



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

B A C H E L O R A R B E I T

Ein elementarer Beweis für Konvergenz adaptiver FEM

ausgeführt am

Institut für
Analysis und Scientific Computing
TU Wien

unter der Anleitung von

Univ. Prof. Dirk Praetorius

und

Dipl.-Ing. Michael Innerberger

durch

Valentin Helml

Matrikelnummer: 11710342

Rechte Wienzeile 229

1120, Wien

Wien, am 1. September 2021

Danksagung

Zuerst möchte ich meinen Betreuern Univ. Prof. Dirk Praetorius und Dipl.-Ing. Michael Innerberger für ihre Hilfsbereitschaft und die zahlreichen und konstruktiven Gespräche Dank aussprechen. Dirk Praetorius bin ich besonders für die Unterstützung bei der Themenfindung sowie Strukturierung dieser Arbeit dankbar. Michael Innerberger danke ich insbesondere für die Hilfestellung bei Kapitel 5, in dem ich einige seiner Matlab-Codes verwenden durfte.

Ganz besonders danke ich meiner Freundin Viktoria: Für den emotionalen Rückhalt und dein offenes Ohr, wenn gerade nichts weiter geht, für die ehrliche Freude, nachdem die Hindernisse überwunden sind, und für jede Sekunde, die ich mit dir verbringen darf.

Zu guter Letzt danke ich meinen Eltern für die Akzeptanz und Unterstützung, die sie meinen Interessen stets entgegengebracht haben, und die finanzielle Beihilfe, die mein Studium sowie die vorliegende Arbeit ermöglicht hat.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am 1. September 2021

Valentin Helml

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Konvergenz von AFEM Algorithmen	3
2.1	Adaptive FEM Algorithmen	3
2.2	Konvergenz von Algorithmus 1	4
2.2.1	Voraussetzungen	4
2.2.2	Konvergenzsatz	5
3	Konvergenz von GOAFEM Algorithmen	11
3.1	GOAFEM Algorithmen	11
3.1.1	Lineares Goalfunctional	11
3.1.2	Quadratisches Goalfunctional	12
3.1.3	GOAFEM Algorithmen	13
3.1.4	Beispiele für Realisierungen von MARK A*	14
3.1.5	Beispiele für Realisierungen von MARK B*	15
3.2	Konvergenz von Algorithmus 2	16
4	Beispiel für einen AFEM Algorithmus	25
4.1	Poisson-Gleichung im \mathbb{R}^2	25
4.1.1	Ausgangstriangulierung und Netzverfeinerungsmethode	25
4.1.2	Diskretisierung und Lösen der diskreten Formulierung des Problems	27
4.1.3	Fehlerschätzer	27
5	Numerische Experimente	34
5.1	AFEM	34
5.2	GOAFEM	36
	Literaturverzeichnis	40

1 Einleitung

Adaptive finite element method (AFEM) Verfahren sind eines der wichtigsten Werkzeuge zur Lösung von Differentialgleichungen in technischen und naturwissenschaftlichen Anwendungen. Eine gängige Formulierung von abstrakten AFEM Algorithmen stellt die folgende Schleife dar (vgl. Algorithmus 1):

- (i) **LÖSEN:** In diesem Schritt wird für die aktuelle Triangulierung (siehe Definition 1) eine *finite element* Lösung berechnet.
- (ii) **FEHLER SCHÄTZEN:** Für jedes Element der aktuellen Triangulierung wird ein Verfeinerungsindikator (siehe Notation 3) berechnet, der als Abschätzung für den lokalen Fehler der bereits berechneten *finite element* Lösung dient.
- (iii) **MARKIEREN:** Basierend auf den in Schritt (ii) berechneten Verfeinerungsindikatoren werden Elemente der aktuellen Triangulierung zur Verfeinerung markiert.
- (iv) **VERFEINERN:** In diesem Schritt erfolgt die Verfeinerung der aktuellen Triangulierung gemäß einer Netzverfeinerungsmethode (siehe Definition 2), sodass zumindest alle in Schritt (iii) markierten Elemente verfeinert werden.

Konvergenz von AFEM Algorithmen wurde bereits für eine große Klasse von Differentialgleichungen nachgewiesen; siehe z.B. [Dö96] für das erste Ergebnis für zweidimensionale Gebiete, [MNS01] für den ersten Konvergenzbeweis ohne Voraussetzungen an die Ausgangstriangulierung (siehe Abschnitt 2.1) und [MSV08, Sie11, CFPP14, GP21] für aktuellere Beiträge.

In Kapitel 2 werden wir zunächst grundlegende Definitionen und Notationen einführen, bevor wir in Abschnitt 2.2 den Konvergenzbeweis aus [GP21] nachvollziehen. Im Gegensatz zu früheren Werken wie [MSV08, Sie11] kommt dieses Resultat ohne die Annahme von lokaler Effizienz aus, wodurch es z.B. auch auf *boundary element method* Verfahren für elliptische Integralgleichungen (siehe [FKMP13]) anwendbar ist.

In Kapitel 3 wollen wir die Methoden aus [GP21] auf *goal oriented adaptive finite element method* (GOAFEM) Verfahren (siehe Abschnitt 3.1 bzw. Algorithmus 2) anwenden, um neue Konvergenzresultate zu erhalten. Während AFEM Algorithmen die Lösungsfunktion u einer Differentialgleichung approximieren, wird durch GOAFEM Algorithmen lediglich der Wert $G(u)$ für ein Zielfunktional G (siehe Abschnitte 3.1.1–3.1.2) angenähert. Da es für viele Anwendungen genügt, den Wert $G(u)$ zu kennen, und keine konkrete Approximation der Lösung u benötigt wird, spielen GOAFEM Verfahren in der Praxis oft eine wichtigere Rolle als AFEM Verfahren — nicht zuletzt, weil GOAFEM Verfahren in der Regel eine höhere Konvergenzrate aufweisen (siehe [FPZ16, S.1438ff] oder [Imm18, S.84ff]). In dieser Arbeit werden wir uns allerdings nicht um Konvergenzraten kümmern, sondern mit möglichst schwachen Voraussetzungen Konvergenz ohne garantierte Raten (engl. *plain*

convergence) von verallgemeinerten Versionen der Algorithmen aus [FPZ16] nachweisen. Diese Algorithmen sind wiederum verallgemeinerte Versionen jener, die in [MS09] (Algorithmus 3) bzw. [BET11] (Algorithmus 4) vorgestellt wurden. Während die letzten beiden Arbeiten jedoch ausschließlich das Poisson Modellproblem betrachten und die Symmetrie des entsprechenden dualen Problems für ihre Ergebnisse nutzen, sind die Resultate der vorliegenden Arbeit, inspiriert durch [FPZ16], unabhängig von Modellproblemen und gelten für alle FEM Diskretisierungen im Rahmen des Lemmas von Lax–Milgram. Da wir in dieser Arbeit im Gegensatz zu [FPZ16] aber nicht an Konvergenzraten bzw. optimaler Konvergenz interessiert sind, kommen wir auch ohne die Annahmen diskreter Zuverlässigkeit (engl. *discrete reliability*) und Quasi-Orthogonalität aus (siehe [FPZ16, S.1428]). Dadurch sind unsere Resultate auf eine größere Klasse von Problemen anwendbar als jene von [FPZ16] und damit insbesondere auch jene von [MS09, Sie11, HP16]. Des Weiteren folgen wir [GP21] und vermeiden diskrete Effizienz, wodurch die Netzverfeinerung auch durch Newest Vertex Bisection (siehe Algorithmus 10) anstelle des lokalen *bisec5*-Verfahrens erfolgen kann.

Konkret verlangen wir für unsere Analysis, dass die Fehlerschätzer die folgenden strukturellen Eigenschaften aus [GP21] erfüllen:

- Stabilität auf nicht-verfeinerten Elementen (siehe Gleichung (2.4)),
- Reduktion auf verfeinerten Elementen (siehe Gleichung (2.5)).

Weiters stellen wir die sehr schwache Bedingung (2.6) an die Markierungsstrategie, die insbesondere durch gängige Strategien wie das Dörfler-Kriterium (siehe [Dö96] bzw. Gleichung (2.17)) und das Maximumskriterium erfüllt wird. Schließlich setzen wir *a priori* Konvergenz (siehe Gleichung (2.3)) der Folge der berechneten Lösungsfunktionen voraus, d.h. die Existenz eines Grenzwertes, wobei nicht vorausgesetzt wird, dass dieser die Differentialgleichung löst.

In Kapitel 4 präsentieren wir für ein konkretes Beispiel — die 2D Poisson-Gleichung — alle bis dahin erwähnten Bestandteile von AFEM Verfahren und rechnen die in der Analysis von Kapitel 2 benötigten Eigenschaften nach.

Schließlich implementieren wir in Kapitel 5 die Algorithmen aus den Kapiteln 2–3 in Matlab und führen numerische Experimente durch.

2 Konvergenz von AFEM Algorithmen

Dieses Kapitel orientiert sich an dem Paper „Plain Convergence of Adaptive Algorithms without exploiting Reliability and Efficiency“ [GP21] und stellt eine ausführlichere Behandlung der darin bewiesenen Ergebnisse dar.

Wir betrachten dabei eine partielle Differentialgleichung auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit positivem Maß $|\Omega| > 0$. Ferner sei \mathcal{X} ein Funktionenraum auf Ω , beispielsweise der Sobolev-Raum $\mathcal{X} = H_0^1(\Omega)$, wobei die folgende Analysis im Wesentlichen unabhängig von \mathcal{X} ist. Wir bezeichnen mit $u \in \mathcal{X}$ die gesuchte, aber unbekannte Lösung dieses Problems und untersuchen adaptive Algorithmen zur Approximation von u . Bevor wir am Ende des folgenden Abschnittes zu einer abstrakten Beschreibung dieser Algorithmen kommen, werden noch einige wichtige Schreibweisen und Definitionen eingeführt.

2.1 Adaptive FEM Algorithmen

Definition 1 (Triangulierung). Eine endliche Menge \mathcal{T} heißt Triangulierung von Ω , falls die folgenden Aussagen gelten:

- (i) Alle Elemente $T \in \mathcal{T}$ sind kompakte Mengen mit positivem Maß $|T| > 0$,
- (ii) für $T, T' \in \mathcal{T}$ mit $T \neq T'$ folgt $|T \cap T'| = 0$,
- (iii) \mathcal{T} überdeckt $\bar{\Omega}$, d.h. $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$.

Definition 2 (Netzverfeinerungsmethode). Eine Funktion $\text{refine}(\cdot, \cdot)$ heißt Netzverfeinerungsmethode, wenn sie ein Tupel $(\mathcal{T}_H, \mathcal{M}_H)$, bestehend aus einer Triangulierung \mathcal{T}_H und einer Menge markierter Elemente $\mathcal{M}_H \subseteq \mathcal{T}_H$ auf eine Triangulierung \mathcal{T}_h abbildet, sodass

- (i) zumindest alle markierten Elemente verfeinert werden, d.h.

$$\mathcal{M}_H \subseteq \mathcal{T}_H \setminus \mathcal{T}_h, \quad (2.1)$$

- (ii) alle Elemente $T \in \mathcal{T}_H$ die Vereinigung ihrer Kinder sind, d.h.

$$T = \bigcup \{T' \in \mathcal{T}_h : T' \subseteq T\} \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_H. \quad (2.2)$$

Sei für den Rest dieses Kapitels $\text{refine}(\cdot, \cdot)$ eine feste Netzverfeinerungsmethode. Für eine Triangulierung \mathcal{T}_H und $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{T}_n(\mathcal{T}_H)$ die Menge aller durch höchstens n Anwendungen von $\text{refine}(\cdot, \cdot)$ ausgehend von \mathcal{T}_H erreichbaren Triangulierungen. Für $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}_n(\mathcal{T}_H)$ existieren also $m \leq n$, sowie $\mathcal{T}_0, \dots, \mathcal{T}_m$ und $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{T}_i$ für $i = 0, \dots, m-1$, sodass gilt $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_H$, $\mathcal{T}_m = \mathcal{T}_h$ und $\mathcal{T}_{i+1} = \text{refine}(\mathcal{T}_i, \mathcal{M}_i)$ für $i = 0, \dots, m-1$.

