TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

BACHELORARBEIT

Adaptive Finite Elemente Methode für endliche viele Zielfunktionale

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Univ.-Prof. Dr. Dirk Praetorius
Dr. Michael Innerberger

durch

Jakob Berner
Matrikelnummer: 11736057

Wien, am 15. Mai 2023

Danksagung

Zuallererst möchte ich mich bei meiner Mutter, Christine Berner, für die bedingungslose Unterstützung bedanken, die ich während des Studiums, des Schreibens der Bachelorarbeit, aber auch schon mein ganzes Leben lang bekommen habe. Ohne sie wäre ich heute sicher nicht da, wo ich jetzt bin. Weiters würde ich gerne meinem Opa, Alois Berner, meinen Dank ausdrücken, da er mir den richtigen Weg, selbstverständlich zur TU Wien, gezeigt und mir auch immer Stärke gegeben hat, wenn ich sie gebraucht habe. Auch bei meinem Onkel, Franz Berner, möchte ich mich für seine Unterstützung und kreativen Lösungsansätze, wenn ich selber nicht weitergewusst habe, bedanken. Besonderer Dank kommt auch meinen beiden Betreuern Univ.-Prof. Dr. Praetorius und Dr. Innerberger zu. Abgesehen von ihrer enormen fachlichen Expertise und hervorragenden, gütigen und sehr geduldigen inhaltlichen Beratung, haben die beiden es geschafft, den gesamten Schreibprozess vollkommen ungezwungen und anregend zu machen.

Herzlichen Dank!

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 15. Mai 2023

Name des Autors

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

> What is the difference between method and device? A method is a device which you use twice.
>
> *George Polya*

Oftmals ergibt sich bei der Beobachtung von dynamischen Systemen, wie etwa der Verteilung von Wärme um ein Lagerfeuer oder die Entwicklung eines Aktienkurses, die Frage beziehungsweise das Problem, deren Verhalten charakterisieren und bestimmen zu wollen. Dabei stößt man früher oder später meist auf partielle Differentialgleichungen (PDE), im obigen Fall die Wärmeleitungsgleichung oder das Black-Scholes Modell, deren Lösungen fast nie exakt bestimmt werden können. In solchen Situationen greift dann das Zahnrad der numerischen Mathematik und liefert quantitative Lösungen auch dort, wo man sich keine mehr erhofft. Diese Lösungen ergeben sich in den meisten Fällen mit der Finiten Elemente Methode (FEM), einem schon lang etablierten Ansatz, der ursprünglich aus dem Ingenieurwesen kommt. Die Grundidee der FEM ist es, das Gebiet, in dem die PDE gelöst werden soll, in kleinere Segmente (Elemente) zu unterteilen und dann eine Lösung zu „bauen“, deren Parameter auf das erwartete Verhalten in den jeweiligen Elementen angepasst werden können. Diesen Vorgang kann man auch adaptiv (adaptive FEM bzw. AFEM) gestalten, wobei dann in jeder Iteration die Unterteilung des Gebietes dort feiner wird, wo der Fehler zur eigentlichen Lösung verhältnismäßig groß ist bzw. scheint. Ist man allerdings nicht an der gesamten Lösung der PDE, sondern nur an gewissen Bereichen interessiert, bietet sich die zielorientierte AFEM (engl. goal–oriented AFEM bzw. GOAFEM) an, bei der der adaptive Prozess so kalibriert ist, dass die Lösung in besagten Bereichen, die durch die Ziele bzw. Goal–Funktionale vorgegeben sind, besonders gut approximiert wird. In [Mommer-Stevenson, 2009] und [Feischl et al., 2016] wurde gezeigt, dass für ein solches Ziel gewisse Algorithmen (Algorithmus 2 und 3) ideal konvergieren. Das Anliegen dieser Arbeit ist es, dieses Ergebnis von einem Ziel auf beliebig, aber endliche viele Ziele zu erweitern.

2 Abstrakte Idee von GOAFEM im Rahmen des Lemmas von Lax–Milgram

Im Folgenden soll der abstrakte Rahmen für die zielorientierte AFEM (adaptive Finite Elemente Methode) und damit auch für die vorliegende Arbeit erläutert werden. Sei dazu $\mathcal{X}$ ein Hilbertraum ber $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$ und induzierter Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}^{1/2}$, $\mathcal{X}^*$ der topologische Dualraum und $a(\cdot,\cdot)\colon \mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ eine stetige und koerzive[1] Bilinearform, d.h.

$$\begin{aligned} \exists C_{\text{stet}} > 0\,\forall u,v\in\mathcal{X}\colon\; a(u,v) &\leqslant C_{\text{stet}}\,\|u\|_{\mathcal{X}}\|v\|_{\mathcal{X}},\\ \exists \kappa > 0\,\forall u\in\mathcal{X}\colon\; a(u,u) &\geqslant \kappa\,\|u\|_{\mathcal{X}}^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Weiters sei $f\in\mathcal{X}^*$ ein beliebiges stetiges Funktional[2] und $u\in\mathcal{X}$ die Lösung von

$$a(u,v) \;=\; f(v) \quad \text{für alle } v\in\mathcal{X}. \tag{2.2}$$

Das Lemma von Lax–Milgram gewährt, dass diese Lösung u existiert und eindeutig ist.

Lemma 2.1 (Lax–Milgram)**.** *Seien $\mathcal{X}$ ein Hilbertraum, $a(\cdot,\cdot)\colon \mathcal{X}\times\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ eine stetige und koerzive Bilinearform und $f\in\mathcal{X}^*$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $u\in\mathcal{X}$, welches* (2.2) *löst.*

Beweis. Siehe [Jüngel, 2022]. □

Ziel der GOAFEM (engl. Goal-Oriented AFEM) ist es, für ein Funktional $g\in\mathcal{X}^*$, einen Zielwert $g(u)$ und dann im Weiteren $g_1(u),\dots,g_n(u)$ zu bestimmen. Nur in den seltensten Fällen lässt sich eine exakte Lösung u von (2.2) explizit finden. Sei also $\mathcal{X}_\bullet\subset\mathcal{X}$ ein endlichdimensionaler Unterraum mit einhergehender Triangulierung $\mathcal{T}_\bullet$ von $\Omega\subset\mathbb{R}^d$.

[1] So wie Koerzivität in (2.1) definiert ist, entspricht sie der Elliptizität wie man sie aus der Literatur kennt.

[2] Üblicherweise kommen $a(\cdot,\cdot)$ sowie $f(\cdot)$ aus der schwachen Formulierung eines linearen, in diesem Fall elliptischen, Randwertproblems über einer beschränkten und offenen Menge $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ mit Lipschitz–Rand.

Definition. *Für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ bezeichne $\mathcal{T} \subset \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ eine Triangulierung von Ω, falls:*

- $\#\mathcal{T} < \infty$,
- $\forall T \in \mathcal{T}\colon T$ *ist abgeschlossen und zusammenhängend,*
- $\forall T \in \mathcal{T}\colon \lambda(T) > 0$, *wobei λ das d-dimensionale Lebesgue Maß ist,*
- $\forall T, T' \in \mathcal{T}$ *mit* $T \neq T'\colon \lambda(T \cap T') = 0$,
- $\bigcup_{T\in\mathcal{T}} T = \overline{\Omega}$.

Proposition 2.2. *Sei $\mathcal{X}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{X}_\bullet \subset \mathcal{X}$ ein endlichdimensionaler Unterraum und $a(\cdot,\cdot)\colon \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ eine stetige und koerzive Bilinearform auf $\mathcal{X}$. Dann ist $a(\cdot,\cdot)$ auch eine stetige und koerzive Bilinearform auf $\mathcal{X}_\bullet \times \mathcal{X}_\bullet$.*

Beweis. Seien $u, v \in \mathcal{X}$ beliebig und C_{stet} und κ die Konstanten für Stetigkeit und Koerzivität von $a(\cdot,\cdot)$. Dann gelten beide Abschätzungen von (2.1) für alle $u, v \in \mathcal{X}_\bullet$, da $\mathcal{X}_\bullet \subset \mathcal{X}$. □

Demnach lässt sich Lemma 2.1 auch auf $\mathcal{X}_\bullet$ anwenden und es gibt eine eindeutige Galerkin–Lösung $U_\bullet \in \mathcal{X}_\bullet$ zu

$$a(U_\bullet, V_\bullet) \;=\; f(V_\bullet) \quad \text{für alle } V_\bullet \in \mathcal{X}_\bullet. \tag{2.3}$$

Zusätzlich lässt sich noch mit dem Zielfunktional g das duale Problem

$$a(v, z) \;=\; g(v) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X} \tag{2.4}$$

formulieren, für welches es wieder eine eindeutige Lösung $z \in \mathcal{X}$ (Lax–Milgram) und eine eindeutige Galerkin Lösung $Z_\bullet \in X_\bullet$ zu

$$a(V_\bullet, Z_\bullet) \;=\; g(V_\bullet) \quad \text{für alle } V_\bullet \in \mathcal{X}_\bullet \tag{2.5}$$

gibt. Insgesamt erhält man also

$$\begin{aligned}
|g(u) \;-\; g(U_\bullet)| &= |g(u) \;-\; g(U_\bullet) - f(Z_\bullet) + f(Z_\bullet)| \\
&= |a(u, z) - a(U_\bullet, z) - a(u, Z_\bullet) + a(U_\bullet, Z_\bullet)| \\
&= |a(u - U_\bullet, z - Z_\bullet)| \\
&\leqslant C_{\text{stet}}\, \|u - U_\bullet\|_{\mathcal{X}} \|z - Z_\bullet\|_{\mathcal{X}}.
\end{aligned}$$

Sowohl $\|u - U_\bullet\|_{\mathcal{X}}$ als auch $\|z - Z_\bullet\|_{\mathcal{X}}$ können mittels *a posteriori* Fehlerschätzern $\eta_{u,\bullet}$ bzw. $\eta_{z,\bullet}$ kontrolliert werden, vgl. [Grätsch-Bathe, 2005]. Mit einer geeigneten Konstante $C_{\text{rel}} > 0$ gilt:

$$\|u - U_\bullet\|_{\mathcal{X}} \leqslant C_{\text{rel}}\, \eta_{u,\bullet} \quad \text{und} \quad \|z - Z_\bullet\|_{\mathcal{X}} \leqslant C_{\text{rel}}\, \eta_{z,\bullet}. \tag{2.6}$$

Schlussendlich erhält man

$$|g(u) - g(U_\bullet)| \lesssim \eta_{u,\bullet}\, \eta_{z,\bullet}. \tag{2.7}$$

Hierbei ist $a \lesssim b$ eine Abkürzung für $a \leqslant Cb$ mit einer Konstanten $C > 0$. Demnach ist es das Ziel, einen adaptiven Algorithmus zu entwerfen, der das Produkt $\eta_{u,\bullet}\eta_{z,\bullet}$ bzw. *eine* obere Schranke für den Fehler schnellstmöglich gegen 0 gehen lässt [Feischl et al., 2016].

3 GOAFEM für ein Zielfunktional

3.1 Adaptive Algorithmen

Grundannahme für dieses Kapitel ist, dass für jede zulässige Triangulierung $\mathcal{T}_*$ (siehe Abschnitt 3.2) die Fehlerschätzer $\eta_{w,*}$ für $w \in \{u, z\}$ mit lokalen Beiträgen $\eta_{w,*}(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_*$ berechenbar sind.
Für die einfachere Lesbarkeit werden folgende Abkürzungen verwendet:

$$\eta_{w,*} := \eta_{w,*}(\mathcal{T}_*),\ \eta_{w,*}(\mathcal{U}_*) := \Big(\sum_{T \in \mathcal{U}_*} \eta_{w,*}(T)^2 \Big)^{1/2} \quad \text{für } w \in \{u, z\} \text{ und } \mathcal{U}_* \subseteq \mathcal{T}_*. \tag{3.1}$$

Der prinzipielle Aufbau (fast) jedes AFEM Algorithmus besteht aus drei Schritten; siehe Abbildung 3.1.[1] Oftmals hängen die konkreten Schritte von der Problemstellung

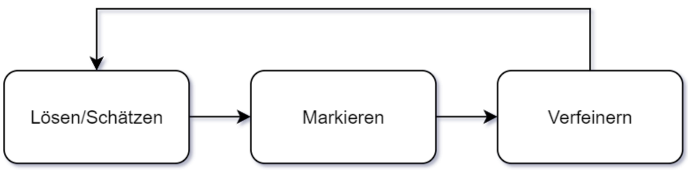


Abbildung 3.1: AFEM-Schema

ab. Auf dem abstrakten Niveau von Kapitel 2 lässt sich jedoch folgender Pseudocode formulieren:

Algorithmus 1: Grundstruktur von AFEM

Input: Initiale Triangulierung $\mathcal{T}_0$, Markierungsstrategie.
for $\ell \in \mathbb{N}_0$ **do**
  (I): Berechne Verfeinerungsindikatoren $\eta_{u,\ell}(T)$, $\eta_{z,\ell}(T)$ für $T \in \mathcal{T}_\ell$.
  (II): Bestimme eine Teilmenge $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$ von markierten Elementen.
  (III): Definiere $\mathcal{T}_{\ell+1} := \text{refine}(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{M}_\ell)$ als gröbste Verfeinerung, sodass alle markierten Elemente $T \in \mathcal{M}_\ell$ verfeinert worden sind.
end
Output: Folge von verfeinerten Triangulierungen $\mathcal{T}_\ell$ mit korrespondierenden Fehlerschätzern $\eta_{u,\ell}$, $\eta_{z,\ell}$ für $\ell \in \mathbb{N}_0$.

[1] Oftmals werden vier Schritte angeführt, wobei sich Schritt 1 *Lösen/Schätzen* dann in zwei separate Schritte *Lösen* und *Schätzen* aufteilt.

Bemerkung. Für (I) werden üblicherweise die Galerkin Lösungen U_ℓ sowie Z_ℓ benötigt, daher der Name *Lösen/Schätzen.*

Im Weiteren werden zwei Markierungsstrategien (Algorithmus 2, 3) für Schritt (II) von Algorithmus 1 vorgestellt. Ziel beider Algorithmen soll sein, das Schätzerprodukt $\eta_{u,\ell}\,\eta_{z,\ell}$ mit optimaler Konvergenzrate (siehe Abschnitt 3.5) gegen 0 gehen zu lassen.

Algorithmus 2: Strategie A für (II)

Input: $0 < \theta \leqslant 1$, $C_{\text{mark}} \geqslant 1$, $C'_{\text{mark}} \geqslant 1$, $\eta_{u,\ell}$, $\eta_{z,\ell}$, $\mathcal{T}_\ell$.

(i): Bestimme Mengen $\mathcal{M}_{u,\ell} \subseteq \mathcal{T}_\ell$ und $\mathcal{M}_{z,\ell} \subseteq \mathcal{T}_\ell$ mit bis auf den Faktor C_{mark} minimaler Kardinalität, sodass die Dörfler Markierung erfüllt ist, d.h.

$$\theta\eta_{u,\ell}^2 \leqslant \eta_{u,\ell}(\mathcal{M}_{u,\ell})^2 \quad \text{und} \quad \theta\eta_{z,\ell}^2 \leqslant \eta_{z,\ell}(\mathcal{M}_{z,\ell})^2.$$

(ii): Wähle $\mathcal{M}_\ell^{\min} \in \{\mathcal{M}_{u,\ell}, \mathcal{M}_{z,\ell}\}$ mit kleinerer Kardinalität und wähle $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{M}_{u,\ell} \cup \mathcal{M}_{z,\ell}$ mit $\mathcal{M}_\ell^{\min} \subseteq \mathcal{M}_\ell$ und $\#\mathcal{M}_\ell \leqslant C'_{\text{mark}}\,\#\mathcal{M}_\ell^{\min}$.

