler führt, der mit der Ordnung der Quadratur exponentiell fällt. Dies nimmt man gerne in Kauf, da hierbei die Anzahl der Elemente bei der die Systemmatrix explodiert deutlich höher liegt als bei vollanalytischer Berechnung.

Die Zulässigkeit für die Berechnung des äußeren Integrals mittels einer 16-Punkt Gauss-Quadratur wird aufgrund folgender Ungleichung bestimmt

$$\text{dist}(T_i, T_j) \geq \eta \max(h_j). \quad (6.4)$$

Hierbei bezeichnet h_j den Durchmesser des kleineren Intervalls und $\eta \in \mathbb{R}_+$ einen Parameter, der die Distanz der Intervalle T_i, T_j in Relation zum Durchmesser h_j setzt.

Es sei bemerkt, dass die Bestimmung von

$$\text{dist}(T_i, T_j) = \min_{\substack{x \in T_i, \\ y \in T_j}} \|x - y\|_2$$

nicht trivial ist. Es war nötig eine geeignete Funktion zu implementieren. Hierbei wird für jeden Endpunkt, der Abstand zum jeweils anderen Intervall bestimmt und anschließend die kleinste Distanz

zurückgegeben.

6.1.2 Sonstige Bemerkungen

Um den Verfahrensfehler $\|u - u_h\|$ darstellen zu können, bedient man sich der Galerkin-Orthogonalität und verwendet

$$\|u - u_h\| = (\|u\|^2 - \|u_h\|^2)^{1/2}. \quad (6.5)$$

Hierbei wird für den Fall, dass die exakte Lösung u nicht bekannt ist, die nun unbekannte Energienorm $\|u\|$ geschätzt. Dazu berechnet man eine Folge von Approximationen $\|u_h\|$ auf uniform verfeinerten Gittern und extrapoliert anschließend unter Verwendung der Aitkinschen Δ^2 -Methode einen Wert. In numerischen Experimenten erweist sich dieser als hinreichend exakt.

Die Berechnung der Energienorm $\|u_h\|$ einer bekannten Galerkin-Approximation erfolgt unter Beachtung von

$$\|u_h\|^2 = \langle u_h, u_h \rangle = \langle W u_h, u_h \rangle = \mathbf{A} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x},$$

wobei \mathbf{A} die Galerkin-Matrix und \mathbf{x} den zu u_h gehörigen Koeffizientenvektor bezeichnet.

Zur Netzverfeinerung wird das Dörfler-Marking verwendet, wobei eine symmetrische Markierung zusätzlich gefordert wird. Folgender MATLAB-Code zeigt die numerische Umsetzung dieser Markierungsstrategie mit gegebenem Parameter $\theta \in (0, 1)$ und Markierungsindikator $tmuH$:

```
if theta > 0
[sorttmuH,book] = sort(tmuH,'descend');
all = theta*sum(tmuH);
summarked = 0;
counter = 0;

while ((all > summarked))
    counter = counter+1;
    summarked = summarked + sorttmuH(counter);
end
while (counter<N && (abs(sorttmuH(counter) - sorttmuH(counter+1))<=1e-8))
    counter = counter+1;
end
marked = book(1:counter);
else
    marked = 1:N;
end
```

Der Parameter θ wird in unseren Experimenten auf $\theta = 0.25$ gesetzt, falls nicht explizit anders erwähnt.

In der graphischen Darstellung sowohl verschiedener Galerkin-Fehler $\|u - u_h\|$ und $\|u - u_{h/2}\|$ als auch aller Fehlerschätzer, wird über die Anzahl N der Elemente aufgetragen. Wir nehmen eine logarithmische Skalierung beider Achsen vor. Dabei geht algebraisches Konvergenzverhalten $\mathcal{O}(N^{-\alpha})$ für $\alpha > 0$ in eine Gerade mit Steigung $-\alpha$ über. Man beachte, dass für die Randelementmethode in $2D$ ein Konvergenzverhalten $\mathcal{O}(h^\alpha)$ mit Bezug auf eine uniforme Netzweite $h > 0$ gerade $\mathcal{O}(N^{-\alpha})$ entspricht. Für eine glatte exakte Lösung $u \in H^2 \cap \mathcal{H}$ und uniforme Netzverfeinerung sagt die a priori Analysis für das Galerkin-Verfahren mit $u_h \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_h)$ ein optimales Konvergenzverhalten $\|u - u_h\| = \mathcal{O}(h^{3/2})$ voraus. In den folgenden Experimenten wird diese optimale Konvergenzrate $\alpha = 3/2$ aber lediglich

in Abschnitt 6.3 beobachtet. In den beiden anderen Fällen führen Singularitäten der exakten Lösung bei uniformer Netzverfeinerung auf suboptimale Konvergenzrate $\|u - u_h\| = \mathcal{O}(h^\alpha)$ mit $\alpha < 3/2$. Die vorgeschlagene adaptive Netzverfeinerungsstrategie hingegen führt auf $\|u - u_h\| = \mathcal{O}(N^{-3/2})$, was mit Rücksicht auf die Elementanzahl optimal ist.

Alle Experimente wurden unter Verwendung von MATLAB 7.6.0 (R2008a) durchgeführt.

6.2 Schlitz-Problem

Da diese Arbeit hauptsächlich die a posteriori Schätzung des Verfahrensfehlers thematisiert, wollen wir zunächst ein numerisches Experiment durchführen, welches sicherstellt, dass wir Datenfehler durch Quadraturverfahren oder Abweichungen aufgrund der Interpolation der rechten Seite ausschließen können.

Wir betrachten das Problem

$$Wu = 1 \quad \text{auf} \quad \Gamma = (-1, 1) \times \{0\}. \quad (6.6)$$

Die exakte Lösung dieses Problems ist bekannt und gegeben durch

$$u(x, 0) = 2\sqrt{1 - x^2} \quad \text{für alle} \quad -1 < x < 1.$$

Insbesondere ergibt sich für die Energienorm der exakten Lösung $\|u\|^2 = \pi$. Abbildung 6.1 zeigt die numerisch berechnete Lösung u_ℓ in strichlierter, blauer Darstellung sowie die exakte Lösung u des Problems (6.6) als roten Graphen, der durchgehend gezeichnet ist, auf verschiedenen Stufen der Verfeinerung. Hierbei wurde die exakte Lösung über der Bogenlänge aufgetragen, um einen Vergleich mit der diskreten Galerkin-Lösung zu erleichtern. Bogenlänge $s = 0$ entspricht dabei den linken Endpunkt $(-1, 0)$ des Schlitzes. In der Visualisierung beobachten wir, dass das Galerkin-Verfahren zu einer diskreten Lösung führt, die die exakte Lösung des Schlitz-Problems (6.6) hinreichend gut zu approximieren scheint.

Das Netz des Schlitz-Problems (6.6) besteht zu Beginn aus vier Intervallen mit einer uniformen Netzweite $h = 0.5$ (vgl. Abbildung 6.2).

Abbildung 6.3 zeigt die Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$ sowie die Fehlerschätzer $\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell$ für sowohl uniform verfeinerte Netze als auch $\tilde{\mu}_\ell$ -basierte Netzverfeinerung. Wir beobachten für den Fall uniform verfeinerter Netze eine Konvergenzordnung von $\|u - u_\ell\| = \mathcal{O}(h_\ell^{1/2}) = \mathcal{O}(N_\ell^{-1/2})$. Aus der zugehörigen Analysis ist jedoch bekannt, dass dies suboptimal ist. Im Gegensatz dazu stellen wir bei adaptiver Verfeinerungsstrategie eine Konvergenzordnung $\|u - u_\ell\| = \mathcal{O}(N_\ell^{-3/2})$ fest. Dies bedeutet, dass $\tilde{\mu}_\ell$ -basierte Netzverfeinerung ein bestmögliches Resultat führt für das Problem (6.6) am Schlitz.

Abbildung 6.4 zeigt den Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$ für verschiedene Arten der Berechnung der Galerkin-Matrix \mathbf{A} . Dabei wird \mathbf{A} zum einen analytisch berechnet mit Hilfe von Stammfunktionen. Man beachte, dass diese numerische Berechnung von $\int_a^b f dx = F(b) - F(a)$ mit Hilfe der (stetigen) Stammfunktion F von f für $a \approx b$ auf Auslöschungseffekte führt. Dies lässt sich auch für $N_\ell = 800$ adaptiv erzeugte Elemente beobachten in dem Sinn, dass der Galerkin-Fehler nicht mehr monoton fällt, sondern Oszillationen auftreten. Zur Berechnung der Galerkin-Matrix müssen gewisse Doppelintegrale $V_{jk} = \int_{T_j} \int_{T_k} \log|x - y| ds_y ds_x$ analytisch berechnet werden. Im zweiten Fall vertauschen wir für $\text{diam}(T_j) < \text{diam}(T_k)$ und $T_j \cap T_k = \emptyset$ mittels Fubini die Integrationsreihenfolge. Dies hat den Vorteil, dass Auslöschungseffekte aus der Berechnung des inneren Integrals nicht weiter verstärkt werden. Diese Variante erweist sich bis $N_\ell = 1000$ adaptiv erzeugte Elemente als stabiles Vorgehen, da der Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$ wieder anfängt zu oszillieren. Schließlich berechnen wir gewisse Einträge

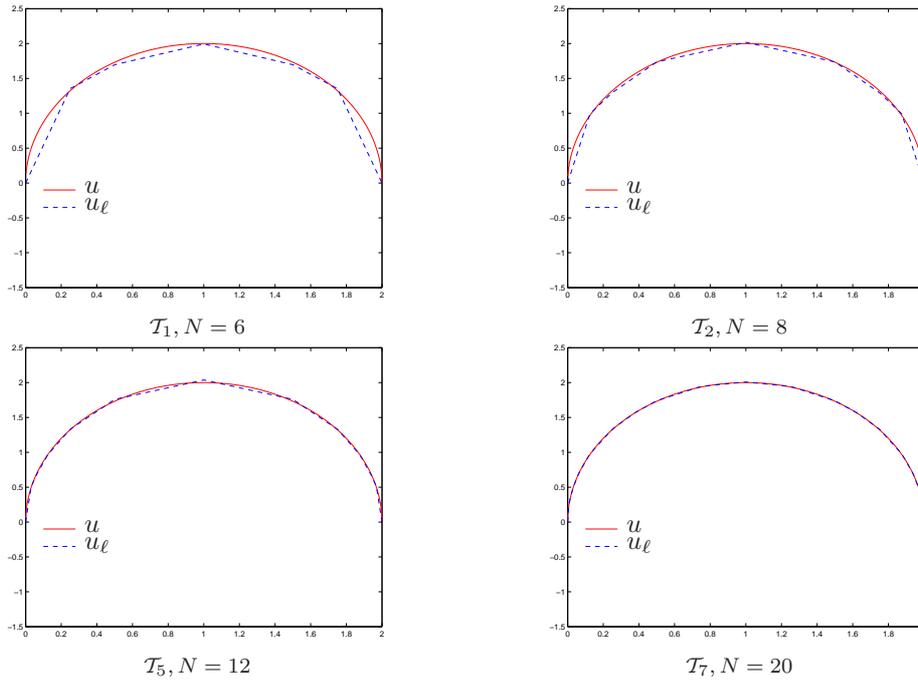


Abbildung 6.1: Exakte und diskrete Lösung des Problems (6.6) am Schlitz nach 1, 3, 5 bzw. 7 Verfeinerungsschritten. Zur Berechnung der Galerkin-Lösung wurde eine $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptive Strategie zur Verfeinerung des Netzes eingesetzt.

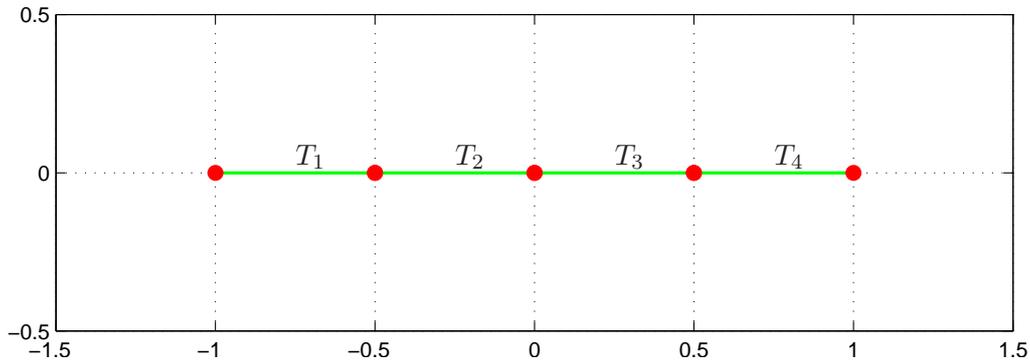


Abbildung 6.2: Startnetz für das Schlitz-Problem (6.6)

V_{jk} zusätzlich zur Vertauschung der Integrationsreihenfolge semianalytisch mittels Gauss-Quadratur für das äußere Integral. Da der stetige Integrand für kleines T_j von einem Vorzeichen ist und die Gauss-Gewichte positiv sind, vermindert dieses Vorgehen Auslöschung. Es lässt sich zeigen, dass der Quadraturfehler für $\text{diam}(T_j) < 3\text{dist}(T_j, T_k)$ exponentiell mit der Quadraturordnung p fällt. Wir verwenden eine 16-Punkt Formel, und beobachten empirisch die Stabilität dieser Methode über die beiden anderen Verfahren hinaus, d.h. für $N_\ell = 1150$ wird $\|u - u_\ell\|$ noch stabil berechnet. Im Folgenden werden die auftretenden Galerkin-Matrizen durchweg auf diese Weise berechnet.

Die Abbildungen 6.4 und 6.5 basieren auf einer Indikator-gesteuerten adaptiven Netzverfeinerung. Der lokale $h - h/2$ -basierte Fehlerschätzer $\tilde{\mu}$ wurde als Verfeinerungsgröße eingesetzt. Betrachtet man die in Abbildung 6.5 abgebildeten Graphen, so erkennt man, dass diese relativ parallel zueinander verlaufen. Also beobachten wir, wie aus der zugehörigen Analysis erwartet, Effizienz und Zuverlässigkeit. Außerdem scheint die Verfeinerung des Netzes optimal zu sein, da bestmögliche Konvergenzordnung $\mathcal{O}(N_\ell^{-3/2})$ vorliegt.

Weiters zeigen die Fehlerschätzer $\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell$ sowie τ_ℓ , dass sie den Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$ exakt

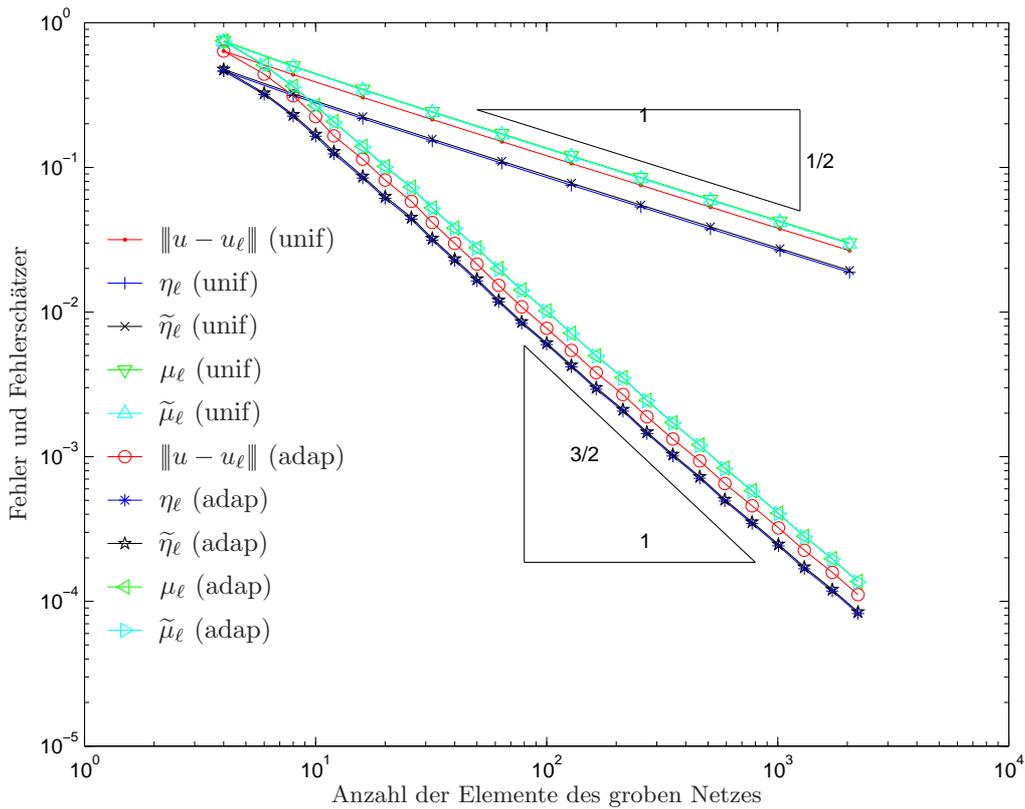


Abbildung 6.3: Fehler der Galerkin-Approximationen $\|u - u_\ell\|$ und Fehlerschätzer $\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell$ für das Problem (6.6) am Schlitz unter Verwendung uniformer und $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptiver Netzverfeinerungsstrategie mit $\theta = 0.25$

schätzen.

Tabelle 6.1 führt die exakten Werte für den Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$ und die Fehlerschätzer $\tau_\ell, \eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell$ sowie $\tilde{\mu}_\ell$ für eine $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptive Netzfolge am Beispiel des Schlitz-Problems (6.6) an. Es bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente einer Partitionierung \mathcal{T}_ℓ .

Es sei bemerkt, dass jede adaptive Strategie zu optimaler Konvergenz führt. Insbesondere steht diesbezüglich die Wahl der Verfeinerungsindikatoren in adaptiven Algorithmen frei. Um dies auch anhand eines numerischen Experiments zu zeigen, vergleichen wir zwei lokale a posteriori Fehlerschätzer als Indikatoren zur Netzverfeinerung. Dabei wählen wir exemplarisch den $h - h/2$ -Fehlerschätzer $\tilde{\mu}_\ell$ und den $h - h/2$ -basierten Zwei-Level-Schätzer τ_ℓ . Hierzu betrachte man die Abbildungen 6.5 und 6.6, in denen die Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|, \|u - \hat{u}_\ell\|$ sowie die a posteriori Fehlerschätzer $\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell$ sowie τ_ℓ dargestellt sind. Beim Vergleich dieser Abbildungen zeigt sich identes Verhalten aller abgebildeten Fehlerschätzer, obwohl die zugehörigen Berechnungen tatsächlich auf der Wahl von verschiedenen Verfeinerungsindikatoren basieren. Damit bestätigt sich die Annahme, dass man mit einem adaptiven Verfahren optimale Konvergenzordnung erreicht unabhängig von der Wahl des Indikators für die Netzverfeinerung.

In der Theorie haben wir festgestellt, dass die in Kapitel 3 eingeführten Fehlerschätzer effizient und zuverlässig sind. Es sei erinnert an die Zuverlässigkeitsabschätzung

$$\|u - u_\ell\| \leq C_{\text{rel}} \rho_\ell.$$

Dabei bezeichnet ρ_ℓ einen beliebigen zuverlässigen a posteriori Fehlerschätzer und für die Konstante

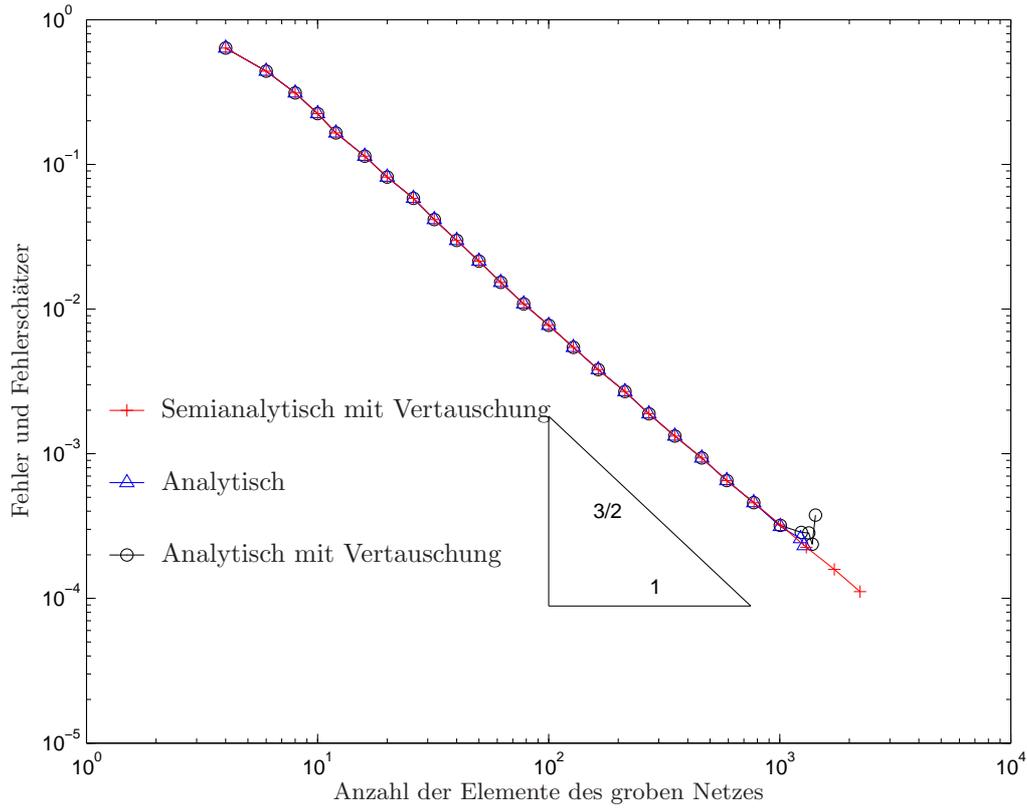


Abbildung 6.4: Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$ des Schlitz-Problems (6.6) für verschiedene Berechnungsmethoden der Systemmatrix \mathbf{A} unter Verwendung adaptiver Netzverfeinerung mit dem lokalen Fehlerschätzer $\tilde{\mu}_\ell$ als Indikator.

C_{rel} gilt

$$C_{\text{rel}} = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}},$$

wobei q die Saturationskonstante auf (6.1) bezeichnet.

In Tabelle 6.3 sind die experimentellen Größen

$$q = \frac{\|u - \hat{u}_\ell\|}{\|u - u_\ell\|}$$

für uniform und $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptiv verfeinerte Netzfolgen festgehalten, wobei beide Galerkin-Fehler mittels (6.5) berechnet wurden. Es ist ersichtlich, dass q nach oben durch 0.707 beschränkt bleibt, sodass die Saturationsannahme experimentell bestätigt wird.