Weiters nennen wir

$$\mathbb{T}(\mathcal{T}) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{T}_n(\mathcal{T})$$

die Menge aller (zulässigen) Verfeinerungen von \mathcal{T} und definieren die Menge aller zulässigen Triangulierungen $\mathbb{T} := \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$ als die Menge aller Verfeinerungen einer festen Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 .

Notation 3 (Diskretisierung und Fehlerschätzer). Für jede Triangulierung $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}$ von Ω sei $\mathcal{X}_h \subseteq \mathcal{X}$ ein zugehöriger diskreter (d.h. endlichdimensionaler) Unterraum von \mathcal{X} und $u_h \in \mathcal{X}_h$ die entsprechende diskrete und berechenbare Lösung.

Sei weiters für jede Triangulierung $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}$ und jedes $T \in \mathcal{T}_h$ ein Verfeinerungsindikator $\eta_h(T) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben, der zumindest heuristisch den Anteil des Fehlers $\|u - u_h\|_{\mathcal{X}}$ auf T misst.

Für jede Teilmenge $\mathcal{U}_h \subseteq \mathcal{T}_h$ definieren wir

$$\eta_h(\mathcal{U}_h) := \left(\sum_{T \in \mathcal{U}_h} \eta_h(T)^2 \right)^{1/2} \quad \text{und} \quad \eta_h := \eta_h(\mathcal{T}_h).$$

Nun können wir eine algorithmische Formulierung der *adaptive finite element method* (AFEM), ausgehend von der Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 , angeben.

Algorithmus 1 (AFEM). INPUT: Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 .

Für $\ell = 0, 1, 2, \dots$ führe die folgenden vier Schritte aus:

- (i) **LÖSEN:** Berechne die diskrete Lösung $u_\ell \in \mathcal{X}_\ell$.
- (ii) **FEHLER SCHÄTZEN:** Berechne $\eta_\ell(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$.
- (iii) **MARKIEREN:** Bestimme eine Menge $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$ von markierten Elementen.
- (iv) **VERFEINERN:** Berechne $\mathcal{T}_{\ell+1} := \text{refine}(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{M}_\ell)$.

OUTPUT: Der Algorithmus erzeugt eine Folge $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{T}$ von Triangulierungen, eine Folge $(u_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathcal{X}$ von zugehörigen diskreten Lösungen sowie eine Folge von Fehlerschätzern $(\eta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$.

2.2 Konvergenz von Algorithmus 1

2.2.1 Voraussetzungen

Die einzige Voraussetzung an Schritt (i) von Algorithmus 1 ist *a priori* Konvergenz, d.h. wir verlangen die Existenz eines Elements $u_\infty \in \mathcal{X}$, sodass gilt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|u_\infty - u_\ell\|_{\mathcal{X}} = 0. \quad (2.3)$$

Zu diesem Zeitpunkt ist jedoch unbekannt, ob $u_\infty = u$ gilt.

Für Schritt (ii) von Algorithmus 1 sei $S: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine bei 0 stetige Funktion mit $S(0) = 0$. Weiters sei $q_{\text{red}} \in (0, 1)$ und es gelte für alle $\overline{\mathcal{T}}_H \in \mathbb{T}$ und alle $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}(\overline{\mathcal{T}}_H)$:

- Stabilität auf nicht-verfeinerten Elementen

$$\eta_h(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H) \leq \eta_H(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H) + S(\|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}}). \quad (2.4)$$

- Reduktion auf verfeinerten Elementen

$$\eta_h(\mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_H)^2 \leq q_{\text{red}} \eta_H(\mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_H)^2 + S(\|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}})^2. \quad (2.5)$$

Für Schritt (iii) von Algorithmus 1 sei $M: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine bei 0 stetige Funktion mit $M(0) = 0$ und es gelte

$$\max_{T \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell} \eta_\ell(T) \leq M(\eta_\ell(\mathcal{M}_\ell)) \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}_0. \quad (2.6)$$

2.2.2 Konvergenzsatz

Satz 4. Seien die Annahmen (2.1)–(2.6) erfüllt. Dann folgt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \eta_\ell = 0. \quad (2.7)$$

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir einige Hilfsresultate.

Lemma 5. Sei $(a_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge, die $a_\ell \geq 0$ für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ erfüllt. Seien weiters $0 \leq \rho < 1$ und eine Nullfolge $(b_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ gegeben, sodass

$$a_{\ell+1} \leq \rho a_\ell + b_\ell \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}_0.$$

Dann gilt $\lim_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell = 0$.

Beweis. Da die b_ℓ eine Nullfolge bilden, folgt

$$0 \leq \limsup_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell = \limsup_{\ell \rightarrow \infty} a_{\ell+1} \leq \limsup_{\ell \rightarrow \infty} (\rho a_\ell + b_\ell) = \rho \limsup_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell.$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $\limsup_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell < \infty$ gilt, dann folgt

$$0 = \liminf_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell = \limsup_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell,$$

also $\lim_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell = 0$. Induktion nach ℓ , Beschränktheit von $b := \sup_{j \in \mathbb{N}_0} |b_j| < \infty$, die Konvergenz der geometrischen Reihe und $0 < \rho < 1$ liefern

$$\begin{aligned} 0 \leq a_\ell &\leq \rho^\ell a_0 + \sum_{j=0}^{\ell-1} \rho^{\ell-1-j} b_j \\ &\leq \rho^\ell a_0 + b \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{\ell-1-j} \\ &\leq a_0 + b \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{-j} =: C < \infty \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Es folgt $\limsup_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell \leq C$ und damit die Behauptung. □

Lemma 6. Sei eine Folge von Triangulierungen $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ mit $\mathcal{T}_{\ell+1} \in \mathbb{T}(\mathcal{T}_\ell)$ für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Definiere

$$\mathcal{T}_\infty := \bigcup_{\ell' \in \mathbb{N}_0} \bigcap_{\ell \geq \ell'} \mathcal{T}_\ell \quad (2.8)$$

als die Menge aller Elemente $T \in \bigcup \mathbb{T}$, die nicht weiter verfeinert werden. Erfüllt die Netzverfeinerungsmethode (2.1)–(2.2), dann existiert eine Teilfolge $(\mathcal{T}_{\ell_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$\mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_{\ell_{k+n}} = \mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_\infty \quad \text{für alle } k, n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Gilt weiters *a priori* Konvergenz (2.3) und erfüllt der Fehlerschätzer η_ℓ Reduktion auf verfeinerten Elementen (2.5), so folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k}) = 0. \quad (2.10)$$

Beweis. Wir definieren induktiv eine streng monoton steigende Folge von Indizes $(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}}$, sodass gilt

$$\mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_{\ell_{k+1}} = \mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_\infty \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

Dazu setzen wir $\ell_0 := 0$ und nehmen an, dass $\{\ell_0, \dots, \ell_k\}$ bereits definiert sind. Für jedes $T \in \mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_\infty$ existiert nach Definition von \mathcal{T}_∞ ein Index ℓ_T , sodass

$$T \in \mathcal{T}_\ell \quad \text{für alle } \ell \geq \ell_T.$$

Da $\mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_\infty$ nur endlich viele Elemente enthält, ist $\widehat{\ell}_1 := \max_{T \in \mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_\infty} \ell_T \in \mathbb{N}$ wohldefiniert und für alle $\ell \geq \widehat{\ell}_1$ und $T \in \mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_\infty$ folgt $T \in \mathcal{T}_\ell$, d.h.

$$\mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_\ell \supseteq \mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_\infty.$$

Umgekehrt existiert für jedes feste $T \in \mathcal{T}_{\ell_k} \setminus \mathcal{T}_\infty$ ein Index ℓ'_T , sodass

$$T \notin \mathcal{T}_{\ell'}, \quad \text{für alle } \ell' \geq \ell'_T.$$

Wir setzen also $\widehat{\ell}_2 := \max_{T \in \mathcal{T}_{\ell_k} \setminus \mathcal{T}_\infty} \ell'_T$ und folgern $T \notin \mathcal{T}_{\ell'}$ für beliebige $\ell' \geq \widehat{\ell}_2$ und $T \in \mathcal{T}_{\ell_k} \setminus \mathcal{T}_\infty$.

Damit ergibt sich

$$\mathcal{T}_{\ell_k} \setminus \mathcal{T}_{\ell'} \supseteq \mathcal{T}_{\ell_k} \setminus \mathcal{T}_\infty, \quad \text{d.h.} \quad \mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_{\ell'} \subseteq \mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_\infty \quad \text{für alle } \ell' \geq \widehat{\ell}_2.$$

Definieren wir nun $\ell_{k+1} := \max\{\widehat{\ell}_1, \widehat{\ell}_2\}$, so gilt (2.11). Um daraus auf die geforderte Eigenschaft (2.9) zu schließen, bemerke zunächst, dass aus der Definition von \mathcal{T}_∞ und Punkt (ii) in Definition 2 schon $\mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_\infty \subseteq \mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_{\ell_{k+n}}$ folgt. Sei nun $T \in \mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_{\ell_{k+n}}$ beliebig, dann muss T auch in $\mathcal{T}_{\ell_{k+1}}$ enthalten sein und es folgt $T \in \mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_{\ell_{k+1}} = \mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_\infty$.

Für die zweite Aussage des Lemmas, sei η_ℓ ein Fehlerschätzer, der (2.5) erfüllt. Gleichung (2.11) liefert die Inklusion

$$\mathcal{T}_{\ell_{k+1}} \cap \mathcal{T}_{\ell_k} = \mathcal{T}_{\ell_{k+1}} \cap [\mathcal{T}_{\ell_{k+1}} \cap \mathcal{T}_{\ell_k}] \stackrel{(2.11)}{=} \mathcal{T}_{\ell_{k+1}} \cap [\mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_\infty] \subseteq \mathcal{T}_{\ell_{k+1}} \cap \mathcal{T}_\infty \stackrel{(2.11)}{=} \mathcal{T}_{\ell_{k+2}} \cap \mathcal{T}_{\ell_{k+1}}.$$

Wir folgern weiter

$$\mathcal{T}_{\ell_{k+1}} \setminus \mathcal{T}_{\ell_{k+2}} = \mathcal{T}_{\ell_{k+1}} \setminus [\mathcal{T}_{\ell_{k+2}} \cap \mathcal{T}_{\ell_{k+1}}] \subseteq \mathcal{T}_{\ell_{k+1}} \setminus [\mathcal{T}_{\ell_{k+1}} \cap \mathcal{T}_{\ell_k}] = \mathcal{T}_{\ell_{k+1}} \setminus \mathcal{T}_{\ell_k}.$$

Damit erhalten wir die folgende Ungleichung:

$$\eta_{\ell_{k+1}}(\mathcal{T}_{\ell_{k+1}} \setminus \mathcal{T}_{\ell_{k+2}})^2 \leq \eta_{\ell_{k+1}}(\mathcal{T}_{\ell_{k+1}} \setminus \mathcal{T}_{\ell_k})^2 \stackrel{(2.5)}{\leq} q_{\text{red}} \eta_{\ell_k}(\mathcal{T}_{\ell_k} \setminus \mathcal{T}_{\ell_{k+1}})^2 + S(\|u_{\ell_{k+1}} - u_{\ell_k}\|_{\mathcal{X}})^2.$$

Definieren wir $a_k := \eta_{\ell_k}(\mathcal{T}_{\ell_k} \setminus \mathcal{T}_{\ell_{k+1}})^2$, $\rho := q_{\text{red}}$ und $b_k := S(\|u_{\ell_{k+1}} - u_{\ell_k}\|_{\mathcal{X}})^2$, so folgt $\lim_{\ell \rightarrow \infty} b_\ell = 0$ wegen *a priori* Konvergenz (2.3) und mit Lemma 5