Output: Menge $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$ von markierten Elementen.

Minimale Kardinalität bis auf den Faktor C_{mark} bedeutet, dass für $w \in \{u, z\}$

$$\#\mathcal{M}_{w,\ell} \leqslant C_{\text{mark}} \min_{\mathcal{U}_\ell \in \mathbb{M}_{w,\ell}} \#\mathcal{U}_\ell, \text{ wobei } \mathbb{M}_{w,\ell} := \{\mathcal{U}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell \,|\, \theta\eta_{w,\ell}^2 \leqslant \eta_{w,\ell}(\mathcal{U}_\ell)^2\}.$$

Für $C'_{\text{mark}} = 1$ erhält man den Algorithmus von [Mommer-Stevenson, 2009], jedoch hat sich in numerischen Experimenten herausgestellt, dass sich aggressivere Markierungsstrategien als besser erweisen. Beispielsweise kann man wie [Feischl et al., 2016] vorgehen und $\mathcal{M}_\ell$ folgendermaßen wählen:
Wähle $\mathcal{M}_\ell^{\min}, \mathcal{M}_\ell^{\max} \in \{\mathcal{M}_{u,\ell}, \mathcal{M}_{z,\ell}\}$ mit $\#\mathcal{M}_\ell^{\min} = \min\{\#\mathcal{M}_{u,\ell}, \#\mathcal{M}_{z,\ell}\}$ und $\mathcal{M}_\ell^{\max} \neq \mathcal{M}_\ell^{\min}$ sowie $\mathcal{M}_\ell^{\#} \subseteq \mathcal{M}_\ell^{\max}$ mit $\#\mathcal{M}_\ell^{\#} = \#\mathcal{M}_\ell^{\min}$. Mit der Wahl $\mathcal{M}_\ell := \mathcal{M}_\ell^{\min} \cup \mathcal{M}_\ell^{\#}$ erhält man $C'_{\text{mark}} = 2$.

Strategie B (Algorithmus 3) wurde ursprünglich in [Becker et al., 2011] für eine GOAFEM des Poisson Problems vorgestellt. Allerdings werden dort zusätzliche Annahmen benötigt, die sich aber als nicht notwendig herausstellen, vergleiche [Feischl et al., 2016].

Algorithmus 3: Strategie B für (II)

Input: $0 < \theta \leqslant 1$, $C_{\text{mark}} \geqslant 1$, $\eta_{u,\ell}$, $\eta_{z,\ell}$, $\mathcal{T}_\ell$.

(i): Berechne Verfeinerungsindikatoren $\rho_\ell^2(T) := \eta_{u,\ell}(T)^2\eta_{z,\ell}^2 + \eta_{u,\ell}^2\eta_{z,\ell}(T)^2$ für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$.

(ii): Wähle $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$ mit bis auf den Faktor C_{mark} minimaler Kardinalität, sodass $\theta\rho_\ell^2 \leqslant \rho_\ell(\mathcal{M}_\ell)^2$.

Output: Menge $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$ von markierten Elementen.

3.2 Netzverfeinerung

Im Weiteren soll die Netzverfeinerung eine deterministische und fixierte Strategie sein, also in jeder Iteration von Algorithmus 1 die gleiche. Üblicherweise wird *Newest Vertex Bisection* (NVB) wie in [Stevenson, 2008] verwendet; siehe Abbildung 3.2[2].

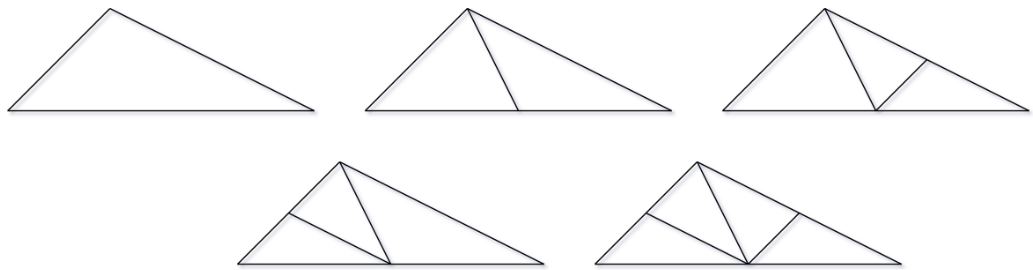


Abbildung 3.2: Newest Vertex Bisection

NVB zerteilt Dreiecke, indem jeweils vom jüngsten Knoten eine Linie zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite gezogen wird.
Für jede zulässige Triangulierung $\mathcal{T}$ und jede Menge von markierten Elementen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{T}$ sei die Triangulierung $\mathcal{T}' := \text{refine}(\mathcal{T}, \mathcal{M})$ die gröbste, bei der jedes Element $T \in \mathcal{M}$ verfeinert worden ist, d.h. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{T} \backslash \mathcal{T}'$. Weiters definiere eine Relation[3] refine auf der Menge aller Triangulierungen:

Definition. *Wir schreiben $\mathcal{T}' \in \text{refine}(\mathcal{T})$ falls es Triangulierungen $\mathcal{T}^{(0)}, \ldots, \mathcal{T}^{(n)}$ und Mengen von markierten Elementen $\mathcal{M}^{(0)}, \ldots, \mathcal{M}^{(n-1)}$ gibt, sodass $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{(0)}$ und $\mathcal{T}' = \mathcal{T}^{(n)}$ mit $\mathcal{T}^{(j)} = \text{refine}(\mathcal{T}^{(j-1)}, \mathcal{M}^{(j-1)})$. Für den Fall $n = 0$ setze $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{(0)} \in$ refine($\mathcal{T}$). Bezeichne die Menge aller (verfeinerten) Triangulierungen mit initialer Triangulierung $\mathcal{T}_0$ mit $\mathbb{T} := \text{refine}(\mathcal{T}_0)$ und mit $\mathbb{T}_N := \{\mathcal{T} \in \mathbb{T} | \, \#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0 \leqslant N\}$ die (endliche) Menge von Triangulierungen, die maximal N Elemente mehr als $\mathcal{T}_0$ haben.*

Bemerkung. Für die Resulatate aus [Stevenson, 2008] werden zusätzliche Voraussetzungen an $\mathcal{T}_0$ gestellt, welche sich im 2D-Fall durch induktive Implementierung, vgl. [Karkulik et al., 2013], als nicht notwendig herausstellen.

[2] Grafik von links oben nach rechts unten.
[3] Aus der Definition von refine ergibt sich sofort deren Transitivität und Reflexivität, allerdings ist sie nicht symmetrisch.

Zudem seien für $s > 0$ und $w \in \{u, z\}$ die *Aproximationsklassen* $\mathbb{A}_s$ folgendermaßen definiert:

Definition. *Es gilt* $w \in \mathbb{A}_s$ *genau dann, wenn* $\|w\|_{\mathbb{A}_s} < \infty$ *wobei*

$$\|w\|_{\mathbb{A}_s} := \sup_{N \in \mathbb{N}_0} \big((N+1)^s \min_{\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}_N} \eta_{w,*} \big).$$

Explizit bedeutet $\|w\|_{\mathbb{A}_s} < \infty$, dass für optimale Triangulierungen eine algebraische Konvergenzrate von $\mathcal{O}(N^{-s})$ für $\eta_w \to 0$ möglich ist. Somit lassen sich die zwei Hauptresultate von [Feischl et al., 2016], siehe Abschnitt 3.5, formulieren. Nämlich die (i) lineare Konvergenz und das (ii) optimale Konvergenzverhalten von Algorithmus 1 mit Strategien A–B, d.h.

(i) $\exists q \in (0,1)\, \forall n \in \mathbb{N}\, \forall \ell \in \mathbb{N}\colon \eta_{u,\ell+n}\, \eta_{z,\ell+n} \;\lesssim\; q^n\, \eta_{u,\ell}\, \eta_{z,\ell}$,

(ii) $\|u\|_{\mathbb{A}_s} + \|z\|_{\mathbb{A}_t} < \infty \;\Rightarrow\; \eta_{u,\ell}\, \eta_{z,\ell} \to 0$ mit $\mathcal{O}(\#\mathcal{T}_\ell^{-(s+t)})$.

3.3 Axiome der Adaptivität

Um die Hauptergebnisse aus Abschnitt 3.5 beweisen zu können, bedarf es einiger Hilfsresultate aus [Feischl et al., 2016] und [Carstensen et al., 2014]. Für diese Resultate wird ein Begriff von Abstand auf der Menge der Triangulierungen benötigt.

Definition. *Wir nennen eine Funktion* $d_w\colon \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ *Abstandsfunktion (auf der Menge der zulässigen Triangulierungen), falls es eine Konstante* $C_{\mathrm{dist}} > 0$ *gibt, sodass*

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{dist}}^{-1} d_w(\mathcal{T}, \mathcal{T}'') &\leqslant d_w(\mathcal{T}, \mathcal{T}') + d_w(\mathcal{T}', \mathcal{T}'') \quad \text{für alle } \mathcal{T}, \mathcal{T}', \mathcal{T}'' \in \mathbb{T}, \\ d_w(\mathcal{T}, \mathcal{T}') &\leqslant C_{\mathrm{dist}}\, d_w(\mathcal{T}', \mathcal{T}) \quad \text{für alle } \mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathbb{T}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Bemerkung. Konkret könnte $d_w(\cdot,\cdot)$ für $w \in \{u, z\}$, $W \in \{U, Z\}$ und Triangulierungen $\mathcal{T}_*, \mathcal{T}_\bullet \in \mathbb{T}$ durch $d_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*) := a(W_* - W_\bullet, W_* - W_\bullet)^{1/2} \simeq \|W_* - W_\bullet\|_{\mathcal{X}}$ gegeben sein, wobei W_* und $W_\bullet$ die Galerkin–Lösungen zu den Triangulierungen $\mathcal{T}_*$ und $\mathcal{T}_\bullet$ sind, vgl. *[Feischl et al., 2016]*.

Zudem werden noch vier Axiome (A1)–(A4) benötigt, die das Verhalten von Fehlerschätzern von verfeinerten Triangulierungen bestimmen:

(A1) Stabilität auf nicht verfeinerten Elementen:
Es existiert eine Konstante $C_{\mathrm{stb}} > 0$, sodass für alle $\mathcal{T}_\bullet \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}_* \in \mathrm{refine}(\mathcal{T}_\bullet)$

$$|\eta_{w,*}(\mathcal{T}_\bullet \cap \mathcal{T}_*) - \eta_{w,\bullet}(\mathcal{T}_\bullet \cap \mathcal{T}_*)| \leqslant C_{\mathrm{stb}}\, d_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*)$$

gilt.

(A2) Reduktion auf verfeinerten Elementen:
Es existieren Konstanten $q_{\mathrm{red}} \in (0,1)$ und $C_{\mathrm{red}} > 0$, sodass für alle $\mathcal{T}_\bullet \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}_* \in \mathrm{refine}(\mathcal{T}_\bullet)$

$$\eta_{w,*}(\mathcal{T}_*\backslash\mathcal{T}_\bullet)^2 \leqslant q_{\mathrm{red}}\, \eta_{w,\bullet}(\mathcal{T}_\bullet\backslash\mathcal{T}_*)^2 + C_{\mathrm{red}} d_w(\mathcal{T}_\bullet\backslash\mathcal{T}_*)^2$$

gilt.

(A3) Diskrete Zuverlässigkeit:
Es existiert eine Konstante $C_{\mathrm{rel}} > 0$, sodass für alle $\mathcal{T}_\bullet \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}_* \in \mathrm{refine}(\mathcal{T}_\bullet)$ eine Menge $\mathcal{R}_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*) \subseteq \mathcal{T}_\bullet$ existiert mit

(i) $\mathcal{T}_\bullet\backslash\mathcal{T}_* \subseteq \mathcal{R}_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*)$,

(ii) $d_w(\mathcal{T}_*, \mathcal{T}_\bullet) \leqslant C_{\mathrm{rel}}\, \eta_{w,\bullet}(\mathcal{R}_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*))$,

(iii) $\#\mathcal{R}_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*) \leqslant C_{\mathrm{rel}}\, \#(\mathcal{T}_\bullet\backslash\mathcal{T}_*)$.

(A4) Quasi-Orthogonalität:
Sei $\mathcal{T}_{\ell_n}$ eine (möglicherweise endliche) Teilfolge von Triangulierungen erzeugt von Algorithmus 1 mit $\theta\, \eta_{w,\ell_n}^2 \leqslant \eta_{w,\ell_n}(\mathcal{T}_{\ell_n}\backslash\mathcal{T}_{\ell_{n+1}})^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $C_{\mathrm{orth}}(\varepsilon) > 0$, sodass für alle $n \leqslant N$ mit wohldefinierten Triangulierungen $\mathcal{T}_{\ell_n}, ..., \mathcal{T}_{\ell_N}$ gilt, dass

$$\sum_{j=n}^{N} (d_w(\mathcal{T}_{\ell_{j+1}}, \mathcal{T}_{\ell_j})^2 - \varepsilon \eta_{w,\ell_j}^2) \leqslant C_{\mathrm{orth}}(\varepsilon)\, \eta_{w,\ell_n}^2.$$

Damit lassen sich nun die folgenden Hilfsresultate beweisen.

Lemma 3.1 (Quasi-Monotonie des Schätzers). *Es existiert eine von den Axiomen* (A1)–(A3) *abhängige Konstante* $C_{\mathrm{mon}} > 0$, *sodass für alle* $\mathcal{T}_\bullet \in \mathbb{T}$ *und* $\mathcal{T}_* \in \mathrm{refine}(\mathcal{T}_\bullet)$

$$\eta_{w,*}^2 \leqslant C_{\mathrm{mon}} \eta_{w,\bullet}^2 \tag{3.3}$$

gilt.