Abbildung 6.7 stellt die Werte aus Tabelle 6.3 graphisch dar. Auch in der Visualisierung zeigt sich die Gültigkeit der Saturationsannahme (6.1). Nach dieser Beobachtung ist die Zuverlässigkeit für alle a posteriori Fehlerschätzer sichergestellt, da die Zuverlässigkeit eines Fehlerschätzers äquivalent zur entsprechenden Saturationsannahme (6.1) ist.

Abbildung 6.8 stellt den Level ℓ der Verfeinerung bei einer $\tilde{\mu}_\ell$ -basierten Netzverfeinerungsstrategie am Beispiel des Schlitz-Problems (6.6) für jedes Element des Netzes dar. Aus der Grafik geht hervor, dass bei einem $\tilde{\mu}_\ell$ -gesteuerten adaptiven Algorithmus die Verfeinerung der Triangulierung zu den Singularitäten hin zunimmt. Die Singularitäten des Problems (6.6) liegen an den beiden Endpunkten des Schlitzes. Dies bestätigt, dass sich ein adaptiver Algorithmus dem Problem anpasst und zwar in

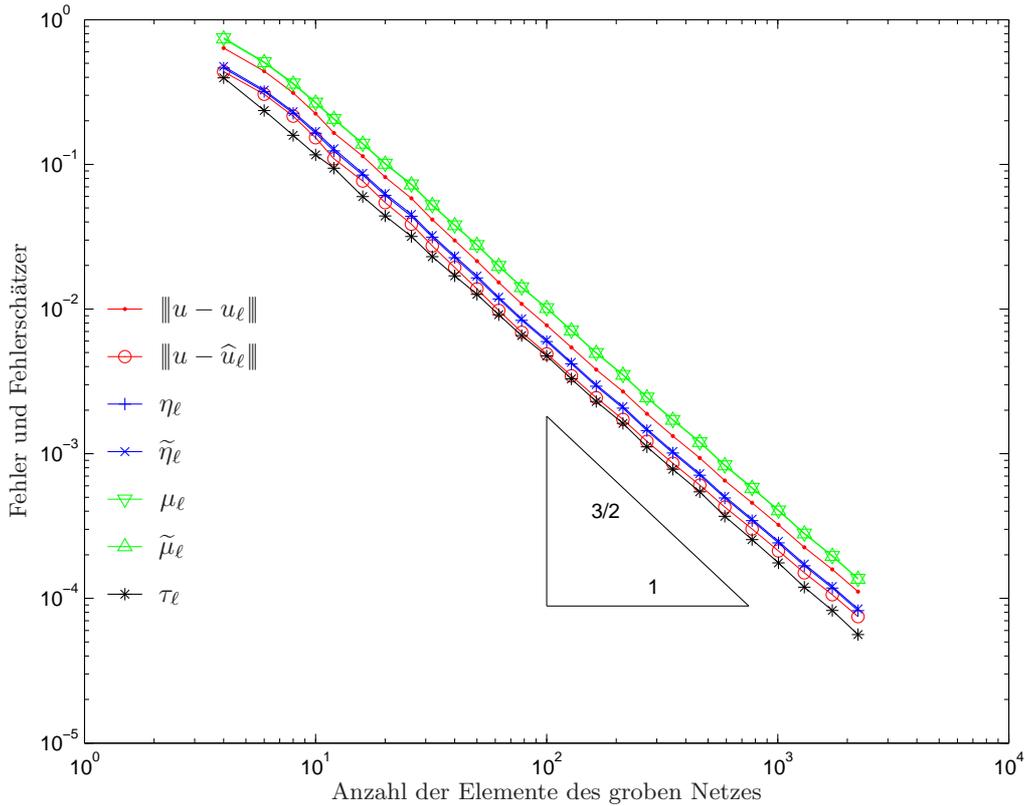


Abbildung 6.5: Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$ und $\|u - \hat{u}_\ell\|$ des Schlitz-Problems (6.6) und Fehlerschätzer $\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell$ sowie der Zwei-Level-Schätzer τ_ℓ unter Verwendung adaptiver Netzverfeinerung mit dem lokalen Fehlerschätzer $\tilde{\mu}_\ell$ als Indikator und $\theta = 0.25$. Unter Erfüllung der Zulässigkeitsbedingung (6.4) wurden bei der Kalkulation der Systemmatrix \mathbf{A} auch semianalytische Berechnungen erlaubt.

dem Sinn, dass er erkennt wo zusätzliche Verfeinerungen des Netzes nötig sind, um Singularitäten aufzulösen und damit den Verfahrensfehler $\|u - u_\ell\|$ hinreichend klein zu halten. Dadurch zeichnet sich ein adaptiver Algorithmus gegenüber einem Algorithmus, der auf uniformer Netzverfeinerung basiert, aus.

Tabelle 6.4 legt die exakten Werte der minimal und maximal auftretenden Schrittweiten $h_{\ell,\min}$ und $h_{\ell,\max}$ vor. Weiters bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente des Netzes \mathcal{T}_ℓ . Aus Tabelle 6.4 ist ersichtlich, dass es durchaus vorkommen kann, dass gewisse Elemente über mehrere Verfeinerungsschritte hinweg nicht markiert werden. Zu beachten ist, dass mit steigender Anzahl der Elemente N_ℓ auch der Quotient $h_{\ell,\min}/h_{\ell,\max}$ deutlich fällt. Diese Beobachtung stimmt mit Abbildung 6.8 überein, worin zu erkennen ist, dass ein Element in Nähe der Singularitäten auf einem deutlich höheren Verfeinerungslevel steht, als ein Element, das davon entfernter ist.

Abbildung 6.9 stellt die zu den einzelnen Fehlerschätzern zugehörigen Effizienzkonstanten C_{eff} dar, wobei $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptive Netzverfeinerung mit Parameter $\theta = 0.25$ zum Lösen des Problems (6.6) am Schlitz zum Einsatz kam. Als Effizienzkonstante für einen Fehlerschätzer ρ_ℓ betrachtet wird das Verhältnis

$$C_{\text{eff}} = \rho_\ell / \|u - u_\ell\|.$$

Die dargestellten Intervalle geben die Größenordnung der Effizienzkonstanten C_{eff} wieder. Die rote Markierung an den einzelnen Intervallen stellt den Wert der Effizienzkonstanten im letzten Schritt der adaptiven Rechnung dar. Auffällig dabei ist, dass diese nicht immer am rechten Intervallende auftritt, wie dies beispielsweise beim Zwei-Level-Schätzer der Fall ist.

In Tabelle 6.5 sind die genauen Werte, die in Abbildung 6.9 veranschaulicht werden, tabelliert.

N_ℓ	$\ u - u_\ell\ $	τ_ℓ	η_ℓ	$\tilde{\eta}_\ell$	μ_ℓ	$\tilde{\mu}_\ell$
4	6.371×10^{-1}	3.970×10^{-1}	4.633×10^{-1}	4.757×10^{-1}	7.498×10^{-1}	7.381×10^{-1}
6	4.416×10^{-1}	2.357×10^{-1}	3.189×10^{-1}	3.260×10^{-1}	5.108×10^{-1}	5.050×10^{-1}
8	3.116×10^{-1}	1.590×10^{-1}	2.253×10^{-1}	2.311×10^{-1}	3.643×10^{-1}	3.597×10^{-1}
10	2.242×10^{-1}	1.165×10^{-1}	1.641×10^{-1}	1.689×10^{-1}	2.687×10^{-1}	2.656×10^{-1}
12	1.651×10^{-1}	9.399×10^{-2}	1.238×10^{-1}	1.283×10^{-1}	2.072×10^{-1}	2.049×10^{-1}
16	1.140×10^{-1}	5.992×10^{-2}	8.432×10^{-2}	8.680×10^{-2}	1.395×10^{-1}	1.380×10^{-1}
20	8.177×10^{-2}	4.403×10^{-2}	6.103×10^{-2}	6.281×10^{-2}	1.016×10^{-1}	1.005×10^{-1}
26	5.834×10^{-2}	3.170×10^{-2}	4.377×10^{-2}	4.511×10^{-2}	7.306×10^{-2}	7.226×10^{-2}
32	4.161×10^{-2}	2.301×10^{-2}	3.136×10^{-2}	3.225×10^{-2}	5.255×10^{-2}	5.203×10^{-2}
40	2.980×10^{-2}	1.694×10^{-2}	2.262×10^{-2}	2.325×10^{-2}	3.810×10^{-2}	3.773×10^{-2}
50	2.145×10^{-2}	1.263×10^{-2}	1.643×10^{-2}	1.691×10^{-2}	2.785×10^{-2}	2.759×10^{-2}
62	1.528×10^{-2}	9.133×10^{-3}	1.174×10^{-2}	1.206×10^{-2}	1.996×10^{-2}	1.978×10^{-2}
78	1.084×10^{-2}	6.554×10^{-3}	8.346×10^{-3}	8.559×10^{-3}	1.422×10^{-2}	1.410×10^{-2}
100	7.713×10^{-3}	4.733×10^{-3}	5.959×10^{-3}	6.110×10^{-3}	1.018×10^{-2}	1.010×10^{-2}
128	5.426×10^{-3}	3.292×10^{-3}	4.183×10^{-3}	4.286×10^{-3}	7.136×10^{-3}	7.075×10^{-3}
164	3.811×10^{-3}	2.295×10^{-3}	2.928×10^{-3}	2.998×10^{-3}	4.994×10^{-3}	4.951×10^{-3}
214	2.691×10^{-3}	1.619×10^{-3}	2.066×10^{-3}	2.115×10^{-3}	3.524×10^{-3}	3.495×10^{-3}
272	1.890×10^{-3}	1.116×10^{-3}	1.446×10^{-3}	1.480×10^{-3}	2.460×10^{-3}	2.440×10^{-3}
352	1.326×10^{-3}	7.797×10^{-4}	1.011×10^{-3}	1.036×10^{-3}	1.721×10^{-3}	1.705×10^{-3}
460	9.338×10^{-4}	5.441×10^{-4}	7.103×10^{-4}	7.282×10^{-4}	1.208×10^{-3}	1.197×10^{-3}
590	6.525×10^{-4}	3.694×10^{-4}	4.933×10^{-4}	5.057×10^{-4}	8.355×10^{-4}	8.275×10^{-4}
774	4.581×10^{-4}	2.550×10^{-4}	3.450×10^{-4}	3.536×10^{-4}	5.829×10^{-4}	5.773×10^{-4}
1008	3.220×10^{-4}	1.759×10^{-4}	2.417×10^{-4}	2.478×10^{-4}	4.073×10^{-4}	4.033×10^{-4}

Tabelle 6.1: Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$ und Fehlerschätzer τ_ℓ , η_ℓ , $\tilde{\eta}_\ell$, μ_ℓ sowie $\tilde{\mu}_\ell$ für eine $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptive Netzfolge am Beispiel des Schlitz-Problems (6.6). Es bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente einer Partitionierung \mathcal{T}_ℓ .

Aus Kapitel 3 ist bekannt, dass aus η_ℓ bzw. μ_ℓ unter Anwendung des nodalen Interpolanten I_ℓ weitere Fehlerschätzer $\tilde{\eta}_\ell$ bzw. $\tilde{\mu}_\ell$ gewonnen werden. Alle dieser Fehlerschätzer sind zwar äquivalent, jedoch ist nicht bekannt, inwiefern die Verwendung der Galerkin-Projektion bzw. des nodalen Interpolanten Einfluss auf die Größenordnung der Fehlerschätzer nimmt. Diese Frage ist von Interesse, da $\tilde{\eta}_\ell$ bzw. $\tilde{\mu}_\ell$ leichter zu berechnen ist. Tabelle 6.6 führt die Relationen

$$\tilde{\eta}_\ell/\eta_\ell \quad \text{und} \quad \mu_\ell/\tilde{\mu}_\ell$$

für sowohl uniform als auch $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptiv verfeinerte Netzfolgen an. Der Vergleich von uniformen und adaptiven Fall zeigt im Wesentlichen, dass für die Fehlerschätzer η_ℓ und $\tilde{\eta}_\ell$ Abweichungen im Rahmen von 3% – 3.5% voneinander bestehen. Für die Fehlerschätzer μ_ℓ und $\tilde{\mu}_\ell$ zeigt sich eine noch geringere Abweichung von in etwa 1% – 1.5%. Dies motiviert die Fehlerschätzer $\tilde{\eta}_\ell$ und $\tilde{\mu}_\ell$ an Stelle η_ℓ und μ_ℓ zur Schätzung des Galerkin-Fehlers $\|u - u_\ell\|$ in einer Implementierung heranzuziehen.

Abschließend kann man festhalten, dass dieses Beispiel die Analysis der Fehlerschätzer aus Kapitel 3 vollständig wiedergibt. Darüber hinaus wurden uniforme Berechnungen adaptiven gegenübergestellt, wodurch die Vorzüge der letztgenannten Methode deutlich wurden. Abbildungen 6.4 hat auch auf die Problematik der Stabilität bei zunehmender Anzahl der Elemente hingewiesen. Dies motiviert unter anderem eine semianalytische Berechnung der Systemmatrix.

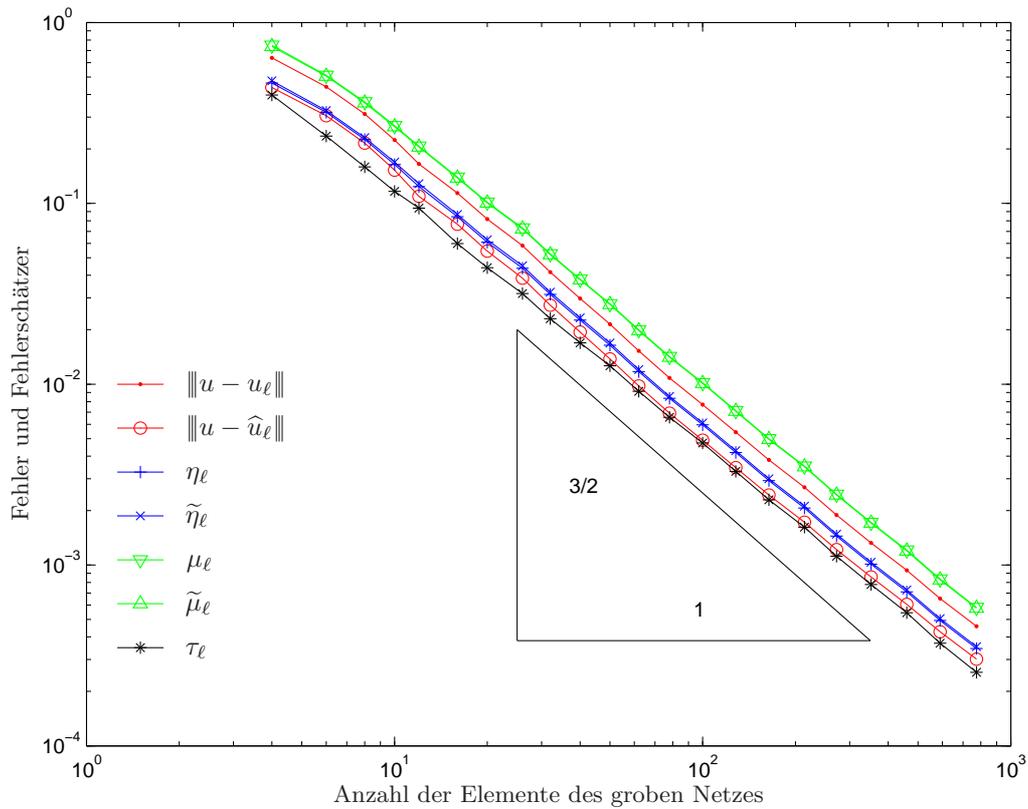


Abbildung 6.6: Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$ und $\|u - \hat{u}_\ell\|$ des Schlitz-Problems (6.6) und Fehlerschätzer $\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell$ sowie der Zwei-Level-Schätzer τ_ℓ unter Verwendung adaptiver Netzverfeinerung mit dem lokalen Fehlerschätzer τ_ℓ als Indikator und $\theta = 0.25$. Unter Erfüllung der Zulässigkeitsbedingung (6.4) wurden bei der Kalkulation der Systemmatrix \mathbf{A} auch semianalytische Berechnungen erlaubt.

N_ℓ	$\ u - u_\ell\ $	τ_ℓ	η_ℓ	$\tilde{\eta}_\ell$	μ_ℓ	$\tilde{\mu}_\ell$
4	6.371×10^{-1}	3.970×10^{-1}	4.633×10^{-1}	4.757×10^{-1}	7.498×10^{-1}	7.381×10^{-1}
6	4.416×10^{-1}	2.357×10^{-1}	3.189×10^{-1}	3.260×10^{-1}	5.108×10^{-1}	5.050×10^{-1}
8	3.116×10^{-1}	1.590×10^{-1}	2.253×10^{-1}	2.311×10^{-1}	3.643×10^{-1}	3.597×10^{-1}
10	2.242×10^{-1}	1.165×10^{-1}	1.641×10^{-1}	1.689×10^{-1}	2.687×10^{-1}	2.656×10^{-1}
12	1.651×10^{-1}	9.399×10^{-2}	1.238×10^{-1}	1.283×10^{-1}	2.072×10^{-1}	2.049×10^{-1}
16	1.140×10^{-1}	5.992×10^{-2}	8.432×10^{-2}	8.680×10^{-2}	1.395×10^{-1}	1.380×10^{-1}
20	8.177×10^{-2}	4.403×10^{-2}	6.103×10^{-2}	6.281×10^{-2}	1.016×10^{-1}	1.005×10^{-1}
26	5.834×10^{-2}	3.170×10^{-2}	4.377×10^{-2}	4.511×10^{-2}	7.306×10^{-2}	7.226×10^{-2}
32	4.161×10^{-2}	2.301×10^{-2}	3.136×10^{-2}	3.225×10^{-2}	5.255×10^{-2}	5.203×10^{-2}
40	2.980×10^{-2}	1.694×10^{-2}	2.262×10^{-2}	2.325×10^{-2}	3.810×10^{-2}	3.773×10^{-2}
50	2.145×10^{-2}	1.263×10^{-2}	1.643×10^{-2}	1.691×10^{-2}	2.785×10^{-2}	2.759×10^{-2}
62	1.528×10^{-2}	9.133×10^{-3}	1.174×10^{-2}	1.206×10^{-2}	1.996×10^{-2}	1.978×10^{-2}
78	1.084×10^{-2}	6.554×10^{-3}	8.346×10^{-3}	8.559×10^{-3}	1.422×10^{-2}	1.410×10^{-2}
100	7.713×10^{-3}	4.733×10^{-3}	5.959×10^{-3}	6.110×10^{-3}	1.018×10^{-2}	1.010×10^{-2}
128	5.426×10^{-3}	3.292×10^{-3}	4.183×10^{-3}	4.286×10^{-3}	7.136×10^{-3}	7.075×10^{-3}
164	3.811×10^{-3}	2.295×10^{-3}	2.928×10^{-3}	2.998×10^{-3}	4.994×10^{-3}	4.951×10^{-3}
214	2.691×10^{-3}	1.619×10^{-3}	2.066×10^{-3}	2.115×10^{-3}	3.524×10^{-3}	3.495×10^{-3}
272	1.890×10^{-3}	1.116×10^{-3}	1.446×10^{-3}	1.480×10^{-3}	2.460×10^{-3}	2.440×10^{-3}
352	1.326×10^{-3}	7.797×10^{-4}	1.011×10^{-3}	1.036×10^{-3}	1.721×10^{-3}	1.705×10^{-3}
460	9.338×10^{-4}	5.441×10^{-4}	7.103×10^{-4}	7.282×10^{-4}	1.208×10^{-3}	1.197×10^{-3}
590	6.525×10^{-4}	3.694×10^{-4}	4.933×10^{-4}	5.057×10^{-4}	8.355×10^{-4}	8.275×10^{-4}
774	4.581×10^{-4}	2.550×10^{-4}	3.450×10^{-4}	3.536×10^{-4}	5.829×10^{-4}	5.773×10^{-4}

Tabelle 6.2: Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$, $\|u - \hat{u}_\ell\|$ und Fehlerschätzer τ_ℓ , η_ℓ , $\tilde{\eta}_\ell$, μ_ℓ sowie $\tilde{\mu}_\ell$ für eine τ_ℓ -adaptive Netzfolge am Beispiel des Schlitz-Problems (6.6). Es bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente einer Partitionierung \mathcal{T}_ℓ .

uniform		adaptiv	
N_ℓ	q	N_ℓ	q
4	6.864×10^{-1}	4	6.864×10^{-1}
8	6.969×10^{-1}	6	6.917×10^{-1}
16	7.022×10^{-1}	8	6.908×10^{-1}
32	7.047×10^{-1}	10	6.813×10^{-1}
64	7.059×10^{-1}	12	6.617×10^{-1}
128	7.065×10^{-1}	16	6.728×10^{-1}
256	7.068×10^{-1}	20	6.655×10^{-1}
512	7.070×10^{-1}	26	6.610×10^{-1}
1024	7.070×10^{-1}	32	6.571×10^{-1}
		40	6.511×10^{-1}
		50	6.428×10^{-1}
		62	6.397×10^{-1}
		78	6.378×10^{-1}
		100	6.349×10^{-1}
		128	6.371×10^{-1}
		164	6.399×10^{-1}
		214	6.406×10^{-1}
		272	6.436×10^{-1}
		352	6.473×10^{-1}
		460	6.491×10^{-1}
		590	6.545×10^{-1}
		774	6.579×10^{-1}
		1008	6.607×10^{-1}

Tabelle 6.3: Experimentelle Saturationskonstante $q = \frac{\|u - \hat{u}_\ell\|}{\|u - u_\ell\|}$ aus dem Schlitz-Problem (6.6) für uniforme und $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptive Netzverfeinerung. Es bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente in \mathcal{T}_ℓ .