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell = 0.$$

Da aus $T \in \mathcal{T}_{\ell_k} \setminus \mathcal{T}_{\ell_{k+1}}$ folgt, dass T im $(\ell_k + 1)$ -ten Schritt verfeinert wird und damit nicht in \mathcal{T}_∞ liegt, gilt

$$\mathcal{M}_{\ell_k} \subseteq \mathcal{T}_{\ell_k} \setminus \mathcal{T}_{\ell_{k+1}} \subseteq \mathcal{T}_{\ell_k} \setminus \mathcal{T}_\infty = \mathcal{T}_{\ell_k} \setminus [\mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_\infty] \stackrel{(2.11)}{=} \mathcal{T}_{\ell_k} \setminus [\mathcal{T}_{\ell_{k+1}} \cap \mathcal{T}_{\ell_k}] = \mathcal{T}_{\ell_k} \setminus \mathcal{T}_{\ell_{k+1}},$$

und wir erhalten

$$0 \leq \eta_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k}) \leq \eta_{\ell_k}(\mathcal{T}_{\ell_k} \setminus \mathcal{T}_{\ell_{k+1}}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

was den Beweis beschließt. □

Lemma 7. Sei $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Triangulierungen mit $\mathcal{T}_{\ell+1} \in \mathbb{T}(\mathcal{T}_\ell)$ für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$. Die Netzverfeinerungsmethode erfülle (2.1)–(2.2). Ferner gelte *a priori* Konvergenz (2.3) und der Fehlerschätzer η_ℓ erfülle Stabilität (2.4) und Reduktion (2.5). Existiert eine Teilfolge $(\mathcal{T}_{\ell_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_{\ell_{k+n}} = \mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_\infty \quad \text{für alle } k, n \in \mathbb{N}, \tag{2.12}$$

dann folgt aus

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \ell' \leq \ell_k}} \eta_{\ell_k}(\mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_\infty) = 0 \quad \text{für alle } \ell' \in \mathbb{N}_0 \tag{2.13}$$

die Konvergenz $\eta_\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$.

Beweis. Schritt 1: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass $\eta_{\ell_k} \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Um einzusehen, warum dies möglich ist, unterscheiden wir zwei Fälle:

- Fall 1: Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $k' \geq k$ mit $\eta_{\ell_{k'}} \neq 0$. In diesem Fall wählen wir eine Teilfolge $(\mathcal{T}_{\ell_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(\mathcal{T}_{\ell_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\eta_{\ell_{k_j}} \neq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und können den Beweis mit dieser fortsetzen, da sich die Annahmen (2.12)–(2.13) auf Teilfolgen von $(\mathcal{T}_{\ell_k})_{k \in \mathbb{N}}$ vererben.
- Fall 2: Es gibt einen Index $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\eta_{\ell_k} = 0$ für alle $k \geq k_0$ gilt. In diesem Fall erhalten wir trivialerweise $\eta_{\ell_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Da wir im ersten Schritt des Beweises nur eine Teilfolge $(\mathcal{T}_{\ell_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(\mathcal{T}_{\ell_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\eta_{\ell_{k_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ suchen, können wir diesen überspringen, indem wir $\ell_{k_j} := \ell_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ setzen.

Schritt 2: Seien $\mathcal{T}_H \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}(\mathcal{T}_H)$ beliebig. Dann liefert Reduktion auf verfeinerten Elementen (2.5), dass

$$\begin{aligned} \eta_h^2 &= \eta_h(\mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_H)^2 + \eta_h(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H)^2 \\ &\stackrel{(2.5)}{\leq} q_{\text{red}} \eta_H(\mathcal{T}_H \setminus \mathcal{T}_h)^2 + S(\|h_h - u_H\|_{\mathcal{X}})^2 + \eta_h(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H)^2 \\ &\leq q_{\text{red}} \eta_H^2 + S(\|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}})^2 + \eta_h(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H)^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Wenden wir dieses Ergebnis nun für $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ auf die Folgenglieder $\mathcal{T}_H = \mathcal{T}_{\ell_k}$ und $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{\ell_{k+n}}$ unserer Teilfolge an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \eta_{\ell_{k+n}}^2 &\leq q_{\text{red}} \eta_{\ell_k}^2 + \eta_{\ell_{k+n}}(\mathcal{T}_{\ell_{k+n}} \cap \mathcal{T}_{\ell_k})^2 + S(\|u_{\ell_{k+n}} - u_{\ell_k}\|_{\mathcal{X}})^2 \\ &\stackrel{(2.12)}{=} q_{\text{red}} \eta_{\ell_k}^2 + \eta_{\ell_{k+n}}(\mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_{\infty})^2 + S(\|u_{\ell_{k+n}} - u_{\ell_k}\|_{\mathcal{X}})^2. \end{aligned}$$

Sei $q'_{\text{red}} \in (q_{\text{red}}, 1)$ fest. Dann garantiert die Konvergenz (2.13) gemeinsam mit $\eta_{\ell_k} \neq 0$ die Existenz eines Index $n(k)$, sodass gilt

$$q_{\text{red}} \eta_{\ell_k}^2 + \eta_{\ell_{k+n(k)}}(\mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_{\infty})^2 \leq q'_{\text{red}} \eta_{\ell_k}^2. \quad (2.15)$$

Dies ermöglicht uns die Wahl einer Teilfolge $(\mathcal{T}_{\ell_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$, die

$$\eta_{\ell_{k_{j+1}}}^2 \leq q'_{\text{red}} \eta_{\ell_{k_j}}^2 + S(\|u_{\ell_{k_{j+1}}} - u_{\ell_{k_j}}\|_{\mathcal{X}})^2 \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}$$

erfüllt. Mit Lemma 5 und *a priori* Konvergenz (2.3) folgt die Konvergenz $\eta_{\ell_{k_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$.

Schritt 3: Seien wieder $\mathcal{T}_H \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}(\mathcal{T}_H)$ fest. Wir knüpfen an die Ungleichung (2.14) an und erhalten unter Verwendung von $q_{\text{red}} < 1$ sowie Stabilität auf nicht-verfeinerten Elementen (2.4), dass

$$\begin{aligned} \eta_h^2 &\stackrel{(2.14)}{\leq} q_{\text{red}} \eta_H^2 + \eta_h(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H)^2 + S(\|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}})^2 \\ &\stackrel{(2.4)}{\leq} q_{\text{red}} \eta_H^2 + \left(\eta_H(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H) + S(\|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}}) \right)^2 + S(\|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}})^2 \\ &\leq 2 \left(\eta_H + S(\|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}}) \right)^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben, dann existiert $j \in \mathbb{N}$, sodass $\eta_{\ell_{k_j}} + S(\|u_{\ell_{k_j}} - u_{\ell}\|_{\mathcal{X}}) < \varepsilon$ für alle $\ell \geq \ell_{k_j}$. Für $\mathcal{T}_H = \mathcal{T}_{\ell_{k_j}}$ und $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{\ell}$ folgt $\eta_{\ell}^2 < 2\varepsilon^2$, was den Beweis beschließt. \square

Beweis von Satz 4. Lemma 6 liefert gemeinsam mit *a priori* Konvergenz (2.3) und Reduktion auf verfeinerten Elementen (2.5) eine Teilfolge $(\mathcal{T}_{\ell_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(\mathcal{T}_{\ell})_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k}) &= 0 \quad \text{und} \\ \mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_{\ell_{k+n}} &= \mathcal{T}_{\ell_k} \cap \mathcal{T}_{\infty} \quad \text{für alle } k, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Seien nun $k \in \mathbb{N}$ und $\ell' \leq \ell_k$ fest, dann folgt $\mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty} \subseteq \mathcal{T}_{\ell_k} \setminus \mathcal{M}_{\ell_k}$. Unter Verwendung der Eigenschaft (2.6) der Markierungsmethode erhalten wir

$$\max_{T \in \mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}} \eta_{\ell_k}(T) \leq \max_{T \in \mathcal{T}_{\ell_k} \setminus \mathcal{M}_{\ell_k}} \eta_{\ell_k}(T) \stackrel{(2.6)}{\leq} M(\eta_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k})) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Die Endlichkeit von $\mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}$ liefert $\eta_{\ell_k}(\mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Mit Lemma 7 folgt schließlich die Behauptung. \square

Erfüllt die Markierungsstrategie das Dörfler-Kriterium für ein $\theta \in (0, 1]$, d.h.

$$\theta \eta_{\ell}^2 \leq \eta_{\ell}(\mathcal{M}_{\ell})^2 \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}_0, \quad (2.17)$$

so erhalten wir die Konvergenz des Fehlerschätzers auch ohne die Eigenschaft (2.2) der Netzverfeinerungsmethode. Weiters genügen in diesem Fall schwächere Versionen von Stabilität (2.4) und Reduktion (2.5), nämlich nicht über beliebig viele, sondern nur über einzelne Verfeinerungsschritte.

Satz 8. Gelten (2.4)–(2.5) für alle $\mathcal{T}_H \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}_1(\mathcal{T}_H)$ und erfüllt die Verfeinerungsstrategie das Dörfler-Kriterium (2.17) für ein $\theta \in (0, 1]$, dann folgt aus *a priori* Konvergenz (2.3) die Konvergenz des Fehlerschätzers, also $\eta_{\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$.

Beweis. Seien $\mathcal{T}_H \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}_1(\mathcal{T}_H)$ gegeben. Mit Stabilität (2.4) und Reduktion (2.5) folgt

$$\begin{aligned} \eta_h^2 &= \eta_h(\mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_H)^2 + \eta_h(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H)^2 \\ &\leq q_{\text{red}} \eta_H(\mathcal{T}_H \setminus \mathcal{T}_h)^2 + S(\|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}})^2 + [\eta_H(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H) + S(\|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}})]^2 \\ &= q_{\text{red}} \eta_H(\mathcal{T}_H \setminus \mathcal{T}_h)^2 + \eta_H(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H)^2 + 2\eta_H(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H)S(\|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}}) \\ &\quad + 2S(\|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}})^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Wir wenden die Young-Ungleichung

$$2ab \leq \delta a^2 + \delta^{-1} b^2 \quad \text{für alle } \delta > 0 \text{ und } a, b \in \mathbb{R} \quad (2.19)$$

auf $a := \eta_H(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H)$ und $b := S(\|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}})$ an und schließen gemeinsam mit (2.18), dass

$$\begin{aligned} \eta_h^2 &\leq q_{\text{red}} \eta_H(\mathcal{T}_H \setminus \mathcal{T}_h)^2 + (1 + \delta) \eta_H(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H)^2 + (2 + \delta^{-1}) S(\|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}})^2 \\ &= (1 + \delta) \eta_H - (1 + \delta - q_{\text{red}}) \eta_H(\mathcal{T}_H \setminus \mathcal{T}_h)^2 + (2 + \delta^{-1}) S(\|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}})^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Sei nun $\ell \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Das Dörfler-Kriterium (2.17) und $\mathcal{M}_{\ell} \subseteq \mathcal{T}_{\ell} \setminus \mathcal{T}_{\ell+1}$ liefern

$$\theta \eta_{\ell}^2 \leq \eta_{\ell}(\mathcal{M}_{\ell})^2 \leq \eta_{\ell}(\mathcal{T}_{\ell} \setminus \mathcal{T}_{\ell+1})^2. \quad (2.21)$$

Setzen wir nun $\mathcal{T}_H := \mathcal{T}_\ell$, $\mathcal{T}_h := \mathcal{T}_{\ell+1}$ und $\rho := (1 + \delta) - (1 + \delta - q_{\text{red}})\theta$ und kombinieren die Ergebnisse (2.20) und (2.21), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \eta_{\ell+1}^2 &\stackrel{(2.20)}{\leq} (1 + \delta)\eta_\ell^2 - (1 + \delta - q_{\text{red}})\eta_\ell^2(\mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{T}_{\ell+1})^2 + (2 + \delta^{-1})S(\|u_{\ell+1} - u_\ell\|_{\mathcal{X}})^2 \\ &\stackrel{(2.21)}{\leq} (1 + \delta)\eta_\ell^2 - (1 + \delta - q_{\text{red}})\theta\eta_\ell^2 + (2 + \delta^{-1})S(\|u_{\ell+1} - u_\ell\|_{\mathcal{X}})^2 \\ &= \rho\eta_\ell^2 + (2 + \delta^{-1})S(\|u_{\ell+1} - u_\ell\|_{\mathcal{X}})^2. \end{aligned}$$

Wir wählen δ hinreichend klein, um $\rho < 1$ zu garantieren. Lemma 5 angewandt auf $a_\ell = \eta_\ell^2$, $b_\ell = (2 + \delta^{-1})S(\|u_{\ell+1} - u_\ell\|_{\mathcal{X}})^2$ und $\rho \in (0, 1)$ liefert mit $\lim_{\ell \rightarrow \infty} b_\ell = 0$ aufgrund der *a priori* Konvergenz (2.3) die Behauptung. □

3 Konvergenz von GOAFEM Algorithmen

In diesem Kapitel betrachten wir schwächere Varianten der beiden *goal-oriented adaptive finite element method* (GOAFEM) Algorithmen aus [FPZ16] und untersuchen deren Konvergenzverhalten in Abhängigkeit von verschiedenen Markierungsstrategien.