Beweis. Seien wie in [Carstensen et al., 2014] $\mathcal{T}_\bullet \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}_* \in \mathrm{refine}(\mathcal{T}_\bullet)$ beliebig. Dann ergibt sich aus der Definition (3.1), dass

$$\eta_{w,*}^2 = \eta_{w,*}(\mathcal{T}_*)^2 = \eta_{w,*}\big((\mathcal{T}_*\backslash\mathcal{T}_\bullet) \cup (\mathcal{T}_* \cap \mathcal{T}_\bullet)\big)^2 = \eta_{w,*}(\mathcal{T}_*\backslash\mathcal{T}_\bullet)^2 + \eta_{w,*}(\mathcal{T}_* \cap \mathcal{T}_\bullet)^2. \tag{3.4}$$

Axiom (A1) besagt

$$|\eta_{w,*}(\mathcal{T}_\bullet \cap \mathcal{T}_*) - \eta_{w,\bullet}(\mathcal{T}_\bullet \cap \mathcal{T}_*)| \leqslant C_{\mathrm{stb}}\, d_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*),$$

woraus mit der Dreiecksungleichung

$$\eta_{w,*}(\mathcal{T}_\bullet \cap \mathcal{T}_*) \leqslant C_{\mathrm{stb}}\, d_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*) + \eta_{w,\bullet}(\mathcal{T}_\bullet \cap \mathcal{T}_*), \tag{3.5}$$

und weiters mit der Young-Ungleichung

$$\begin{aligned}\eta_{w,*}(\mathcal{T}_\bullet \cap \mathcal{T}_*)^2 &\leqslant \big(C_{\mathrm{stb}}\, d_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*) + \eta_{w,\bullet}(\mathcal{T}_\bullet \cap \mathcal{T}_*)\big)^2 \\ &\leqslant 2\, C_{\mathrm{stb}}^2\, d_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*)^2 + 2\, \eta_{w,\bullet}(\mathcal{T}_\bullet \cap \mathcal{T}_*)^2\end{aligned} \tag{3.6}$$

folgt. Der linke Term von (3.4) wird mit Axiom (A2) und der *Brutalabschätzung* $q_{\mathrm{red}} < 2$ zu

$$\begin{aligned}\eta_{w,*}(\mathcal{T}_*\backslash\mathcal{T}_\bullet)^2 &\leqslant q_{\mathrm{red}}\, \eta_{w,\bullet}(\mathcal{T}_\bullet\backslash\mathcal{T}_*)^2 + C_{\mathrm{red}} d_w(\mathcal{T}_\bullet\backslash\mathcal{T}_*)^2 \\ &\leqslant 2\, \eta_{w,\bullet}(\mathcal{T}_\bullet\backslash\mathcal{T}_*)^2 + C_{\mathrm{red}} d_w(\mathcal{T}_\bullet\backslash\mathcal{T}_*)^2.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Insgesamt ergibt sich aus (3.4) mit (3.6) und (3.7)

$$\eta_{w,*}(\mathcal{T}_*\backslash\mathcal{T}_\bullet)^2 + \eta_{w,*}(\mathcal{T}_* \cap \mathcal{T}_\bullet)^2 \leqslant 2\, \eta_{w,\bullet}^2 + \left(C_{\mathrm{red}} + 2\, C_{\mathrm{stb}}^2\right)\, d_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*)^2. \tag{3.8}$$

Axiom (A3) angewandt auf (3.8) ergibt

$$\eta_{w,*}(\mathcal{T}_*\backslash\mathcal{T}_\bullet)^2 + \eta_{w,*}(\mathcal{T}_* \cap \mathcal{T}_\bullet)^2 \leqslant 2\, \eta_{w,\bullet}^2 + C_{\mathrm{rel}}^2 \left(C_{\mathrm{red}} + 2\, C_{\mathrm{stb}}^2\right)\, \eta_{w,\bullet}(\mathcal{R}_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*))^2 \tag{3.9}$$

und, da $\mathcal{R}_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*) \subseteq \mathcal{T}_\bullet$, erhält man schlussendlich mit

$$\begin{aligned}\eta_{w,*}^2 &\leqslant 2\, \eta_{w,\bullet}^2 + C_{\mathrm{rel}}^2 \left(C_{\mathrm{red}} + 2\, C_{\mathrm{stb}}^2\right)\, \eta_{w,\bullet}(\mathcal{R}_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*))^2 \\ &\leqslant (2 + C_{\mathrm{rel}}^2(2\, C_{\mathrm{stb}}^2 + C_{\mathrm{red}})\ \eta_{w,\bullet}^2\end{aligned}$$

die gewünschte Abschätzung mit $C_{\mathrm{mon}} := 2 + C_{\mathrm{rel}}^2(2\, C_{\mathrm{stb}}^2 + C_{\mathrm{red}})$. □

Lemma 3.2 (Optimalität der Dörfler Markierung)**.** *Aus den Axiomen* (A1) *und* (A3) *folgt, dass für beliebiges* $0 < \theta < \theta_{\mathrm{opt}} := (1 + C_{\mathrm{stb}}^2\, C_{\mathrm{rel}}^2)^{-1}$ *ein* $\kappa_{\mathrm{opt}} \in (0, 1)$ *existiert, sodass für alle* $\mathcal{T}_\bullet \in \mathbb{T}$ *und* $\mathcal{T}_* \in \mathrm{refine}(\mathcal{T}_\bullet)$ *mit* $\eta_{w,*}^2 \leqslant \kappa_{\mathrm{opt}}\, \eta_{w,\bullet}^2$ *auch* $\theta\, \eta_{w,\bullet}^2 \leqslant \eta_{w,\bullet}(\mathcal{R}_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*))^2$ *gilt.*

Beweis. Sei wie in [Carstensen et al., 2014] $\theta \in (0, \theta_{\mathrm{opt}})$ beliebig. Analog zu Lemma 3.1 erhält man mit der Young-Ungleichung für beliebiges, aber festes $\delta > 0$

$$\begin{aligned}\eta_{w,\bullet}(\mathcal{T}_\bullet \cap \mathcal{T}_*)^2 &\leqslant \big(C_{\mathrm{stb}}\, d_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*) + \eta_{w,*}(\mathcal{T}_\bullet \cap \mathcal{T}_*)\big)^2 \\ &\leqslant (1 + \delta^{-1})\, C_{\mathrm{stb}}^2\, d_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*)^2 + (1 + \delta)\eta_{w,*}(\mathcal{T}_\bullet \cap \mathcal{T}_*)^2.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Weiters gewährt Axiom (A3), dass $\mathcal{T}_\bullet\backslash\mathcal{T}_* \subseteq \mathcal{R}_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*)$ und damit

$$\eta_{w,\bullet}(\mathcal{T}_\bullet\backslash\mathcal{T}_*)^2 \leqslant \eta_{w,\bullet}(\mathcal{R}_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*))^2. \tag{3.11}$$

Insgesamt erhalten wir mit (3.10), (3.11) und Axiom (A3)

$$\begin{aligned}\eta_{w,\bullet}^2 \leqslant\ & \eta_{w,\bullet}(\mathcal{R}_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*))^2 + (1 + \delta)\eta_{w,*}(\mathcal{T}_\bullet \cap \mathcal{T}_*)^2 \\ &+ (1 + \delta^{-1})\, C_{\mathrm{stb}}^2\, C_{\mathrm{rel}}^2\, \eta_{w,\bullet}(\mathcal{R}_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*))^2.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Aus der Voraussetzung $\eta_{w,*}^2 \leqslant \kappa_{\rm opt}\, \eta_{w,\bullet}^2$ folgt

$$\eta_{w,\bullet}^2 \leqslant (1+\delta)\kappa_{\rm opt}\eta_{w,\bullet}^2 + (1 + (1+\ \delta^{-1})\, C_{\rm stb}^2 C_{\rm rel}^2)\, \eta_{w,\bullet}(\mathcal{R}_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*))^2, \tag{3.13}$$

was äquivalent zu

$$\frac{1-(1+\delta)\kappa_{\rm opt}}{1+(1+\ \delta^{-1})\, C_{\rm stb}^2\, C_{\rm rel}^2}\, \eta_{w,\bullet}^2 \leqslant \eta_{w,\bullet}(\mathcal{R}_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*))^2 \tag{3.14}$$

ist. Wähle $\kappa_{\rm opt}$ aus (3.13) so, dass

$$\theta = \frac{1-(1+\delta)\kappa_{\rm opt}}{1+(1+\ \delta^{-1})\, C_{\rm stb}^2\, C_{\rm rel}^2} < \frac{1}{1+(1+\frac{1}{\delta})\, C_{\rm stb}^2\, C_{\rm rel}^2} < \frac{1}{1+\ C_{\rm stb}^2\, C_{\rm rel}^2} = \theta_{\rm opt}$$

Damit wird aus (3.14) das Dörfler–Markierungskriterium $\theta\eta_{w,\bullet}^2 \leqslant \eta_{w,\bullet}(\mathcal{R}_w(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*))^2$. □

3.4 Verallgemeinerte lineare Konvergenz

Lemma 3.3 (Verallgemeinerte Schätzerreduktion)**.** *Sei $\theta \in (0,1]$. Falls für beliebiges $\mathcal{T}_\ell \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}_{\ell+1} \in \mathrm{refine}(\mathcal{T}_\ell)$ die* Dörfler Markierung $\theta\eta_{w,\ell}^2 \leqslant \eta_{w,\ell}(\mathcal{T}_\ell \backslash \mathcal{T}_{\ell+1})^2$ *gilt, dann existieren $q_{\rm est} \in (0,1)$ und $C_{\rm est} > 0$ abhängig von Axiomen* (A1)–(A2) *und θ, sodass für alle $\mathcal{T}_* \in \mathrm{refine}(\mathcal{T}_{\ell+1})$ gilt*

$$\eta_{w,*}^2 \leqslant q_{\rm est}\, \eta_{w,\ell}^2 + C_{\rm est}\, d_w(\mathcal{T}_*, \mathcal{T}_\ell)^2. \tag{3.15}$$

Beweis. Seien wie in [Carstensen et al., 2014] $\mathcal{T}_\ell \in \mathbb{T}$, $\mathcal{T}_{\ell+1} \in \mathrm{refine}(\mathcal{T}_\ell)$ und $\mathcal{T}_* \in \mathrm{refine}(\mathcal{T}_{\ell+1})$ beliebig. Aus der Definition von $\mathrm{refine}(\cdot,\cdot)$ ergibt sich unmittelbar die Transitivität, also $\mathcal{T}_* \in \mathrm{refine}(\mathcal{T}_\ell)$. Analog zu Lemma 3.2 erhält man aus Axiomen (A1)–(A2) und der Young–Ungleichung für $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
\eta_{w,*}^2 &\leqslant \eta_{w,*}(\mathcal{T}_* \backslash \mathcal{T}_\ell)^2 + (1+\delta^{-1})\, C_{\rm stb}^2\, d_w(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_*)^2 + (1+\delta)\, \eta_{w,\ell}(\mathcal{T}_\ell \cap \mathcal{T}_*)^2 \\
&\leqslant q_{\rm red}\, \eta_{w,\ell}(\mathcal{T}_\ell \backslash \mathcal{T}_*)^2 + \big(C_{\rm red} + (1+\delta^{-1})\, C_{\rm stb}^2\big)\, d_w(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_*)^2 \\
&\quad + (1+\delta)\, \eta_{w,\ell}(\mathcal{T}_\ell \cap \mathcal{T}_*)^2.
\end{aligned}$$

Mit $\eta_{w,\ell}(\mathcal{T}_\ell \cap \mathcal{T}_*)^2 = \eta_{w,\ell}^2 - \eta_{w,\ell}(\mathcal{T}_\ell \backslash \mathcal{T}_*)^2$ ergibt sich daraus

$$\eta_{w,*}^2 \leqslant (1+\delta)(\eta_{w,\ell}^2 - (1-q_{\rm red})\, \eta_{w,\ell}(\mathcal{T}_\ell \backslash \mathcal{T}_*)^2) + (C_{\rm red} + (1+\delta^{-1})\, C_{\rm stb}^2)\, d_w(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_*)^2.$$

Schlussendlich erhält man mit der Dörfler Markierung $\theta\eta_{w,\ell}^2 \leqslant \eta_{w,\ell}(\mathcal{T}_\ell \backslash \mathcal{T}_*)^2$, dass

$$\eta_{w,*}^2 \leqslant (1+\delta)\,(1-(1-q_{\rm red})\,\theta)\, \eta_{w,\ell}^2 + (C_{\rm red} + (1+\delta^{-1})C_{\rm stb}^2)\, d_w(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_*)^2 \tag{3.16}$$

und die gewünschte Abschätzung folgt mit $q_{\rm est} = (1+\delta)(1-(1-q_{\rm red})\,\theta)$ und $C_{\rm est} = C_{\rm red} + (1+\frac{1}{\delta})C_{\rm stb}^2$, wenn man $\delta > 0$ klein genug wählt. □

Proposition 3.4 (Verallgemeinerte lineare Konvergenz)**.** *Sei* $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von verfeinerten Triangulierungen (generiert durch Algorithmus 1), d.h.* $\mathcal{T}_\ell \in \mathrm{refine}(\mathcal{T}_{\ell-1})$. *für alle* $\ell \in \mathbb{N}$. *Weiters existieren für beliebiges* $\theta \in (0,1]$ *ein* $q_{\mathrm{conv}} \in (0,1)$ *und* C_{conv} *abhängig von Axiomen* (A1)–(A4) *und* θ, *sodass für alle* $\ell, n \in \mathbb{N}$ *mindestens* $k \leqslant n$ *Indizes* $\ell \leqslant \ell_1 \leqslant \cdots \leqslant \ell_k \leqslant \ell + n$ *existieren mit* $\theta\eta^2_{w,\ell_j} \leqslant \eta_{w,\ell_j}(\mathcal{T}_{\ell_j}\backslash\mathcal{T}_{\ell_j+1})^2$ *für alle* $j \in \{1,...,k\}$. *Dann gilt* $\eta_{w,\ell+n} \leqslant C_{\mathrm{conv}}\, q^k_{\mathrm{conv}}\, \eta^2_{w,\ell}$.

Beweis. Sei $\ell_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Um die Notation zu vereinfachen, setze $\ell_0 := \ell$ wie in [Feischl et al., 2016]. Seien zudem $\varepsilon > 0$ und $0 \leqslant j \leqslant k$ beliebig. Aus $\mathcal{T}_{\ell_{i+1}} \in \mathrm{refine}(\mathcal{T}_{\ell_i+1})$ ergibt sich zusammen mit Lemma 3.3

$$\begin{aligned}\sum_{i=k-j}^{k} \eta^2_{w,\ell_{i+1}} &\overset{(3.15)}{\leqslant} \sum_{i=k-j}^{k} \left(q_{\mathrm{est}}\,\eta^2_{w,\ell_i} + C^2_{\mathrm{est}}\, d_w(\mathcal{T}_{\ell_{i+1}}, \mathcal{T}_{\ell_i})^2\right)\\ &= \sum_{i=k-j}^{k} \left((q_{\mathrm{est}} + C^2_{\mathrm{est}}\,\varepsilon)\,\eta^2_{w,\ell_i} + C^2_{\mathrm{est}}\,(d_w(\mathcal{T}_{\ell_{i+1}}, \mathcal{T}_{\ell_i})^2 - \varepsilon\,\eta^2_{w,\ell_i})\right)\end{aligned} \tag{3.17}$$

Für $\varepsilon < (1 - q_{\mathrm{est}})\, C^{-2}_{\mathrm{est}}$ mit $\kappa := 1 - (q_{\mathrm{est}} + C^2_{\mathrm{est}}\,\varepsilon) > 0$ ergibt sich aus Axiom (A4)

$$\begin{aligned}\kappa \sum_{i=k-j}^{k} \eta^2_{w,\ell_{i+1}} &\leqslant \eta^2_{w,\ell_{k-j}} + C^2_{\mathrm{est}} \sum_{i=k-j}^{k} \left(d_w(\mathcal{T}_{\ell_{i+1}}, \mathcal{T}_{\ell_i})^2 - \varepsilon\,\eta^2_{w,\ell_i}\right)\\ &\overset{(A4)}{\leqslant} (1 + C^2_{\mathrm{est}}\, C_{\mathrm{orth}}(\varepsilon))\,\eta^2_{w,\ell_{k-j}}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Nun zeigen wir mittels Induktion über j für $q := (1+C_{\mathrm{est}}\, C_{\mathrm{orth}}(\varepsilon))^{-1}\,\kappa$, dass Folgendes gilt

$$\eta^2_{w,\ell_k} \leqslant (1-q)^j \sum_{i=k-j}^{k} \eta^2_{w,\ell_i} \quad \text{für alle } 0 \leqslant j \leqslant k. \tag{3.19}$$

Für den Induktionsanfang $j = 0$ ergibt sich $\eta^2_{w,\ell_k} = \eta^2_{w,\ell_k}$. Angenommen es gelte (3.19) für j, dann folgt

$$\begin{aligned}\eta^2_{w,\ell_k} \overset{(3.19)}{\leqslant} (1-q)^j \sum_{i=k-j}^{k} \eta^2_{w,\ell_i} &= (1-q)^j \left(\Big(\sum_{i=k-(j+1)}^{k} \eta^2_{w,\ell_i}\Big) - \eta^2_{w,\ell_{k-(j+1)}}\right)\\ &\overset{(3.18)}{\leqslant} (1-q)^{j+1} \sum_{i=k-(j+1)}^{k} \eta^2_{w,\ell_i}\end{aligned}$$

und damit ist (3.19) für alle $0 \leqslant j+1 \leqslant k$ bewiesen. Für $j = k-1$ ergeben (3.19) und Lemma 3.1

$$\begin{aligned}&C^{-1}_{\mathrm{mon}}\,\eta^2_{w,\ell+n} \overset{(3.3)}{\leqslant} \eta^2_{w,\ell_k} \overset{(3.19)}{\leqslant} (1-q)^{k-1} \sum_{i=1}^{k} \eta^2_{w,\ell_i} \leqslant (1-q)^{k-1} \sum_{i=0}^{k} \eta^2_{w,\ell_i}\\ &\overset{(3.18)}{\leqslant} \frac{(1-q)^{k-1}}{q}\, \eta^2_{w,\ell_0} = \frac{(1-q)^k}{(1-C)\,q}\,\eta^2_{w,\ell}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Damit folgt die gewünschte Abschätzung mit

$$q_{\text{conv}} = 1 - q \quad \text{und} \quad C_{\text{conv}} = \frac{C_{\text{mon}}}{(1-q)\,q}.$$

Das beschließt den Beweis. □

3.5 Optimale Konvergenz

Im folgenden Abschnitt wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass die Fehlerschätzer $\eta_{u,\ell}$ und $\eta_{z,\ell}$ die Axiome (A1)–(A4) aus Abschnitt 3.3 mit gleichen Konstanten erfüllen.