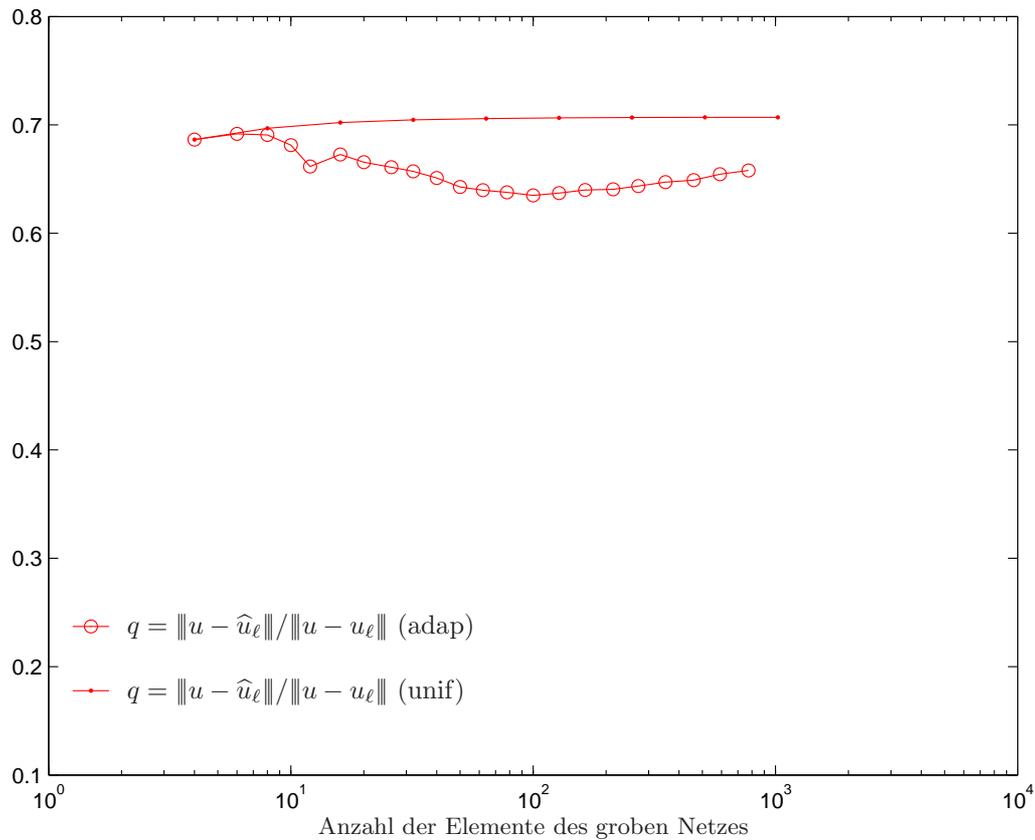


Abbildung 6.7: Experimentell beobachtete Saturationskonstante $q = \|u - \hat{u}_\ell\| / \|u - u_\ell\|$ für sowohl uniforme als auch $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptiver Netzverfeinerungsstrategie mit $\theta = 0.25$ am Beispiel des Problems (6.6) am Schlitz.

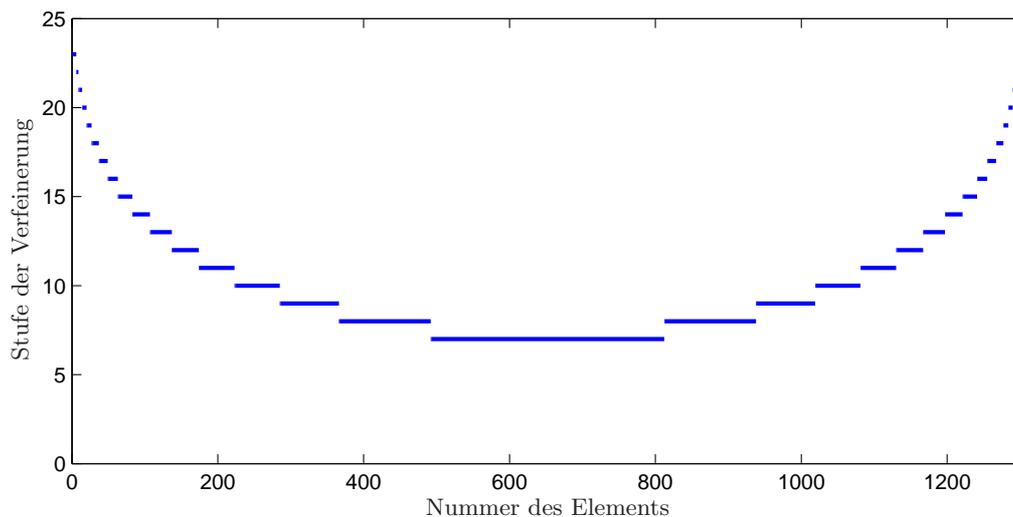


Abbildung 6.8: Darstellung der adaptiv verfeinerten Elemente für das Schlitz-Problem (6.6) unter Verwendung des lokalen a posteriori Fehlerschätzers $\tilde{\mu}_\ell$ als Verfeinerungsindikator. Die Elemente wurden von links nach rechts nummeriert. Für jedes Element wurde die Stufe der Verfeinerung eingetragen, wobei in jedem Schritt die Netzweite eines zur Verfeinerung markierten Elements halbiert wird.

N_ℓ	$h_{\ell,\min}$	$h_{\ell,\max}$
4	5.000×10^{-1}	5.000×10^{-1}
6	2.500×10^{-1}	5.000×10^{-1}
8	1.250×10^{-1}	5.000×10^{-1}
10	6.250×10^{-2}	5.000×10^{-1}
12	3.125×10^{-2}	5.000×10^{-1}
16	1.563×10^{-2}	2.500×10^{-1}
20	7.813×10^{-3}	2.500×10^{-1}
26	3.906×10^{-3}	2.500×10^{-1}
32	1.953×10^{-3}	1.250×10^{-1}
40	9.766×10^{-4}	1.250×10^{-1}
50	4.883×10^{-4}	1.250×10^{-1}
62	2.441×10^{-4}	6.250×10^{-2}
78	1.221×10^{-4}	6.250×10^{-2}
100	6.104×10^{-5}	6.250×10^{-2}
128	3.052×10^{-5}	3.125×10^{-2}
164	1.526×10^{-5}	3.125×10^{-2}
214	7.629×10^{-6}	3.125×10^{-2}
272	3.815×10^{-6}	1.563×10^{-2}
352	1.907×10^{-6}	1.563×10^{-2}
460	9.537×10^{-7}	1.563×10^{-2}
590	4.768×10^{-7}	7.813×10^{-3}
772	2.384×10^{-7}	7.813×10^{-3}
1008	1.192×10^{-7}	3.906×10^{-3}

Tabelle 6.4: Auflistung der minimalen und maximalen Schrittweiten für eine $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptiv verfeinerte Netzfolge am Beispiel des Problem (6.6) am Schlitz. Es bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente der jeweiligen Partitionierung \mathcal{T}_ℓ .

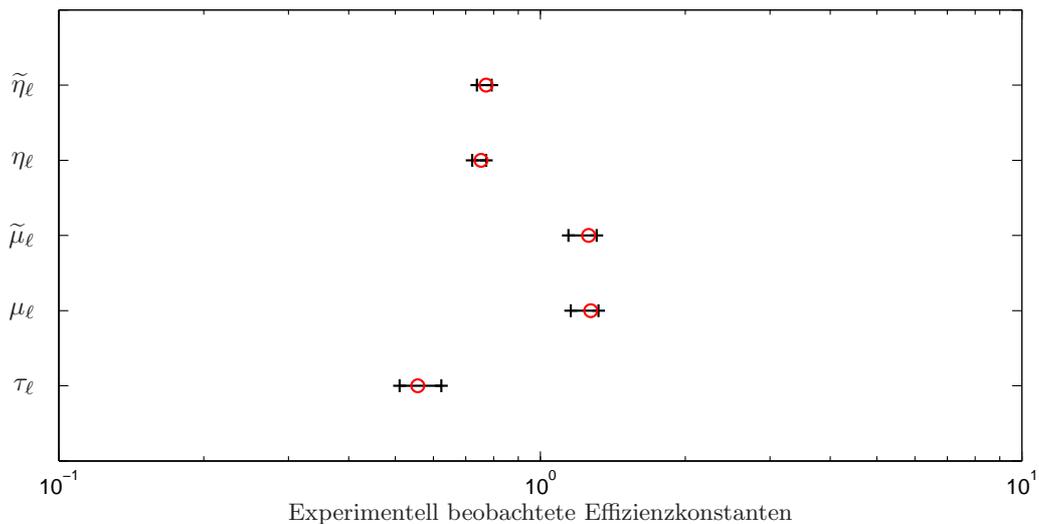


Abbildung 6.9: Experimentell beobachtete Effizienzkonstanten C_{eff} der Fehlerschätzer für das Schlitz-Problem (6.6) mit $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptiver Verfeinerung des Netzes.

N_ℓ	τ_ℓ	η_ℓ	$\tilde{\eta}_\ell$	μ_ℓ	$\tilde{\mu}_\ell$
4	6.232×10^{-1}	7.272×10^{-1}	7.466×10^{-1}	1.177	1.158
6	5.338×10^{-1}	7.222×10^{-1}	7.383×10^{-1}	1.157	1.144
8	5.101×10^{-1}	7.231×10^{-1}	7.416×10^{-1}	1.169	1.154
10	5.196×10^{-1}	7.320×10^{-1}	7.537×10^{-1}	1.199	1.185
12	5.693×10^{-1}	7.498×10^{-1}	7.774×10^{-1}	1.255	1.241
16	5.258×10^{-1}	7.398×10^{-1}	7.616×10^{-1}	1.224	1.211
20	5.385×10^{-1}	7.464×10^{-1}	7.681×10^{-1}	1.242	1.229
26	5.434×10^{-1}	7.504×10^{-1}	7.733×10^{-1}	1.252	1.239
32	5.530×10^{-1}	7.538×10^{-1}	7.750×10^{-1}	1.263	1.251
40	5.686×10^{-1}	7.590×10^{-1}	7.802×10^{-1}	1.278	1.266
50	5.886×10^{-1}	7.660×10^{-1}	7.880×10^{-1}	1.298	1.286
62	5.978×10^{-1}	7.686×10^{-1}	7.895×10^{-1}	1.306	1.295
78	6.048×10^{-1}	7.702×10^{-1}	7.899×10^{-1}	1.313	1.301
100	6.137×10^{-1}	7.726×10^{-1}	7.923×10^{-1}	1.320	1.309
128	6.067×10^{-1}	7.708×10^{-1}	7.899×10^{-1}	1.315	1.304
164	6.022×10^{-1}	7.684×10^{-1}	7.866×10^{-1}	1.310	1.299
214	6.016×10^{-1}	7.679×10^{-1}	7.859×10^{-1}	1.310	1.299
272	5.908×10^{-1}	7.654×10^{-1}	7.831×10^{-1}	1.302	1.291
352	5.881×10^{-1}	7.623×10^{-1}	7.815×10^{-1}	1.298	1.286
460	5.827×10^{-1}	7.607×10^{-1}	7.799×10^{-1}	1.294	1.282
590	5.662×10^{-1}	7.560×10^{-1}	7.750×10^{-1}	1.280	1.268
774	5.566×10^{-1}	7.531×10^{-1}	7.718×10^{-1}	1.272	1.260
1008	5.464×10^{-1}	7.506×10^{-1}	7.695×10^{-1}	1.265	1.252

Tabelle 6.5: Größenordnung der beobachteten Effizienzkonstanten C_{eff} unter Verwendung einer $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptiven Verfeinerungsstrategie zum Lösen des Schlitz-Problems (6.6). Es bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente der jeweiligen Partitionierung \mathcal{T}_ℓ . Unter den Rubriken τ_ℓ , η_ℓ , $\tilde{\eta}_\ell$, μ_ℓ und $\tilde{\mu}_\ell$ sind die Werte zugehörigen Effizienzkonstanten aufgelistet.

uniform			adaptiv		
N_ℓ	$\tilde{\eta}_\ell/\eta_\ell$	$\mu_\ell/\tilde{\mu}_\ell$	N_ℓ	$\tilde{\eta}_\ell/\eta_\ell$	$\mu_\ell/\tilde{\mu}_\ell$
4	1.027	1.016	4	1.027	1.016
8	1.030	1.014	6	1.022	1.011
16	1.031	1.015	8	1.026	1.013
32	1.031	1.015	10	1.030	1.012
64	1.031	1.015	12	1.037	1.011
128	1.031	1.015	16	1.029	1.011
256	1.031	1.015	20	1.029	1.011
512	1.031	1.015	26	1.031	1.011
1024	1.031	1.015	32	1.028	1.010
			40	1.028	1.010
			50	1.029	1.009
			62	1.027	1.009
			78	1.026	1.009
			100	1.025	1.009
			128	1.025	1.009
			164	1.024	1.009
			214	1.023	1.009
			272	1.023	1.008
			352	1.025	1.009
			460	1.025	1.009
			590	1.025	1.010
			772	1.025	1.010
			1008	1.025	1.010

Tabelle 6.6: Quotienten $\tilde{\eta}_\ell/\eta_\ell$ und $\mu_\ell/\tilde{\mu}_\ell$ im Schlitz-Problem (6.6) für uniforme und $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptive Netzverfeinerung. Es bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente in \mathcal{T}_ℓ .

6.3 Neumann-Problem mit glatter Lösung

In diesem Abschnitt wollen wir die Korrektheit der in Kapitel 3 dargebrachten Analysis anhand eines Neumann-Problems mit glatter Lösung überprüfen. Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{auf } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g & \text{auf } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Hierbei bezeichnet n den äußeren Einheitsnormalenvektor auf dem Rand Γ und damit $\partial u/\partial n$ die Normalenableitung. Dieses Problem ist äquivalent zur hypersingulären Integralgleichung mit rechter Seite $f = (K^* - 1/2)g$, wobei K^* , das adjungierte Doppelschichtpotential bezeichnet.

Die exakte Lösung des Problems (6.7) ist bekannt und gegeben durch Einschränkung der Funktion

$$u(x, y) = \sinh(2\pi x) \cos(2\pi y)$$

auf den Rand Γ .

Abbildung 6.10 zeigt die Triangulierung des Randes Γ zu Beginn der Berechnung der diskreten Lösung u_ℓ des Problems (6.7). Die Darstellung der Netzverfeinerung, die aufgrund eines adaptiven Algorithmus mit Verfeinerungsindikator $\tilde{\mu}_\ell$ entsteht, wird in Abbildung 6.11 dargebracht. Deutlich erkennbar ist die zunehmende Verfeinerung zu gewissen Ecken hin. Dies lässt sich durch geringere Glattheit in diesen Eckpunkten erklären. Darüber hinaus beobachten wir, dass die Partitionierung des Randes symmetrisch verläuft. Dies war zu erwarten, da im eingesetzten Verfeinerungsalgorithmus diese Symmetrie erzwungen wird, indem man zunächst die Menge der zu verfeinernden Elemente über das Dörfler-Marking bestimmt und anschließend noch jene Elemente zu dieser Menge hinzufügt, deren symmetrisches Gegenstück bereits enthalten ist. Hierbei stelle man sich das Randgebiet als parametrisiertes Geradenstück vor, indem die Elemente von links nach rechts nummeriert enthalten sind.

In Abbildung 6.12 ist jeweils eine diskrete Lösung u_ℓ eines bestimmten Verfeinerungslevels gegenüber der exakten Lösung u aufgetragen. Auffällig ist, dass das Galerkin-Verfahren schon nach relativ wenigen Schritten eine sichtlich gute Approximation der exakten Lösung u des Problems (6.7) mit Rand in Form eines Quadrats liefert.

Wir wollen uns im Folgenden mit dem Fehler $\|u - u_\ell\|$ und den dazugehörigen a posteriori Fehlerschätzern auseinandersetzen, um die zuvor darüber gewonnene Theorie anhand des Beispiels (6.7) zu verifizieren. In den folgenden Experimenten wurden die nötigen Berechnungen jeweils bis zumindest 500 Elementen durchgeführt.

Abbildung 6.13 stellt den Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$ sowie die Fehlerschätzer $\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell$ für sowohl uniforme als auch $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptive Netzverfeinerung dar. Wir beobachten, dass die dargestellten Fehlerschätzer zuverlässig und effizient sind. Weiters zeigt sich optimale Konvergenzordnung $\mathcal{O}(h^{3/2})$ für eine $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptive Verfeinerungsstrategie. Aufgrund der stückweisen Glattheit der Lösung verläuft die Konvergenz bei uniformer Netzverfeinerung ebenfalls bestmöglich (vgl. Abb. 6.13). Diese Beobachtungen stimmen mit der Analysis aus Kapitel 3 überein.

Von Interesse scheint auch das Verhältnis der maximalen und minimalen Schrittweiten zu sein, denn dadurch wird das Maß der Gleichmäßigkeit der Verfeinerung veranschaulicht. Tabelle 6.7 stellt die minimale Schrittweite $h_{\ell, \min}$ der maximalen Schrittweite $h_{\ell, \max}$ gegenüber. Es zeigt sich, wie bereits Abbildung 6.11 veranschaulichte, dass nicht entlang jeder Kante in gleichem Maße verfeinert wird. Diese Unregelmäßigkeit bedingt den Anstieg des Quotienten $h_{\ell, \max}/h_{\ell, \min}$ von Schritt zu Schritt.

In Abbildung 6.14 sind die Effizienzkonstanten C_{eff} der Fehlerschätzer $\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell$ und τ_ℓ dargestellt. Weiters illustrieren rote Kreise den Wert der Effizienzkonstanten im letzten Schritt der Berechnung zur diskreten Lösung des Problems (6.7). Es zeigt sich ein ähnliches Verhalten wie in unserem ersten Experiment. Wieder stellen wir fest, dass der Endwert der Effizienzkonstanten nicht zwingend

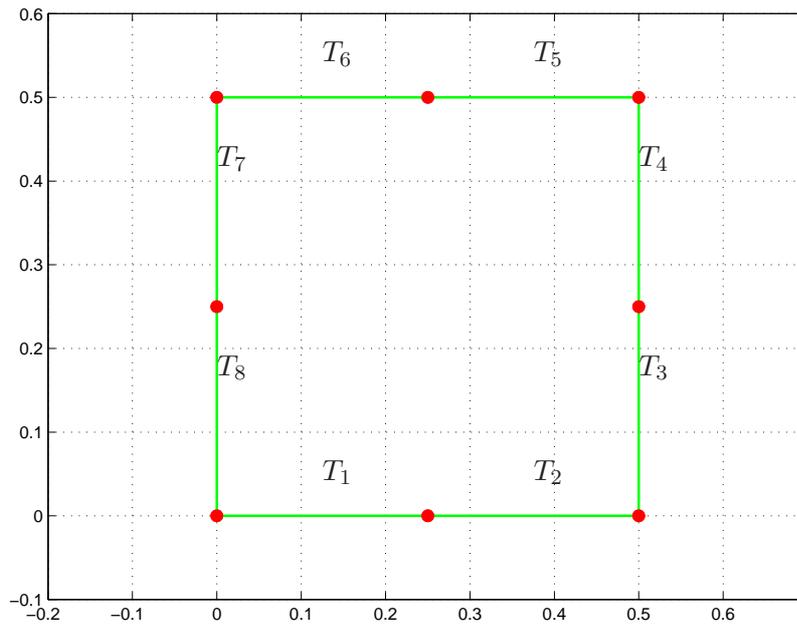


Abbildung 6.10: Startnetz für das Laplace-Problem (6.7) am quadratischen Rand

N_ℓ	$h_{\ell,\min}$	$h_{\ell,\max}$
8	2.500×10^{-1}	2.500×10^{-1}
10	1.250×10^{-1}	2.500×10^{-1}
14	6.250×10^{-2}	2.500×10^{-1}
16	6.250×10^{-2}	2.500×10^{-1}
22	3.125×10^{-2}	2.500×10^{-1}
28	3.125×10^{-2}	1.250×10^{-1}
34	3.125×10^{-2}	1.250×10^{-1}
44	1.563×10^{-2}	1.250×10^{-1}
52	1.563×10^{-2}	1.250×10^{-1}
62	1.563×10^{-2}	1.250×10^{-1}
78	7.813×10^{-3}	6.250×10^{-2}
94	7.813×10^{-3}	6.250×10^{-2}
110	7.813×10^{-3}	6.250×10^{-2}
134	7.813×10^{-3}	6.250×10^{-2}
168	3.906×10^{-3}	6.250×10^{-2}
200	3.906×10^{-3}	6.250×10^{-2}
238	3.906×10^{-3}	3.125×10^{-2}
294	3.906×10^{-3}	3.125×10^{-2}
362	1.953×10^{-3}	3.125×10^{-2}
428	1.953×10^{-3}	3.125×10^{-2}
532	1.953×10^{-3}	3.125×10^{-2}

Tabelle 6.7: Auflistung der minimalen und maximalen Schrittweiten für eine $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptiv verfeinerte Netzfolge am Beispiel des Laplace-Problem (6.7) am Randgebiet in Form eines Quadrats. Es bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente der jeweiligen Partitionierung \mathcal{T}_ℓ .

am rechten Intervallende angenommen werden muss. Die konkreten Werte der Größe C_{eff} werden in Tabelle 6.8 aufgelistet.

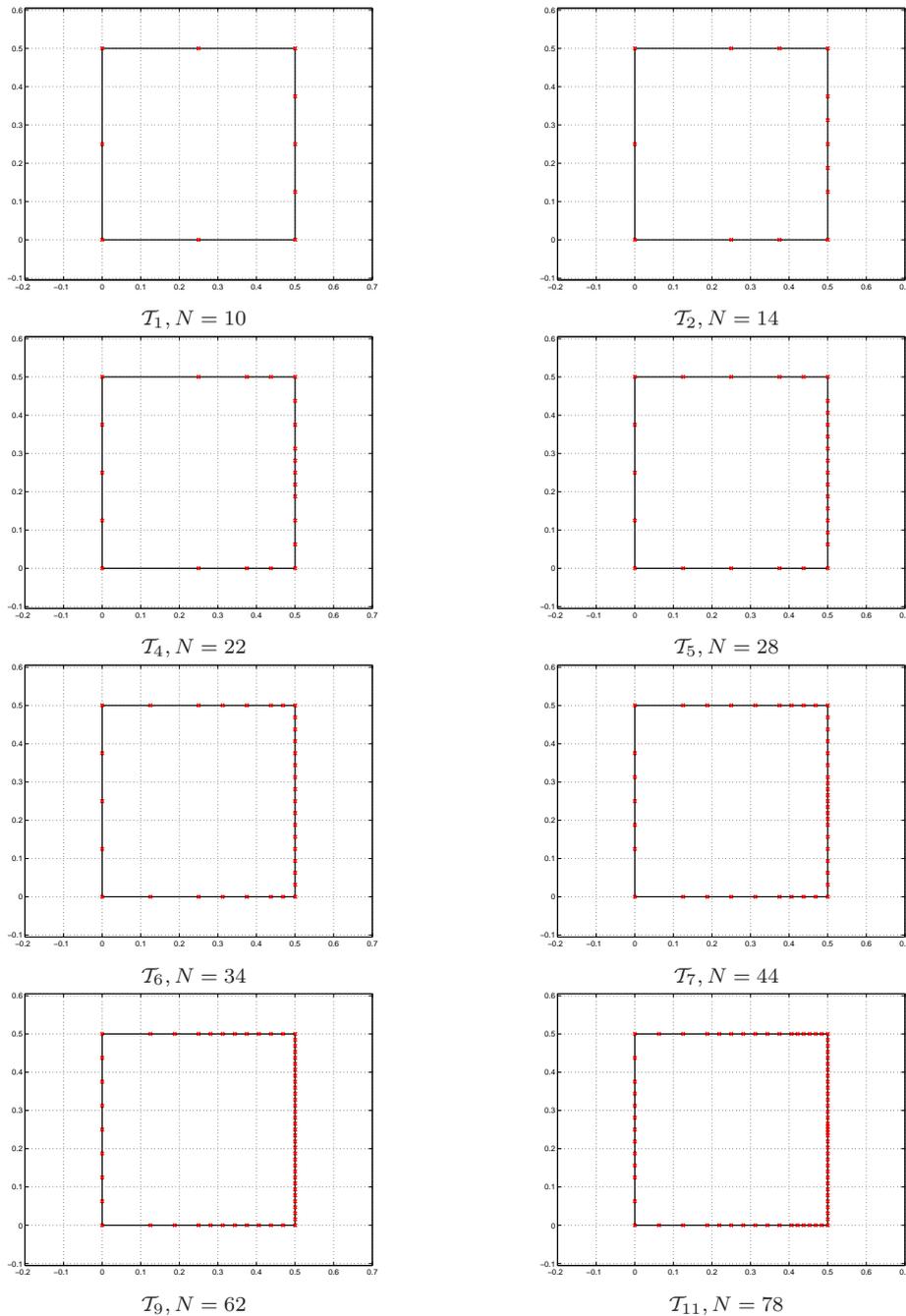


Abbildung 6.11: Auswahl gewisser Netze, die durch $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptive Verfeinerungen beim Lösen des Laplace-Problems (6.7) hervorgehen.