3.1 GOAFEM Algorithmen

Im Gegensatz zu AFEM Algorithmen approximieren GOAFEM Algorithmen nicht die konkrete Lösung $u \in \mathcal{X}$ einer Differentialgleichung, sondern den Wert $G(u)$ für ein gegebenes Zielfunktional G (engl. *goal functional*). Zur Illustration betrachten wir zwei abstrakte Modellprobleme. Die folgenden beiden Abschnitte orientieren sich an [FPZ16] bzw. [BIP21].

Seien wieder $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und \mathcal{X} ein Funktionenraum auf Ω . Weiters sei $a(\cdot, \cdot): \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform auf \mathcal{X} .

3.1.1 Lineares Goalfunktional

Für gegebene stetige lineare Funktionale $F, G \in \mathcal{X}^*$ sei $u \in \mathcal{X}$ die eindeutige Lösung von

$$a(u, v) = F(v) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X} \quad (3.1)$$

und $z \in \mathcal{X}$ die eindeutige Lösung des dualen Problems

$$a(v, z) = G(v) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X}. \quad (3.2)$$

Ist \mathcal{T}_h eine Triangulierung von Ω und $\mathcal{X}_h \subset \mathcal{X}$ ein zugehöriger diskreter Unterraum von \mathcal{X} , so seien durch $u_h \in \mathcal{X}_h$ bzw. $z_h \in \mathcal{X}_h$ die eindeutigen diskreten Lösungen von (3.1) bzw. (3.2) bezeichnet, also

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \text{bzw.} \quad (3.3)$$

$$a(v_h, z_h) = G(v_h) \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{X}_h. \quad (3.4)$$

Mit der Galerkin-Orthogonalität und der Stetigkeit der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ erhalten wir

$$|G(u) - G(u_h)| = |a(u - u_h, z)| = |a(u - u_h, z - z_h)| \lesssim \|u - u_h\|_{\mathcal{X}} \|z - z_h\|_{\mathcal{X}}. \quad (3.5)$$

Werden nun die Terme $\|u - u_h\|_{\mathcal{X}}$ und $\|z - z_h\|_{\mathcal{X}}$ durch Fehlerschätzer η_h bzw. ζ_h dominiert, so erhalten wir $|G(u) - G(u_h)| \lesssim \eta_h \zeta_h$. In diesem Fall suchen wir also Algorithmen, die zumindest die Konvergenz des Produktes $\eta_h \zeta_h \rightarrow 0$ garantieren.

3.1.2 Quadratisches Goalfunktional

Sei $F \in \mathcal{X}^*$ ein stetiges lineares Funktional. Das quadratische Goalfunktional sei gegeben durch

$$G(u) := \langle Ku, u \rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}}$$

mit der dualen Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}}$ und einem beschränkten linearen Operator $K: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^*$. Sei $u \in \mathcal{X}$ wieder die eindeutige Lösung von

$$a(u, v) = F(v) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X}. \quad (3.6)$$

Für gegebenes $w \in \mathcal{X}$ sei $z[w] \in \mathcal{X}$ die eindeutige Lösung des linearisierten dualen Problems

$$a(v, z[w]) = b(v, w) + b(w, v) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X}. \quad (3.7)$$

Hierbei ist durch $b(v, w) := \langle Kv, w \rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}}$ eine stetige Bilinearform auf \mathcal{X} definiert.

Für eine Triangulierung \mathcal{T}_h von Ω und einen zugehörigen diskreten Unterraum $\mathcal{X}_h \subset \mathcal{X}$ von \mathcal{X} seien durch $u_h \in \mathcal{X}_h$ bzw. $z_h[w] \in \mathcal{X}_h$ die eindeutigen diskreten Lösungen von (3.6) bzw. (3.7) bezeichnet, also

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= F(v_h) \quad \text{bzw.} \\ a(v_h, z_h[w]) &= b(v_h, w) + b(w, v_h) \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{X}_h. \end{aligned}$$

Wir nutzen das duale Problem um den Fehler $|G(u) - G(u_h)|$ abzuschätzen. Es gilt

$$\begin{aligned} b(u - u_h, u - u_h) &= b(u, u) - b(u_h, u) - b(u, u_h) + b(u_h, u_h) \\ &= [G(u) - G(u_h)] - [b(u_h, u) + b(u, u_h) - 2b(u_h, u_h)] \\ &= [G(u) - G(u_h)] - [b(u_h, u - u_h) + b(u - u_h, u_h)] \\ &\stackrel{(3.7)}{=} [G(u) - G(u_h)] - a(u - u_h, z[u_h]) \\ &= [G(u) - G(u_h)] - a(u - u_h, z[u_h] - z_h[u_h]). \end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit der Bilinearformen $a(\cdot, \cdot)$ und $b(\cdot, \cdot)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |G(u) - G(u_h)| &= |a(u - u_h, z[u_h] - z_h[u_h]) + b(u - u_h, u - u_h)| \\ &\lesssim \|u - u_h\|_{\mathcal{X}} \|z[u_h] - z_h[u_h]\|_{\mathcal{X}} + \|u - u_h\|_{\mathcal{X}}^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Werden nun die Terme $\|u - u_h\|_{\mathcal{X}}$ bzw. $\|z[u_h] - z_h[u_h]\|_{\mathcal{X}}$ erneut durch Fehlerschätzer η_h bzw. ζ_h dominiert, so erhalten wir $|G(u) - G(u_h)| \lesssim \eta_h \zeta_h + \eta_h^2$. In diesem Fall suchen wir also Algorithmen, die zumindest die Konvergenz $\eta_h \zeta_h + \eta_h^2 \rightarrow 0$ garantieren.

Bemerkung 9. Wenden wir die Young-Ungleichung (2.19) auf $a := \eta_h$, $b := \zeta_h$ und $\delta = 1$ an, so erhalten wir $\eta_h \zeta_h \leq \eta_h^2 + \zeta_h^2$ und damit auch $\eta_h \zeta_h + \eta_h^2 \lesssim \eta_h^2 + \zeta_h^2$. Im Folgenden sind wir daher an Algorithmen interessiert, die eine der folgenden Konvergenzen garantieren:

- (i) $\eta_h \zeta_h \rightarrow 0$,
- (ii) $\eta_h \zeta_h + \eta_h^2 \rightarrow 0$,

(iii) $\eta_h^2 + \zeta_h^2 \rightarrow 0$.

Offensichtlich gelten die beiden Implikationen (iii) \implies (ii) und (ii) \implies (i) aufgrund der Young-Ungleichung (2.19).

Notation 10. Um die nachfolgende Präsentation zu vereinheitlichen, verstehen wir im Kontext quadratischer Zielfunktionale z_ℓ als $z_\ell[u_\ell]$.

Wir kommen nun zu einer abstrakten Formulierung eines GOAFEM Algorithmus.

3.1.3 GOAFEM Algorithmen

Algorithmus 2 (GOAFEM). INPUT: Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 , Markierungsstrategie. SCHLEIFE: Für $\ell = 0, 1, 2, \dots$ führe die folgenden Schritte aus:

- (i) **LÖSEN:** Berechne die diskreten Lösungen $u_\ell, z_\ell \in \mathcal{X}_\ell$.
- (ii) **FEHLER SCHÄTZEN:** Berechne Verfeinerungsindikatoren $\eta_\ell(T)$ und $\zeta_\ell(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$.
- (iii) **MARKIEREN.** Bestimme die Menge $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$ der markierten Elemente.
- (iv) **VERFEINERN:** Berechne $\mathcal{T}_{\ell+1} := \text{refine}(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{M}_\ell)$.

OUTPUT: Der Algorithmus erzeugt Folgen von Fehlerschätzern $(\eta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$, $(\zeta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ und Funktionen $(u_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$, $(z_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ sowie eine Folge von Triangulierungen $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$.

Wir werden in diesem Kapitel die Konvergenz der Fehlerschätzer unter Verwendung verschiedener Strategien für die Berechnung von \mathcal{M}_ℓ in Schritt (iii) untersuchen und kommen nun zur Formulierung zweier abstrakter Markierungsstrategien.

Algorithmus 3 (MARK A*). INPUT: Funktion $M: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, Triangulierung \mathcal{T}_ℓ und Verfeinerungsindikatoren $\eta_\ell(T)$ und $\zeta_\ell(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$.

- (i) Bestimme Mengen $\mathcal{M}_{\ell,u}$ und $\mathcal{M}_{\ell,z}$, sodass gilt

$$\begin{aligned} \max_{T \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_{\ell,u}} \eta_\ell(T) &\leq M(\eta_\ell(\mathcal{M}_{\ell,u})) \quad \text{und} \\ \max_{T \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_{\ell,z}} \zeta_\ell(T) &\leq M(\zeta_\ell(\mathcal{M}_{\ell,z})). \end{aligned} \tag{3.9}$$

- (ii) Sei $\widetilde{\mathcal{M}}_\ell \in \{\mathcal{M}_{\ell,u}, \mathcal{M}_{\ell,z}\}$ beliebig und wähle $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{M}_{\ell,u} \cup \mathcal{M}_{\ell,z}$ mit $\widetilde{\mathcal{M}}_\ell \subseteq \mathcal{M}_\ell$.

OUTPUT: Der Algorithmus erzeugt eine Menge von markierten Elementen \mathcal{M}_ℓ .

Algorithmus 4 (MARK B*). INPUT: Funktionen $W: \mathbb{R}_{\geq 0}^4 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $M: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, Triangulierung \mathcal{T}_ℓ und Verfeinerungsindikatoren $\eta_\ell(T)$ und $\zeta_\ell(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$.

- (i) Berechne Verfeinerungsindikatoren

$$\rho_\ell(T)^2 := W(\eta_\ell(T)^2, \zeta_\ell(T)^2, \eta_\ell^2, \zeta_\ell^2) \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_\ell.$$

- (ii) Wähle \mathcal{M}_ℓ so, dass gilt

$$\max_{T \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell} \rho_\ell(T) \leq M(\rho_\ell(\mathcal{M}_\ell)). \tag{3.10}$$

OUTPUT: Der Algorithmus erzeugt eine Menge von markierten Elementen \mathcal{M}_ℓ .

3.1.4 Beispiele für Realisierungen von MARK A*

Wir betrachten zunächst die erste Markierungsstrategie aus [FPZ16].

Algorithmus 5 (MARK A₁). INPUT: $\theta \in (0, 1)$ und $C_{\text{mark}}, C'_{\text{mark}} \geq 1$, Triangulierung \mathcal{T}_ℓ und Verfeinerungsindikatoren $\eta_\ell(T)$ und $\zeta_\ell(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$.