Satz 3.5 (Lineare Konvergenz von Algorithmus 1)**.** *Für beliebiges $\theta \in (0,1]$ existieren $q_{\text{lin}} \in (0,1)$ und $C_{\text{lin}} > 0$ abhängig von Axiomen* (A1)–(A4) *und θ, sodass Algorithmus 1 mit Markierungsstrategien 2 und 3 linear konvergiert, d.h. für alle $\ell, n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\eta_{u,\ell+n}\,\eta_{z,\ell+n} \leqslant C_{\text{lin}}\, q_{\text{lin}}^{n}\, \eta_{u,\ell}\eta_{z,\ell}. \tag{3.21}$$

Beweis. **(I) für Markierungsstrategie 2:** In jeder Iteration wird $\mathcal{M}_j^{\min} \in \{\mathcal{M}_{u,j}, \mathcal{M}_{z,j}\}$ mit minimaler Kardinalität gewählt, wobei $\mathcal{M}_{u,j}$ und $\mathcal{M}_{z,j}$ jeweils die Dörfler Markierung

$$\theta\eta_{u,j}^2 \leqslant \eta_{u,j}(\mathcal{M}_{u,j})^2 \quad \text{und} \quad \theta\eta_{z,j}^2 \leqslant \eta_{z,j}(\mathcal{M}_{z,j})^2 \text{ für gegebenes } \theta \in (0,1] \tag{3.22}$$

erfüllen. Damit ergibt sich für $\mathcal{M}_j^{\min}$

$$\theta\eta_{u,j}^2 \leqslant \eta_{u,j}(\mathcal{M}_j^{\min})^2 \quad \text{oder} \quad \theta\eta_{z,j}^2 \leqslant \eta_{z,j}(\mathcal{M}_j^{\min})^2. \tag{3.23}$$

Da $\mathcal{M}_j^{\min} \subseteq \mathcal{M}_j \subseteq \mathcal{T}_j \backslash \mathcal{T}_{j+1}$, gilt für $\mathcal{T}_j \backslash \mathcal{T}_{j+1}$ mit $j \in \{1, \ldots, \ell\}$

$$\theta\eta_{w,\ell_j}^2 \leqslant \eta_{w,\ell_j}(\mathcal{T}_{\ell_j} \backslash \mathcal{T}_{\ell_{j+1}})^2 \tag{3.24}$$

mindestens k-mal für $\eta_{u,j}$ und $(n-k)$-mal für $\eta_{z,j}$. Daraus folgt mit Proposition 3.4

$$\eta_{u,\ell+n}^2 \leqslant C_{\text{conv}}\, q_{\text{conv}}^{k} \eta_{u,\ell}^2 \quad \text{und} \quad \eta_{z,\ell+n}^2 \leqslant C_{\text{conv}}\, q_{\text{conv}}^{n-k} \eta_{z,\ell}^2. \tag{3.25}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\eta_{u,\ell+n}^2\, \eta_{z,\ell+n}^2 \leqslant C_{\text{conv}}^2\, q_{\text{conv}}^{k}\, q_{\text{conv}}^{n-k}\, \eta_{u,\ell}^2 \eta_{z,\ell}^2 = C_{\text{conv}}^2\, q_{\text{conv}}^{n}\, \eta_{u,\ell}^2 \eta_{z,\ell}^2. \tag{3.26}$$

Dies ist die gewünschte Abschätzung mit $C_{\text{lin}} = C_{\text{conv}}$ und $q_{\text{lin}} = q_{\text{conv}}^{1/2}$.

(II) für Markierungsstrategie 3: Für $\rho_\ell^2(T) := \eta_{u,\ell}(T)^2\eta_{z,\ell}^2 + \eta_{u,\ell}^2\eta_{z,\ell}(T)^2$ erhält man

$$\rho_\ell^2 = \rho_\ell(\mathcal{T}_\ell)^2 = 2\,\eta_{u,\ell}^2\eta_{z,\ell}^2. \tag{3.27}$$

Aus der Wahl von $\mathcal{M}_\ell$ in Algorithmus 3 und (3.27) ergibt sich

$$2\,\theta\eta_{u,\ell}^2\eta_{z,\ell}^2 \leqslant \eta_{u,\ell}(\mathcal{M}_\ell)^2\eta_{z,\ell}^2 + \eta_{u,\ell}^2\eta_{z,\ell}(\mathcal{M}_\ell)^2. \tag{3.28}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\theta\eta_{u,\ell}^2 \leqslant \eta_{u,\ell}(\mathcal{M}_\ell)^2 \quad \text{oder} \quad \theta\eta_{z,\ell}^2 \leqslant \eta_{z,\ell}(\mathcal{M}_\ell)^2. \tag{3.29}$$

Der Rest vom Beweis verläuft analog zu dem von Markierungsstrategie 2. □

Bezüglich des optimalen Konvergenzverhaltens von Algorithmus 1 mit Markierungsstrategien 2 und 3 bedarf es zusätzlichen Anforderungen zur Netzverfeinerung refine:

(N1) Für alle $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}' \in \mathrm{refine}(\mathcal{T})$ gilt

$$\#(\mathcal{T}\backslash\mathcal{T}') + \#\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}'.$$

(N2) Es existiert eine Konstante $C_{\mathrm{mesh}} > 0$ abhängig von $\mathcal{T}_0$, sodass für alle $\ell \in \mathbb{N}$

$$\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 \leqslant C_{\mathrm{mesh}} \sum_{j=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_j$$

gilt.

(N3) Für alle $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathbb{T}$ existiert $\mathcal{T} \oplus \mathcal{T}' \in \mathrm{refine}(\mathcal{T}) \cap \mathrm{refine}(\mathcal{T}')$, sodass

$$\#(\mathcal{T} \oplus \mathcal{T}') \leqslant \#\mathcal{T} + \#\mathcal{T}' - \#\mathcal{T}_0$$

gilt.

Bemerkung. *Die Closure Estimate* (N2) *wurde zuerst für die Newest Vertex Bisection für* $d = 2$ *in [Binev et al., 2004], später für* $d \geqslant 2$ *in [Stevenson, 2008] bewiesen. Beide benötigen zusätzliche Anforderungen an* $\mathcal{T}_0$*. Für* $d = 2$ *kann die Anforderung an* $\mathcal{T}_0$ *laut [Karkulik et al., 2013] weggelassen werden.*
Newest Vertex Bisection gewährt auch die Overlay Estimate (N3)*, was in [Stevenson, 2007] und [Cascon et al., 2008] bewiesen wurde. Tatsächlich ist bei Newest Vertex Bisection* $\mathcal{T} \oplus \mathcal{T}'$ *gleich der Überlagerung von* $\mathcal{T}$ *und* $\mathcal{T}'$*.*

Lemma 3.6. *Für beliebiges* $\theta \in (0, \theta_{\mathrm{opt}}]$ *mit* θ_{opt} *wie in Lemma 3.2 und* $\ell \in \mathbb{N}$ *existieren Konstanten* $C_1, C_2 > 0$ *und eine Triangulierung* $\mathcal{T}_* \in \mathrm{refine}(\mathcal{T}_\ell)$*, sodass für beliebige* $s, t > 0$ *mit* $(u, z) \in \mathbb{A}_s \times \mathbb{A}_t$ *gilt:*

(*i*) $\max\{\#\mathcal{R}_u(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_*), \#\mathcal{R}_z(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_*)\} \leqslant C_1(C_2\|u\|_{\mathbb{A}_s}\|z\|_{\mathbb{A}_t})^{1/(s+t)}\,(\eta_{u,\ell}\eta_{z,\ell})^{-1/(s+t)}$

(*ii*) $\theta\eta_{u,\ell}^2 \leqslant \eta_{u,\ell}(\mathcal{R}_u(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_*))^2$ oder $\theta\eta_{z,\ell}^2 \leqslant \eta_{z,\ell}(\mathcal{R}_z(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_*))^2$.

Die Konstanten C_1 und C_2 hängen von den Axiomen (A1)–(A4) *und θ ab.*

Beweis. Sei wie in [Feischl et al., 2016] $\varepsilon := C_{\mathrm{mon}}^{-1}\,\kappa_{\mathrm{opt}}\,\eta_{u,\ell}\eta_{z,\ell}$ definiert. Dann folgt mit Lemma 3.1, dass

$$\varepsilon \leqslant \kappa_{\mathrm{opt}}\,\eta_{u,0}\eta_{z,0} < \|u\|_{\mathbb{A}_s}\|z\|_{\mathbb{A}_t} < \infty. \tag{3.30}$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ minimal, sodass $\|u\|_{\mathbb{A}_s}\|z\|_{\mathbb{A}_t} \leqslant \varepsilon\,(N+1)^{s+t}$. Wähle zudem $\mathcal{T}_{\varepsilon_1}$ und $\mathcal{T}_{\varepsilon_2}$ mit $\eta_{u,\varepsilon_1} = \min_{\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}} \eta_{u,*}$ und $\eta_{z,\varepsilon_2} = \min_{\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}} \eta_{z,*}$ und definiere $\mathcal{T}_\varepsilon := \mathcal{T}_{\varepsilon_1} \oplus \mathcal{T}_{\varepsilon_2}$, sowie $\mathcal{T}_* := \mathcal{T}_\varepsilon \oplus \mathcal{T}_\ell$. Dann folgt wiederum mit Lemma 3.1, der Definition von $\|\cdot\|_{\mathbb{A}}$ und der getroffenen Wahl von N, dass

$$\begin{aligned}\eta_{u,*}\eta_{z,*} &\leqslant C_{\mathrm{mon}}\,\eta_{u,\varepsilon_1}\eta_{z,\varepsilon_2} \leqslant C_{\mathrm{mon}}\,(N+1)^{-(s+t)}\|u\|_{\mathbb{A}_s}\|z\|_{\mathbb{A}_t}\\ &\leqslant C_{\mathrm{mon}}\,\varepsilon = \kappa_{\mathrm{opt}}\,\eta_{u,\ell}\eta_{z,\ell}.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\eta_{u,*}^2 \leqslant \kappa_{\mathrm{opt}}\,\eta_{u,\ell}^2 \quad \text{oder} \quad \eta_{z,*}^2 \leqslant \kappa_{\mathrm{opt}}\,\eta_{z,\ell}^2 \tag{3.32}$$

und Lemma 3.2 liefert

$$\theta\eta_{u,\ell}^2 \leqslant \eta_{u,\ell}(\mathcal{R}_u(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_*))^2 \quad \text{oder} \quad \theta\eta_{z,\ell}^2 \leqslant \eta_{z,\ell}(\mathcal{R}_z(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_*))^2, \tag{3.33}$$

was (*ii*) beweist. Zudem liefern Axiom (A3) und Netzverfeinerungsanforderung (N1)

$$\max\{\#\mathcal{R}_u(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_*), \#\mathcal{R}_z(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_*)\} \leqslant C_{\mathrm{rel}}\#(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_*) \leqslant C_{\mathrm{rel}}(\#\mathcal{T}_* - \#\mathcal{T}_\ell). \tag{3.34}$$

Mit $C := (C_{\mathrm{mon}}\,\kappa_{\mathrm{opt}}^{-1}\,\|u\|_{\mathbb{A}_s}\|z\|_{\mathbb{A}_t})^{1/(s+t)}$, dem Axiom (A3), der Overlay Estimate (N3) und der Minimalität von N folgt

$$N < (\|u\|_{\mathbb{A}_s}\|z\|_{\mathbb{A}_t})^{1/(s+t)}\,\varepsilon^{-1/(s+t)} = C(\eta_{u,\ell}\eta_{z,\ell})^{-1/(s+t)} \tag{3.35}$$

und damit

$$\#\mathcal{T}_* - \#\mathcal{T}_\ell \leqslant \#\mathcal{T}_\varepsilon - \#\mathcal{T}_0 \leqslant \#\mathcal{T}_{\varepsilon_1} + \mathcal{T}_{\varepsilon_2} - 2\,\#\mathcal{T}_0 \leqslant 2\,N < 2\,C(\eta_{u,\ell}\eta_{z,\ell})^{-1/(s+t)}. \tag{3.36}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}\max\{\#\mathcal{R}_u(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_*), \#\mathcal{R}_z(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_*)\} &\overset{(3.34)}{\leqslant} C_{\mathrm{rel}}\,(\#\mathcal{T}_* - \#\mathcal{T}_\ell)\\ &\overset{(3.36)}{\leqslant} 2\,C\,C_{\mathrm{rel}}(\eta_{u,\ell}\eta_{z,\ell})^{-1/(s+t)}.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Dies zeigt (*i*) mit $C_1 = 2\,C_{\mathrm{rel}}$ und $C_2 = \frac{C_{\mathrm{mon}}}{\kappa_{\mathrm{opt}}}$ ist. $\square$

Satz 3.7 (Optimales Konvergenzverhalten von Algorithmus 2)**.** *Für beliebiges* $\theta \in (0, \theta_{\mathrm{opt}}]$ *mit* θ_{opt} *wie in Lemma 3.2 gewährleistet Algorithmus 2, dass das Fehlerprodukt* $\eta_{u,\ell}\eta_{z,\ell}$ *mit optimaler algebraischer Rate asymptotisch abfällt, d.h. es existiert ein* $C_{\mathrm{opt}} > 0$*, sodass für alle* $s, t > 0$ *mit* $(u, z) \in \mathbb{A}_s \times \mathbb{A}_t$ *und* $\ell \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$\eta_{u,\ell}\eta_{z,\ell} \leqslant \frac{C_{\mathrm{opt}}^{1+s+t}}{(1 - q_{\mathrm{lin}}^{1/(s+t)})^{s+t}} \|u\|_{\mathbb{A}_s} \|z\|_{\mathbb{A}_t} (\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0)^{-(s+t)},$$

wobei C_{opt} *von Axiomen* (A1)–(A4)*,* C_{mark}*,* C'_{mark} *und* θ *abhängt.*