Tabelle 6.9 zeigt die für das Problem (6.7) berechneten Werte der Saturationskonstanten

$$q = \frac{\|u - \hat{u}_\ell\|}{\|u - u_\ell\|}.$$

Hierbei wurde zwischen uniformer und $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptiver Strategie zur Verfeinerung des Netzes unterschieden. Abbildung 6.15 stellt diese Werte als Graphen über der Anzahl N_ℓ der Elemente dar. Offensichtlich beobachtet man für die Saturationskonstante q eine Beschränktheit nach oben durch 0.3526. Demnach können wir behaupten, dass die Saturationsannahme (6.1) im Experiment tatsächlich als erfüllt beobachtet wird. Insbesondere wird dadurch empirisch die Zuverlässigkeit der eingeführten Fehlerschätzer sichergestellt.

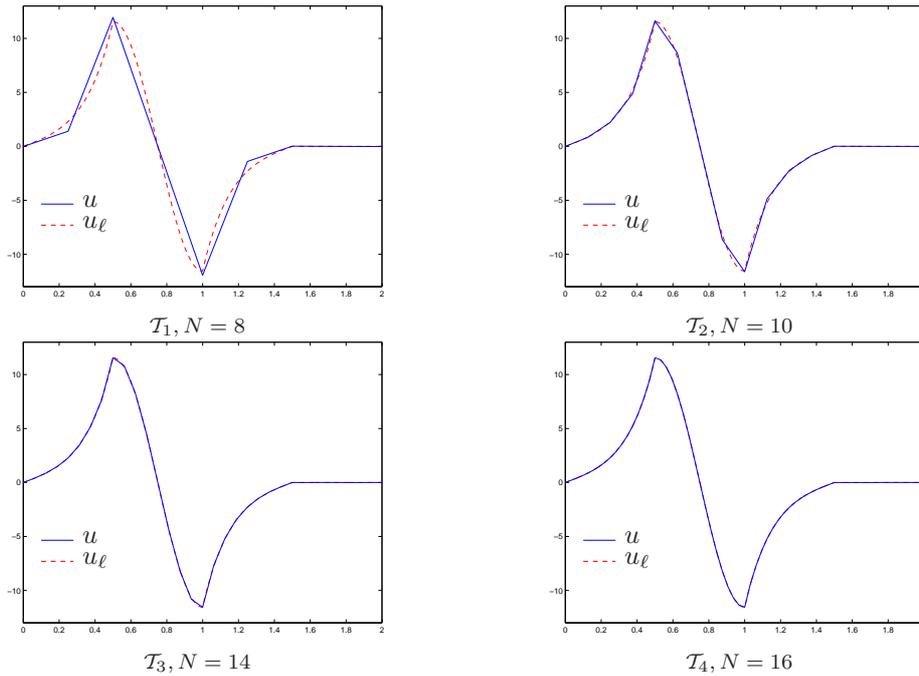


Abbildung 6.12: Exakte und diskrete Lösung des Laplace-Problems (6.7) am quadratförmigen Rand nach 1, 2, 3 bzw. 4 Verfeinerungsschritten. Zur Berechnung der Galerkin-Lösung wurde eine $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptive Strategie zur Verfeinerung des Netzes eingesetzt.

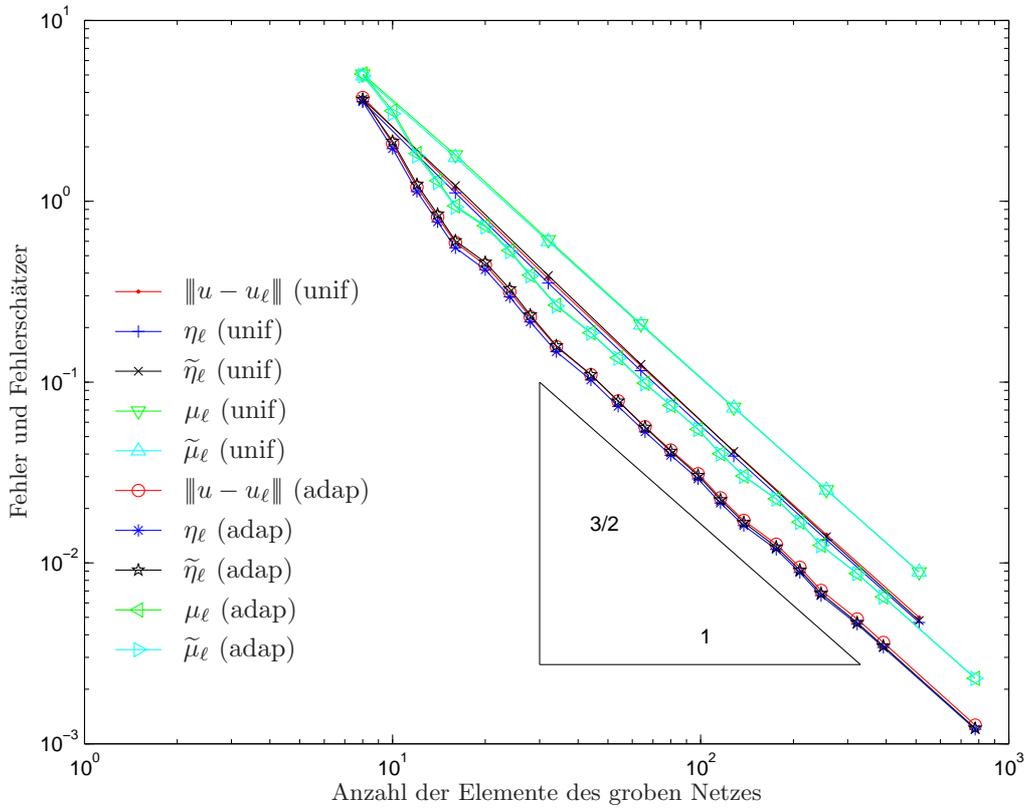


Abbildung 6.13: Fehler der Galerkin-Approximationen $\|u - u_\ell\|$ und Fehlerschätzer $\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell$ für das Laplace-Problem (6.7) unter Verwendung uniformer und $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptiver Netzverfeinerungsstrategie mit $\theta = 0.25$.

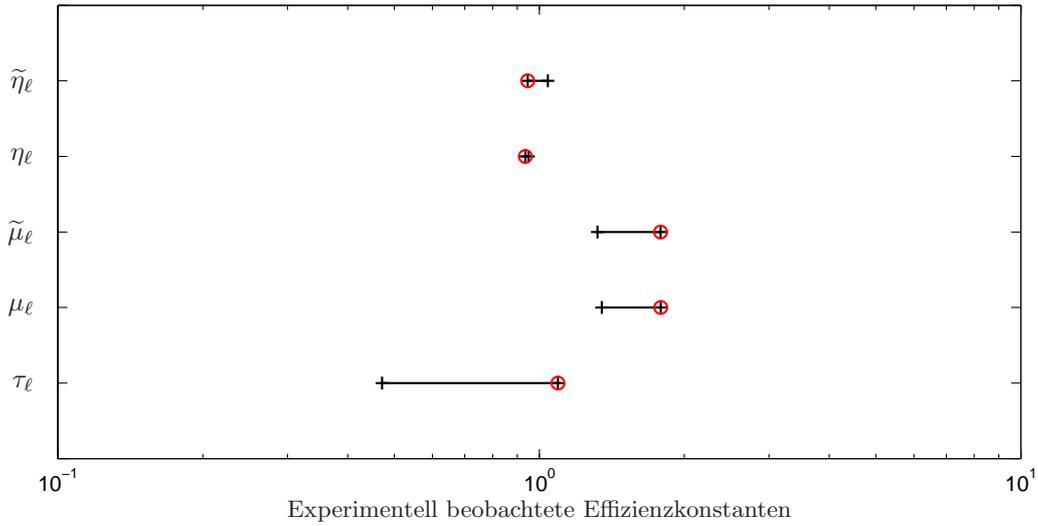


Abbildung 6.14: Experimentell beobachtete Effizienzkonstanten C_{eff} der Fehlerschätzer für das Laplace-Problem (6.7) am quadratförmigen Rand mit $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptiver Verfeinerung des Netzes.

N_ℓ	τ_ℓ	η_ℓ	$\tilde{\eta}_\ell$	μ_ℓ	$\tilde{\mu}_\ell$
8	4.713×10^{-1}	9.496×10^{-1}	9.783×10^{-1}	1.348×10^0	1.320×10^0
10	7.251×10^{-1}	9.392×10^{-1}	1.030×10^0	1.518×10^0	1.467×10^0
12	8.061×10^{-1}	9.465×10^{-1}	1.034×10^0	1.535×10^0	1.489×10^0
14	8.016×10^{-1}	9.398×10^{-1}	1.034×10^0	1.586×10^0	1.553×10^0
16	8.484×10^{-1}	9.358×10^{-1}	1.023×10^0	1.596×10^0	1.570×10^0
20	9.263×10^{-1}	9.420×10^{-1}	1.034×10^0	1.648×10^0	1.623×10^0
24	9.557×10^{-1}	9.403×10^{-1}	1.042×10^0	1.695×10^0	1.673×10^0
28	9.713×10^{-1}	9.388×10^{-1}	1.023×10^0	1.702×10^0	1.683×10^0
34	9.859×10^{-1}	9.393×10^{-1}	1.012×10^0	1.698×10^0	1.679×10^0
44	9.847×10^{-1}	9.369×10^{-1}	1.002×10^0	1.709×10^0	1.697×10^0
54	1.029×10^0	9.359×10^{-1}	9.979×10^{-1}	1.733×10^0	1.720×10^0
66	1.037×10^0	9.381×10^{-1}	9.943×10^{-1}	1.744×10^0	1.732×10^0
80	1.061×10^0	9.367×10^{-1}	9.861×10^{-1}	1.768×10^0	1.762×10^0
98	1.059×10^0	9.367×10^{-1}	9.792×10^{-1}	1.765×10^0	1.758×10^0
116	1.048×10^0	9.368×10^{-1}	9.765×10^{-1}	1.754×10^0	1.746×10^0
138	1.064×10^0	9.367×10^{-1}	9.732×10^{-1}	1.761×10^0	1.754×10^0
176	1.082×10^0	9.362×10^{-1}	9.653×10^{-1}	1.782×10^0	1.778×10^0
210	1.078×10^0	9.364×10^{-1}	9.643×10^{-1}	1.778×10^0	1.774×10^0
246	1.078×10^0	9.364×10^{-1}	9.620×10^{-1}	1.777×10^0	1.773×10^0
322	1.085×10^0	9.358×10^{-1}	9.549×10^{-1}	1.782×10^0	1.780×10^0
392	1.089×10^0	9.358×10^{-1}	9.532×10^{-1}	1.785×10^0	1.782×10^0
778	1.093×10^0	9.352×10^{-1}	9.464×10^{-1}	1.788×10^0	1.786×10^0

Tabelle 6.8: Größenordnung der beobachteten Effizienzkonstanten C_{eff} unter Verwendung einer $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptiven Verfeinerungsstrategie zum Lösen des Laplace-Problems (6.7) am Schlitz. Es bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente der jeweiligen Partitionierung \mathcal{T}_ℓ . Unter den Rubriken τ_ℓ , η_ℓ , $\tilde{\eta}_\ell$, μ_ℓ und $\tilde{\mu}_\ell$ sind die Werte zugehörigen Effizienzkonstanten aufgelistet.

In Abbildung 6.16 sind die Fehlerschätzer η_ℓ , $\tilde{\eta}_\ell$, μ_ℓ , $\tilde{\mu}_\ell$ und τ_ℓ für $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptive Verfeinerung zur Approximation der exakten Lösung des Problems (6.7) am Quadrat dargestellt. Neben der Verifizierung der optimalen Konvergenzordnung von $\mathcal{O}(N_\ell^{-3/2})$, bestätigen sich auch Zuverlässigkeit und Effizienz

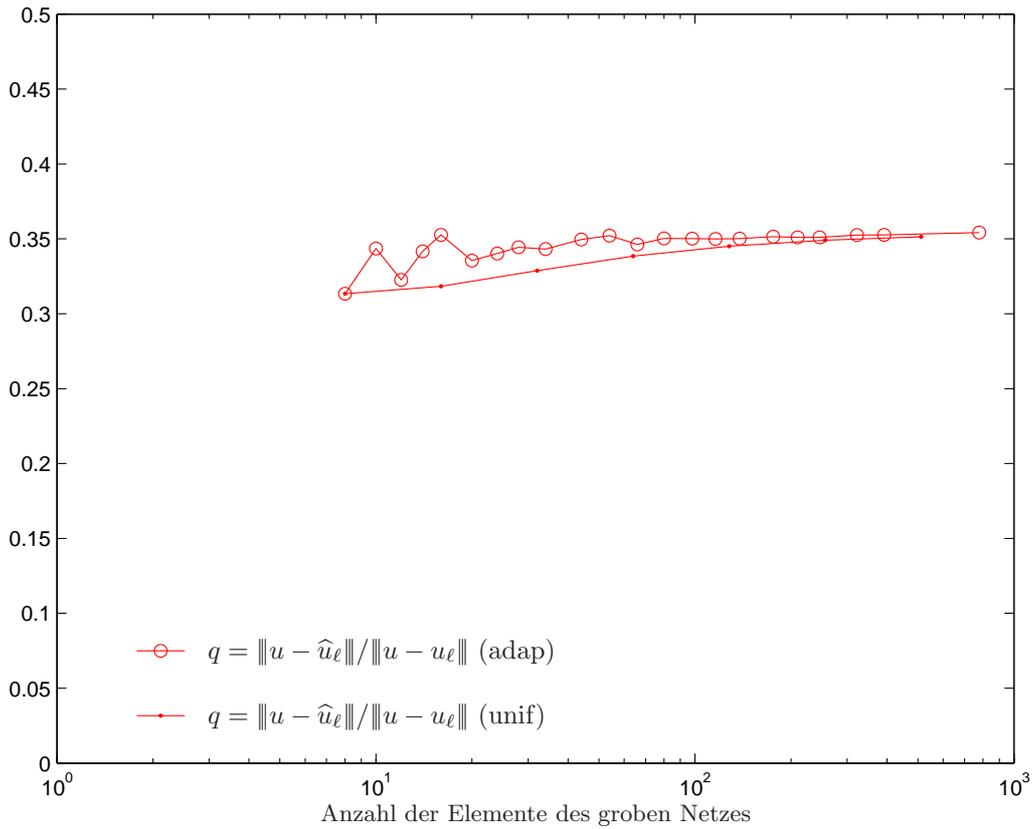


Abbildung 6.15: Experimentell beobachtete Saturationskonstante $q = \|u - \hat{u}_\ell\| / \|u - u_\ell\|$ für sowohl uniforme als auch $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptiver Netzverfeinerungsstrategie am Beispiel (6.7).

der Fehlerschätzer, denn alle Kurven verlaufen parallel zum Fehler. Die zu den Graphen korrespondierenden Daten können der Tabelle 6.10 entnommen werden.

Zuletzt wollen wir noch die Auswertungen der Verhältnisse der Fehlerschätzer $\tilde{\eta}_\ell$ und η_ℓ bzw. μ_ℓ und $\tilde{\mu}_\ell$ zueinander betrachten. In Tabelle 6.11 sind die Quotienten

$$\tilde{\eta}_\ell / \eta_\ell \quad \text{und} \quad \mu_\ell / \tilde{\mu}_\ell$$

eingetragen. Während bei niedriger Anzahl N_ℓ an Elementen die Abweichungen der Fehlerschätzer, die jeweils zum Vergleich herangezogen wurden, gering sind, steigt mit fortschreitender Verfeinerung der Quotient $\tilde{\eta}_\ell / \eta_\ell$ bzw. $\mu_\ell / \tilde{\mu}_\ell$ an. Jedoch zeigt sich für die Abweichungen in Bezug auf $\tilde{\eta}_\ell$ und η_ℓ eine Spannweite von 2.4% – 10.2%. Für die Fehlerschätzer μ_ℓ und $\tilde{\mu}_\ell$ wird durch 0.1% – 3.5% ein Rahmen für die Abweichungen gegeben. Daher ist es durchaus denkbar an Stelle des Fehlerschätzers η_ℓ bzw. μ_ℓ , für dessen Berechnung vergleichsweise hoher Rechenaufwand anfällt, die lokalen Größen $\tilde{\eta}_\ell$ bzw. $\tilde{\mu}_\ell$ zur Schätzung des Fehlers $\|u - u_\ell\|$ zu betrachten.

Damit zeigt auch dieses Experiment, dass die in Kapitel 3 entwickelte Analysis in der Praxis beobachtbar ist.

uniform		adaptiv	
N_ℓ	q	N_ℓ	q
8	3.133×10^{-1}	8	3.133×10^{-1}
16	3.183×10^{-1}	10	3.435×10^{-1}
32	3.287×10^{-1}	12	3.226×10^{-1}
64	3.384×10^{-1}	14	3.416×10^{-1}
128	3.450×10^{-1}	16	3.526×10^{-1}
256	3.488×10^{-1}	20	3.355×10^{-1}
512	3.488×10^{-1}	24	3.403×10^{-1}
		28	3.444×10^{-1}
		34	3.432×10^{-1}
		44	3.495×10^{-1}
		54	3.522×10^{-1}
		66	3.462×10^{-1}
		80	3.502×10^{-1}
		98	3.501×10^{-1}
		116	3.498×10^{-1}
		138	3.499×10^{-1}
		176	3.510×10^{-1}
		210	3.503×10^{-1}
		246	3.497×10^{-1}
		322	3.499×10^{-1}
		392	3.478×10^{-1}
		778	3.121×10^{-1}

Tabelle 6.9: Experimentelle Saturationskonstante $q = \frac{\|u - \hat{u}_\ell\|}{\|u - u_\ell\|}$ aus dem Laplace-Problem (6.7) für uniforme und $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptive Netzverfeinerung mit $\theta = 0.25$. Es bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente in \mathcal{T}_ℓ .

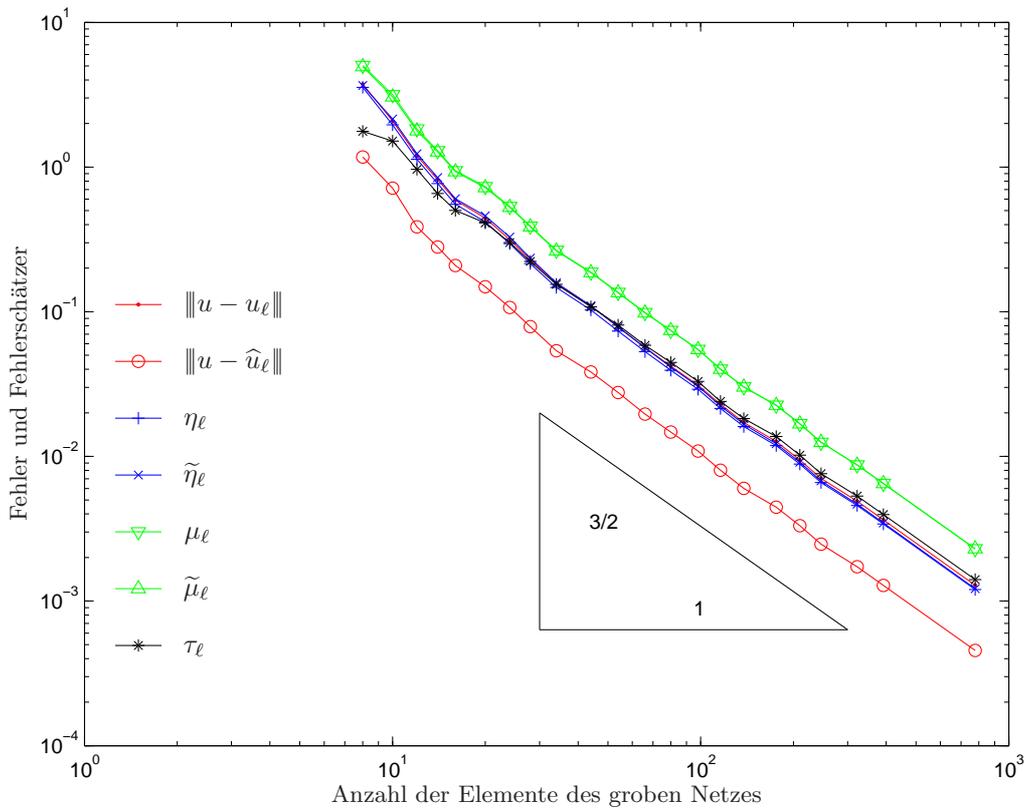


Abbildung 6.16: Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$ und $\|u - \hat{u}_\ell\|$ des Laplace-Problems (6.7) und Fehlerschätzer $\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell$ sowie der Zwei-Level-Schätzer τ_ℓ unter Verwendung adaptiver Netzverfeinerung mit dem lokalen Fehlerschätzer $\tilde{\mu}_\ell$ als Indikator.