(i) Seien

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{\ell,u} &:= \{\mathcal{M} \subseteq \mathcal{T}_\ell \mid \theta \eta_\ell^2 \leq \eta_\ell(\mathcal{M})^2\} \quad \text{und} \\ \mathbb{M}_{\ell,z} &:= \{\mathcal{M} \subseteq \mathcal{T}_\ell \mid \theta \zeta_\ell^2 \leq \zeta_\ell(\mathcal{M})^2\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

die Mengen aller Teilmengen von \mathcal{T}_ℓ , die das Dörfler-Kriterium (2.17) für u bzw. z erfüllen. Für $\omega \in \{u, z\}$ wähle $\mathcal{M}_{\ell,\omega} \in \mathbb{M}_{\ell,\omega}$ mit

$$\#\mathcal{M}_{\ell,\omega} \leq C_{\text{mark}} \min\{\#\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \in \mathbb{M}_{\ell,\omega}\}.$$

(ii) Wähle $\widetilde{\mathcal{M}}_\ell \in \{\mathcal{M}_{\ell,u}, \mathcal{M}_{\ell,z}\}$ als die Menge von kleinerer Kardinalität und bestimme $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{M}_{\ell,u} \cup \mathcal{M}_{\ell,z}$ so, dass gilt

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\ell \subseteq \mathcal{M}_\ell \quad \text{und} \quad \#\mathcal{M}_\ell \leq C'_{\text{mark}} \#\widetilde{\mathcal{M}}_\ell.$$

OUTPUT: Der Algorithmus erzeugt eine Menge von markierten Elementen \mathcal{M}_ℓ .

Bemerkung 11. Um einzusehen, dass die Anforderung (3.11) aus MARK A₁ ein Sonderfall der Bedingung (3.9) aus MARK A* ist, sei \mathcal{M}_ℓ so, dass das Dörfler-Kriterium (2.17) für ein $\theta \in (0, 1]$ und $\xi_\ell \in \{\eta_\ell, \zeta_\ell\}$ erfüllt ist. Setzen wir

$$M(t) := t\sqrt{\theta^{-1}(1-\theta)} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

so folgt für beliebiges $T \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell$

$$\xi_\ell(T)^2 \leq \xi_\ell(\mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell)^2 = \xi_\ell^2 - \xi_\ell(\mathcal{M}_\ell)^2 \leq (1-\theta)\xi_\ell^2 \leq \theta^{-1}(1-\theta)\xi_\ell(\mathcal{M}_\ell)^2 = M(\xi_\ell(\mathcal{M}_\ell))^2,$$

es gilt also (3.9). Offensichtlich werden auch in Schritt (ii) von MARK A* schwächere Anforderungen getroffen als in Schritt (ii) von MARK A₁.

Algorithmus 6 (MARK A₂). INPUT: $\theta \in (0, 1]$, Triangulierung \mathcal{T}_ℓ und Verfeinerungsindikatoren $\eta_\ell(T)$ und $\zeta_\ell(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$.

(i) Bestimme Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\ell,u} &:= \{T \in \mathcal{T}_\ell \mid \eta_\ell(T) \geq \theta \max_{T \in \mathcal{T}_\ell} \eta_\ell(T)\} \quad \text{und} \\ \mathcal{M}_{\ell,z} &:= \{T \in \mathcal{T}_\ell \mid \zeta_\ell(T) \geq \theta \max_{T \in \mathcal{T}_\ell} \zeta_\ell(T)\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

(ii) Setze $\mathcal{M}_\ell := \mathcal{M}_{\ell,u} \cup \mathcal{M}_{\ell,z}$.

OUTPUT: Der Algorithmus erzeugt eine Menge von markierten Elementen \mathcal{M}_ℓ .

Bemerkung 12. Definieren wir $M(t) := \theta t$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so erfüllen $\mathcal{M}_{\ell,u}$ und $\mathcal{M}_{\ell,z}$ aus (3.12) die Anforderung (3.9) aus MARK A*.

3.1.5 Beispiele für Realisierungen von MARK B*

Algorithmus 7 (MARK B₁). INPUT: $\theta \in (0, 1]$, Triangulierung \mathcal{T}_ℓ und Verfeinerungsindikatoren $\eta_\ell(T)$, $\zeta_\ell(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$.

- (i) Berechne Verfeinerungsindikatoren $\rho_\ell(T)^2 := \eta_\ell(T)^2 + \zeta_\ell(T)^2$ für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$.
- (ii) Setze $\mathcal{M}_\ell := \{T \in \mathcal{T}_\ell \mid \rho_\ell(T) \geq \theta \max_{T \in \mathcal{T}_\ell} \rho_\ell(T)\}$.

OUTPUT: Der Algorithmus erzeugt eine Menge von markierten Elementen \mathcal{M}_ℓ .

Algorithmus 8 (MARK B₂). INPUT: $\theta \in (0, 1]$, Triangulierung \mathcal{T}_ℓ , Verfeinerungsindikatoren $\eta_\ell(T)$ und $\zeta_\ell(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$.

- (i) Berechne Verfeinerungsindikatoren $\rho_\ell(T)^2 := \eta_\ell(T)^2$ für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$.
- (ii) Setze $\mathcal{M}_\ell := \{T \in \mathcal{T}_\ell \mid \rho_\ell(T) \geq \theta \max_{T \in \mathcal{T}_\ell} \rho_\ell(T)\}$.

OUTPUT: Der Algorithmus erzeugt eine Menge von markierten Elementen \mathcal{M}_ℓ .

Bemerkung 13. Setzen wir wieder $M(t) := \theta t$ für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so erfüllen die Mengen \mathcal{M}_ℓ aus MARK B₁ bzw. MARK B₂ die Bedingung (3.10) aus MARK B*.

Zu guter Letzt betrachten wir die zweite Markierungsstrategie aus [FPZ16].

Algorithmus 9 (MARK B₃). INPUT: $\theta \in (0, 1]$ und $C_{\text{mark}} \geq 1$, Triangulierung \mathcal{T}_ℓ und Verfeinerungsindikatoren $\eta_\ell(T)$ und $\zeta_\ell(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$.

- (i) Berechne Verfeinerungsindikatoren

$$\rho_\ell(T)^2 := \eta_\ell(T)^2 \zeta_\ell^2 + \eta_\ell^2 \zeta_\ell^2(T) \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_\ell.$$

- (ii) Sei $\mathbb{M}_\ell := \{\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell \mid \theta \rho_\ell^2 \leq \rho_\ell(\mathcal{M}_\ell)^2\}$. Wähle $\mathcal{M}_\ell \in \mathbb{M}_\ell$ von Kardinalität

$$\#\mathcal{M}_\ell \leq C_{\text{mark}} \min_{\mathcal{M}'_\ell \in \mathbb{M}_\ell} \#\mathcal{M}'_\ell.$$

OUTPUT: Der Algorithmus erzeugt eine Menge von markierten Elementen \mathcal{M}_ℓ .

Bemerkung 14. Setzen wir wieder $M(t) := t\sqrt{\theta^{-1}(1-\theta)}$ für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und ist \mathbb{M}_ℓ wie in MARK B₃, so folgt analog zu Bemerkung 11, dass alle $\mathcal{M}_\ell \in \mathbb{M}_\ell$ die Bedingung (3.10) aus MARK B* erfüllen. Die Markierungsstrategie MARK B₃ ist also ein Sonderfall von MARK B* mit stärkeren Voraussetzungen.

3.2 Konvergenz von Algorithmus 2

Die von Algorithmus 2 mit Markierungsstrategie MARK A₁ (Algorithmus 5) bzw. MARK B₃ (Algorithmus 9) zurückgegebenen Fehlerschätzer konvergieren unter den in [FPZ16] spezifizierten Voraussetzungen sogar mit optimaler Konvergenzrate gegen Null.

Im Folgenden wollen wir versuchen, die Konvergenzen (i)–(iii) aus Bemerkung 9 auch mit schwächeren Annahmen zu zeigen. Offensichtlich ist das Konvergenzverhalten der Fehlerschätzer abhängig von den Funktionen M und W . Wir werden fordern, dass die beiden Fehlerschätzer η_ℓ und ζ_ℓ Stabilität auf nicht-verfeinerten Elementen (2.4) und Reduktion auf verfeinerten Elementen (2.5) erfüllen und wollen den Beweis von Satz 4 entsprechend anpassen, um neue Konvergenzresultate zu erhalten.

Im Folgenden sei W stetig in jedem Punkt $(0, 0, \hat{x}, \hat{y}) \in \{0\}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}^2$. Weiters sei eine Konstante $C_W > 0$ gegeben, sodass für alle $N \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$\forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0} : W(0, 0, \hat{x}, \hat{y}) = 0, \quad (3.13)$$

$$\forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \sum_{j=1}^N W(x_j, y_j, \hat{x}, \hat{y}) \leq C_W W\left(\sum_{j=1}^N x_j, \sum_{j=1}^N y_j, \hat{x}, \hat{y}\right). \quad (3.14)$$

Weiters sei $M: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig bei 0 mit $M(0) = 0$.

Satz 15. Seien $\delta, \varepsilon > 0$ gegeben, sodass W in der Menge $Q := [0, \delta]^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ stetig ist und die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\forall (x, y, \hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4 : [W(x, y, \hat{x}, \hat{y}) = 0 \implies (x = 0 = y \quad \vee \quad \hat{x} = 0 = \hat{y})] \quad (3.15)$$

$$\forall (x, y, \hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4 \setminus Q : W(x, y, \hat{x}, \hat{y}) \geq \varepsilon. \quad (3.16)$$

Wir betrachten den Output von Algorithmus 2 mit der Markierungsstrategie MARK B* (Algorithmus 4). Die Fehlerschätzer η_ℓ und ζ_ℓ seien beschränkt, d.h.

$$\sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \eta_\ell < \infty \quad \text{und} \quad \sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \zeta_\ell < \infty. \quad (3.17)$$

Sind zusätzlich die Annahmen (2.3)–(2.5) und (3.13)–(3.14) erfüllt, so folgt die Konvergenz $\eta_\ell^2 + \zeta_\ell^2 \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$.

Bemerkung 16. Falls die Funktion $S: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ aus den Annahmen (2.4)–(2.5) stetig ist, dann folgt die Beschränktheit (3.17) der Fehlerschätzer mit (2.4)–(2.5) und *a priori* Konvergenz (2.3). Wenden wir in diesem Fall nämlich die Young-Ungleichung (2.19) auf $\delta := 1$, $a := \eta_0(\mathcal{T}_\ell \cap \mathcal{T}_0)$ und $b := S(\|u_0 - u_\ell\|_{\mathcal{X}})$ an, so folgt gemeinsam mit (2.4)–(2.5) und $0 < q_{\text{red}} < 1$

$$\begin{aligned} \eta_\ell^2 &= \eta_\ell(\mathcal{T}_\ell \cap \mathcal{T}_0)^2 + \eta_\ell(\mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{T}_0)^2 \\ &\stackrel{(2.4)}{\leq} \left[\eta_0(\mathcal{T}_\ell \cap \mathcal{T}_0) + S(\|u_0 - u_\ell\|_{\mathcal{X}}) \right]^2 + \eta_\ell(\mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{T}_0)^2 \\ &\stackrel{(2.19)}{\leq} 2\eta_0(\mathcal{T}_\ell \cap \mathcal{T}_0)^2 + 2S(\|u_0 - u_\ell\|_{\mathcal{X}})^2 + \eta_\ell(\mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{T}_0)^2 \\ &\stackrel{(2.5)}{\leq} 2\eta_0(\mathcal{T}_\ell \cap \mathcal{T}_0)^2 + 2S(\|u_0 - u_\ell\|_{\mathcal{X}})^2 + q_{\text{red}}\eta_0(\mathcal{T}_0 \setminus \mathcal{T}_\ell)^2 + S(\|u_0 - u_\ell\|_{\mathcal{X}})^2 \\ &\leq 2\eta_0^2 + 3S(\|u_0 - u_\ell\|_{\mathcal{X}})^2. \end{aligned}$$

Da wir *a priori* Konvergenz (2.3) vorausgesetzt haben, ist die Folge $(u_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ beschränkt und damit auch $(\|u_0 - u_\ell\|_{\mathcal{X}})_{\ell \in \mathbb{N}_0}$. Die Stetigkeit von S liefert nun die Behauptung.