Beweis. Wie in [Feischl et al., 2016] folgt mit Lemma 3.6 für alle $j \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_j^{\min} = \mathcal{M}_{u,j} &\Rightarrow \#\mathcal{M}_{u,j} \leqslant C_{\mathrm{mark}}\, \#\mathcal{R}_u(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_*) \\ \mathcal{M}_j^{\min} = \mathcal{M}_{z,j} &\Rightarrow \#\mathcal{M}_{z,j} \leqslant C_{\mathrm{mark}}\, \#\mathcal{R}_u(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_*). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Damit ergibt sich unmittelbar

$$\begin{aligned} (C'_{\mathrm{mark}})^{-1}\, \#\mathcal{M}_j \leqslant \mathcal{M}_j^{\min} &= \min\{\#\mathcal{M}_{u,j}, \#\mathcal{M}_{z,j}\} \\ &\leqslant C_{\mathrm{mark}}\, \max\{\#\mathcal{R}_u(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_*), \#\mathcal{R}_z(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_*)\}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Weiters folgt mit Closure Estimate (N2) und Lemma 3.6

$$\begin{aligned} \#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 &\leqslant C_{\mathrm{mesh}} \sum_{j=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_j \\ &\leqslant C_{\mathrm{mesh}}\, C_{\mathrm{mark}}\, C'_{\mathrm{mark}}\, C_1\, (C_2\, \|u\|_{\mathbb{A}_s} \|z\|_{\mathbb{A}_t})^{1/(s+t)} \sum_{j=0}^{\ell-1} (\eta_{u,j}\eta_{z,j})^{-1/(s+t)}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Außerdem folgt mit Satz 3.5 für alle $\ell, n \in \mathbb{N}$

$$\eta_{u,\ell+n}\eta_{z,\ell+n} \leqslant C_{\mathrm{lin}}\, q_{\mathrm{lin}}^n \eta_{u,\ell}\eta_{z,\ell},$$

also für alle $0 \leqslant j \leqslant \ell$

$$\eta_{u,\ell}\eta_{z,\ell} \leqslant C_{\mathrm{lin}}\, q_{\mathrm{lin}}^{\ell-j} \eta_{u,j}\eta_{z,j}$$

und damit

$$(\eta_{u,j}\eta_{z,j})^{-1/(s+t)} \leqslant C_{\mathrm{lin}}^{1/(s+t)}\, q_{\mathrm{lin}}^{(\ell-j)/(s+t)} (\eta_{u,\ell}\eta_{z,\ell})^{-1/(s+t)}. \tag{3.41}$$

Mit $0 < q := q_{\mathrm{lin}}^{1/(s+t)} < 1$, (3.41) und der geometrischen Reihe lässt sich die Summe in (3.40) weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\ell-1} (\eta_{u,j}\eta_{z,j})^{-1/(s+t)} &\leqslant C_{\mathrm{lin}}^{1/(s+t)} (\eta_{u,\ell}\eta_{z,\ell})^{-1/(s+t)} \sum_{j=0}^{\ell-1} q^j \\ &\leqslant \frac{C_{\mathrm{lin}}^{1/(s+t)}}{1 - q_{\mathrm{lin}}^{1/(s+t)}} (\eta_{u,\ell}\eta_{z,\ell})^{-1/(s+t)}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Mit (3.42) wird aus (3.40)

$$\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 \leqslant \frac{C_{\text{mesh}}\, C_{\text{mark}}\, C'_{\text{mark}}\, C_1}{1 - q_{\text{lin}}^{1/(s+t)}} (C_{\text{lin}}\, C_2 \|u\|_{\mathbb{A}_s} \|z\|_{\mathbb{A}_t})^{1/(s+t)} (\eta_{u,\ell}\eta_{z,\ell})^{-1/(s+t)},$$

was äquivalent zu

$$\eta_{u,\ell}\eta_{z,\ell} \leqslant \frac{(C_{\text{mesh}}\, C_{\text{mark}}\, C'_{\text{mark}}\, C_1)^{s+t}}{(1 - q_{\text{lin}}^{1/(s+t)})^{s+t}} C_{\text{lin}}\, C_2 \|u\|_{\mathbb{A}_s} \|z\|_{\mathbb{A}_t} (\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0)^{-(s+t)} \tag{3.43}$$

ist. Definiere $C_{\text{opt}} := \max\{C_{\text{mesh}}\, C_{\text{mark}}\, C'_{\text{mark}}\, C_1, C_{\text{lin}}\, C_2\}$. Damit ergibt sich

$$(C_{\text{mesh}}\, C_{\text{mark}}\, C'_{\text{mark}}\, C_1)^{s+t} C_{\text{lin}}\, C_2 \leqslant C_{\text{opt}}^{1+s+t}$$

und schlussendlich

$$\eta_{u,\ell}\eta_{z,\ell} \leqslant \frac{C_{\text{opt}}^{1+s+t}}{(1 - q_{\text{lin}}^{1/(s+t)})^{s+t}} \|u\|_{\mathbb{A}_s} \|z\|_{\mathbb{A}_t} (\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0)^{-(s+t)},$$

was die gewünschte Abschätzung ist. □

Korollar 3.8. *Falls*

$$s_{\max} := \sup\{s > 0 \mid \|u\|_{\mathbb{A}_s} < \infty\} < \infty \textit{ und } t_{\max} := \sup\{t > 0 \mid \|z\|_{\mathbb{A}_t} < \infty\} < \infty,$$

dann existieren für beliebige $s \in (0, s_{\max})$ und $t \in (0, t_{\max})$ Teilfolgen $(\mathcal{T}_{\ell_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\mathcal{T}_{\ell_j})_{j\in\mathbb{N}}$, sodass für beliebige $k, j \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\eta_{u,\ell_k} \lesssim (\#\mathcal{T}_{\ell_k} - \#\mathcal{T}_0)^{-s} \quad \textit{und} \quad \eta_{z,\ell_j} \lesssim (\#\mathcal{T}_{\ell_j} - \#\mathcal{T}_0)^{-t}, \tag{3.44}$$

wobei die versteckten Konstanten von $s_{\max} - s > 0$ und $t_{\max} - t > 0$ abhängen.

Beweis. Sei $\tilde{s} \in (0, s_{\max})$ beliebig, wähle $\varepsilon > 0$ mit $s := \tilde{s} + 2\,\varepsilon < s_{\max}$ wie in [Feischl et al., 2016] und setze $t := t_{\max} - \varepsilon$. Aus [Carstensen et al., 2014, Theorem 4.1 (ii)] folgt

$$C_{\text{opt}}\, \|z\|_{\mathbb{A}_t} \leqslant \sup_{\ell\in\mathbb{N}_0} (\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 + 1)^t\, \eta_{z,\ell} < \infty \tag{3.45}$$

und damit $\eta_{z,\ell} \not\lesssim (\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 + 1)^{-(t_{\max}+\varepsilon)}$. Also gibt es für alle $C > 0$ und $\ell \in \mathbb{N}$ ein $k \geqslant \ell$, sodass

$$\eta_{z,k} > C\,(\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_0 + 1)^{-(t_{\max}+\varepsilon)}. \tag{3.46}$$

Daraus folgt, dass es eine Teilfolge ℓ_k gibt, sodass

$$\eta_{z,\ell_k} (\#\mathcal{T}_{\ell_k} - \#\mathcal{T}_0 + 1)^{t_{\max}+\varepsilon} \geqslant 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{3.47}$$

Mit (3.47) zusammen mit Satz 3.7 folgt

$$\begin{aligned} \eta_{u,\ell_k} \leqslant \eta_{u,\ell_k}\eta_{z,\ell_k} (\#\mathcal{T}_{\ell_k} - \#\mathcal{T}_0 + 1)^{t_{\max}+\varepsilon} &\lesssim (\#\mathcal{T}_{\ell_k} - \#\mathcal{T}_0 + 1)^{-(s+t)+t_{\max}+\varepsilon} \\ &= (\#\mathcal{T}_{\ell_k} - \#\mathcal{T}_0 + 1)^{-\tilde{s}}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Für η_{z,ℓ_j} folgt die Behauptung analog. □

Satz 3.9 (Optimales Konvergenzverhalten von Algorithmus 1 mit Markierungsstrategie 3)**.** *Algorithmus 1 mit Markierungsstrategie 3 liefert dieselben Ergebnisse wie Satz 3.7 und Korollar 3.8 für beliebiges* $\theta \in (0, \frac{\theta_{\mathrm{opt}}}{2})$.

Beweis. Wie in [Feischl et al., 2016] ist nur zu zeigen, dass

$$\#\mathcal{M}_j \leqslant \max\{\#\mathcal{R}_u(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_*), \#\mathcal{R}_z(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{T}_*)\}. \tag{3.49}$$

Für beliebiges $\theta \in (0, \frac{\theta_{\mathrm{opt}}}{2})$ erhält man mit Lemma 3.6

$$2\,\theta\eta_{u,j}^2 \leqslant \eta_{u,j}(\mathcal{R}_u(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_*))^2 \quad \text{oder} \quad 2\,\theta\eta_{z,j}^2 \leqslant \eta_{z,j}(\mathcal{R}_z(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_*))^2 \tag{3.50}$$

Damit erhält man mit $\mathcal{R}_j := \mathcal{R}_u(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_*)$ oder $\mathcal{R}_j := \mathcal{R}_z(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_*)$ jeweils

$$\theta\rho_j^2 = 2\,\theta\eta_{u,j}^2\eta_{z,j}^2 \leqslant \eta_{u,j}(\mathcal{R}_j)^2\eta_{z,j}^2 + \eta_{z,j}(\mathcal{R}_j)^2\eta_{u,j}^2 = \rho_j(\mathcal{R}_j)^2 \tag{3.51}$$

und mit der Definition von $\mathcal{M}_j$ in Algorithmus 3 somit

$$\#\mathcal{M}_j \leqslant C_{\mathrm{mark}} \max\{\#\mathcal{R}_u(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_*), \#\mathcal{R}_z(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_*)\}. \tag{3.52}$$

Damit folgen die Ergebnisse von Satz 3.7 und Korollar 3.8 auch für Algorithmus 3 mit $C_{\mathrm{opt}} := \max\{C_{\mathrm{lin}}\, C_2, C_{\mathrm{mesh}}\, C_{\mathrm{mark}}\, C_1\}$. □

4 GOAFEM für endlich viele Zielfunktionale

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Ergebnisse von [Feischl et al., 2016], nämlich Satz 3.5, Satz 3.7 inklusive Korollar 3.8 und Satz 4.7, von einem Zielfunktional g auf endlich, aber beliebig viele Zielfunktionale $g_1, \ldots, g_n$ für $n \in \mathbb{N}$ auszuweiten. Mit jedem Zielfunktional g_i erhält man ein weiteres duales Problem und damit eine weitere Lösung z_i und Galerkin Lösung $Z_{\bullet,i}$ (siehe Abschnitt 2). Mit der gleichen Methodik wie für ein Zielfunktional erhält man

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{i=1}^{n} g_i(u) - g_i(U_\bullet) \Big| &= \Big| \sum_{i=1}^{n} a(u, z_i) - a(U_\bullet, Z_{\bullet,i}) \Big| \\ &= \Big| \sum_{i=1}^{n} a(u - U_\bullet, z_i - Z_{\bullet,i}) \Big| \\ &\leqslant C_{\mathrm{stet}} \, \|u - U_\bullet\|_{\mathcal{X}} \sum_{i=1}^{n} \|z_i - Z_{\bullet,i}\|_{\mathcal{X}} \\ &\leqslant C_{\mathrm{stet}} \, \eta_{u,\bullet} \sum_{i=1}^{n} \eta_{z_i,\bullet}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Damit geht allerdings die ℓ_2–ähnliche Struktur von (3.1) verloren. Ziel wird es sein, eine Abschätzung in der Form von

$$\Big| \sum_{i=1}^{n} g_i(u) - g_i(U_\bullet) \Big| \lesssim \eta_{u,\bullet} \Big(\sum_{i=1}^{n} \eta_{z_i,\bullet}^2 \Big)^{1/2} \tag{4.2}$$

zu bekommen.

4.1 Abstraktes Setting für endlich viele Zielfunktionale

Der Ausgangspunkt ist derselbe wie in Kapitel 2. Sei also $\mathcal{X}$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$, induzierter Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}^{1/2}$ und $\mathcal{X}^*$ der topologische Dualraum von $\mathcal{X}$. Weiters sei für den Rest des Kapitels $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest.

Definiere

$$\mathcal{W} := \mathcal{X}^n \text{ und } \langle u, v \rangle_V := \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i \rangle_{\mathcal{X}} \text{ für alle } u = (u_i)_{i=1}^n, v = (v_i)_{i=1}^n \in \mathcal{W} \tag{4.3}$$

und sei $\|\cdot\|_{\mathcal{W}} := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{W}}^{1/2}$. Daraus folgt unmittelbar, dass $\mathcal{W}$ ein Hilbertraum ist[1]. Zudem definiere eine neue Bilinearform $a_{\mathcal{W}}(\cdot, \cdot) \colon \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ folgendermaßen

$$a_{\mathcal{W}}(u, v) := \sum_{i=1}^{n} a(u_i, v_i) \quad \text{für alle } u = (u_i)_{i=1}^n, v = (v_i)_{i=1}^n \in \mathcal{W} \tag{4.4}$$

wobei $a(\cdot, \cdot) \colon \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ eine stetige und koerzive Bilinearform auf $\mathcal{X}$ ist.

Lemma 4.1. *Die in* (4.4) *definierte Funktion $a_{\mathcal{W}}$ ist eine stetige und koerzive Bilinearform auf $\mathcal{W}$.*

Beweis. Die Linearität in beiden Komponenten ist klar. Seien $u, v \in \mathcal{W}$ beliebig. Dann ergibt sich aus der Stetigkeit von $a(\cdot, \cdot)$ und der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{W}}(u, v) = \sum_{i=1}^{n} a(u_i, v_i) &\leqslant C_{\text{stet}} \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{\mathcal{X}} \|v_i\|_{\mathcal{X}} \\ &\leqslant C_{\text{stet}} \Big(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{\mathcal{X}}^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|_{\mathcal{X}}^2 \Big)^{1/2} \\ &= C_{\text{stet}} \|u\|_{\mathcal{W}} \|v\|_{\mathcal{W}}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

womit die Stetigkeit von $a_{\mathcal{W}}(\cdot, \cdot)$ bewiesen ist. Zudem folgt aus der Koerzivität von $a(\cdot, \cdot)$

$$a_{\mathcal{W}}(u, u) = \sum_{i=1}^{n} a(u_i, u_i) \geqslant \kappa \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{\mathcal{X}}^2 = \kappa \|u\|_{\mathcal{W}}^2, \tag{4.6}$$

d.h. die Koerzivität von $a_{\mathcal{W}}$ mit gleicher Konstante. □

Bezeichne mit $\mathcal{W}^*$ den Dualraum von $\mathcal{W}$. Sei für ein beliebiges Funktional $f \in X^*$ das Funktional

$$f_{\mathcal{W}}(u) := \sum_{i=1}^{n} f(u_i) \quad \text{für alle } u \in \mathcal{W}$$

gegeben. Da $a_{\mathcal{W}}(\cdot, \cdot)$ mit Lemma 4.1 die Voraussetzungen vom Lemma von Lax–Milgram (Lemma 2.1) erfüllt, existiert ein eindeutiges $u \in \mathcal{W}$, sodass

$$a_{\mathcal{W}}(u, v) = f_{\mathcal{W}}(v) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{W} \tag{4.7}$$

[1] Die Skalarprodukteigenschaften lassen sich leicht nachrechnen und bzgl. der Vollständigkeit sei angemerkt, dass es sich um ein endliches Produkt handelt.

gilt[2]. Zudem sei $\mathcal{W}_\bullet$ ein endlich–dimensionaler Unterraum von $\mathcal{W}$ und $U_\bullet$ die korrespondierende Galerkin Lösung. Seien weiters $g_1, \dots, g_n \in X^*$ Zielfunktionale und definiere

$$g_{\mathcal{W}}(u) := \sum_{i=1}^{n} g_i(u_i) \quad \text{für alle } u \in \mathcal{W}. \tag{4.8}$$