N_ℓ	$\ u - u_\ell\ $	τ_ℓ	η_ℓ	$\tilde{\eta}_\ell$	μ_ℓ	$\tilde{\mu}_\ell$
8	3.743×10^0	1.764×10^0	3.555×10^0	3.662×10^0	5.045×10^0	4.942×10^0
10	2.083×10^0	1.510×10^0	1.956×10^0	2.145×10^0	3.161×10^0	3.054×10^0
12	1.196×10^0	9.643×10^{-1}	1.132×10^0	1.237×10^0	1.836×10^0	1.781×10^0
14	8.188×10^{-1}	6.563×10^{-1}	7.695×10^{-1}	8.467×10^{-1}	1.298×10^0	1.272×10^0
16	5.909×10^{-1}	5.013×10^{-1}	5.529×10^{-1}	6.044×10^{-1}	9.432×10^{-1}	9.279×10^{-1}
20	4.439×10^{-1}	4.112×10^{-1}	4.182×10^{-1}	4.591×10^{-1}	7.316×10^{-1}	7.206×10^{-1}
24	3.147×10^{-1}	3.007×10^{-1}	2.959×10^{-1}	3.279×10^{-1}	5.335×10^{-1}	5.264×10^{-1}
28	2.293×10^{-1}	2.227×10^{-1}	2.152×10^{-1}	2.345×10^{-1}	3.901×10^{-1}	3.859×10^{-1}
34	1.567×10^{-1}	1.545×10^{-1}	1.472×10^{-1}	1.586×10^{-1}	2.661×10^{-1}	2.633×10^{-1}
44	1.098×10^{-1}	1.081×10^{-1}	1.028×10^{-1}	1.099×10^{-1}	1.876×10^{-1}	1.862×10^{-1}
54	7.854×10^{-2}	8.081×10^{-2}	7.351×10^{-2}	7.837×10^{-2}	1.361×10^{-1}	1.351×10^{-1}
66	5.656×10^{-2}	5.864×10^{-2}	5.306×10^{-2}	5.624×10^{-2}	9.863×10^{-2}	9.795×10^{-2}
80	4.204×10^{-2}	4.462×10^{-2}	3.937×10^{-2}	4.145×10^{-2}	7.431×10^{-2}	7.407×10^{-2}
98	3.110×10^{-2}	3.294×10^{-2}	2.913×10^{-2}	3.046×10^{-2}	5.488×10^{-2}	5.468×10^{-2}
116	2.291×10^{-2}	2.400×10^{-2}	2.146×10^{-2}	2.237×10^{-2}	4.017×10^{-2}	3.999×10^{-2}
138	1.717×10^{-2}	1.828×10^{-2}	1.609×10^{-2}	1.671×10^{-2}	3.025×10^{-2}	3.013×10^{-2}
176	1.268×10^{-2}	1.372×10^{-2}	1.187×10^{-2}	1.224×10^{-2}	2.258×10^{-2}	2.254×10^{-2}
210	9.457×10^{-3}	1.020×10^{-2}	8.856×10^{-3}	9.120×10^{-3}	1.682×10^{-2}	1.678×10^{-2}
246	7.047×10^{-3}	7.598×10^{-3}	6.599×10^{-3}	6.779×10^{-3}	1.252×10^{-2}	1.249×10^{-2}
322	4.897×10^{-3}	5.314×10^{-3}	4.583×10^{-3}	4.676×10^{-3}	8.728×10^{-3}	8.716×10^{-3}
392	3.640×10^{-3}	3.964×10^{-3}	3.406×10^{-3}	3.470×10^{-3}	6.496×10^{-3}	6.488×10^{-3}
778	1.286×10^{-3}	1.406×10^{-3}	1.203×10^{-3}	1.217×10^{-3}	2.300×10^{-3}	2.298×10^{-3}

Tabelle 6.10: Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$ und Fehlerschätzer τ_ℓ , η_ℓ , $\tilde{\eta}_\ell$, μ_ℓ sowie $\tilde{\mu}_\ell$ für eine $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptive Netzfolge am Beispiel des Laplace-Problems (6.7) am Schlitz. Es bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente einer Partitionierung \mathcal{T}_ℓ .

uniform			adaptiv		
N_ℓ	$\tilde{\eta}_\ell/\eta_\ell$	$\mu_\ell/\tilde{\mu}_\ell$	N_ℓ	$\tilde{\eta}_\ell/\eta_\ell$	$\mu_\ell/\tilde{\mu}_\ell$
8	1.030	1.021	8	1.030	1.021
16	1.096	1.034	10	1.097	1.035
32	1.102	1.021	12	1.092	1.030
64	1.085	1.012	14	1.100	1.021
128	1.060	1.006	16	1.093	1.016
256	1.039	1.003	20	1.098	1.015
512	1.024	1.002	24	1.108	1.013
			28	1.090	1.011
			34	1.077	1.011
			44	1.069	1.007
			54	1.066	1.007
			66	1.060	1.007
			80	1.053	1.003
			98	1.045	1.004
			116	1.042	1.005
			138	1.039	1.004
			176	1.031	1.002
			210	1.030	1.002
			246	1.027	1.002
			322	1.020	1.001
			392	1.019	1.001
			778	1.012	1.001

Tabelle 6.11: Quotienten $\tilde{\eta}_\ell/\eta_\ell$ und $\mu_\ell/\tilde{\mu}_\ell$ im Laplace-Problem (6.7) für uniforme und $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptive Netzverfeinerung. Es bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente in \mathcal{T}_ℓ .

6.4 Neumann-Problem auf L-Gebiet

In diesem Abschnitt betrachten wir das Neumann-Problem

$$Wu = f \quad \text{auf } \Gamma, \quad (6.8)$$

wobei der Rand Γ einen L-förmigen Rand darstellt (vgl. Abbildung 6.17). Die rechte Seite ist gegeben durch $f = (K^* - 1/2)g$, wobei K^* das adjungierte Doppelschichtpotential bezeichnet.

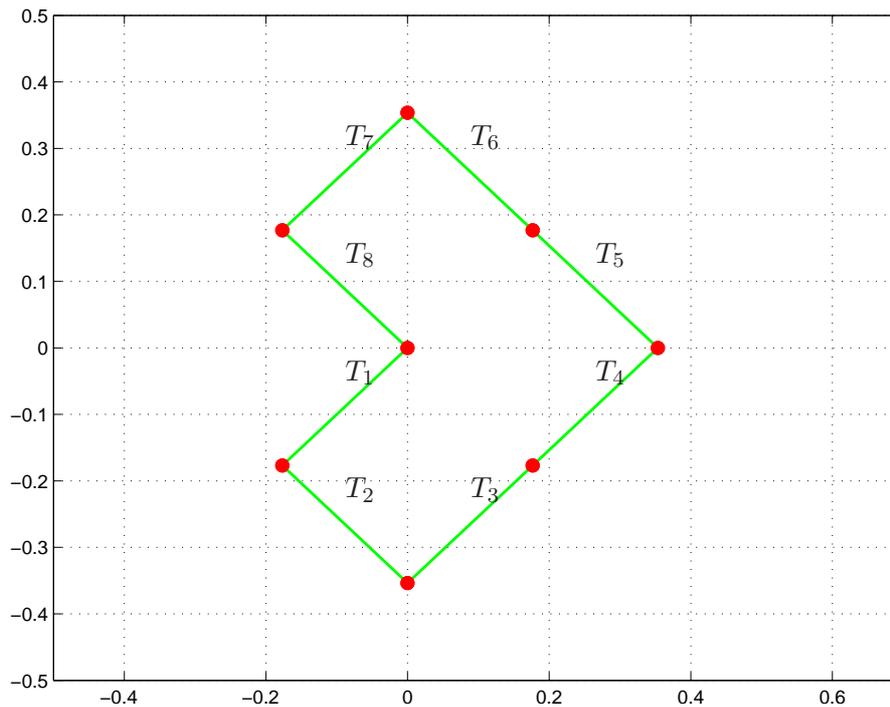


Abbildung 6.17: Startnetz für das Neumann-Problem (6.8) am L-Gebiet

Abbildung 6.17 zeigt die uniforme Partitionierung des L-Gebiets zu Beginn der Approximation der exakten Lösung des Problems (6.8).

Abbildung 6.18 stellt die Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$ und $\|u - \hat{u}_\ell\|$ sowie die Fehlerschätzer $\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell$ und $\tilde{\mu}_\ell$ dar, wobei zur adaptiven Netzverfeinerung der lokale a posteriori Fehlerschätzer $\tilde{\mu}_\ell$ als Indikator diente. Diese Graphen sorgen für Verwunderung, da sie trotz korrekter Software teils nicht mit der Analysis der a posteriori Fehlerschätzung übereinstimmende Ergebnisse darstellen. Der Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$ des $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptiven Verfahrens scheint eine völlig falsche Konvergenzrate anzunehmen. Anders als in unserem ersten Experiment nehmen in diesem Experiment Datenfehler Einfluss auf die Ergebnisse. Diese bedingen unter anderem das gestörte Verhalten des Galerkin-Fehlers $\|u - u_\ell\|$ unter $\tilde{\mu}_\ell$ -basierter Netzverfeinerung.

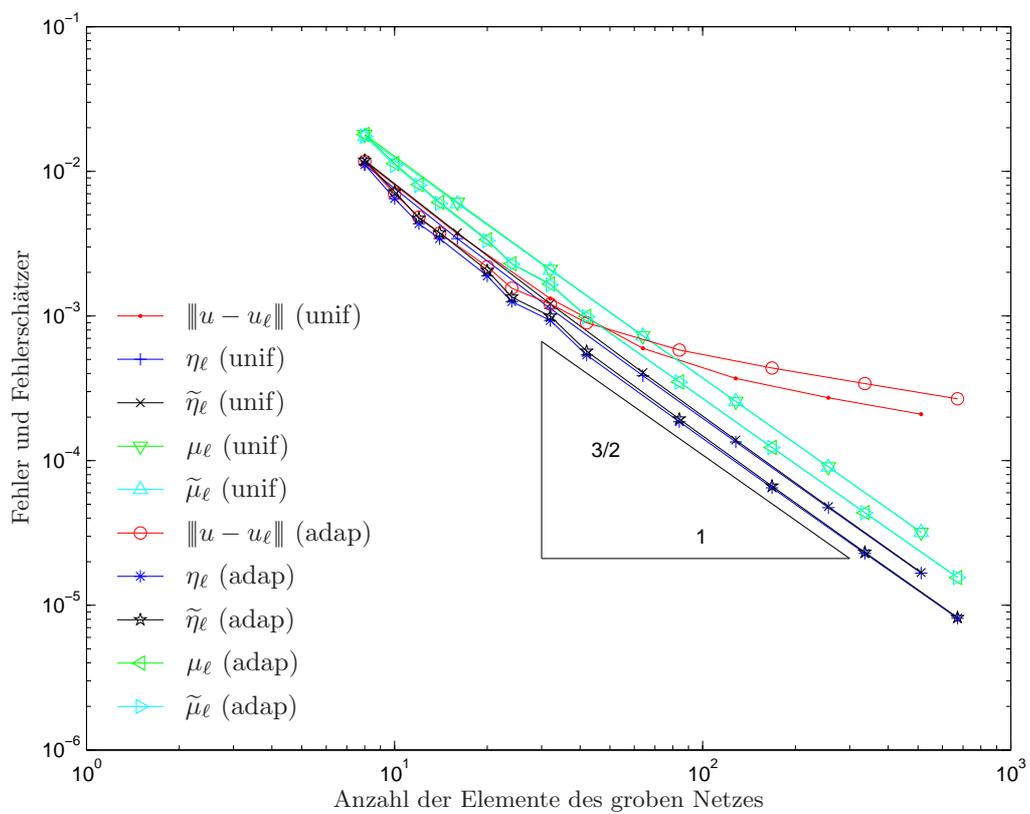


Abbildung 6.18: Fehler der Galerkin-Approximationen $\|u - u_\ell\|$ und Fehlerschätzer $\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell$ für das Problem (6.8) unter Verwendung uniformer und $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptiver Netzverfeinerungsstrategie mit $\theta = 0.25$.

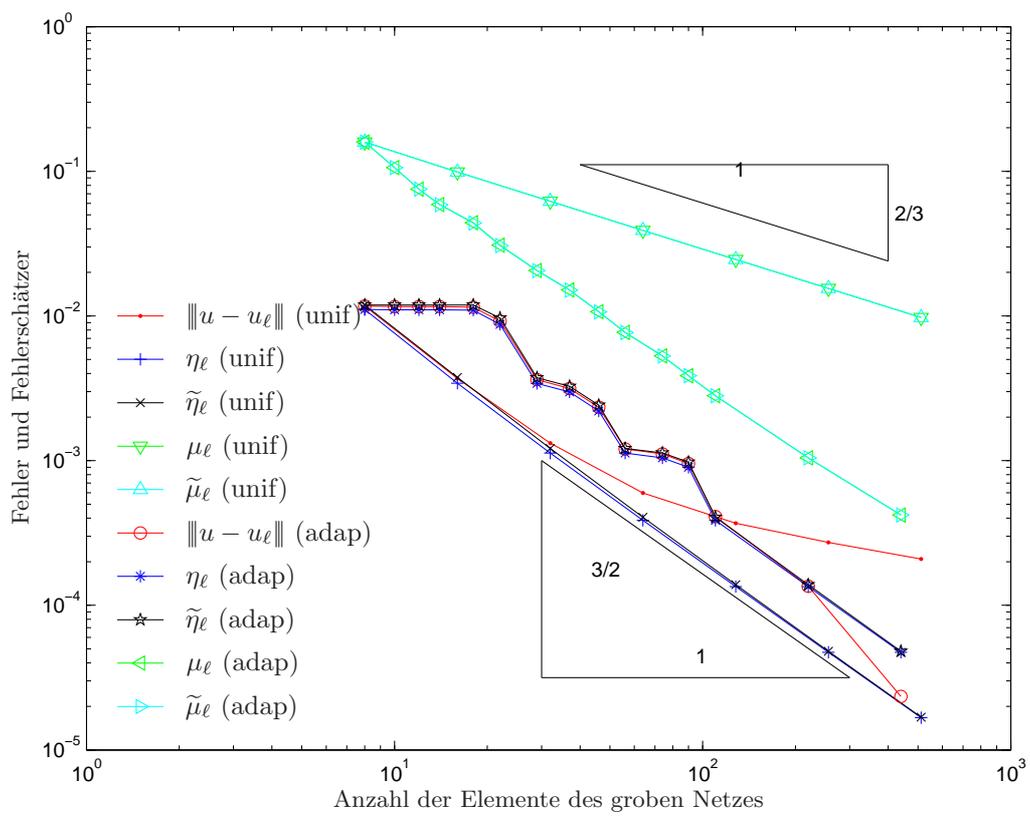


Abbildung 6.19: Fehler der Galerkin-Approximationen $\|u - u_\ell\|$ und Fehlerschätzer $\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell$ für das Problem (6.8) unter Verwendung uniformer und ξ_ℓ -adaptiver Netzverfeinerungsstrategie mit $\theta = 0.25$.

Bezeichnen wir nun allgemein mit ρ_ℓ einen lokalen a posteriori Fehlerschätzer. Den Schätzer für den Datenfehler benennen wir mit osc_ℓ . Aus beiden Anteilen entsteht nun ein neuer lokaler Fehlerschätzer, der durch

$$\xi_\ell(T) = \left(\rho_\ell^2(T) + \text{osc}_\ell^2(T) \right)^{1/2} \quad (6.9)$$

gegeben ist. Dieser eignet sich, wie wir sehen werden, als Indikator zur Verfeinerung einer Partition \mathcal{T}_ℓ . Darüber hinaus kann gezeigt werden, dass ξ_ℓ ein effizienter und unter Annahme der Gültigkeit der Saturationsannahme (6.1) ein zuverlässiger Fehlerschätzer ist. Die Betrachtung und Diskussion von Fehlerschätzern, die einen Oszillationsterm beinhalten, um den Datenfehler zu schätzen, würden den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Daher wird darauf verzichtet.

Der Anteil osc_ℓ zur Schätzung des Datenfehlers lässt sich darstellen als

$$\text{osc}_\ell(T) = \|h_T^{1/2}(\Phi - \Phi_T)\|_{L^2(T)},$$

wobei mit Φ die rechte Seite der hypersingulären Integralgleichung bezeichnet ist. Φ_T hingegen bezeichnet das Integralmittel über Φ

$$\Phi_T = \frac{1}{|T|} \int_T \Phi(x) dx.$$

Damit errechnet sich der neue Fehlerschätzer ξ_ℓ wie folgender *Matlab*-Code zeigt.

```
p = 3;
[pkt,wht] = gauss(p);
phiT = zeros(N,1);

for j = 1:N
    a = coordinates(elements(j,1),:);
    b = coordinates(elements(j,2),:);
    d = norm(b-a);
    sx = ((1-pkt)*a+(1+pkt)*b)/2;

    phiT(j) = wht*phi(sx,a,b)/2;
    oscsquare(j) = wht*((phi(sx,a,b)-phiT(j)).^2)*(d^2)/2;
end
oscsquare = oscsquare';

psi = sqrt(rho^2 + oscsquare);
```

Hierbei bezeichnet `oscsquare` das Quadrat über dem ursprünglichen Oszillationsterm osc_ℓ . Da man Rechenfehler nach Möglichkeit vermeiden möchte, verzichtet man auf vorzeitiges Ziehen der Wurzel. Der Term `oscsquare` sowie das darin enthaltene Integralmittel Φ_T werden mittels einer 3-Punkt Gauss-Quadratur berechnet. Der Spaltenvektor `rho`, der elementweise die Einträge des a posteriori Fehlerschätzers ρ_ℓ enthält, wird als gegeben angenommen.

Bezieht man nun in den Verfeinerungsindikator auch einen Term zur Schätzung des Datenfehlers mit ein, so zeigen sich die erwarteten Verbesserungen (vgl. Abb. 6.19).

Da die Lösung des Laplace-Problems (6.8) glatt ist (vgl. Abb. 6.21) stellt man auch im Fall einer uniformen Verfeinerung eine optimale Konvergenzrate fest. Weiters ist zu bemerken, dass die abgebildeten Fehlerraten nach wie vor, zwar schwächer, aber noch immer von der Quadraturordnung abhängen, mit der die rechte Seite berechnet wird. Die Fehlerschätzer $\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell$ sowie $\tilde{\mu}_\ell$ zeigen ein aus der zugehörigen Analysis bekanntes Verhalten auf.

Der Einfluss des Datenfehleranteils osc_ℓ auf die approximative Lösung des Laplace-Problems (6.8)

ist zurückzuführen auf die Singularität, die in der einspringenden Ecke des L-förmigen Gebiets liegt. Selbst unter adaptiver Netzverfeinerung wird diese nicht aufgelöst und verursacht somit untragbar gestörte Terme, die mit steigender Anzahl N_ℓ an Elementen deutlicher wird.

Für die folgenden Betrachtungen wollen wir festhalten, dass wir stets den erweiterten Fehlerschätzer $\xi_\ell = (\tilde{\mu}_\ell^2 + \text{osc}_\ell^2)^{1/2}$ als Indikator für adaptive Netzverfeinerung einsetzen. Abbildung 6.20 zeigt wie sich hierbei die Triangulierung in den einzelnen Verfeinerungsschritten ändert. Wir beobachten eine deutlich stärkere Verfeinerung zur einspringenden Ecke hin. Dies würde man a priori nicht annehmen, da die Lösung des Problems (6.8) stückweise glatt ist. Da wir jedoch nun ξ_ℓ als Indikator zur Netzverfeinerung einsetzen, wird auch der Datenfehler aufgelöst. Dieser scheint in der einspringenden Ecke den Verfahrensfehler zu dominieren, was bereits bei einer geringen Anzahl an Elementen deutlich wird.

In Tabelle 6.12 sind die exakten Werte für die jeweils minimale Schrittweite $h_{\ell,\min}$ und die maximale Schrittweite $h_{\ell,\max}$ angegeben. Es wurde eine ξ_ℓ -adaptive Verfeinerungsstrategie angesetzt mit Parameter $\theta = 0.25$ und gefordert, dass die Anzahl N_ℓ der Elemente auf über 500 ansteigt. Es zeichnet sich mit steigender Anzahl der Elemente auch ein Zuwachs des Quotienten $h_{\ell,\max}/h_{\ell,\min}$ ab. Dieser war jedoch nach Abbildung 6.20 zu erwarten, wobei über die Relation selbst keine genauen Aussagen getroffen werden konnten. Daher erscheint der aus dem letzten Berechnungsschritt resultierende Quotient $h_{\ell,\max}/h_{\ell,\min} \sim 10^3$ verhältnismäßig groß.

N_ℓ	$h_{\ell,\min}$	$h_{\ell,\max}$
8	2.500×10^{-1}	2.500×10^{-1}
10	1.250×10^{-1}	2.500×10^{-1}
12	6.250×10^{-2}	2.500×10^{-1}
14	3.125×10^{-2}	2.500×10^{-1}
18	1.563×10^{-2}	2.500×10^{-1}
22	7.813×10^{-3}	2.500×10^{-1}
29	3.906×10^{-3}	1.250×10^{-1}
37	1.953×10^{-3}	1.250×10^{-1}
46	9.766×10^{-4}	1.250×10^{-1}
56	4.883×10^{-4}	6.250×10^{-2}
74	2.441×10^{-4}	6.250×10^{-2}
90	1.221×10^{-4}	6.250×10^{-2}
110	6.104×10^{-5}	3.125×10^{-2}
220	3.052×10^{-5}	1.563×10^{-2}
440	1.526×10^{-5}	7.813×10^{-3}
880	7.629×10^{-6}	3.906×10^{-3}

Tabelle 6.12: Auflistung der minimalen und maximalen Schrittweiten für eine ξ_ℓ -adaptiv verfeinerte Netzfolge am Beispiel des Neumann-Problems (6.8) am L-förmigen Randgebiet. Es bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente der jeweiligen Partitionierung \mathcal{T}_ℓ .

Abbildung 6.21 stellt die ξ_ℓ -adaptiv berechnete Lösung u_ℓ des Neumann-Problems (6.8) am L-förmigen Randgebiet der exakten Lösung u gegenüber. Dazu wurden diskrete Lösungen auf verschiedenen Level der Verfeinerung in Betracht gezogen, um die Verbesserung der Näherungslösung zu veranschaulichen. Bereits nach wenigen Verfahrensschritten zeigt sich eine scheinbar gute Approximation u_ℓ der exakten Lösung u gefunden zu haben.

Wie in unserem ersten Experiment sind wir an gewissen Konstanten, wie beispielsweise der Saturationskonstante q interessiert. Aussagen über diese Größen wollen wir auch am Beispiel der Laplace-Gleichung (6.8) empirisch überprüfen.