Beweis von Satz 15. Lemma 6 liefert eine Teilfolge $(\mathcal{T}_{\ell_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$\eta_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad \zeta_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Wegen der Beschränktheit (3.17) der Fehlerschätzer folgt die Konvergenz einer Teilfolge von $(\eta_{\ell_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\zeta_{\ell_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Wir dürfen daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Existenz der Limiten $C_\eta := \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{\ell_k}$ und $C_\zeta := \lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_{\ell_k}$ annehmen.

Wir erinnern daran, dass laut Algorithmus 4 gilt $\rho_{\ell_k}(T)^2 = W(\eta_{\ell_k}(T)^2, \zeta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2)$ für alle $T \in \mathcal{T}_{\ell_k}$. Mit der Stetigkeit von W bei $(0, 0, C_\eta^2, C_\zeta^2)$ und (3.13)–(3.14) erhalten wir nun

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \rho_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k})^2 \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k})^2 \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{T \in \mathcal{M}_{\ell_k}} W(\eta_{\ell_k}(T)^2, \zeta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2) \\ &\stackrel{(3.14)}{\leq} C_W \limsup_{k \rightarrow \infty} W\left(\sum_{T \in \mathcal{M}_{\ell_k}} \eta_{\ell_k}(T)^2, \sum_{T \in \mathcal{M}_{\ell_k}} \zeta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2\right) \\ &= C_W \limsup_{k \rightarrow \infty} W(\eta_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k})^2, \zeta_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k})^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2) \\ &= C_W W(0, 0, C_\eta^2, C_\zeta^2) \stackrel{(3.13)}{=} 0. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k}) = 0. \tag{3.18}$$

Seien $\ell' \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $\ell' \leq \ell_k$ fest, dann folgt mit (3.18), der Eigenschaft (3.10) von MARK B* und der Stetigkeit von M bei Null, dass

$$\max_{T \in \mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_\infty} \rho_{\ell_k}(T) \leq \max_{T \in \mathcal{T}_{\ell_k} \setminus \mathcal{M}_{\ell_k}} \rho_{\ell_k}(T) \stackrel{(3.10)}{\leq} M(\rho_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k})) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Für beliebiges $T \in \mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_\infty$ erhalten wir damit

$$W(\eta_{\ell_k}(T)^2, \zeta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2) = \rho_{\ell_k}(T)^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Es existiert also ein Index $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$W(\eta_{\ell_k}(T)^2, \zeta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2) < \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Mit (3.16) folgt

$$(\eta_{\ell_k}(T)^2, \zeta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2) \in Q \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Stetigkeit von W in Q liefert nun

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} W(\eta_{\ell_k}(T)^2, \zeta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2) \\ &= W\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{\ell_k}(T)^2, \lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_{\ell_k}(T)^2, \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{\ell_k}^2, \lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_{\ell_k}^2\right), \end{aligned}$$

wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit demselben Argument wie oben und wegen der Endlichkeit von $\mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}$ die Existenz der ersten beiden Limiten für alle $T \in \mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}$ annehmen dürfen. Wegen (3.15) trifft also einer der folgenden Fälle zu:

- Es gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{\ell_k}(T) = 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_{\ell_k}(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}$,
- oder $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{\ell_k} = 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_{\ell_k}$.

Da die zweite Aussage die erste enthält, folgt in beiden Fällen mit der Endlichkeit von $\mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}$

$$\begin{aligned} \eta_{\ell_k}(\mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty})^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}} \eta_{\ell_k}(T)^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \\ \zeta_{\ell_k}(\mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty})^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}} \zeta_{\ell_k}(T)^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Lemma 7 liefert $\eta_{\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$ sowie $\zeta_{\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$ und damit die Behauptung. \square

Bemerkung 17. Die Markierungsstrategie MARK B₁ (Algorithmus 7) erfüllt die Bedingungen von Satz 15: Die Funktion

$$W: \mathbb{R}_{\geq 0}^4 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (x, y, \hat{x}, \hat{y}) \mapsto x + y$$

ist stetig in ganz $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$, also insbesondere auch in $Q := [0, 1]^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}^2$. Setzen wir $\varepsilon = 1 = \delta$, so gelten offensichtlich auch die Bedingungen (3.13) sowie (3.15)–(3.16). Um die Annahme (3.14) zu überprüfen, seien $(x_j)_{j=1}^N, (y_j)_{j=1}^N, \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben. Es gilt

$$W\left(\sum_{j=1}^N x_j, \sum_{j=1}^N y_j, \hat{x}, \hat{y}\right) = \sum_{j=1}^N x_j + \sum_{j=1}^N y_j = \sum_{j=1}^N (x_j + y_j) = \sum_{j=1}^N W(x_j, y_j, \hat{x}, \hat{y}).$$

Setzen wir also $C_W := 1$, so sind die Bedingungen (3.13)–(3.16) für W erfüllt.

Satz 18. Seien $\varepsilon > 0$ und eine Funktion $w: \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben, die in der Menge

$$I := \{(x, \hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \mid w(x, \hat{x}, \hat{y}) < \varepsilon\} \tag{3.19}$$

stetig ist und für die gilt:

$$\forall (x, \hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3: \quad [w(x, \hat{x}, \hat{y}) = 0 \implies (x = 0 \quad \vee \quad \hat{x} = 0)], \tag{3.20}$$

$$\forall (x, y, \hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4: \quad W(x, y, \hat{x}, \hat{y}) \geq w(x, \hat{x}, \hat{y}). \tag{3.21}$$

Wir betrachten den Output von Algorithmus 2 mit der Markierungsstrategie MARK B* (Algorithmus 4). Die Fehlerschätzer η_ℓ und ζ_ℓ seien beschränkt, d.h.

$$\sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \eta_\ell < \infty \quad \text{und} \quad \sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \zeta_\ell < \infty. \quad (3.22)$$

Sind die Annahmen (2.3)–(2.5) und (3.13)–(3.14) erfüllt, so folgt $\eta_\ell \zeta_\ell + \eta_\ell^2 \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$.

Bemerkung 19. Satz 18 ist eine Verallgemeinerung von Satz 15 mit schwächeren Voraussetzungen. Um dies einzusehen, seien eine Funktion $W: \mathbb{R}_{\geq 0}^4 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und Konstanten $\delta, \varepsilon > 0$ gegeben, sodass die Bedingungen (3.15)–(3.16) erfüllt sind. Wir definieren die Funktion $w: \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$w(x, \hat{x}, \hat{y}) := \begin{cases} \inf_{y \in [0, \delta]} W(x, y, \hat{x}, \hat{y}), & \text{falls } 0 \leq x \leq \delta, \\ \varepsilon, & \text{falls } \delta < x. \end{cases}$$

Dann ist w stetig in ganz $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ und erfüllt damit insbesondere (3.19). Weiters nimmt für feste $x \in [0, \delta]$ und $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die stetige Funktion $y \mapsto W(x, y, \hat{x}, \hat{y})$ auf dem Kompaktum $[0, \delta]$ ihr Minimum an. Sind also beliebige $x, \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $w(x, \hat{x}, \hat{y}) = 0$ gegeben, so existiert $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $W(x, y, \hat{x}, \hat{y}) = 0$ und mit (3.15) folgt (3.20). Da außerdem (3.21) nach Definition von w gilt, genügt die Funktion w den Bedingungen von Satz 18.

Beweis von Satz 18. Lemma 6 liefert uns eine Teilfolge $(\mathcal{T}_{\ell_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$\eta_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad \zeta_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Wie schon im Beweis von Satz 15 dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Existenz der folgenden Limiten annehmen:

$$C_\eta := \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{\ell_k} \quad \text{und} \quad C_\zeta := \lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_{\ell_k}.$$

Wieder sei daran erinnert, dass laut Algorithmus 4 gilt $\rho_{\ell_k}(T)^2 = W(\eta_{\ell_k}(T)^2, \zeta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2)$ für alle $T \in \mathcal{T}_{\ell_k}$. Da W bei $(0, 0, C_\eta^2, C_\zeta^2)$ stetig ist erhalten wir mit (3.13)–(3.14)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \rho_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k})^2 \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k})^2 \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{T \in \mathcal{M}_{\ell_k}} W(\eta_{\ell_k}(T)^2, \zeta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2) \\ &\stackrel{(3.14)}{\leq} C_W \limsup_{k \rightarrow \infty} W\left(\sum_{T \in \mathcal{M}_{\ell_k}} \eta_{\ell_k}(T)^2, \sum_{T \in \mathcal{M}_{\ell_k}} \zeta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2\right) \\ &= C_W \limsup_{k \rightarrow \infty} W(\eta_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k})^2, \zeta_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k})^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2) \\ &= C_W W(0, 0, C_\eta^2, C_\zeta^2) \stackrel{(3.13)}{=} 0 \end{aligned}$$

und damit insbesondere auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k}) = 0. \quad (3.23)$$

Seien $\ell' \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $\ell' \leq \ell_k$ fest, dann folgt mit (3.23), der Eigenschaft (3.10) von MARK B* und der Stetigkeit von M bei Null

$$\max_{T \in \mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}} \rho_{\ell_k}(T) \leq \max_{T \in \mathcal{T}_{\ell_k} \setminus \mathcal{M}_{\ell_k}} \rho_{\ell_k}(T) \stackrel{(3.10)}{\leq} M(\rho_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k})) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Für beliebiges $T \in \mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}$ erhalten wir damit insgesamt

$$w(\eta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2) \leq W(\eta_{\ell_k}(T)^2, \zeta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2) = \rho_{\ell_k}(T)^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Es muss daher ein Index $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, sodass gilt

$$w(\eta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2) < \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Mit (3.19) folgt somit

$$(\eta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2) \in I \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Wegen der Endlichkeit von $\mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}$ dürfen wir wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass der Limes $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{\ell_k}(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}$ existiert. Stetigkeit von w in I liefert nun

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} w(\eta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2) = w\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{\ell_k}(T)^2, \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{\ell_k}^2, \lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_{\ell_k}^2\right).$$

Wegen (3.20) trifft also einer der folgenden Fälle zu:

- Es gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{\ell_k}(T) = 0$ für alle $T \in \mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}$,
- oder $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{\ell_k} = 0$.

Da die zweite Aussage die erste enthält, folgt in jedem Fall mit der Endlichkeit von $\mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}$

$$\eta_{\ell_k}(\mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty})^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}} \eta_{\ell_k}(T)^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Lemma 7 liefert $\eta_{\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$ und mit der Beschränktheit (3.22) von ζ_{ℓ} erhalten wir schließlich

$$0 \leq \eta_{\ell} \zeta_{\ell} + \eta_{\ell}^2 \lesssim \eta_{\ell} + \eta_{\ell}^2 \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0,$$

was den Beweis beschließt. □

Bemerkung 20. Die Markierungsstrategie MARK B₂ (Algorithmus 8) erfüllt die Bedingungen von Satz 18: Die Funktion

$$W: \mathbb{R}_{\geq 0}^4 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (x, y, \hat{x}, \hat{y}) \mapsto x$$

ist stetig in ganz $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$, also insbesondere auch in $[0, 1]^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}^2$. Weiters genügt sie offenbar (3.13)–(3.14) für $C_W := 1$. Definieren wir die Funktion $w: \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$w(x, \hat{x}, \hat{y}) := x$$

und setzen $\varepsilon := 1$, so sind auch die Bedingungen (3.19)–(3.21) erfüllt.