Dann ist $g_{\mathcal{W}} \in \mathcal{W}^*$ und Lemma 2.1 liefert ein eindeutiges $z \in \mathcal{W}$ mit

$$a_{\mathcal{W}}(v, z) = g_{\mathcal{W}}(v) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{W}.$$

Auf $\mathcal{W}_\bullet$ existiert wiederum wegen Lemma 2.1 eine eindeutige Galerkin Lösung $Z_\bullet$. Wie in Abschnitt 2 lassen sich $\|u - U_\bullet\|_{\mathcal{X}}$ und $\|z_i - Z_{\bullet,i}\|_{\mathcal{X}}$ durch Fehlerschätzer nach oben beschränken:

$$\|u - U_\bullet\|_{\mathcal{X}} \leqslant \eta_{u,\bullet} \quad \text{und} \quad \|z_i - Z_{\bullet,i}\|_{\mathcal{X}} \leqslant \eta_{z_i,\bullet}.$$

Definiere einen neuen Fehlerschätzer für $z = (z_i)_{i=1}^n$ wie folgt

$$\gamma_{z,\bullet} := \Big(\sum_{i=1}^{n} \eta_{z_i,\bullet}^2 \Big)^{1/2}. \tag{4.9}$$

Damit ergibt sich folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{i=1}^{n} |g_i(u) - g_i(U_\bullet)|^2 \Big)^{1/2} &\lesssim \Big(\sum_{i=1}^{n} \eta_{u,\bullet}^2 \eta_{z_i,\bullet}^2 \Big)^{1/2} \\ &= \eta_{u,\bullet} \Big(\sum_{i=1}^{n} \eta_{z_i,\bullet}^2 \Big)^{1/2} = \eta_{u,\bullet} \gamma_{z,\bullet}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Bemerkung. Würde man wie in Abschnitt 2 vorgehen, würde man Folgendes erhalten:

$$\begin{aligned} |g_{\mathcal{W}}(u) - g_{\mathcal{W}}(U_\bullet)| &= |a_{\mathcal{W}}(u - U_\bullet, z - Z_\bullet)| \\ &\lesssim \|u - U_\bullet\|_{\mathcal{W}} \|z - Z_\bullet\|_{\mathcal{W}} \\ &= \sqrt{n} \|u - U_\bullet\|_{\mathcal{X}} \|z - Z_\bullet\|_{\mathcal{W}} \\ &\leqslant \sqrt{n}\, \eta_{u,\bullet} \gamma_{z,\bullet}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

was eine legitime obere Schranke ist, jedoch mit dem Faktor $\sqrt{n}$. Allerdings ist mittels

[2]Insbesondere gilt (4.7) auch für alle $v \in \mathcal{W}$, welche in jeder Komponente gleich sind. Dies bedeutet, dass auch u in jeder Komponente gleich ist. Notationell wird nicht zwischen den Komponenten und dem Vektor unterschieden.

der Cauchy–Schwarz Ungleichung (4.10) eine stärkere Abschätzung:

$$\begin{aligned} |g_{\mathcal{W}}(u) - g_{\mathcal{W}}(U_\bullet)| &= \Big| \sum_{i=1}^n g_i(u) - g_i(U_\bullet) \Big| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n |g_i(u) - g_i(U_\bullet)| \\ &\leqslant \sqrt{n} \Big(\sum_{i=1}^n |g_i(u) - g_i(U_\bullet)|^2 \Big)^{1/2} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Also ergibt sich wie in Abschnitt 2 das Problem, $\eta_{u,\bullet}\gamma_{z,\bullet}$ mit best möglichem Verhalten, wie zu Beginn des Kapitels formuliert, gegen 0 gehen zu lassen.

4.2 Anforderungen an Fehlerschätzer

Damit die Ergebnisse von [Feischl et al., 2016], nämlich Satz 3.5, Satz 3.7 inklusive Korollar 3.8 und Satz 4.7, auf das Setting von Abschnitt 4.1 angewandt werden können, muss der in (4.9) definierte Fehlerschätzer die Axiome (A1)–(A4) erfüllen. Außerdem wird noch eine Abstandsfunktion für den neuen Fehlerschätzer benötigt, nämlich

$$d_z(\mathcal{T}, \mathcal{T}') := \Big(\sum_{i=1}^n d_{z_i}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')^2 \Big)^{1/2} \quad \text{für alle } \mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathbb{T}, \tag{4.13}$$

wobei d_{z_i} die zu z_i gehörige Abstandsfunktion und $z = (z_i)_{i=1}^n$ die Lösung des dualen Problems bzw. der dualen Probleme ist.

Proposition 4.2. *Die in* (4.13) *definierte Abstandsfunktion erfüllt beide Bedingungen aus* (3.2) *mit einer Konstante* $C_{\mathrm{dist}}^{\mathcal{W}} > 0$.

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Abstandsfunktionen d_{z_i} beide Bedingungen aus (3.2) mit der gleichen Konstante C_{dist} erfüllen[3]. Zudem seien $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ und $\mathcal{T}'' \in \mathbb{T}$ beliebig. Dann folgt mit der Dreiecksungleichung auf ℓ^2

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{dist}}^{-1}\, d_z(\mathcal{T}, \mathcal{T}') &= \Big(\sum_{i=1}^n C_{\mathrm{dist}}^{-2}\, d_{z_i}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')^2 \Big)^{1/2} \\ &\leqslant \Big(\sum_{i=1}^n \big(d_{z_i}(\mathcal{T}, \mathcal{T}') + d_{z_i}(\mathcal{T}', \mathcal{T}'') \big)^2 \Big)^{1/2} \\ &\leqslant d_z(\mathcal{T}, \mathcal{T}') + d_z(\mathcal{T}', \mathcal{T}''), \end{aligned}$$

[3]Ansonsten könnte man zum jeweiligen Maximum übergehen, welches existiert, da es sich um endlich viele Fehlerschätzer handelt.

womit die erste Behauptung folgt. Außerdem gilt

$$
\begin{aligned}
d_z(\mathcal{T},\mathcal{T}') &= \Big(\sum_{i=1}^{n} d_{z_i}(\mathcal{T},\mathcal{T}')^2\Big)^{1/2} \\
&\leqslant C_{\mathrm{dist}}\Big(\sum_{i=1}^{n} d_{z_i}(\mathcal{T}',\mathcal{T})^2\Big)^{1/2} \\
&= C_{\mathrm{dist}} d_z(\mathcal{T}',\mathcal{T}),
\end{aligned}
$$

was die zweite Behauptung ist. □

Proposition 4.3. *Mögen $\eta_{z_1},\dots,\eta_{z_n}$ die Axiome* (A1)–(A4) *erfüllen, wobei wir annehmen, dass die Mengen $\mathcal{R}_{z_i}(\mathcal{T}_\bullet,\mathcal{T}_*) = \mathcal{R}(\mathcal{T}_\bullet,\mathcal{T}_*)$ in Axiom* (A3) *jeweils dieselben sind. Dann erfüllt der in* (4.9) *definierte Fehlerschätzer γ_z diese auch.*

Beweis. Sei, mit der gleichen Begründung wie oben, ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass $\eta_{z_1},\dots,\eta_{z_n}$ die Axiome (A1)–(A4) mit gleichen Konstanten C_{stb}, C_{red}, q_{red}, C_{rel} und C_{orth} erfüllen.
Axiom (A1):
Seien $\mathcal{T}_\bullet \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}_* \in \mathrm{refine}(\mathcal{T}_\bullet)$ beliebig. Dann folgt mit der Minkowski-Ungleichung

$$
\begin{aligned}
|\gamma_{z,*}(\mathcal{T}_\bullet\cap\mathcal{T}_*) - \gamma_{z,\bullet}(\mathcal{T}_\bullet\cap\mathcal{T}_*)| &= \Big|\Big(\sum_{i=1}^{n}\eta_{z_i,*}(\mathcal{T}_\bullet\cap\mathcal{T}_*)^2\Big)^{1/2} - \Big(\sum_{i=1}^{n}\eta_{z_i,\bullet}(\mathcal{T}_\bullet\cap\mathcal{T}_*)^2\Big)^{1/2}\Big| \\
&\leqslant \Big|\Big(\sum_{i=1}^{n}\big(\eta_{z_i,*}(\mathcal{T}_\bullet\cap\mathcal{T}_*) - \eta_{z_i,\bullet}(\mathcal{T}_\bullet\cap\mathcal{T}_*)\big)^2\Big)^{1/2}\Big|.
\end{aligned}
$$

Da alle η_{z_i} Axiom (A1) erfüllen, kann der letzte Ausdruck weiter abgeschätzt werden:

$$
\begin{aligned}
|\gamma_{z,*}(\mathcal{T}_\bullet\cap\mathcal{T}_*) - \gamma_{z,\bullet}(\mathcal{T}_\bullet\cap\mathcal{T}_*)| &\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n}\big(C_{\mathrm{stb}}\, d_{z_i}(\mathcal{T}_\bullet,\mathcal{T}_*)\big)^2\Big)^{1/2} \\
&= C_{\mathrm{stb}}\, d_z(\mathcal{T}_\bullet,\mathcal{T}_*).
\end{aligned}
$$

Damit erfüllt γ_z Axiom (A1) mit $C_{\mathrm{stb}}^{\mathcal{W}} := C_{\mathrm{stb}}$.
Axiom (A2):
Seien $\mathcal{T}_\bullet \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}_* \in \mathrm{refine}(\mathcal{T}_\bullet)$ beliebig, dann folgt für $\delta > 0$ mit der Young–Ungleichung

$$
\begin{aligned}
\gamma_{z,*}(\mathcal{T}_*\backslash\mathcal{T}_\bullet)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\eta_{z_i,*}(\mathcal{T}_*\backslash\mathcal{T}_\bullet)^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\big(q_{\mathrm{red}}\,\eta_{z_i,\bullet}(\mathcal{T}_\bullet\backslash\mathcal{T}_*) + C_{\mathrm{red}}\, d_{z_i}(\mathcal{T}_\bullet,\mathcal{T}_*)\big)^2 \\
&\leqslant (1+\delta)\, q_{\mathrm{red}}\,\gamma_{z,\bullet}(\mathcal{T}_\bullet\backslash\mathcal{T}_*)^2 + (1+\delta^{-1})\, C_{\mathrm{red}}\, d_z(\mathcal{T}_\bullet,\mathcal{T}_*)^2.
\end{aligned}
$$

Für $\delta > 0$ hinreichend klein erfüllt γ_z Axiom (A2) mit Konstanten $q_{\text{red}}^{\mathcal{W}} := (1+\delta)\, q_{\text{red}}$ und $C_{\text{red}}^{\mathcal{W}} := (1+\delta^{-1})\, C_{\text{red}}$.
Axiom (A3):
Seien $\mathcal{T}_\bullet \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}_* \in \operatorname{refine}(\mathcal{T}_\bullet)$ beliebig. Da zusätzlich angenommen wird, dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Menge $\mathcal{R}_{z_i}(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*) = \mathcal{R}(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*)$ gleich ist, wähle $\mathcal{R}_z(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*) := \mathcal{R}(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*)$, womit sofort Bedingungen (i) und (iii) erfüllt sind. Direkt aus der Definition folgt:

$$\begin{aligned} d_z(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*) &= \Big(\sum_{i=1}^{n} d_{z_i}(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*)^2\Big)^{1/2} \\ &\leqslant C_{\text{rel}} \Big(\sum_{i=1}^{n} \eta_{z_i,*}(\mathcal{R}_{z_i}(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*))^2\Big)^{1/2} \\ &= C_{\text{rel}} \Big(\sum_{i=1}^{n} \eta_{z_i,*}(\mathcal{R}_{z}(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*))^2\Big)^{1/2} = C_{\text{rel}}\, \gamma_{z,\bullet}(\mathcal{R}_z(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*)), \end{aligned}$$

womit auch Bedingung (ii) erfüllt ist. Insgesamt erfüllt γ_z also Axiom (A3).
Axiom (A4):
Sei $\mathcal{T}_{\ell_n}$ eine beliebige von Algorithmus 1 erzeugte (möglicherweise) endliche Folge von Triangulierungen. Seien weiters $\varepsilon > 0$ und $m \leqslant N$ beliebig. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{N} \big(d_z(\mathcal{T}_{\ell_j+1}, \mathcal{T}_{\ell_j})^2 - \varepsilon \gamma_{z,\ell_j}^2\big) &\leqslant \sum_{j=m}^{N} \sum_{i=1}^{n} \big(d_z(\mathcal{T}_{\ell_j+1}, \mathcal{T}_{\ell_j})^2 - \varepsilon \eta_{z_i,\ell_j}^2\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m}^{N} \big(d_z(\mathcal{T}_{\ell_j+1}, \mathcal{T}_{\ell_j})^2 - \varepsilon \eta_{z_i,\ell_j}^2\big) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} C_{\text{orth}}(\varepsilon)\, \eta_{z_i,\ell_m}^2 = C_{\text{orth}}(\varepsilon) \gamma_{z,\ell_m}^2. \end{aligned}$$

Damit erfüllt γ_z Axiom (A4) mit Konstate $C_{\text{orth}}^{\mathcal{W}} := C_{\text{orth}}$. □

Bemerkung. Üblicherweise trifft die Annahme für Axiom (A3), dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Mengen $\mathcal{R}_{z_i}(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*) = \mathcal{R}(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*)$ ident sind, nicht zu. In diesem Fall kann man $\mathcal{R}(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*) := \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{R}_{z_i}(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*)$ betrachten und es gilt (A3) mit

$$d_z(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*) \leqslant C_{\text{rel}}\, \gamma_{z,\bullet}(\mathcal{R}_z(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*)) \text{ und } \#\mathcal{R}(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \#\mathcal{R}_{z_i}(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*) \leqslant n\, C_{\text{rel}}\, \#(\mathcal{T}_\bullet \backslash \mathcal{T}_*)$$

Im konkreten Setting kann der Faktor n in der letzten Ungleichung vermieden werden, weil $\mathcal{R}_{z_i}(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*)$ regelmäßig ein Patch ist: Definiere für alle $k \in \mathbb{N}$ den k–ten Patch $\mathcal{T}_\bullet^{(k)}[\mathcal{T}_\bullet \backslash \mathcal{T}_*]$ folgendermaßen rekursiv:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\bullet^{(0)}[\mathcal{T}_\bullet \backslash \mathcal{T}_*] &:= \mathcal{T}_\bullet \backslash \mathcal{T}_* \\ \mathcal{T}_\bullet^{(k+1)}[\mathcal{T}_\bullet \backslash \mathcal{T}_*] &:= \{T \in \mathcal{T}_\bullet \,\big|\, \exists\, T' \in \mathcal{T}_\bullet^{(k)}[\mathcal{T}_\bullet \backslash \mathcal{T}_*] \colon T \cap T' \neq \varnothing\}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

woraus unmittelbar folgt, dass $\mathcal{T}_\bullet \backslash \mathcal{T}_* \subseteq \mathcal{T}_\bullet^{(k)}[\mathcal{T}_\bullet \backslash \mathcal{T}_*]$ und $\mathcal{T}_\bullet^{(k)}[\mathcal{T}_\bullet \backslash \mathcal{T}_*] \subseteq \mathcal{T}_\bullet$. Man findet

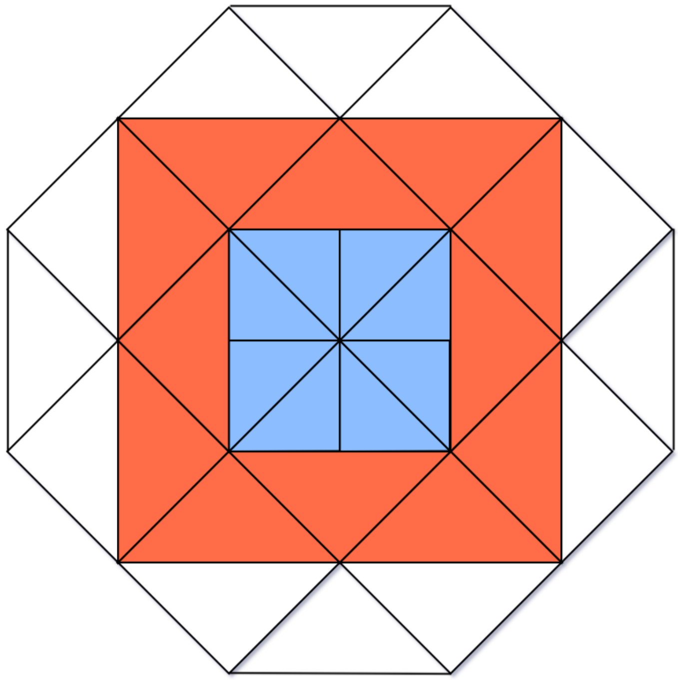


Abbildung 4.1: $\mathcal{T}_\bullet^{(0)}[\mathcal{T}_\bullet \backslash \mathcal{T}_*]$ in blau und $\mathcal{T}_\bullet^{(1)}[\mathcal{T}_\bullet \backslash \mathcal{T}_*]$ in rot.

dann ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\mathcal{R}_{z_i}(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*) \subseteq \mathcal{T}_\bullet^{(k_0)}[\mathcal{T}_\bullet \backslash \mathcal{T}_*] \tag{4.15}$$

gilt, weshalb die Wahl $\mathcal{R}(\mathcal{T}_\bullet, \mathcal{T}_*) := \mathcal{T}_\bullet^{(k_0)}[\mathcal{T}_\bullet \backslash \mathcal{T}_*]$ sinnvoll ist.