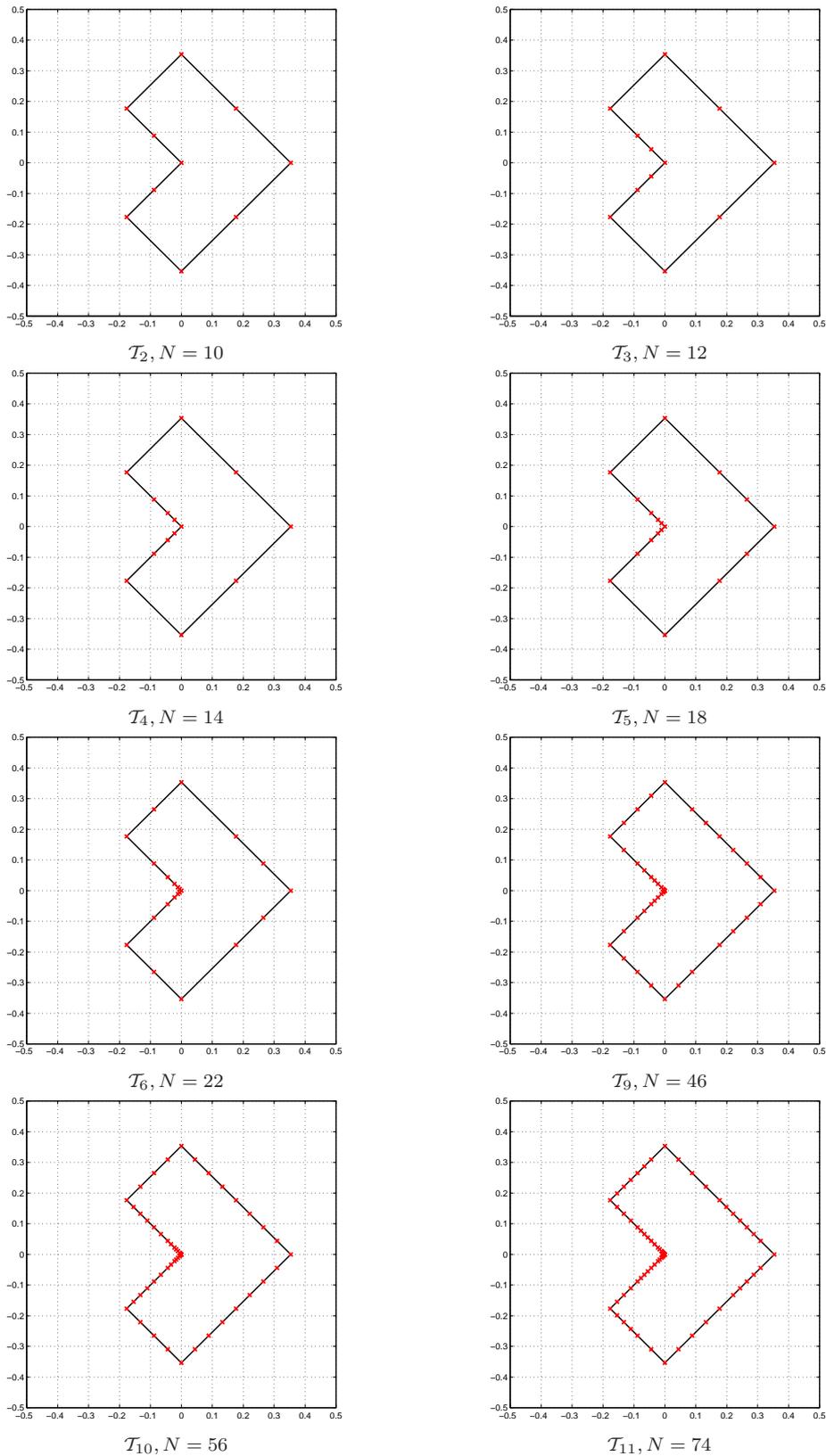


Abbildung 6.20: Auswahl gewisser Netze, die durch ξ_ℓ -adaptive Verfeinerungen beim Lösen des Laplace-Problems (6.8) hervorgehen.

In Tabelle 6.13 sind die experimentell beobachteten Saturationskonstanten

$$q = \frac{\|u - \hat{u}_\ell\|}{\|u - u_\ell\|}$$

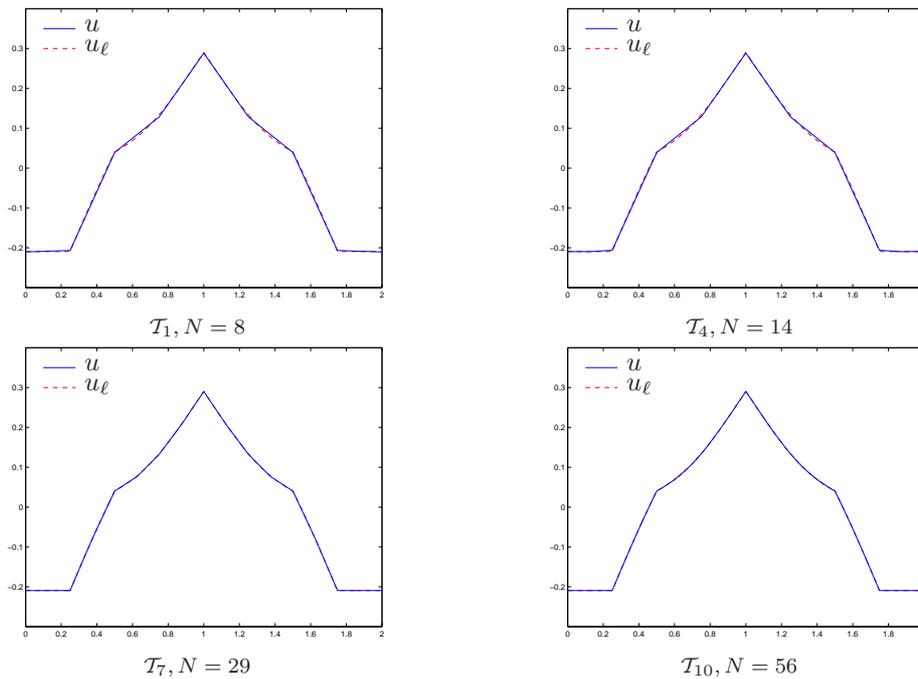


Abbildung 6.21: Exakte und diskrete Lösung des Problems (6.8) am L-förmigen Rand nach 1, 4, 7 bzw. 10 adaptiven Verfeinerungsschritten. Zur Berechnung der Galerkin-Lösung wurde eine ξ_ℓ -adaptive Strategie zur Verfeinerung des Netzes eingesetzt.

für sowohl uniforme als auch adaptive Netzverfeinerung mit Indikator ξ_ℓ aufgelistet. Abbildung (6.22) stellt diese Werte als Graphen über der Anzahl der Elemente dar. Offensichtlich beobachtet man für die Saturationskonstante q eine Beschränktheit nach oben durch 1. Dadurch ist experimentell die Saturationsannahme (6.1) bestätigt und gleichzeitig die Zuverlässigkeit der eingeführten Fehlerschätzer sichergestellt.

uniform		adaptiv	
N_ℓ	q	N_ℓ	q
8	3.252×10^{-1}	8	3.252×10^{-1}
16	$4.228e \times 10^{-1}$	10	3.245×10^{-1}
32	6.820×10^{-1}	12	3.228×10^{-1}
64	9.218×10^{-1}	14	3.216×10^{-1}
128	9.882×10^{-1}	18	3.073×10^{-1}
256	9.984×10^{-1}	22	3.255×10^{-1}
512	9.998×10^{-1}	29	3.905×10^{-1}
		37	3.955×10^{-1}
		46	4.495×10^{-1}
		56	6.250×10^{-1}
		74	6.460×10^{-1}
		90	6.904×10^{-1}
		110	9.026×10^{-1}
		220	9.861×10^{-1}
		440	9.982×10^{-1}

Tabelle 6.13: Experimentelle Saturationskonstante $q = \frac{\|u - \hat{u}_\ell\|}{\|u - u_\ell\|}$ aus dem Problem (6.8) für uniforme und ξ_ℓ -adaptive Netzverfeinerung. Es bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente in \mathcal{T}_ℓ .

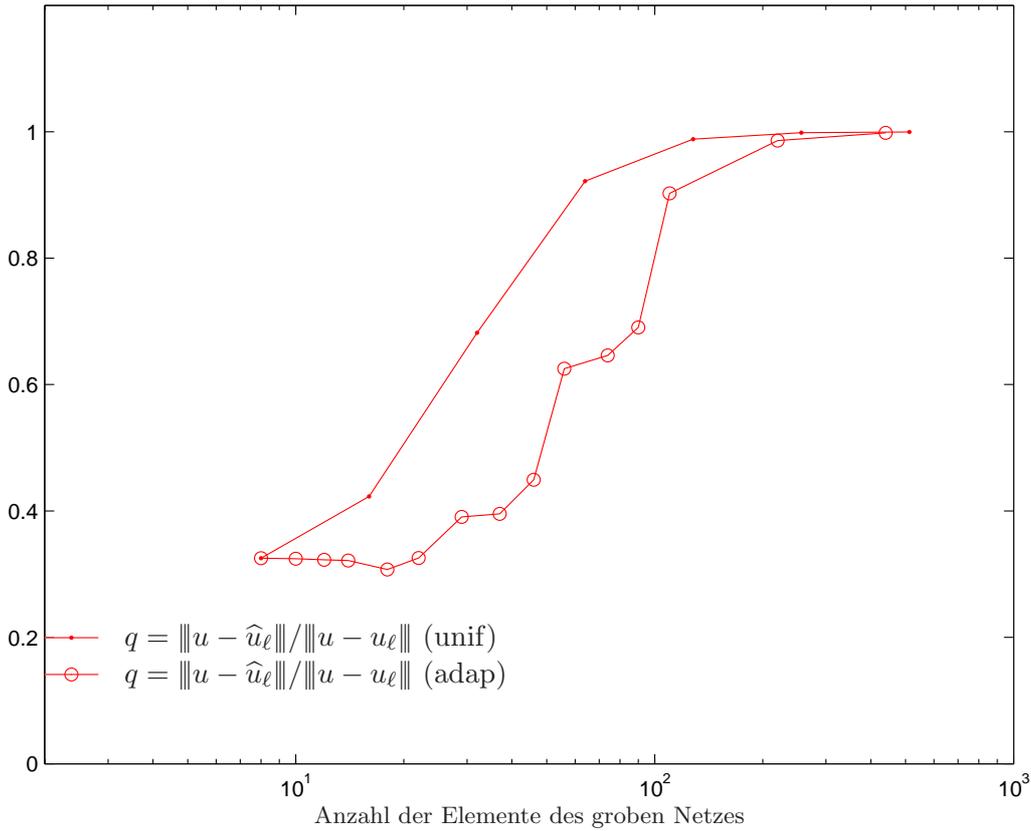


Abbildung 6.22: Experimentell beobachtete Saturationskonstante $q = \|u - \hat{u}_\ell\| / \|u - u_\ell\|$ für sowohl uniforme als auch ξ -adaptiver Netzverfeinerungsstrategie am Beispiel (6.8).

Neben der Größe der Relativitätskonstanten C_{rel} bzw. der Saturationskonstanten q ist auch die Effizienzkonstante C_{eff} von Interesse. Für Fehlerschätzer, die auf Erweiterung des Raumes gründen, oder den Zwei-Level-Fehlerschätzer betrachten wir als Effizienzkonstante die Relation

$$C_{\text{eff}} = \rho_\ell / \|u - u_\ell\|.$$

Abbildung 6.23 veranschaulicht für die a posteriori Fehlerschätzer $\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell$ und τ_ℓ die Reichweiten der Größenordnung, in denen sich die Werte der Effizienzkonstanten C_{eff} befinden. Anders als in unseren bisherigen Beispielen werden die Werte der Effizienzkonstanten im letzten Schritt der Berechnung der Galerkin-Lösung stets am rechten Intervallende angenommen. Dies lässt vermuten, dass die Effizienzkonstante von Level zu Level wächst. Tabelle 6.14 beinhaltet die exakten Werte der Effizienzkonstanten C_{eff} zum Neumann-Problem (6.8). Aus dieser geht hervor, dass die Mutmaßung über das monotone Wachstum der Effizienzkonstanten, verworfen werden kann.

In Abbildung 6.24 sind die Fehlerschätzer $\eta_\ell, \tilde{\eta}_\ell, \mu_\ell, \tilde{\mu}_\ell$ und τ_ℓ für ξ_ℓ -adaptive Verfeinerung mit Parameter $\theta = 0.25$ zur Approximation der exakten Lösung des Neumann-Problems (6.8) am L-förmigen Rand dargestellt. Neben der Beobachtung der optimalen Konvergenzordnung von $\mathcal{O}(h^{3/2})$, bestätigen sich auch Zuverlässigkeit und Effizienz der Fehlerschätzer, denn alle Kurven verlaufen parallel zum Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$. Die zu den Graphen korrespondierenden Daten können der Tabelle 6.15 entnommen werden.

In einem letzten Schritt wollen wir noch die Verhältnisse der Fehlerschätzer $\tilde{\eta}_\ell$ und η_ℓ bzw. μ_ℓ und $\tilde{\mu}_\ell$ zueinander untersuchen. Der Tabelle 6.16 sind die Quotienten

$$\tilde{\eta}_\ell / \eta_\ell \quad \text{und} \quad \mu_\ell / \tilde{\mu}_\ell$$

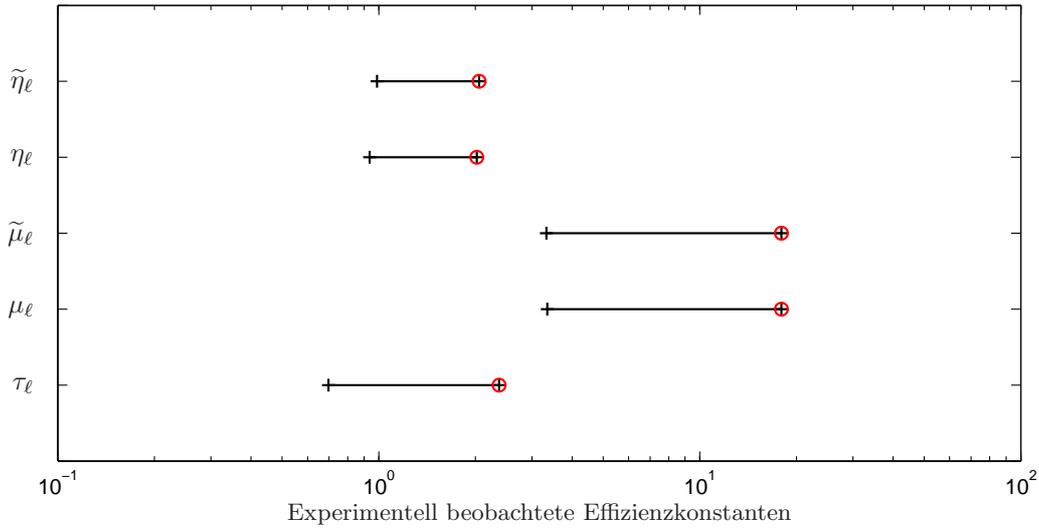


Abbildung 6.23: Experimentell beobachtete Effizienzkonstanten C_{eff} der Fehlerschätzer für das Problem (6.8) am L-förmigen Rand mit $\tilde{\mu}_\ell$ -adaptiver Verfeinerung des Netzes.

N_ℓ	τ_ℓ	η_ℓ	$\tilde{\eta}_\ell$	μ_ℓ	$\tilde{\mu}_\ell$
8	8.116×10^{-1}	9.478×10^{-1}	1.017×10^0	1.359×10^1	1.358×10^1
10	7.878×10^{-1}	9.481×10^{-1}	1.024×10^0	9.133×10^0	9.125×10^0
12	7.885×10^{-1}	9.487×10^{-1}	1.025×10^0	6.492×10^0	6.480×10^0
14	7.889×10^{-1}	9.491×10^{-1}	1.025×10^0	5.073×10^0	5.058×10^0
18	6.968×10^{-1}	9.539×10^{-1}	1.037×10^0	3.841×10^0	3.818×10^0
22	7.679×10^{-1}	9.491×10^{-1}	1.049×10^0	3.351×10^0	3.328×10^0
29	9.721×10^{-1}	9.427×10^{-1}	1.031×10^0	5.695×10^0	5.685×10^0
37	8.401×10^{-1}	9.475×10^{-1}	1.034×10^0	4.801×10^0	4.787×10^0
46	8.505×10^{-1}	9.440×10^{-1}	1.035×10^0	4.578×10^0	4.567×10^0
56	1.051×10^0	9.367×10^{-1}	1.009×10^0	6.387×10^0	6.382×10^0
74	1.012×10^0	9.398×10^{-1}	1.017×10^0	4.764×10^0	4.757×10^0
90	9.510×10^{-1}	9.431×10^{-1}	1.022×10^0	4.052×10^0	4.042×10^0
110	1.084×10^0	9.408×10^{-1}	9.874×10^{-1}	6.830×10^0	6.828×10^0
220	1.162×10^0	9.960×10^{-1}	1.025×10^0	7.732×10^0	7.731×10^0
440	2.370×10^0	2.019×10^0	2.053×10^0	1.796×10^1	1.796×10^1

Tabelle 6.14: Größenordnung der beobachteten Effizienzkonstanten C_{eff} unter Verwendung einer ξ_ℓ -adaptiven Verfeinerungsstrategie zum Lösen des Problems (6.8) am L-förmigen Randgebiet. Es bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente der jeweiligen Partitionierung \mathcal{T}_ℓ . Unter den Rubriken τ_ℓ , η_ℓ , $\tilde{\eta}_\ell$, μ_ℓ und $\tilde{\mu}_\ell$ sind die Werte zugehörigen Effizienzkonstanten aufgelistet.

zu entnehmen. Es zeigt sich, dass bei niedriger Anzahl N_ℓ an Elementen die Abweichung der Fehlerschätzer, die jeweils zum Vergleich herangezogen wurden, gering ist. Mit fortschreitender Verfeinerung steigt auch der Quotient $\tilde{\eta}_\ell/\eta_\ell$ bzw. $\mu_\ell/\tilde{\mu}_\ell$ an. Jedoch bleiben die Relationszahlen für $\tilde{\eta}_\ell$ und η_ℓ in einem Rahmen von 1% – 9.7%. Für die Fehlerschätzer μ_ℓ und $\tilde{\mu}_\ell$ ist eine Abweichung kaum beobachtbar. Daher bietet es sich an an Stelle des Fehlerschätzers μ_ℓ , für dessen Berechnung vergleichsweise hohen Rechenaufwand anfällt, die lokale Größe $\tilde{\mu}_\ell$ zur Schätzung des Fehlers $\|u - u_\ell\|$ zu betrachten.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass auch dieses Experiment die in Kapitel 3 entwickelte Analysis bestätigt. Es gilt jedoch zu beachten, dass die Verwendung eines Fehlerschätzers, der auch den Datenfehler mit einbezieht, als Indikator in einer adaptiven Verfeinerungsstrategie einen wesentlichen

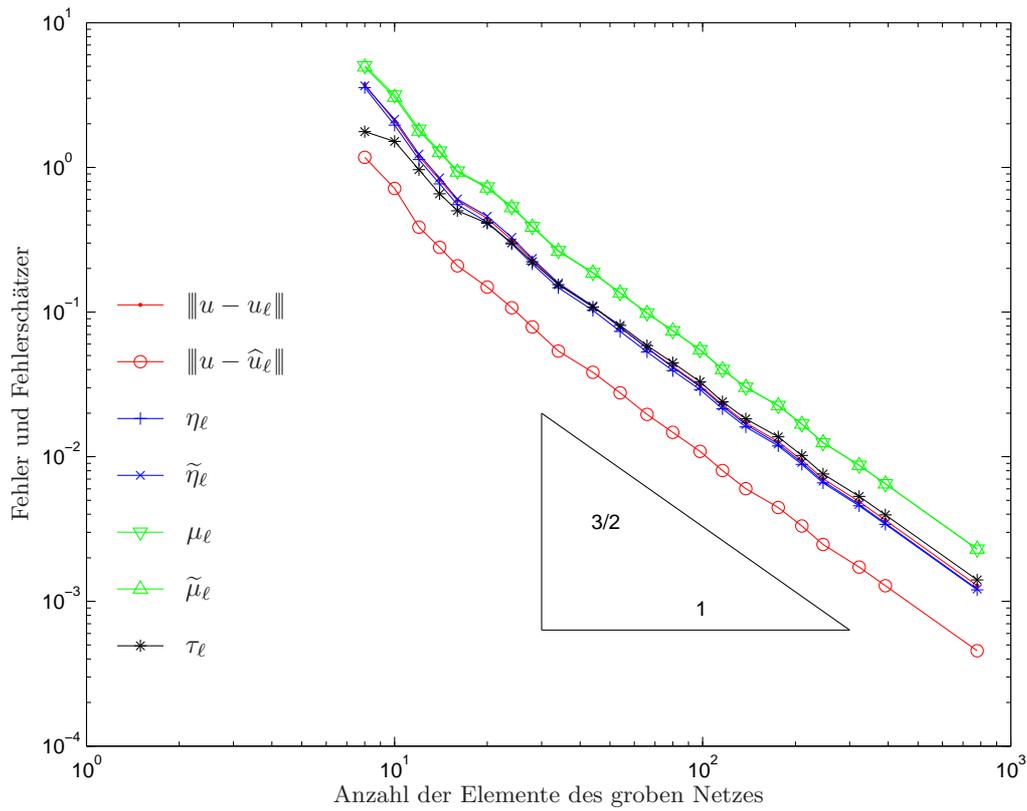


Abbildung 6.24: Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$ und $\|u - \hat{u}_\ell\|$ des Laplace-Problems (6.8) und Fehlerschätzer η_ℓ , $\tilde{\eta}_\ell$, μ_ℓ , $\tilde{\mu}_\ell$ sowie der Zwei-Level-Schätzer τ_ℓ unter Verwendung adaptiver Netzverfeinerung mit dem lokalen Fehlerschätzer ξ_ℓ als Indikator.

N_ℓ	$\ u - u_\ell\ $	τ_ℓ	η_ℓ	$\tilde{\eta}_\ell$	μ_ℓ	$\tilde{\mu}_\ell$
8	1.171×10^{-2}	9.506×10^{-3}	1.110×10^{-2}	1.191×10^{-2}	1.591×10^{-1}	1.591×10^{-1}
10	1.162×10^{-2}	9.154×10^{-3}	1.102×10^{-2}	1.190×10^{-2}	1.061×10^{-1}	1.060×10^{-1}
12	1.161×10^{-2}	9.155×10^{-3}	1.101×10^{-2}	1.190×10^{-2}	7.537×10^{-2}	7.524×10^{-2}
14	1.160×10^{-2}	9.155×10^{-3}	1.101×10^{-2}	1.190×10^{-2}	5.887×10^{-2}	5.870×10^{-2}
18	1.149×10^{-2}	8.007×10^{-3}	1.096×10^{-2}	1.191×10^{-2}	4.414×10^{-2}	4.388×10^{-2}
22	9.211×10^{-3}	7.074×10^{-3}	8.743×10^{-3}	9.665×10^{-3}	3.087×10^{-2}	3.065×10^{-2}
29	3.624×10^{-3}	3.523×10^{-3}	3.416×10^{-3}	3.736×10^{-3}	2.064×10^{-2}	2.060×10^{-2}
37	3.152×10^{-3}	2.648×10^{-3}	2.986×10^{-3}	3.260×10^{-3}	1.513×10^{-2}	1.509×10^{-2}
46	2.337×10^{-3}	1.988×10^{-3}	2.206×10^{-3}	2.419×10^{-3}	1.070×10^{-2}	1.067×10^{-2}
56	1.204×10^{-3}	1.265×10^{-3}	1.128×10^{-3}	1.214×10^{-3}	7.690×10^{-3}	7.685×10^{-3}
74	1.112×10^{-3}	1.125×10^{-3}	1.045×10^{-3}	1.131×10^{-3}	5.298×10^{-3}	5.290×10^{-3}
90	9.547×10^{-4}	9.079×10^{-4}	9.004×10^{-4}	9.754×10^{-4}	3.868×10^{-3}	3.858×10^{-3}
110	4.108×10^{-4}	4.454×10^{-4}	3.865×10^{-4}	4.057×10^{-4}	2.806×10^{-3}	2.805×10^{-3}
220	1.352×10^{-4}	1.571×10^{-4}	1.347×10^{-4}	1.387×10^{-4}	1.046×10^{-3}	1.046×10^{-3}
440	2.343×10^{-5}	5.552×10^{-5}	4.730×10^{-5}	4.810×10^{-5}	4.208×10^{-4}	4.208×10^{-4}

Tabelle 6.15: Galerkin-Fehler $\|u - u_\ell\|$ und Fehlerschätzer τ_ℓ , η_ℓ , $\tilde{\eta}_\ell$, μ_ℓ sowie $\tilde{\mu}_\ell$ für eine ξ_ℓ -adaptive Netzfolge am Beispiel des Laplace-Problems (6.8) am L-förmigen Randgebiet. Es bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente einer Partitionierung \mathcal{T}_ℓ .