Satz 21. Seien $\varepsilon > 0$ und Funktionen $w_\eta, w_\zeta: \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben, die in

$$\begin{aligned} I_\eta &:= \{(x, \hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \mid w_\eta(x, \hat{x}, \hat{y}) < \varepsilon\} \quad \text{bzw.} \\ I_\zeta &:= \{(y, \hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \mid w_\zeta(y, \hat{x}, \hat{y}) < \varepsilon\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

stetig sind und für die Folgendes gelte:

$$\forall (x, \hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3: [w_\eta(x, \hat{x}, \hat{y}) = 0 \implies (x = 0 \quad \vee \quad \hat{x} = 0)], \quad (3.25)$$

$$\forall (y, \hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3: [w_\zeta(y, \hat{x}, \hat{y}) = 0 \implies (y = 0 \quad \vee \quad \hat{y} = 0)], \quad (3.26)$$

$$\forall (x, y, \hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4: W(x, y, \hat{x}, \hat{y}) \geq \min \{w_\eta(x, \hat{x}, \hat{y}), w_\zeta(y, \hat{x}, \hat{y})\}. \quad (3.27)$$

Wir betrachten den Output von Algorithmus 2 mit der Markierungsstrategie MARK B* (Algorithmus 4). Die Fehlerschätzer η_ℓ und ζ_ℓ seien beschränkt, d.h.

$$\sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \eta_\ell < \infty \quad \text{und} \quad \sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \zeta_\ell < \infty. \quad (3.28)$$

Sind zusätzlich die Annahmen (2.3)–(2.5) und (3.13)–(3.14) erfüllt, so folgt die Konvergenz $\eta_\ell \zeta_\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$.

Beweis. Lemma 6 liefert uns eine Teilfolge $(\mathcal{T}_{\ell_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$\eta_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad \zeta_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Erneut dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Existenz der folgenden Limiten annehmen (vgl. Beweis von Satz 15):

$$C_\eta := \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{\ell_k} \quad \text{und} \quad C_\zeta := \lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_{\ell_k}.$$

Es sei wieder daran erinnert, dass laut Algorithmus 4 gilt

$$\rho_{\ell_k}(T)^2 = W(\eta_{\ell_k}(T)^2, \zeta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2) \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_{\ell_k}.$$

Da W stetig bei $(0, 0, C_\eta^2, C_\zeta^2)$ ist erhalten wir erneut mit (3.13)–(3.14)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \rho_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k})^2 \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k})^2 \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{T \in \mathcal{M}_{\ell_k}} W(\eta_{\ell_k}(T)^2, \zeta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2) \\ &\stackrel{(3.14)}{\leq} C_W \limsup_{k \rightarrow \infty} W\left(\sum_{T \in \mathcal{M}_{\ell_k}} \eta_{\ell_k}(T)^2, \sum_{T \in \mathcal{M}_{\ell_k}} \zeta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2\right) \\ &= C_W \limsup_{k \rightarrow \infty} W(\eta_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k})^2, \zeta_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k})^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2) \\ &= C_W W(0, 0, C_\eta^2, C_\zeta^2) \stackrel{(3.13)}{=} 0 \end{aligned}$$

und damit insbesondere auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k}) = 0. \quad (3.29)$$

Seien $\ell' \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $\ell' \leq \ell_k$ fest, dann folgt mit (3.29), der Eigenschaft (3.10) von MARK B* und der Stetigkeit von M bei Null

$$\max_{T \in \mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}} \rho_{\ell_k}(T) \leq \max_{T \in \mathcal{T}_{\ell_k} \setminus \mathcal{M}_{\ell_k}} \rho_{\ell_k}(T) \stackrel{(3.10)}{\leq} M(\rho_{\ell_k}(\mathcal{M}_{\ell_k})) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Für beliebiges $T \in \mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}$ erhalten wir damit insgesamt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \min \left\{ w_{\eta}(\eta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2), w_{\zeta}(\zeta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}^2, \zeta_{\ell_k}^2) \right\} \\ &\leq W(\eta_{\ell_k}(T)^2, \zeta_{\ell_k}(T)^2, \eta_{\ell_k}, \zeta_{\ell_k}^2) = \rho_{\ell_k}(T)^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Es existiert daher eine Teilfolge $(\mathcal{T}_{\ell_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(\mathcal{T}_{\ell_k})_{k \in \mathbb{N}}$, sodass zumindest eine der folgenden Konvergenzen gilt:

$$w_{\eta}(\eta_{\ell_{k_j}}(T)^2, \eta_{\ell_{k_j}}^2, \zeta_{\ell_{k_j}}^2) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \text{oder} \quad w_{\zeta}(\zeta_{\ell_{k_j}}(T)^2, \eta_{\ell_{k_j}}^2, \zeta_{\ell_{k_j}}^2) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Sei $\xi \in \{\eta, \zeta\}$ so, dass gilt $w_{\xi}(\xi_{\ell_{k_j}}(T)^2, \eta_{\ell_{k_j}}^2, \zeta_{\ell_{k_j}}^2) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. Es muss also ein Index $j_0 \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$w_{\xi}(\xi_{\ell_{k_j}}(T)^2, \eta_{\ell_{k_j}}^2, \zeta_{\ell_{k_j}}^2) < \varepsilon \quad \text{für alle } j \geq j_0.$$

Mit (3.24) folgt somit

$$(\xi_{\ell_{k_j}}(T)^2, \eta_{\ell_{k_j}}^2, \zeta_{\ell_{k_j}}^2) \in I_{\varepsilon} \quad \text{für alle } j \geq j_0.$$

Wieder dürfen wir wegen der Endlichkeit von $\mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass der Limes $\lim_{j \rightarrow \infty} \xi_{\ell_{k_j}}(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}$ existiert. Stetigkeit von w_{ξ} in I_{ε} liefert nun

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} w_{\xi}(\xi_{\ell_{k_j}}(T)^2, \eta_{\ell_{k_j}}^2, \zeta_{\ell_{k_j}}^2) = w_{\xi}(\lim_{j \rightarrow \infty} \xi_{\ell_{k_j}}(T)^2, \lim_{j \rightarrow \infty} \eta_{\ell_{k_j}}^2, \lim_{j \rightarrow \infty} \zeta_{\ell_{k_j}}^2).$$

Wegen (3.25)–(3.26) trifft also einer der folgenden Fälle zu:

- Es gilt $\lim_{j \rightarrow \infty} \xi_{\ell_{k_j}}(T) = 0$ für alle $T \in \mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}$,
- oder $\lim_{j \rightarrow \infty} \xi_{\ell_{k_j}} = 0$.

Da die zweite Aussage die erste enthält, folgt in jedem Fall mit der Endlichkeit von $\mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}$

$$\xi_{\ell_{k_j}}(\mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty})^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell'} \cap \mathcal{T}_{\infty}} \xi_{\ell_{k_j}}(T)^2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Lemma 7 liefert $\xi_{\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$ und mit der Beschränktheit (3.28) von η_{ℓ} und ζ_{ℓ} erhalten wir schließlich

$$0 \leq \eta_{\ell} \zeta_{\ell} \lesssim \xi_{\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0,$$

was den Beweis beschließt. □

Bemerkung 22. Die Markierungsstrategie MARK B₃ (Algorithmus 4) erfüllt die Bedingungen von Satz 21: Die Funktion

$$W: \mathbb{R}_{\geq 0}^4 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (x, y, \hat{x}, \hat{y}) \mapsto x\hat{y} + y\hat{x}$$

ist stetig in ganz $\mathbb{R}_{\geq 0}^4$, also insbesondere auch in $[0, 1]^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}^2$. Weiters genügt sie offenbar (3.13). Um die Bedingung (3.14) zu überprüfen, seien $x, y, (x_j)_{j=1}^N, (y_j)_{j=1}^N, \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben. Es gilt

$$W\left(\sum_{j=1}^N x_j, \sum_{j=1}^N y_j, \hat{x}, \hat{y}\right) = \left(\sum_{j=1}^N x_j\right)\hat{y} + \left(\sum_{j=1}^N y_j\right)\hat{x} = \sum_{j=1}^N (x_j\hat{y} + y_j\hat{x}) = \sum_{j=1}^N W(x_j, y_j, \hat{x}, \hat{y}).$$

Definieren wir nun die Funktionen $w_\eta, w_\zeta: \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\begin{aligned} w_\eta(x, \hat{x}, \hat{y}) &:= x\hat{y} + x\hat{x} \quad \text{bzw.} \\ w_\zeta(y, \hat{x}, \hat{y}) &:= y\hat{y} + y\hat{x} \end{aligned}$$

und setzen $\varepsilon := 1$, so sind die Bedingungen (3.24)–(3.26) erfüllt. Bemerke schließlich, dass gilt

$$W(x, y, \hat{x}, \hat{y}) \geq \begin{cases} w_\eta(x, \hat{x}, \hat{y}), & \text{falls } x \leq y, \\ w_\zeta(y, \hat{x}, \hat{y}), & \text{falls } x > y. \end{cases}$$

Also erhalten wir auch (3.27) und damit die Behauptung.

Satz 23. Wir betrachten den Output von Algorithmus 2 mit Markierungsstrategie MARK A* (Algorithmus 3). Erfüllen die beiden Folgen von Fehlerschätzern $(\eta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ und $(\zeta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ die Annahmen (2.4)–(2.5) und gilt

$$\sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \eta_\ell < \infty \quad \text{sowie} \quad \sup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \zeta_\ell < \infty, \tag{3.30}$$

so folgt aus *a priori* Konvergenz (2.3) der Folgen $(u_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ und $(z_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ die Konvergenz $\eta_\ell \zeta_\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$.

Beweis. Existiert ein Index $\ell_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass für ein festes $\omega \in \{u, z\}$ und alle $\ell \geq \ell_0$ gilt $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{M}_{\ell, \omega}$, dann stimmen $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \geq \ell_0}$ und die Folge der zugehörigen Fehlerschätzer mit dem Output von Algorithmus 1 überein, wenn wir diesen auf die Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_{ℓ_0} anwenden. Satz 4 und die Beschränktheit der Fehlerschätzer (3.30) liefern nun $\eta_\ell \zeta_\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$.

Es gelte also ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\{\ell \in \mathbb{N}_0 \mid \mathcal{M}_\ell \supseteq \mathcal{M}_{\ell, u}\} \simeq \mathbb{N} \simeq \{\ell \in \mathbb{N}_0 \mid \mathcal{M}_\ell \supseteq \mathcal{M}_{\ell, z}\}.$$

Seien $(\mathcal{T}_{\ell_u(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\mathcal{T}_{\ell_z(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ disjunkte Teilfolgen von $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$, sodass gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\ell_u(k)} &\supseteq \mathcal{M}_{\ell_u(k), u} \quad \text{und} \\ \mathcal{M}_{\ell_z(k)} &\supseteq \mathcal{M}_{\ell_z(k), z} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \text{ sowie} \\ \mathbb{N}_0 &= \ell_u(\mathbb{N}) \dot{\cup} \ell_z(\mathbb{N}). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Dann liefert Lemma 6 eine Teilfolge $(\mathcal{T}_{\ell_u(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(\mathcal{T}_{\ell_u(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\mathcal{T}_{\ell_u(k_j)} \cap \mathcal{T}_{\ell_u(k_{j+n})} = \mathcal{T}_{\ell_u(k_j)} \cap \mathcal{T}_\infty \quad \text{für alle } j, n \in \mathbb{N},$$

sodass gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \eta_{\ell_u(k_j)}(\mathcal{M}_{\ell_u(k_j)}) = 0.$$

Sind nun $k' \in \mathbb{N}$ und $j \in \mathbb{N}$ mit $\ell_u(k') \leq \ell_u(k_j)$ gegeben, dann folgt

$$\begin{aligned} \max_{T \in \mathcal{T}_{\ell_u(k')} \cap \mathcal{T}_\infty} \eta_{\ell_u(k_j)}(T) &\leq \max_{T \in \mathcal{T}_{\ell_u(k_j)} \setminus \mathcal{M}_{\ell_u(k_j), u}} \eta_{\ell_u(k_j)}(T) \\ &\stackrel{(3.9)}{\leq} \eta_{\ell_u(k_j)}(\mathcal{M}_{\ell_u(k_j), u}) \\ &\stackrel{(3.31)}{\leq} \eta_{\ell_u(k_j)}(\mathcal{M}_{\ell_u(k_j)}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Endlichkeit von $\mathcal{T}_{\ell_u(k')} \cap \mathcal{T}_\infty$ liefert

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \eta_{\ell_u(k_j)}(\mathcal{T}_{\ell_u(k')} \cap \mathcal{T}_\infty) = 0.$$

Mit Lemma 7 und Beschränktheit (3.30) von $(\zeta_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ erhalten wir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{\ell_u(k)} = 0 \quad \text{und damit} \quad \eta_{\ell_u(k)} \zeta_{\ell_u(k)} \lesssim \eta_{\ell_u(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Dasselbe Argument zeigt die Konvergenz $\eta_{\ell_z(k)} \zeta_{\ell_z(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ existieren also Indizes $k_\eta, k_\zeta \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \eta_{\ell_u(k)} \zeta_{\ell_u(k)} &< \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq k_\eta \text{ und} \\ \eta_{\ell_z(k)} \zeta_{\ell_z(k)} &< \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq k_\zeta. \end{aligned}$$

Wegen (3.31) folgt

$$\eta_\ell \zeta_\ell < \varepsilon \quad \text{für alle } \ell \geq \max\{\ell_u(k_\zeta), \ell_z(k_\zeta)\}$$

und damit die Behauptung. □

4 Beispiel für einen AFEM Algorithmus

In diesem Kapitel wollen wir für ein konkretes Beispiel Fehlerschätzer, Markierungs- und Verfeinerungsmethoden explizit angeben und die bisher geforderten Eigenschaften nachweisen.