Da γ_z also ein zulässiger Fehlerschätzer ist, gelten somit alle in Kapitel 3 gezeigten Aussagen auch für beliebig (aber endlich) viele Zielfunktionale:

Satz 4.4 (Lineare Konvergenz von Algorithmus 1 für endlich viele Zielfunktionale)**.** *Für beliebiges $\theta \in (0, 1]$ existieren $q_{\text{lin}} \in (0, 1)$ und $C_{\text{lin}} > 0$ abhängig von Axiomen* (A1)–(A4) *und θ, sodass Algorithmus 1 mit Markierungsstrategien 2 und 3 linear konvergiert, d.h. für alle $\ell, n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\eta_{u,\ell+n}\, \gamma_{z,\ell+n} \leqslant C_{\text{lin}}\, q_{\text{lin}}^n\, \eta_{u,\ell} \gamma_{z,\ell}. \tag{4.16}$$

Satz 4.5 (Optimales Konvergenzverhalten von Algorithmus 2 für endlich viele Zielfunktionale)**.** *Für beliebiges $\theta \in (0, \theta_{\text{opt}}]$ gewährleistet Algorithmus 2, dass das Fehlerprodukt $\eta_{u,\ell}\gamma_{z,\ell}$ mit optimaler algebraischer Rate asymptotisch abfällt, d.h. es existiert ein $C_{\text{opt}} > 0$, sodass für alle $s, t_1, \ldots, t_n > 0$, mit $u \in \mathbb{A}_s$, $z_i \in \mathbb{A}_{t_i}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ sowie alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $t := \min_{i=1,\ldots,n} t_i$ gilt*

$$z \in \mathbb{A}_t \quad \textit{und} \quad \eta_{u,\ell}\gamma_{z,\ell} \leqslant \frac{C_{\text{opt}}^{1+s+t}}{(1 - q_{\text{lin}}^{1/(s+t)})^{s+t}} \|u\|_{\mathbb{A}_s} \|z\|_{\mathbb{A}_t} (\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0)^{-(s+t)},$$

wobei C_{opt} von Axiomen (A1)–(A4), C_{mark}, C'_{mark} und θ abhängt.

Beweis. Es verbleibt lediglich $z \in \mathbb{A}_t$ zu zeigen. Da für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}_N$ ein $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass

$$\gamma_{z,*} \leqslant \sqrt{n}\, \eta_{i_0,*},$$

folgt, dass für $t := \min_{i=1,\ldots,n} t_i$

$$(N+1)^t \min_{\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}_N} \gamma_{z,*} \leqslant (N+1)^{t_{i_0}} \sqrt{n} \min_{\mathcal{T}_* \in \mathbb{T}_N} \eta_{z_{i_0},*} \leqslant \sqrt{n}\, \|z_{i_0}\|_{\mathbb{A}_{t_{i_0}}},$$

gilt. Durch bilden des Supremums über $\mathbb{N}_0$ auf der linken Seite, folgt die gewünschte Aussage. □

Korollar 4.6. *Falls*

$$s_{\max} := \sup\{s > 0 \mid \|u\|_{\mathbb{A}_s} < \infty\} < \infty \textit{ und } t_{\max} := \sup\{t > 0 \mid \|z\|_{\mathbb{A}_t} < \infty\} < \infty,$$

dann existieren für beliebige $s \in (0, s_{\max})$ und $t \in (0, t_{\max})$ Teilfolgen $(\mathcal{T}_{\ell_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\mathcal{T}_{\ell_j})_{j \in \mathbb{N}}$, sodass für beliebige $k, j \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\eta_{u,\ell_k} \lesssim (\#\mathcal{T}_{\ell_k} - \#\mathcal{T}_0)^{-s} \quad \textit{und} \quad \gamma_{z,\ell_j} \lesssim (\#\mathcal{T}_{\ell_j} - \#\mathcal{T}_0)^{-t}, \tag{4.17}$$

wobei die versteckten Konstanten von $s_{\max} - s > 0$ und $t_{\max} - t > 0$ abhängen.

Satz 4.7 (Optimales Konvergenzverhalten von Algorithmus 1 mit Markierungsstrategie 3 für endlich viele Zielfunktionale)**.** *Algorithmus 1 mit Markierungsstrategie 3 liefert dieselben Ergebnisse wie Satz 4.5 und Korollar 4.6 für beliebiges $\theta \in (0, \theta_{\text{opt}}/2)$.*

5 Numerische Experimente

In diesem letzten Kapitel, sollen die Ergebnisse aus Kapitel 4 mit numerischen Experimenten unterlegt werden. Sei dazu folgendes Modellproblem gegeben: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit Lipschitz Rand $\partial\Omega$; Seien $f \in L^2(\Omega)$ und $\boldsymbol{f} \in [L^2(\Omega)]^2$. Betrachte das Poisson-Problem mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f + \operatorname{div} \boldsymbol{f} && \text{in } \Omega, && (5.1)\\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. && (5.2) \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Gauß, siehe z.b. [Jüngel, 2022], lautet die schwache Formulierung: Finde $u \in H_0^1(\Omega)$, sodass $a(u,v) = F(v)$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt, wobei[1]

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \text{und} \quad F(v) := \int_\Omega fv - \nabla v \cdot \boldsymbol{f} \, dx \tag{5.3}$$

für alle $u, v \in H_0^1(\Omega)$ definiert ist und „$\cdot$“ das euklidische Skalarprodukt am $\mathbb{R}^2$ ist. Zudem betrachte für $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $g_i \in L^2(\Omega)^2$ bzw. $\boldsymbol{g}_i \in [L^2(\Omega)]^2$ die dualen Probleme

$$\begin{aligned} -\Delta z_i &= g_i + \operatorname{div} \boldsymbol{g}_i && \text{in } \Omega && (5.4)\\ z_i &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, && (5.5) \end{aligned}$$

deren schwache Formulierungen analog zu (5.3) sind. Nun werden die vier Schritte der AFEM fixiert und konkretisiert.

5.1 Lösen

Lemma 5.1. *Die in der schwachen Formulierung* (5.3) *definierte Bilinearform und das Funktional erfüllen die Voraussetzungen für das Lemma von Lax–Milgram.*

Beweis. Die Linearität von $a(\cdot,\cdot)$ und $F(\cdot)$ folgt unmittelbar aus der Linearität von Integral, Skalarprodukt und Gradienten. Seien $u, v \in H_0^1(\Omega)$ beliebig. Dann folgt mit der Cauchy–Schwarz Ungleichung

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \leqslant \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

[1] Hier wird der $H_0^1(\Omega)$ versehen mit der Energienorm $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ betrachtet. Auf $H_0^1(\Omega)$ ist diese äquivalent zur Sobolevnorm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, vgl. [Jüngel, 2022].

womit die Stetigkeit von $a(\cdot,\cdot)$ bewiesen ist. Weiters folgt unmittelbar aus der Definition

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)},$$

womit auch die Koerzivität gezeigt ist. Schlussendlich folgt aus der Hölder- und Poincaré-Ungleichung:

$$|F(v)| \leqslant \int_\Omega |fv|\, dx + \int_\Omega |\nabla v \cdot \boldsymbol{f}|\, dx \leqslant C_{\mathrm{p}}\, \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla v \cdot \boldsymbol{f}|\, dx. \quad (5.6)$$

Das verbleibende Integral kann wiederum mit der Cauchy–Schwarz Ungleichung abgeschätzt werden:

$$\int_\Omega |\nabla v \cdot \boldsymbol{f}|\, dx \leqslant \|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \quad (5.7)$$

was zeigt, dass $F(\cdot)$ beschränkt und demnach stetig ist. □

Also existiert nach Lemma 2.1 ein eindeutiges $u \in H^1_0(\Omega)$, welches die schwache Formulierung löst. Sei weiters für eine zulässige Triangulierung $\mathcal{T}_*$ von Ω der Raum der $\mathcal{T}_*$–stückweise Polynome vom Grad $\leqslant p$ folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{P}^p(\mathcal{T}_*) := \{v \in L^2(\Omega) | \forall\, T \in \mathcal{T}_* \colon v|_T \text{ ist ein Polynom vom Grad } \leqslant p\}. \quad (5.8)$$

Definiere zudem die FEM–Räume

$$\mathcal{S}^p(\mathcal{T}_*) := \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_*) \cap H^1(\Omega) \quad \text{und} \quad \mathcal{S}^p_0(\mathcal{T}_*) := \mathcal{S}^p(\mathcal{T}_*) \cap H^1_0(\Omega), \quad (5.9)$$

welche als endlich–dimensonale Teilräume von $H^1_0(\Omega)$ wieder Hilberträume sind. Mit Proposition 2.2 folgt auch die Existenz einer eindeutigen Lösung $U_* \in \mathcal{S}^p_0(\mathcal{T}_*)$. Analoge Argumentation gewährt auch die eindeutige Existenz der Lösungen $z_i \in H^1_0(\Omega)$ für die dualen Probleme (5.4)–(5.5) sowie der zugehörigen diskreten Lösungen $Z_{i,*} \in \mathcal{S}^p_0(\mathcal{T}_*)$.

5.2 Schätzen

Wir nehmen an, dass für die gegebene Anfangstriangulierung $\mathcal{T}_0$ die Divergenz $\operatorname{div} \boldsymbol{f}|_T$ für alle $T \in \mathcal{T}_0$ klassisch in $L^2(T)$ existiert, d.h. $\boldsymbol{f} \in H(\operatorname{div}, T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_0$. Ferner existiere die Spur $\boldsymbol{f} \cdot \nu \in L^2(\partial\Omega)$. Beides ist klarerweise erfüllt, wenn $\boldsymbol{f}$ stückweise polynomial ist, d.h. $\boldsymbol{f} \in \mathcal{P}^q$ für $q \geqslant 0$. Wiederum für eine zulässige Triangulierung $\mathcal{T}_*$ und $T \in \mathcal{T}_*$ definiere, ausgenommen am Dirichlet Rand, den *a posteriori* Element–basierten Residual Fehlerschätzer

$$\eta_{u,*}(T) := h_T^2\, \|\Delta u + f + \operatorname{div} \boldsymbol{f}\|^2_{L^2(T)} + \sum_{E \subseteq T \cap \Omega} h_T \|[\![(\nabla u + \boldsymbol{f}) \cdot \nu]\!]\|^2_{L^2(E)}, \quad (5.10)$$

wobei mit $E \subseteq T \cap \Omega$ die Kanten von T und mit $[\![(\cdot) \cdot \nu]\!]$ der Sprung auf der Kante $E_1 = T \cap T_1$

$$[\![v \cdot \nu]\!] := (v \cdot \nu)|_T + (v \cdot \nu)|_{T_1},$$

für ein beliebiges *benachbartes* Element T_1 von T und ν der nach außen gerichtete Einheitsnormalvektor ist. Analoge Voraussetzungen wie für $\boldsymbol{f}$ machen wir für $\boldsymbol{g}_i$. Für die dualen Probleme betrachte dann

$$\eta_{z_i,*}(T) := h_T^2 \, \|\Delta z_{i,*} + g_i + \operatorname{div} \boldsymbol{g}_i\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E \subseteq T \cap \Omega} h_T \|[\![(\nabla z_i + \boldsymbol{g}_i) \cdot \nu]\!]\|_{L^2(E)}^2, \quad (5.11)$$

und definiere wie in Abschnitt 4 den *gesamten* Fehlerschätzer für alle dualen Probleme

$$\gamma_{z,*} := \Big(\sum_{i=1}^{n} \eta_{z_i,*}^2 \Big)^{1/2}. \quad (5.12)$$

Die sowohl in (5.10), als auch (5.11), definierten Fehlerschätzer erfüllen die Abschätzung (2.6) und die Axiome (A1)–(A4), siehe z.B. [Feischl et al., 2016] oder [Verfürth, 2013].

5.3 Markieren

Die beiden Markierungsstrategien 2 und 3 aus Abschnitt 3.1 werden verwendet und wurden dort bereits ausführlich beschrieben.

5.4 Verfeinern

Zur Netzverfeinerung wird das in Abschnitt 3.2 *angedeutete* NVB verwendet. Da dieser Algorithmus von großer Bedeutung für die numerischen Experimente ist, wird dieser jetzt für $d = 2$ genauer beschrieben. Sei, wie in [Innerberger, 2022], $T = \operatorname{conv}\{x_0, x_1, x_2\} \in \mathcal{T}_*$ ein Element einer zulässigen Triangulierung $\mathcal{T}_*$ und bezeichne mit $\operatorname{re}(T) = \operatorname{conv}\{x_1, x_2\}$ diejenige Kante von T, bezüglich der verfeinert werden soll. Das Element T wird dann folgendermaßen verfeinert: $\operatorname{re}(T)$ wird halbiert, indem ein neuer Knoten $x = (x_1 + x_2)/2$ eingeführt wird und aus T zwei neue Elemente $T_1 = \operatorname{conv}\{x, x_0, x_1\}$ und $T_2 = \operatorname{conv}\{x, x_2, x_0\}$ gemacht werden. T_1 und T_2 haben dann jeweils die Verfeinerungskanten $\operatorname{re}(T_1) = \operatorname{conv}\{x_0, x_1\}$ bzw. $\operatorname{re}(T_2) = \operatorname{conv}\{x_2, x_0\}$, also die Kanten gegenüber der jüngsten Kante. Sobald alle markierten Elemente verfeinert sind, besteht die Möglichkeit, dass in der neuen Triangulierung „hängende" Knoten (engl. hanging nodes) vorhanden sind, also die Triangulierung nicht mehr konform ist. Dies lässt sich vermeiden, indem rekursiv[2] sichergestellt wird, dass für jedes Element mit markierter Kante auch zumindest dessen Referenzkante auch markiert ist. Das Element T wird dann wie in Abbildung (5.1) zerteilt.