Beitrag zur Verifizierung brachte.

uniform			adaptiv		
N_ℓ	$\tilde{\eta}_\ell/\eta_\ell$	$\mu_\ell/\tilde{\mu}_\ell$	N_ℓ	$\tilde{\eta}_\ell/\eta_\ell$	$\mu_\ell/\tilde{\mu}_\ell$
8	1.073	1.000	8	1.073	1.000
16	1.097	1.000	10	1.080	1.001
32	1.077	1.000	12	1.080	1.002
64	1.050	1.000	14	1.080	1.003
128	1.030	1.000	18	1.087	1.006
256	1.017	1.000	22	1.106	1.007
512	1.010	1.000	29	1.094	1.002
			37	1.092	1.003
			46	1.096	1.002
			56	1.077	1.001
			74	1.082	1.001
			90	1.083	1.002
			110	1.050	1.000
			220	1.030	1.000
			440	1.017	1.000

Tabelle 6.16: Quotienten $\tilde{\eta}_\ell/\eta_\ell$ und $\mu_\ell/\tilde{\mu}_\ell$ im Laplace-Problem (6.8) für uniforme und ξ_ℓ -adaptive Netzverfeinerung. Es bezeichnet N_ℓ die Anzahl der Elemente in \mathcal{T}_ℓ .

Anhang A

Quelltexte

Listing A.1: Indexdatei

```
1 function hypsing01
2
3 %-----%
4 % Hypersingulaere Integralgleichung %
5 %           Wu = f %
6 % auf quadratfoermigen Randgebiet mit Loesung %
7 %           u(x) = sinh(2*pi*x(:,1)) .* cos(2*pi*x(:,2)) %
8 % und %
9 % ||| u |||^2 = 1.7425895737e-01 %
10 %-----%
11
12 example = 'hypsing01';
13 aitkin = 1.7425895737e-01; %Energienorm mittels Aitkinscher Delta^2-Methode
14 global tol
15 tol = 1e-12;
16
17 warning off
18 rmpath('hypsing01');
19 warning on
20
21 addpath(example);
22
23 % Angaben zur Berechnung in der Form "{nmax,theta,filename}"
24 % nmax: Mindestanzahl d. Elemente, fuer die Berechnungen angestellt werden
25 % theta: Adaptivitaetsparameter (0: uniform, >0 adaptiv)
26 % filename: Speicheradresse
27
28 computation{1} = {500, 0, ['output/',example,'/unif_']};
29 computation{2} = {500, 0.5, ['output/',example,'/adap_']};
30
31 for j = 1:length(computation)
32     % Problemdaten
33     do = computation{j};
34     Nmax = do{1};
35     theta = do{2};
36     dir = do{3};
37     do
38     % Initialisierung des Problems
39     load elements.dat
40     load coordinates
41     k = 1;
42     flag = 0;
43     % Berechnung
44     while ~flag
```

```

45     filename = [dir,int2str(k),'.mat'];
46     N = size(elements,1);
47     fprintf('*** j = %d : k = %d, N = %d\n',j,k,N);
48     if exist(filename)
49         load(filename)
50     else
51         marked = hypsing2d(filename,coordinates,elements,theta);
52     end
53     [elements,coordinates] = refine(elements,coordinates,marked);
54     k = k + 1;
55     flag = (N > Nmax);
56 end
57 end
58
59 rmpath(example);

```

Listing A.2: Berechnung aller Kenngrößen für die 2D-BEM einer hypersingulären Integralgleichung

```

1 function marked = hypsing2d(filename,coordinates,elements,theta)
2
3 N = size(elements,1);
4 C = size(coordinates,1);
5
6 % Berechnung des feinen Netzes
7 [elements2,coordinates2] = refine(elements,coordinates,1:N);
8
9 % Berechnung der lokalen Netzweiten fuer das feine Netz
10 h2 = zeros(2*N,1);
11 for j = 1:2*N
12     h2(j) = norm( [1 -1] * coordinates2(elements2(j,:),:) );
13 end
14
15 % Berechnung der Nebenbedingungen für den Energieraum
16 flag = zeros(C+N,1);
17 for j = 1:2*N
18     flag(elements2(j,:)) = flag(elements2(j,:)) + 1;
19 end
20 idx = find(flag==1);
21 if isempty(idx) % geschlossene Kurve \Gamma = \partial\Omega
22     B = zeros(1,C+N);
23     for j = 1:C+N
24         B(elements2(j,:)) = B(elements2(j,:)) + h2(j)/2;
25     end
26 else % offene Kurve \Gamma \subsetneqq \partial\Omega
27     B = zeros(length(idx),C+N);
28     for j = 1:length(idx)
29         B(j,idx(j)) = 1;
30     end
31 end
32
33 % Assemblierung der Galerkin-Daten fuer das feine Netz – Randbedingungen
34 % werden direkt eingebunden
35 A = [stimaWbest(coordinates2,elements2,3) B' ; B zeros(size(B,1))];
36 b = zeros(size(A,1),1);
37 b(1:C+N) = rhs(elements2,coordinates2);
38
39 % Berechnung der Galerkin-Loesung am feinen Netz und zugehoeriger Energie
40 x2 = A\b;
41 e2 = x2'*b;
42
43 % Berechnung der Galerkin-Loesung am groben Netz und zugehoeriger Energie
44 M = zeros(N,size(A,1));

```

```

45 for j = 1:N
46     M(j,elements(j,:)) = 1/2;
47     M(j,C+j) = -1;
48 end
49 x1 = [A M' ; M zeros(N,N)]\[b ; zeros(N,1)];
50 x1 = x1(1:length(b));
51 e1 = x1'*b;
52
53 % Berechnung des nodalen Interpolanten I_h u_{h/2}
54 y1 = x2;
55 for j = 1:N
56     y1(C+j) = sum(y1(elements(j,:)))/2;
57 end
58
59 % Berechnung der Fehlerschaetzer eta_H and tilde_eta_H
60 ex = x2-x1;
61 ey = x2-y1;
62 etaH = sqrt(ex'*A*ex);
63 tetaH = sqrt(ey'*A*ey);
64
65 % Berechnung der Fehlerschaetzer mu_H and tilde_mu_H
66 gradx = zeros(2*N,1);
67 grady = zeros(2*N,1);
68 for j = 1:2*N
69     gradx(j) = abs([1 -1]*ex(elements2(j,:)))^2;
70     grady(j) = abs([1 -1]*ey(elements2(j,:)))^2;
71 end
72 muH = sqrt((gradx(1:N)+gradx(N+1:2*N))/2);
73 tmuHsquare = (grady(1:N)+grady(N+1:2*N))/2;
74
75 % Berechnung des Fehlerschaetzers tau_H
76 ttauH = zeros(N,1);
77 tmp = 0;
78 for j = 1:N
79     ttauH(j) = abs(b(j)-(x1'*A(:,j)))'/A(j,j);
80     tmp = tmp + ttauH(j)^2;
81 end
82 tauH = sqrt(tmp);
83
84 % Adaptive Netzverfeinerung mit Doerfler-Markierung und Symmetrisierung
85 if theta > 0
86     [sorttmuH,book]=sort(tmuHsquare,'descend');
87     all=theta*sum(tmuHsquare);
88     summarked=0;
89     counter = 0;
90
91     while ((all > summarked))
92         counter = counter+1;
93         summarked = summarked + sorttmuH(counter);
94     end
95     while (counter<N && (abs(sorttmuH(counter) - sorttmuH(counter+1))<=1e-8))
96         counter = counter+1;
97     end
98     marked = book(1:counter);
99     else
100         marked = 1:N;
101     end
102     tmuH = sqrt(tmuHsquare);
103
104
105 % Speicherung aller Daten
106 command = ['save ',filename,
107 ' x1 e1 x2 e2 muH etaH tetaH tmuH tauH elements coordinates elements2 coordinates2 marked'];

```

```
108 eval(command);
```

Listing A.3: Netzverfeinerung

```

1  function [elements,coordinates] = refine(elements,coordinates,marked)
2
3  K = size(coordinates,1);
4  N = size(elements,1);
5
6  % Markierung zustaetzlicher Elemente um \kappa(\TT) beschraenkt zu halten
7  elements4node = zeros(K,2);
8  for j = 1:N
9      elements4node(elements(j,1),2) = j;
10     elements4node(elements(j,2),1) = j;
11 end
12
13 neighbors = zeros(N,2);
14 for j = 1:N
15     neighbors(j,:) = [elements4node(elements(j,1),1) elements4node(elements(j,2),2)];
16 end
17
18 for j = 1:N
19     h(j) = norm( [1 -1] * coordinates(elements(j,:),:) );
20 end
21
22 flag = zeros(1,N);
23 flag(marked) = 1;
24
25 [tmp,idx] = sort(h);
26
27 for j = idx
28     if flag(j)
29         n = neighbors(j,:);
30         n = n(find(n));
31         n = n(find(h(n)>h(j)));
32         flag(n) = 1;
33     end
34 end
35
36 marked = find(flag);
37 M = length(marked);
38
39 % Speicherallokierung
40 elements(M+N,1) = 0;
41 coordinates(K+M,1) = 0;
42
43 % Verfeinerung
44 for j = 1:M
45     nr = marked(j);
46     ab = elements(nr,:);
47     % Korrdinaten der Mittelpunkte
48     coordinates(K+j,:) = 1/2*[1 1]*coordinates(ab,:);
49     % Neue Elemente/Elemente des feineren Netzes
50     elements(N+j,:) = [K+j,ab(2)];
51     elements(nr,:) = [ab(1),K+j];
52 end

```

A.1 Berechnung der Systemmatrix

Listing A.4: Berechnung der Systemmatrix in MATLAB

```

1 function A = stimaWmatlab(elements,coordinates)
2
3 N = size(elements,1);
4 C = size(coordinates,1);
5
6 % Berechnung der lokalen Netzweite
7 h = zeros(N,1);
8 for j = 1:N
9     h(j) = norm( [1 -1] * coordinates(elements(j,:),:) );
10 end
11
12 % Assemblierung der Galerkin-Matrix für W mit Hilfe der Systemmatrix des
13 % Einfachschichtpotentials V – nach Nedelecs Formel
14 V = stimaV(elements,coordinates);
15 A = zeros(C,C);
16 flag = zeros(C,1);
17
18 for j = 1:N
19     flag(elements(j,:)) = flag(elements(j,:)) + 1;
20     for k = 1:N
21         A(elements(j,:),elements(k,:)) = A(elements(j,:),elements(k,:)) ...
22             + V(j,k) /h(j) /h(k) * [1 -1 ; -1 1];
23     end
24 end

```

Listing A.4': Berechnung der Systemmatrix in C

```

1 /* *****
2 * Berechnung der Galerkin-Matrix fuer W und SixS1
3 * Wjk = < W eta_j , eta_k > mit Hut-Funktionen eta_j, eta_k
4 * *****
5 * Wu = -1/(2pi) \partial n(x)\int_Gamma \partial n(y) log|x-y| u(y) ds_y
6 * *****
7 * Berechnung unter Verwendung von Nedelec's Formel
8 *
9 * < Wu , v > = < Vu' , v' >
10 * mit u',v' als Ableitungen von u und v nach der Bogenlaenge
11 * ***** */
12 #include <math.h>
13 #include "mex.h"
14
15 #define EPS 1e-12
16 #define PI 3.141592653589793116
17
18 void mexFunction(int nlhs, mxArray* plhs[], int nrhs, const mxArray* prhs[]);
19
20 double computeWij(double a0, double a1, double b0, double b1,
21                 double c0, double c1, double d0, double d1,
22                 double eta);
23 double computeWij_analytic(double a0, double a1, double b0, double b1,
24                          double c0, double c1, double d0, double d1);
25 double computeWij_semianalytic(double a0, double a1, double b0, double b1,
26                               double c0, double c1, double d0, double d1);
27 double slpWrapper(int k, double u[2],double v[2]);
28 double slp(int k, double a, double b, double c);
29
30 double ptoseg(double p0, double p1, double a0, double a1, double b0, double b1);
31 double dist(double a0, double a1, double b0, double b1,

```

```

32         double c0, double c1, double d0, double d1);
33
34
35  /* ----- MEX interface ----- */
36  void mexFunction(int nlhs, mxArray* plhs[], int nrhs, const mxArray* prhs[]) {
37
38     const char* functionName = mexFunctionName();
39     char errorMessage[255];
40     int nC, nE;
41     int i, j;
42     double tmp;
43     double* W;
44     double* elements;
45     double* coordinates;
46     double* ptr;
47     double eta;
48     double a0,a1, b0,b1, c0,c1, d0,d1;
49     int aidx, bidx, cidx, didx;
50
51     if (nlhs != 1) {
52         sprintf(errorMessage, "Use either W = %s(coordinates,elements)\n          or W = %s
53             (coordinates,elements,eta).",
54             functionName, functionName);
55         mexErrMsgTxt(errorMessage);
56     }
57     if ((nrhs != 2) && (nrhs != 3) ) {
58         sprintf(errorMessage, "Use either W = %s(coordinates,elements)\n          or W = %s
59             (coordinates,elements,eta).",
60             functionName, functionName);
61         mexErrMsgTxt(errorMessage);
62     }
63     /* Einlesen der Daten */
64     coordinates = mxGetPr(prhs[0]);
65     nC = mxGetM(prhs[0]);          /* Anzahl der Knoten */
66
67     elements = mxGetPr(prhs[1]);
68     nE = mxGetM(prhs[1]);          /* Anzahl der Elemente */
69
70     if (nrhs == 3){                /* Falls Zulaessigkeitsparameter eta */
71         ptr = mxGetPr(prhs[2]);    /* vorhanden, so wird er eingelesen */
72         eta = *ptr;
73     }
74     else{
75         eta = 0;
76     }
77
78     /* Allokierung fuer Rueckgabe */
79     plhs[0] = mxCreateDoubleMatrix(nC,nC,mxREAL);
80     W = mxGetPr(plhs[0]);
81
82     /* Berechnung der Matrixeintraege von W basierend auf V */
83     for (i=0; i<nE; ++i) {
84
85         aidx = (int) elements[i]-1;    /* 1. Knoten des Elements Ti = [a,b] */
86         a0 = coordinates[aidx];
87         a1 = coordinates[aidx+nC];
88
89         bidx = (int) elements[i+nE]-1; /* 2. Knoten des Elements Ti = [a,b] */
90         b0 = coordinates[bidx];
91         b1 = coordinates[bidx+nC];
92

```

```

93     for (j=0; j<nE; ++j) {
94
95         cidx = (int) elements[j]-1;    /* 1. Knoten des Elements Tj = [c,d] */
96         c0 = coordinates[cidx];
97         c1 = coordinates[cidx+nC];
98
99         didx = (int) elements[j+nE]-1; /* 2. Knoten des Elements Tj = [c,d] */
100        d0 = coordinates[didx];
101        d1 = coordinates[didx+nC];
102
103        tmp = computeWij(a0,a1,b0,b1,c0,c1,d0,d1,eta);
104
105        W[aidx + cidx*nC] += tmp;
106        W[aidx + didx*nC] -= tmp;
107        W[bidx + cidx*nC] -= tmp;
108        W[bidx + didx*nC] += tmp;
109    }
110 }
111 }
112
113
114 /* ----- WRAPPER: Galerkin-Element SLP ----- */
115 double computeWij(double a0, double a1, double b0, double b1,
116                 double c0, double c1, double d0, double d1, double eta) {
117     /*
118     * INPUT: Elemente Ti = [a,b], Tj = [c,d] mit a,b,c,d \in \R^2
119     * OUTPUT: Galerkin-Integral
120     *          -1/(2pi) 1/|Tj| 1/|Ti| \int_{Tj} \int_{Ti} log|x-y| ds_y ds_x
121     */
122
123     double hi = (b0-a0)*(b0-a0) + (b1-a1)*(b1-a1); /* hi = norm(b-a)^2 */
124     double hj = (d0-c0)*(d0-c0) + (d1-c1)*(d1-c1); /* hj = norm(d-c)^2 */
125     double tmp;
126
127     /* Um mehr Stabilitaet zu erhalten, stellen wir hj<=hi sicher, sodass *
128     * die aeussere Integration stets ueber das kleinere Randgebiet geht. *
129     * Falls noetig wird Tj und Ti vertauscht. */
130
131     if (hj > hi) {
132         tmp = a0; a0 = c0; c0 = tmp;    /* Vertauschung von a und c */
133         tmp = a1; a1 = c1; c1 = tmp;
134         tmp = b0; b0 = d0; d0 = tmp;    /* Vertauschung von b und d */
135         tmp = b1; b1 = d1; d1 = tmp;
136         tmp = hi; hi = hj; hj = tmp;    /* Nun gilt hj <= hi */
137     }
138
139
140     if ( eta == 0) { /* Berechnung aller Eintraege erfolgt analytisch */
141         return computeWij_analytic(a0,a1, b0,b1, c0,c1, d0,d1);
142     }
143     else { /* Berechnung der zulaessigen Eintraege erfolgt semi-analytisch*/
144         if ( dist(a0,a1,b0,b1,c0,c1,d0,d1) > eta*sqrt(hj) ) {
145             return computeWij_semianalytic(a0,a1, b0,b1, c0,c1, d0,d1);
146         }
147         else {
148             return computeWij_analytic(a0,a1, b0,b1, c0,c1, d0,d1);
149         }
150     }
151 }
152
153
154 /* ----- Galerkin-Element SLP (analytische Berechnung) ----- */
155 double computeWij_analytic(double a0, double a1, double b0, double b1,

```

```

156         double c0, double c1, double d0, double d1) {
157
158     /*
159     * INPUT: Elemente Ti = [a,b], Tj = [c,d] mit a,b,c,d \in \R^2
160     * OUTPUT: Galerkin-Integral
161     *         -1/(2pi) 1/|Tj| 1/|Ti| \int_{Tj} \int_{Ti} log|x-y| ds_y ds_x
162     */
163
164     double hi = (b0-a0)*(b0-a0) + (b1-a1)*(b1-a1);      /* hi = norm(b-a)^2 */
165     double hj = (d0-c0)*(d0-c0) + (d1-c1)*(d1-c1);      /* hj = norm(d-c)^2 */
166     double tmp, val, det;
167     double x[2], y[2], z[2];
168     double zxp[2], zxm[2], zyp[2], zym[2];
169     double lambda, mu;
170
171     x[0] = 0.5*(b0 - a0);          /* x = (b-a)/2 */
172     x[1] = 0.5*(b1 - a1);
173     y[0] = 0.5*(c0 - d0);          /* y = (c-d)/2 */
174     y[1] = 0.5*(c1 - d1);
175     z[0] = 0.5*(a0 + b0 - c0 - d0); /* z = (a+b-c-d)/2 */
176     z[1] = 0.5*(a1 + b1 - c1 - d1);
177
178     zxp[0] = z[0] + x[0];          /* zxp = z+x = (2b-c-d)/2 */
179     zxp[1] = z[1] + x[1];
180     zxm[0] = z[0] - x[0];          /* zxm = z-x = (2a-c-d)/2 */
181     zxm[1] = z[1] - x[1];
182     zyp[0] = z[0] + y[0];          /* zyp = z+y = (a+b-2d)/2 */
183     zyp[1] = z[1] + y[1];
184     zym[0] = z[0] - y[0];          /* zym = z-y = (a+b-2c)/2 */
185     zym[1] = z[1] - y[1];
186
187     /* Die Berechnung erfolgt unterschiedlich je nachdem, ob *
188     * Ti und Tj parallel (det = 0) sind oder nicht.          */
189
190     det = x[0]*y[1] - x[1]*y[0];
191     /* Falls x und y linear abhaengig (Ti und Tj sind parallel) */
192     if ( fabs(det) <= EPS*sqrt(hi*hj) ) {
193         if ( fabs(x[0]) < fabs(x[1]) )
194             lambda = y[1] / x[1];
195         else
196             lambda = y[0] / x[0];
197
198         val = 0.5*( lambda * (slpWrapper(1, y, zxm) - slpWrapper(1, y, zxp))
199                 + slpWrapper(0, x, zyp) + slpWrapper(0, x, zym) );
200     }
201     /* Falls x und y linear unabhaengig (Ti und Tj sind nicht parallel) */
202     else {
203         lambda = (z[0]*y[1] - z[1]*y[0]) /det;
204         mu = (x[0]*z[1] - x[1]*z[0]) /det;
205
206         val = 0.25 * ( -8 + (lambda+1)*slpWrapper(0, y, zxp)
207                     - (lambda-1)*slpWrapper(0, y, zxm)
208                     + (mu+1)*slpWrapper(0, x, zyp)
209                     - (mu-1)*slpWrapper(0, x, zym) );
210     }
211     /* Rueckgabe: - 1/(2*PI) * |Ti|/2 * |Tj|/2 * val */
212     return -0.125*val /PI;
213 }
214
215
216 /* ----- Galerkin-Element SLP (semi-analytische Berechnung) ----- */
217 double computeWij_semianalytic(double a0, double a1, double b0, double b1,
218                                double c0, double c1, double d0, double d1){

```

```

219
220  /*
221  * INPUT:  Elemente  $T_i = [a,b]$ ,  $T_j = [c,d]$  mit  $a,b,c,d \in \mathbb{R}^2$ 
222  * OUTPUT: Approxiamtion des Galerkin-Integrals
223  *          $-1/(2\pi) \int_{T_j} \int_{T_i} \log|x-y| ds_y ds_x$ ,
224  *         wobei die aeussere Integration mittels Gauss-Quadrature
225  *         realisiert wird.
226  */
227
228  int k;
229  double u[2], v[2];
230  double val = 0;
231  double sx0 = 0;
232  double sx1 = 0;
233
234  /* 16-Punkt Gauss-Quadratur auf [-1,1] */
235  const int order = 16;
236  const double wht[] =
237  {0.027152459411754, 0.062253523938648, 0.095158511682493, 0.124628971255534,
238   0.149595988816577, 0.169156519395003, 0.182603415044924, 0.189450610455069,
239   0.189450610455069, 0.182603415044924, 0.169156519395003, 0.149595988816577,
240   0.124628971255534, 0.095158511682492, 0.062253523938648, 0.027152459411753 };
241  const double pkt[] =
242  {-0.989400934991650, -0.944575023073233, -0.865631202387832, -0.755404408355003,
243   -0.617876244402644, -0.458016777657227, -0.281603550779259, -0.095012509837637,
244   0.095012509837637, 0.281603550779259, 0.458016777657228, 0.617876244402644,
245   0.755404408355003, 0.865631202387832, 0.944575023073232, 0.989400934991650 };
246
247  u[0] = 0.5*(a0-b0);
248  u[1] = 0.5*(a1-b1);
249
250  for (k=0; k<order; ++k){
251
252      /* affine Transformation der Integrationsvariablen */
253      sx0 = ((1-pkt[k])*c0+(1+pkt[k])*d0)*0.5;
254      sx1 = ((1-pkt[k])*c1+(1+pkt[k])*d1)*0.5;
255
256      /* Berechnung des inneren Produkts wht*func(sx) */
257      v[0] = sx0 - 0.5*(a0+b0);
258      v[1] = sx1 - 0.5*(a1+b1);
259
260      val += wht[k]*slpWrapper(0, u, v);
261  }
262  /* Rueckgabe:  $-1/(2\pi) * 1/2 * 1/2 * 0.5 * \int (\log |.|^2) *$ 
263  return -0.0625*val /PI;
264 }
265
266
267
268
269
270 /* ----- SLP ----- */
271 double slpWrapper(int k, double u[2], double v[2]) {
272  /*
273  * INPUT: Vektoren  $u, v \in \mathbb{R}^2$ , Integer  $k$ 
274  * OUTPUT: Wert des Integrals vom SLP-Typ
275  *          $\int_{-1}^{+1} s^k \log |s*u+v|^2 ds$ 
276  */
277
278  double a = u[0]*u[0] + u[1]*u[1];          /* a = <u,u> */
279  double b = 2 * ( u[0]*v[0] + u[1]*v[1] ); /* b = 2 <u,v> */
280  double c = v[0]*v[0] + v[1]*v[1];          /* c = <v,v> */

```

```

281  return slp(k,a,b,c);
282  }
283
284
285  double slp(int k, double a, double b, double c) {
286  /*
287   * INPUT: Skalare a,c>0 und b \in \R, Integer k
288   * OUPUT: Wert des Integrals vom SLP-Typ
289   *        \int_{-1}^{+1} s^k \log |a*s^2+b*s+c| ds
290   */
291
292  double val;
293  double tmp;
294  double D;
295
296  /* Feststellung, ob Diskriminante ist positiv oder Null */
297  tmp = 4*a*c - b*b;      /* Nach der Theorie gilt tmp ≥ 0 */
298  if (tmp > EPS * 4*a*c)
299      D = sqrt(tmp);
300  else
301      D = 0;
302
303  /* Falls k = 0 */
304  if (D == 0) {
305      tmp = b + 2*a;
306      if (fabs(tmp) > EPS * fabs(a))
307          val = tmp * log( 0.25*tmp*tmp /a );
308      else
309          val = 0;
310      tmp = b - 2*a;
311      if (fabs(tmp) > EPS * fabs(a))
312          val -= tmp * log( 0.25*tmp*tmp /a );
313      val = 0.5*val /a - 4;
314  }
315  /* Falla D > 0 */
316  else {
317      tmp = c - a;
318      if (fabs(tmp) < EPS * fabs(c))
319          val = 0.5*PI;
320      else if (a < c)
321          val = atan( D /tmp );
322      else
323          val = atan( D /tmp ) + PI;
324
325      val = ( 0.5*( (b+2*a) * log(a+b+c) - (b-2*a) * log(a-b+c) ) + D*val )/a - 4;
326  }
327
328  /* Falls k = 1 */
329  if (k==1) {
330      val = -b*(2+val);
331      tmp = a+b+c;
332      if (fabs(tmp) > EPS*fabs(a))
333          val += tmp * log(tmp);
334      tmp = a-b+c;
335      if (fabs(tmp) > EPS*fabs(a))
336          val -= tmp * log(tmp);
337      val /= (2*a);
338  }
339
340  return val;
341  }
342
343  /* ----- Dist(Ti,Tj) ----- */

```

```

344 * "dist" fragt zuerst, ob sich die beiden Intervalle schneiden. Wenn *
345 * dies der Fall ist, wird Null zurueckgegeben. Andernfalls berechnet die*
346 * Funktion den kleinsten Abstand von einem Endpunkt zum jeweils anderen *
347 * Intervall und zwar fuer jeden der vier Endpunkte. Das Minimum der vier*
348 * Distanzen stellt den Rueckgabewert dar. *
349 * ----- */
350 double dist(double a0, double a1, double b0, double b1,
351             double c0, double c1, double d0, double d1){
352
353     double test;
354     double best = sqrt((a0-c0)*(a0-c0)+(a1-c1)*(a1-c1));
355     double val;
356
357     /* Falls die Intervalle einander schneiden */
358     if ((fabs(a0-d0)≤EPS && fabs(a1-d1)≤EPS) || (fabs(b0-c0)≤EPS && fabs(b1-c1)≤EPS))
359         best=0;
360
361     /* Falls die Intervalle einander nicht schneiden */
362     else{
363         /* Berechnung des Abstandes vom Punkt A zum Intervall [C,D]: */
364         test = ptoseg(a0, a1, c0, c1, d0, d1);
365         if ((test-best)≤EPS){
366             best = test;
367         }
368         /* Berechnung des Abstandes vom Punkt B zum Intervall [C,D]: */
369         test = ptoseg(b0, b1, c0, c1, d0, d1);
370         if ((test-best)≤EPS){
371             best = test;
372         }
373         /* Berechnung des Abstandes vom Punkt C zum Intervall [A,B]: */
374         test = ptoseg(c0, c1, a0, a1, b0, b1);
375         if ((test-best)≤EPS){
376             best = test;
377         }
378         /* Berechnung des Abstandes vom Punkt D zum Intervall [A,B]: */
379         test = ptoseg(d0, d1, a0, a1, b0, b1);
380         if ((test-best)≤EPS){
381             best = test;
382         }
383     }
384
385     return best;
386 }
387
388
389 /* ----- ptoseg ----- */
390 * Diese Funktion behandelt ein Intervall als parametrisierten Vektor, *
391 * wobei der Parameter t zwischen 0 und 1 variiert. Dabei findet sie *
392 * jenen Wert von t, sodass die Distanz zwischen Punkt P und dem Segment *
393 * [A,B] minimal wird. Wenn nun t zwischen 0 und 1 liegt, so liegt der *
394 * jener Punkt des Intervalls, der dem P am nächsten ist, im Intervall. *
395 * Ansonsten wird die kleinste Distanz durch den Abstand |P-A| oder |P-B|*
396 * gegeben. "ptoseg" berechnet nach dieser Idee den kleinsten Abstanden *
397 * zwischen P und dem Intervall [A,B]. *
398 * ----- */
399 double ptoseg(double p0, double p1, double a0, double a1,
400               double b0, double b1){
401
402     double t, tmp1, tmp2;
403     double val;
404
405     tmp1 = b0-a0;
406     tmp2 = b1-a1;

```

```

407
408 if (tmp1≤EPS && tmp2≤EPS){
409     tmp1 = p0-a0;
410     tmp2 = p1-a1;
411 }
412 else{
413     t = ((p0-a0)*(b0-a0)+(p1-a1)*(b1-a1))/((b0-a0)*(b0-a0)+(b1-a1)*(b1-a1));
414
415     if (t≤EPS){
416         tmp1 = p0-a0;
417         tmp2 = p1-a1;
418     }
419     else if ((1-t)≤EPS){
420         tmp1 = p0-b0;
421         tmp2 = p1-b1;
422     }
423     else{
424         tmp1 = p0 - a0 - t*tmp1;
425         tmp2 = p1 - a1 - t*tmp2;
426     }
427 }
428 val = sqrt(tmp1*tmp1 + tmp2*tmp2);
429 return val;
430 }

```

A.2 Berechnung der rechten Seite

Listing A.5: Rechte Seite

```

1 function val = rhs(elements,coordinates)
2
3 %-----%
4 % Berechnung der Approximation der RHS für das Galerkin-Verfahren %
5 %     val(j) = < (1/2-K')*\phi ; \eta_{T-j} > %
6 %     = (1/2) * < \phi ; \eta_{T-j} > - < \phi ; K \eta_{T-j} > %
7 % mit affinen Funktionen, wobei K' im Bezug auf die Fundamentalloesung %
8 % G(z) = -1/(2*PI) * log |z| der Laplace-Gleichung berechnet wird. %
9 %-----%
10
11
12 EPS = 1e-13;
13
14 p = 16; % Anzahl der Quadraturpunkte
15 plog = 20;
16
17 [pkt,wht] = gauss(p); % Punkte und Gewichte für Quadratur
18 [pktlog,whtlog] = gausslog(plog);
19
20 N = size(elements,1); % Anzahl d. Zeilen d. Matrix "elements"
21 K = size(coordinates,1); % Anzahl d. Zeilen d. Matrix "coordinates"
22 val = zeros(K,1); % Auswertung in Spaltenvektor mit K Zeilen
23
24 % Berechnung des doppelten Integrals
25 for j = 1:N
26     nodesj = elements(j,:); % Beschreibung d. Knoten, durch Auslesen
27 % der j-ten Zeile des Nx2-Matrix "elements"
28     aj = coordinates(elements(j,1),:); % Koordinaten der Endpunkte
29     bj = coordinates(elements(j,2),:); % des j-ten Elements

```

```

30     dj = bj-aj;                % norm(dj) ist Laenge des j-ten Elements
31
32     sx = ((1-pkt)*aj+(1+pkt)*bj)/2;    % affine Transformation
33     val(nodesj) = val(nodesj) + [wht*(phi(sx,aj,bj).*((1-pkt)/2)); ...
34         wht*(phi(sx,aj,bj).*((1+pkt)/2)) ]*norm(dj)/4;
35
36     for k = 1:N
37         nodesk = elements(k,:);
38         ak = coordinates(elements(k,1),:);
39         bk = coordinates(elements(k,2),:);
40         dk = bk-ak;
41
42         % Überprüfen, ob zwei Intervalle auf einer Geraden liegen
43
44         c1=aj+bj-2*ak;          % Hilfsvariable zur Ueberpruefung, ob aj
45         c2=aj+bj-2*bk;          % bzw. bj auf Geraden mit [ak,bk] liegt
46         update = zeros(2,1);    % Initialisierung bzw. Speicherentleerung
47
48         % Wenn aj bzw. bj NICHT auf einer Geraden mit [ak,bk] liegen
49         if(abs(c1(1)*dj(2)-c1(2)*dj(1))>=EPS || ...
50             abs(c2(1)*dj(2)-c2(2)*dj(1))>=EPS)
51             if ak==bj | bk==aj    % [ak,bk] und [aj,bj] beruehren sich
52                 c = ones(p,1)*(ak+bk)-2*sx;
53                 regular1 = zeros(p,2);
54                 regular2 = zeros(p,2);
55                 if ak == bj        % Berührung in den Endpunkten ak, bj
56                     for ell = 1:p
57                         regular1(ell,:) = ...
58                             [log(norm(sx(ell,:)-bk)/norm(dj)), ...
59                             log(norm(sx(ell,:)-bk)/norm(dj))];
60                         D = abs(c(ell,1)*dk(2)-c(ell,2)*dk(1));
61                         regular2(ell,:) = ...
62                             [arctan(sx(ell,:),ak,bk)/D, ...
63                             arctan(sx(ell,:),ak,bk)/D];
64                     end
65                 reg = regular(sx,aj,bj,ak,bk,wht,p,regular1,regular2);
66                 sxlog = ones(plog,1)*aj+(1-pktlog)*dj;
67                 sing = singular(sxlog,aj,bj,ak,bk,1,whtlog,plog);
68             else                    % Berührung in den Endpunkten aj, bk
69                 for ell = 1:p
70                     regular1(ell,:) = ...
71                         [log(norm(dj)/norm(sx(ell,:)-ak)), ...
72                         log(norm(dj)/norm(sx(ell,:)-ak))];
73                     D = abs(c(ell,1)*dk(2)-c(ell,2)*dk(1));
74                     regular2(ell,:) = [arctan(sx(ell,:),ak,bk)/D, ...
75                     arctan(sx(ell,:),ak,bk)/D];
76                 end
77                 reg = regular(sx,aj,bj,ak,bk,wht,p,regular1,regular2);
78                 sxlog = ones(plog,1)*aj+pktlog*dj;
79                 sing = singular(sxlog,aj,bj,ak,bk,-1,whtlog,plog);
80             end
81             update = -(reg + sing)'/(2*pi*norm(dk)*norm(dk));
82         else                    % Falls [ak,bk] und [aj,bj] sich nicht beruehren
83             update = -[wht*integrand(sx,aj,bj,ak,bk,[1,0]); ...
84                 wht*integrand(sx,aj,bj,ak,bk,[0,1])] * 0.5*norm(dj);
85         end
86         val(nodesk) = val(nodesk) + update;
87     end
88 end
89 end
90
91
92

```

```

93 %-----
94 function val = integrand(x,aj,bj,ak,bk,eta)
95
96 val = phi(x,aj,bj).*dlp(x,ak,bk,eta);
97
98
99 %-----
100 function val = regular(x,aj,bj,ak,bk,wht,p,regular1,regular2)
101
102 c = ones(p,1)*(ak+bk)-2*x;
103 dj = bj-aj;
104 dk = bk-ak;
105 vec = ones(p,1);
106 fac = phi(x,aj,bj).*(c*[-dk(2),dk(1)]');
107
108 val = [wht*(fac.*((vec*bk-x)*dk').*regular2(:,1) + (-1/2)*regular1(:,1)), ...
109 wht*(fac.*((x-vec*ak)*dk').*regular2(:,2) + (1/2)*regular1(:,2))]*0.5*norm(dj);
110
111
112 %-----
113 function val = singular(x,aj,bj,ak,bk,signum,wht,p)
114
115 dj = bj-aj;
116 dk = bk-ak;
117 vec = ones(p,1);
118 fac = signum*(1/2)*norm(dj);
119
120 val = [fac*wht*(phi(x,aj,bj).*(vec*(ak+bk)-2*x)*[-dk(2),dk(1)]'), ...
121       -1*fac*wht*(phi(x,aj,bj).*(vec*(ak+bk)-2*x)*[-dk(2),dk(1)]')];
122
123
124 %-----
125 function val = dlp(x,a,b,eta) % Berechnung des Doppelschichtpotentials
126
127 EPS = 1e-11;
128
129 val = zeros(size(x,1),1);
130 d=b-a;
131
132 for j = 1:size(x,1)
133     c = a+b-2*x(j,:);
134     D = abs(c(1)*d(2)-c(2)*d(1));
135     e = [(b-x(j,:))*d', (x(j,:)-a)*d'];
136     if D <= EPS*norm(d)
137         val(j,1) = 0;
138     else
139         val(j,1) = ( ((eta(2)-eta(1))/2)*log(norm(x(j,:)-b)/norm(x(j,:)-a)) ...
140                   +(eta*e')*arctan(x(j,:),a,b)/D ) ...
141                   *(c*[-d(2), d(1)]'/(2*pi*norm(d)*norm(d)));
142     end
143 end
144
145
146 %-----
147 function val = arctan(x,a,b) % Berechnung des Arcustangens
148 d = b-a;
149 c = a+b-2*x;
150 D = abs(c(1)*d(2)-c(2)*d(1));
151 if d*d' ~ = c*c' % In diesem Fall kann man Add.thm. nutzen
152     val = atan( D/( (a-x)*(b-x)'*2 ) );
153     if d*d' > c*c' % ggf. muss man +pi addieren
154         val = val+pi;
155     end

```

```

156 else                                     % Falls das Add.thm. nicht geht
157     val = atan( (b-x)*d'*2/D )+atan( (x-a)*d'*2/D );
158 end

```

A.3 Beispiel am quadratförmigen Rand

Listing A.6: Dirichletdaten

```

1 function val=g(x)                         % Dirichletdaten
2 val = sinh(2*pi*x(:,1)) .* cos(2*pi*x(:,2));

```

Listing A.7: Oberflächengradient der Dirichletdaten

```

1 function val=gradg(x,a,b) % Oberflaechengradient
2
3 grad(:,1) = 2*pi * cosh(2*pi*x(:,1)) .* cos(2*pi*x(:,2));
4 grad(:,2) = -2*pi * sinh(2*pi*x(:,1)) .* sin(2*pi*x(:,2));
5 t = (b-a)'/norm(b-a); % Tangentialvektor
6
7 for j=1:size(x,1)
8     val(j,1)=grad(j,:) * t;
9 end

```

Listing A.8: Neumannndaten

```

1 function val=phi(x,a,b)
2
3 n=[b(2)-a(2) a(1)-b(1)]'/norm(b-a);
4 alpha = 2*pi;
5 grad(:,1)=alpha*cosh(alpha*x(:,1)).*cos(alpha*x(:,2));
6 grad(:,2)=-alpha*sinh(alpha*x(:,1)).*sin(alpha*x(:,2));
7
8 for j=1:size(x,1)
9     val(j,1)=grad(j,:)*n;
10 end

```

Literaturverzeichnis

- [1] M. ABRAMOWITZ, I.A. STEGUN. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 55, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964
- [2] H. W. ALT. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1985
- [3] M. AURADA, S. FERRAZ-LEITE, D. PRAETORIUS. *A new notion of convergence for adaptive boundary element methods*. work in progress, 2009
- [4] J. BERGH, J. LÖFSTRÖM. *Interpolation spaces. An introduction*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976
- [5] S. BÖRM, L. GRASEDYCK, W. HACKBUSCH. *Hierarchical Matrices*. Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig, 2003
- [6] S. BÖRM, M. LÖHNDORF, J.M. MELENK. *Approximation of integral operators by variable-order interpolation*. Numer. Math. 99, no. 4, 605–643, 2005
- [7] C. CARSTENSEN. *An a posteriori error estimate for a first-kind integral equation*. Math. Comp. 66, no. 217, 139–155, 1997
- [8] C. CARSTENSEN, D. PRAETORIUS. *Averaging techniques for the a posteriori BEM error control for a hypersingular integral equation in two dimensions*. SIAM J. Sci. Comput. 29, no. 2, 782–810 (electronic), 2007
- [9] C. CARSTENSEN, D. PRAETORIUS. *Averaging techniques for a posteriori error control in finite element and boundary element analysis*. Boundary element analysis, 29–59, Lect. Notes Appl. Comput. Mech., 29, Springer, Berlin, 2007.
- [10] J. CASCON, C. KREUZER, R. NOCHETTO, K. SIEBERT. *Quasi-optimal convergence rate for an adaptive finite element method*. SIAM J. Numer. Anal. 46, no. 5, 2524–2550, 2008
- [11] W. DAHMEN, R. SCHNEIDER. *Wavelets on manifolds. I. Construction and domain decomposition*. SIAM J. Math. Anal. 31, no. 1, 184–230 (electronic), 1999
- [12] W. DÖRFLER, R. NOCHETTO. *Small data oscillation implies the saturation assumption*. Numer. Math. 91, no. 1, 1–12, 2002
- [13] C. ERATH, S. FERRAZ-LEITE, S. A. FUNKEN, D. PRAETORIUS. *Energy norm based a posteriori error estimators for boundary element methods in two dimensions*. Accepted for publication in Appl. Numer. Math., 2009
- [14] L.C. EVANS. *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998

- [15] S. FERRAZ-LEITE, C. ORTNER, D. PRAETORIUS. *Adaptive boundary element method: simple error estimators and convergence*. Oberwolfach Workshop on Analysis of Boundary Element Methods, Oberwolfach, Analysis of Boundary Element Methods, EMS Publishing House, Oberwolfach Report 19/2008, 2008
- [16] S. FERRAZ-LEITE, D. PRAETORIUS. *Simple a posteriori error estimators for the h-version of the boundary element method*. Computing, 83, 135–162, 2008
- [17] G. GRAHAM, W. HACKBUSCH, S.A. SAUTER. *Finite elements on degenerate meshes: inverse-type inequalities and applications*. IMA J. Numer. Anal. 25, no. 2, 379–407, 2005
- [18] L. GREENGARD, V. ROKHLIN. *A new version of the fast multipole method for the Laplace equation in three dimensions*. Acta numer., no. 6, 229–269, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997
- [19] W. HACKBUSCH. *A sparse matrix arithmetic based on \mathcal{H} -matrices. I. Introduction to \mathcal{H} -matrices*. Computing 62, no. 2, 89–108, 1999
- [20] W. HACKBUSCH, Z.P. NOWAK. *On the fast matrix multiplication in the boundary element method by panel clustering*. Numer. Math. 54, no. 4, 463–491, 1989
- [21] N. HEUER. *An hp-adaptive refinement strategy for hypersingular operators on surfaces*. Numer. Methods Partial Differential Equations 18, no. 3, 396–419, 2002
- [22] N. HEUER, M.E. MELLADO, E.P. STEPHAN. *hp-adaptive two-level methods for boundary integral equations on curves*. Computing 67, no. 4, 305–334, 2001
- [23] H. HEUSER. *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*. Mathematische Leitfäden, B. G. Teubner, Stuttgart, 1980
- [24] K. KÖNIGSBERGER. *Analysis 2*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2003
- [25] M. MAISCHAK, P. MUND, E.P. STEPHAN. *Adaptive multilevel BEM for acoustic scattering*. Symposium on Advances in Computational Mechanics, Vol. 2 (Austin, TX, 1997), Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 150, no. 1-4, 351–367, 1997
- [26] P. MUND, E.P. STEPHAN, J. WEISSE. *Two-level methods for the single layer potential in R^3* . Computing 60, no. 3, 243–266, 1998
- [27] J. NEČAS. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris; Academia, Éditeurs, Prague, 1967
- [28] D. PRAETORIUS. *Introduction to Boundary Element Method*. Vienna University of Technology, 2007
- [29] D. PRAETORIUS. *Lecture Notes: Hierarchische Matrizen*. Vienna University of Technology, 2007
- [30] S. A. SAUTER, C. SCHWAB. *Randelementmethoden. Analyse, Numerik und Implementierung schneller Algorithmen*. B. G. Teubner Verlag, Stuttgart Leipzig Wiesbaden, 2004
- [31] O. STEINBACH. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme*. B. G. Teubner Verlag, Stuttgart Leipzig Wiesbaden, 2003
- [32] A.H. STROUD, D. SECREST. *Gaussian quadrature formulas*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1966
- [33] J. WLOKA. *Partielle Differentialgleichungen. Sobolevräume und Randwertaufgaben*. Mathematische Leitfäden, B. G. Teubner, Stuttgart, 1982.