[2] Da die Triangulierung aus endlich vielen Elementen besteht, terminiert die Rekursion nach maximal $3 \cdot \#\mathcal{T}_*$ Schritten.

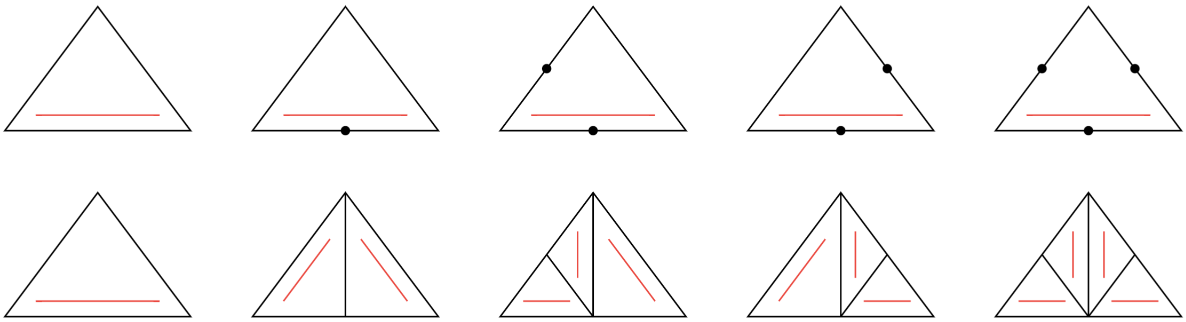


Abbildung 5.1: Alle Möglichkeiten an Verfeinerungskanten und Knoten der neuen Elemente vor und nach der Verfeinerung (jeweils übereinander).

Algorithmus 4: Newest Vertex Bisection für $d = 2$

Input: Eine zulässige Triangulierung $\mathcal{T}_*$ und eine Menge von markierten Elementen $\mathcal{M}_* \subseteq \mathcal{T}_*$.

(i): Definiere $\mathcal{U}_* := \emptyset$ und $\mathcal{C}_* := \{\mathrm{re}(T) | T \in \mathcal{M}_*\}$.

(ii): Solange $\mathcal{C}_* \neq \emptyset$:

Setze $\mathcal{U}_* := \mathcal{U}_* \cup \mathcal{C}_*$ und $\mathcal{C}_* := \{\mathrm{re}(T) | T \in \mathcal{T}_* : \exists\, E \in \mathcal{U}_* \text{ mit } E \subset \partial T\} \backslash \mathcal{U}_*$.

(iii): Verfeinere die Elemente, sodass alle markierten Kanten $E \in \mathcal{U}_*$ gemäß Abbildung (5.1) verfeinert werden.

beschrieben zerteilt werden.

Output: Verfeinerte Triangulierung $\mathcal{T}_\bullet$.

5.5 Experimente

Für die konkreten Experimente betrachte $\Omega := (0,1)^2$, $f \equiv 1$ und $\boldsymbol{f} \equiv 0$. Weiters sei die Anzahl der Zielfunktionale $n = 3$ und betrachte die folgenden Teilmengen von Ω:

(i) $\Omega_1 := \{(x,y) \in (0,1)^2 \,|\, 0 < x < 1/4;\ 3/4 < y < 1 \text{ und } y > x + 3/4\}$,

(ii) $\Omega_2 := \{(x,y) \in (0,1)^2 \,|\, 3/4 < x < 1\}$,

(iii) $\Omega_3 := \{(x,y) \in (0,1)^2 \,|\, x - 1/4 < y < x + 1/4\}$.

Definiere weiters die Zielfunktionale g_i für $i \in \{1,2,3\}$ und beliebiges $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$
\begin{aligned}
G_1(v) &:= \int_{\Omega_1} (\nabla v)_2 \, dx, \\
G_2(v) &:= \int_{\Omega_2} v \, dx, \\
G_3(v) &:= \int_{\Omega_3} (\nabla v)_1 \, dx,
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

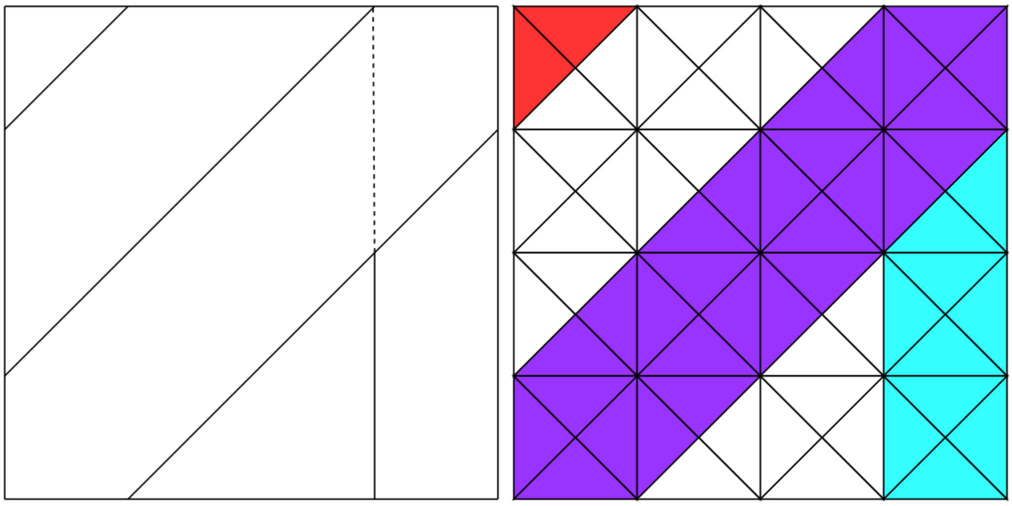


Abbildung 5.2: Ω_1 in rot, Ω_2 in türkis und Ω_3 in violett.

wobei bei G_1 und G_3 jeweils die zweite bzw. erste Komponente des Gradienten gemeint ist. Weiters bezeichne mit χ_{A} die charakteristische Funktion auf der Menge A und definiere

$$\boldsymbol{g}_1 := (0, \chi_{\Omega_1}),\ \boldsymbol{g}_2 \equiv 0 \text{ und } \boldsymbol{g}_3 := (\chi_{\Omega_3}, 0), \tag{5.14}$$

und

$$g_1 \equiv 0,\ g_2 := \chi_{\Omega_2} \text{ und } g_3 \equiv 0. \tag{5.15}$$

Für die praktische Umsetzung wurde das MooAFEM Package, siehe [Innerberger and Praetorius, 2023], verwendet.

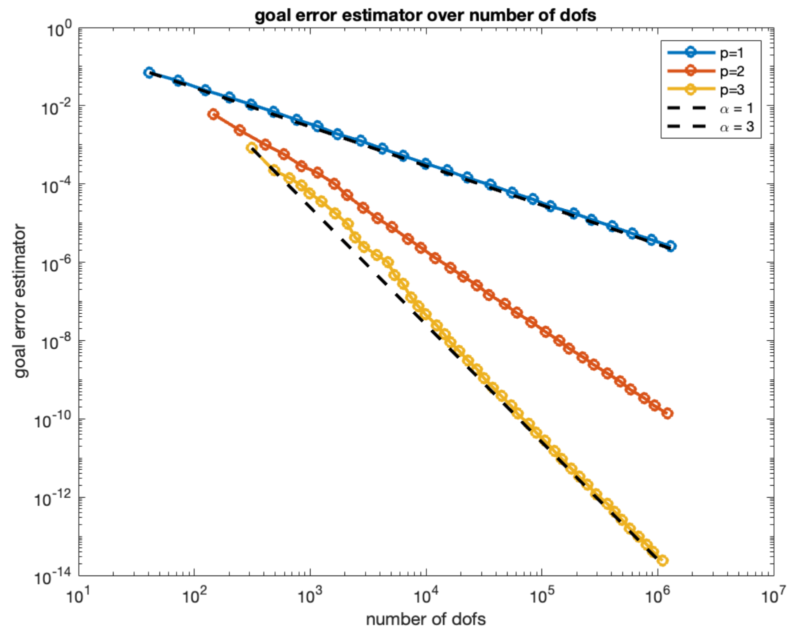
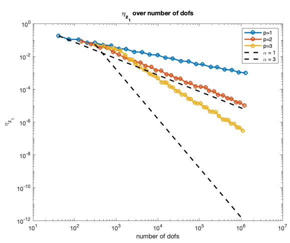
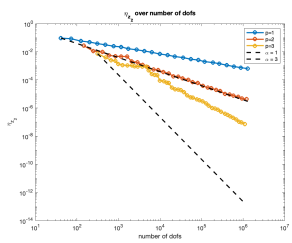


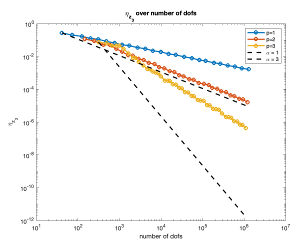
Abbildung 5.3: Konvergenzrate des Schätzerprodukts $\eta_u \gamma_z$



(a) η_{z_1}

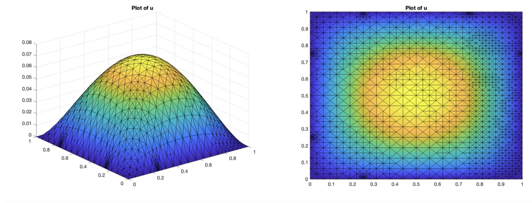


(b) η_{z_2}

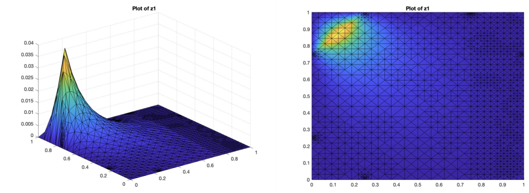


(c) η_{z_3}

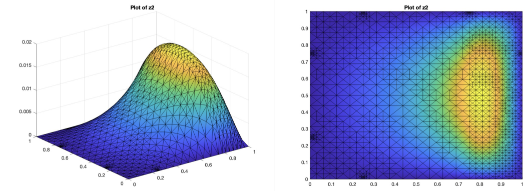
Abbildung 5.4: Fehlerschätzer



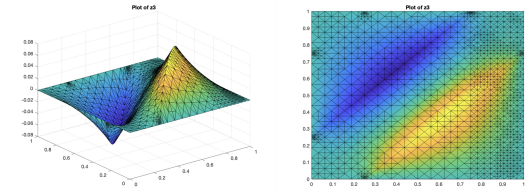
(a) u



(b) z_1

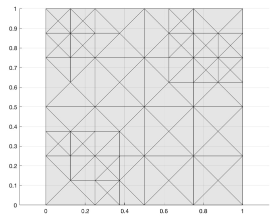


(c) z_2

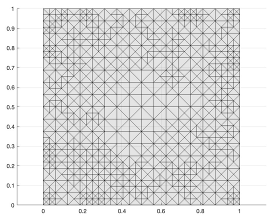


(d) z_3

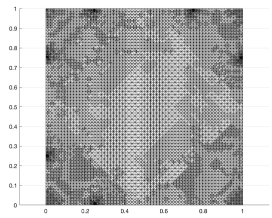
Abbildung 5.5: Plots von primaler Lösung u und dualen Lösungen z_1, z_2, z_3 für 1e4 dofs.



(a) 41 dofs

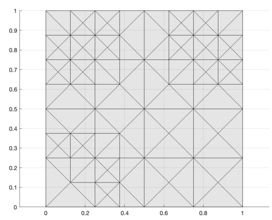


(b) 479 dofs

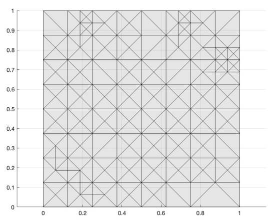


(c) 6386 dofs

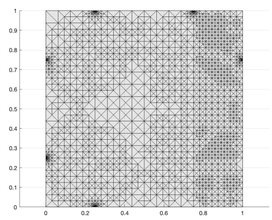
Abbildung 5.6: Netzverfeinerung für $p = 1$



(a) 145 dofs

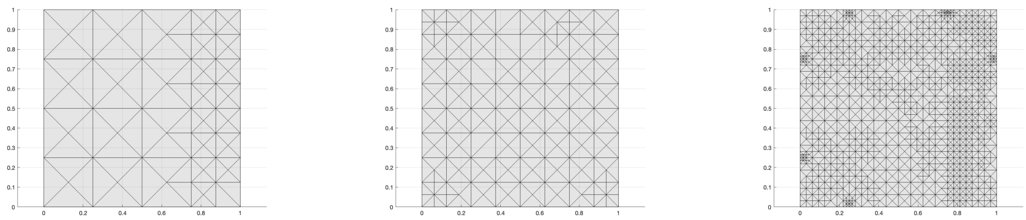


(b) 455 dofs



(c) 5874 dofs

Abbildung 5.7: Netzverfeinerung für $p = 2$



(a) 313 dofs (b) 862 dofs (c) 7306 dofs

Abbildung 5.8: Netzverfeinerung für $p = 3$

Literaturverzeichnis

[Becker et al., 2011] Becker, R., Estecahandy, E., and Trujillo, D. (2011). Weighted marking for goal-oriented adaptive finite element methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 49(6):2451–2469.

[Binev et al., 2004] Binev, P., Dahmen, W., and DeVore, R. (2004). Adaptive finite element methods with convergence rates. *Numerische Mathematik*, 97(2):219–268.

[Carstensen et al., 2014] Carstensen, C., Feischl, M., Page, M., and Praetorius, D. (2014). Axioms of adaptivity. *Computers & Mathematics with Applications*, 67(6):1195–1253.

[Cascon et al., 2008] Cascon, J. M., Kreuzer, C., Nochetto, R. H., and Siebert, K. G. (2008). Quasi-optimal convergence rate for an adaptive finite element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(5):2524–2550.

[Feischl et al., 2016] Feischl, M., Praetorius, D., and van der Zee, K. G. (2016). An abstract analysis of optimal goal-oriented adaptivity. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 54(3):1423–1448.

[Grätsch-Bathe, 2005] Grätsch-Bathe (2005). A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. *Computers & Structures*, 83(4):235–265.

[Innerberger, 2022] Innerberger, M. (2022). *Reliable goal-oriented adaptive FEM.* Dissertation, TU Wien, Institut für Analysis und Scientific Computing.

[Innerberger and Praetorius, 2023] Innerberger, M. and Praetorius, D. (2023). MooAFEM: An object oriented Matlab code for higher-order adaptive FEM for (nonlinear) elliptic PDEs. *Applied Mathematics and Computation*, 442:127731.

[Jüngel, 2022] Jüngel, A. (2022). *Partielle Differentialgleichungen.* Vorlesungsskript, TU Wien.

[Karkulik et al., 2013] Karkulik, M., Pavlicek, D., and Praetorius, D. (2013). On 2d newest vertex bisection: Optimality of mesh-closure and H1-stability of L2-projection. *Constructive Approximation*, 38(2):213–234.

[Mommer-Stevenson, 2009] Mommer-Stevenson (2009). A goal-oriented adaptive finite element method with convergence rates. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(2):861–886.

[Stevenson, 2007] Stevenson, R. (2007). Optimality of a standard adaptive finite element method. *Foundations of Computational Mathematics*, 7(2):245–269.

[Stevenson, 2008] Stevenson, R. (2008). The completion of locally refined simplicial partitions created by bisection. *Mathematics of Computation*, 77(261):227–241.

[Verfürth, 2013] Verfürth, R. (2013). In *A Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods*. Oxford University Press.