4.1 Poisson-Gleichung im \mathbb{R}^2

In diesem Abschnitt betrachten wir die Poisson-Gleichung in 2D mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen im Kontext des Lemmas von Lax–Milgram. Dazu arbeiten wir mit einem beschränkten und polygonalen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und dem Funktionenraum $\mathcal{X} := H_0^1(\Omega)$, versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} := \|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)}$. Weiters seien $f \in L^2(\Omega)$ und eine vektorwertige Funktion $\mathbf{f} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ gegeben, die auf der Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 (vgl. Abschnitt 4.1.1) stückweise stetig ist. Das Modellproblem lautet: Finde $u \in H_0^1(\Omega)$, sodass

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f + \operatorname{div}(\mathbf{f}) && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die Divergenz $\operatorname{div}(\mathbf{f})$ ist hierbei distributionell aufzufassen. Die schwache Formulierung des Modellproblems lautet: Finde $u \in \mathcal{X}$, sodass gilt

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (fv - \mathbf{f} \cdot \nabla v) \, dx =: F(v) \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.1)$$

Notation 24. Für alle Mengen $\omega \subseteq \Omega$ und Funktionen $u, v \in H_0^1(\Omega)$ definieren wir

$$(u, v)_{\omega} := (u, v)_{L^2(\omega)} = \int_{\omega} u(x)v(x) \, dx.$$

4.1.1 Ausgangstriangulierung und Netzverfeinerungsmethode

Wir beginnen mit einer Triangulierung \mathcal{T}_0 von Ω in Dreieckselemente, d.h. \mathcal{T}_0 ist eine endliche Menge von kompakten Dreiecken $T := \operatorname{conv}\{x_1, x_2, x_3\}$ mit positivem Maß $|T| > 0$ und erfüllt Definition 1. Wir definieren nun für alle Triangulierungen \mathcal{T} von Ω

$$h_T := |T|^{1/d} \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}.$$

Definition 25 (Reguläre Triangulierung). Eine Triangulierung \mathcal{T} von Ω in Dreieckselemente heißt regulär, falls für alle Elemente $T, T' \in \mathcal{T}$ mit $T \neq T'$ einer der folgenden Fälle zutrifft (vgl. [FPW11, S.462]):

- $\#(T \cap T') = 0$,
- $\#(T \cap T') = 1$ und der Schnittpunkt ist ein gemeinsamer Eckpunkt, oder
- $\#(T \cap T') > 1$ und die Schnittmenge ist eine gemeinsame Kante.

Definition 26 (Formregularität). Eine Familie von Triangulierungen $(\mathcal{T}_h)_h$ von Ω heißt κ -formregulär mit $\kappa > 0$, falls jedes Element $T \in \bigcup_h \mathcal{T}_h$ einen Kreis vom Durchmesser $\rho_T \geq h_T/\kappa$ enthält; vgl. [Bra13, S.58].

Im Folgenden sei die Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 regulär. Die Netzverfeinerung erfolgt durch Newest Vertex Bisection (NVB). Hierbei wird für eine gegebene Triangulierung und jedes Element $T \in \mathcal{T}$ eine Verfeinerungskante $E_T \subset T$ ausgewählt und dem Algorithmus übergeben. Die folgende Formulierung des Algorithmus stammt aus [KPP13, S.4].

Algorithmus 10 (NVB). INPUT: Triangulierung und Verfeinerungskanten $(\mathcal{T}_H, (E_T)_{T \in \mathcal{T}_H})$ und eine Menge von markierten Elementen $\mathcal{M}_H \subseteq \mathcal{T}_H$.

Setze $k := 0$ und definiere die Menge der markierten Verfeinerungskanten durch

$$\mathcal{M}_H^{(0)} := \{E_T \mid T \in \mathcal{M}_H\}.$$

- Setze $\mathcal{M}_H^{(k+1)} := \{E_T \mid T \in \mathcal{T}_H \text{ und } \exists E \in \mathcal{M}_H^{(k)} : E \subset T\}$.
- Falls gilt $\mathcal{M}_H^{(k)} \subsetneq \mathcal{M}_H^{(k+1)}$, setze $k := k + 1$ und gehe zu Schritt (i).
- Für jede Kante $E_T \in \mathcal{M}_H^{(k)}$ wird der Mittelpunkt x_T von E_T zu einem neuen Knoten und die Dreieckselemente werden entsprechend Abbildung 4.1 verfeinert. Die Verfeinerungskanten der dadurch neu entstehenden Dreiecke sind dabei jene Kanten, die dem *newest vertex*, also x_T , gegenüberliegen.

OUTPUT: Verfeinerte Triangulierung und Verfeinerungskanten $(\mathcal{T}_h, (E_T)_{T \in \mathcal{T}_h})$

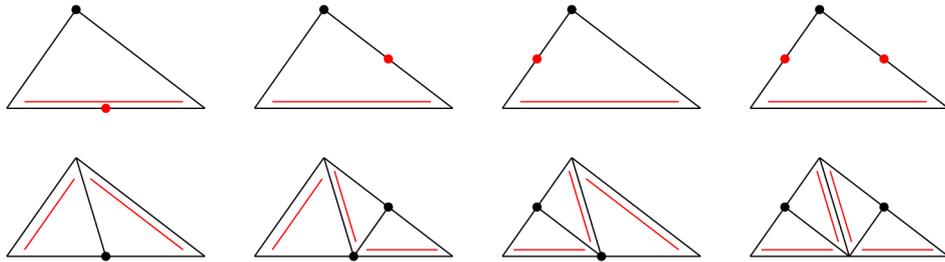


Abbildung 4.1: Alle Möglichkeiten der Verfeinerung eines Dreiecks durch NVB (Algorithmus 10). Verfeinerungskanten sind durch rote Linien, *newest vertices* durch schwarze und markierte Kanten durch rote Punkte gekennzeichnet. Die Abbildung wurde aus [Imm18, S.6] entnommen.

Um die Lesbarkeit zu erhöhen, assoziieren wir für den Rest dieses Kapitels eine Triangulierung \mathcal{T} mit dem Paar $(\mathcal{T}, (E_T)_{T \in \mathcal{T}})$. Weiters setzen wir für eine Menge von markierten Elementen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{T}$ die verfeinerte Triangulierung $\text{refine}(\mathcal{T}, \mathcal{M})$ gleich dem Output von Algorithmus 10 mit Input \mathcal{T} und \mathcal{M} . Wie schon in Kapitel 2 bezeichnen wir mit $\mathbb{T}(\mathcal{T})$ die Menge aller zulässigen Verfeinerungen von \mathcal{T} und setzen $\mathbb{T} := \mathbb{T}(\mathcal{T}_0)$.

Bemerkung 27. Erhält die Netzverfeinerungsmethode NVB eine reguläre Triangulierung als Input, so ist auch die zurückgegebene Verfeinerung regulär. Da wir die Regularität von \mathcal{T}_0 gefordert haben, folgt somit auch jene aller zulässigen Verfeinerungen $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Weiters erzeugt NVB nur endlich viele Ähnlichkeitsklassen von Dreiecken, weshalb die Menge \mathbb{T} von Triangulierungen κ -regulär mit einem festen $\kappa > 0$ ist.

4.1.2 Diskretisierung und Lösen der diskreten Formulierung des Problems

Definition 28. Sei $p \geq 1$ fest. Für eine gegebene Triangulierung $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}$ definieren wir den zugehörigen diskreten Unterraum $\mathcal{X}_h \subset \mathcal{X}$ durch

$$\mathcal{X}_h := \{v_h \in L^2(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h : v_h|_T \text{ ist Polynom vom Grad } \deg(v_h|_T) \leq p\} \cap H_0^1(\Omega).$$

Bemerkung 29. Die Definition 28 der diskreten Unterräume impliziert eine Schachtelung ebenjener: Für alle $\mathcal{T}_H \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}(\mathcal{T}_H)$ gilt $\mathcal{X}_H \subseteq \mathcal{X}_h$.

Die diskrete Formulierung des Problems (4.1) lautet nun: Finde $u_h \in \mathcal{X}_h$ mit

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{X}_h. \quad (4.2)$$

Augrund des Lemmas von Lax–Milgram existiert eine eindeutige Lösung $u_h \in \mathcal{X}_h$. Wir setzen die Existenz eines exakten Lösungsmoduls SOLVE voraus, d.h. es gilt

$$u_h = \text{SOLVE}(\mathcal{T}_h) \quad \text{für alle } \mathcal{T}_h \in \mathbb{T}. \quad (4.3)$$

4.1.3 Fehlerschätzer

Sei eine Triangulierung $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}$ gegeben. Wir bezeichnen mit \mathcal{E}_h° die Menge aller Kanten von Elementen $T \in \mathcal{T}_h$, die in Ω liegen. Für $T \in \mathcal{T}_h$ setzen wir außerdem

$$\mathcal{E}_h^\circ(T) := \{E \in \mathcal{E}_h^\circ \mid E \subset T\}.$$

Definition 30 (Residuen). Wir definieren die flächenbezogenen Residuen durch

$$R_T(v_h) := f|_T + \text{div}(\mathbf{f})|_T + \Delta v_h|_T \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{X}_h \text{ und } T \in \mathcal{T}_h \quad (4.4)$$

und setzen $R_T := R_T(u_h)$.

Definition 31 (Sprünge). Für eine innere Kante $E \in \mathcal{E}_h^\circ$ existieren $T, T' \in \mathcal{T}_h$ mit $E = T \cap T'$. Wir definieren den kantenbezogenen Sprung auf E durch

$$J_E(v_h) := ((\mathbf{f} + \nabla v_h)|_T \cdot \nu_T)|_E + ((\mathbf{f} + \nabla v_h)|_{T'} \cdot \nu_{T'})|_E \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{X}_h, \quad (4.5)$$

wobei ν_T bzw. $\nu_{T'}$ die äußeren Normalvektoren auf T bzw. T' bezeichnen. Analog zu oben setzen wir $J_E := J_E(u_h)$.

Die lokalen Verfeinerungsindikatoren setzen sich nun aus Residuen (4.4) und Sprüngen (4.5) zusammen:

$$\begin{aligned}\eta_h(T, v_h)^2 &:= h_T^2 \|R_T(v_h)\|_{L^2(T)}^2 + \frac{h_T}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h^\circ(T)} \|J_E(v_h)\|_{L^2(E)}^2, \\ \eta_h(T) &:= \eta_h(T, u_h) \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_h \text{ und } v_h \in \mathcal{X}_h.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Ist $E \in \mathcal{E}_h^\circ$ eine Kante, dann folgt aus Definition 1 und der Tatsache, dass \mathcal{E}_h° nur innere Kanten enthält, dass genau zwei Elemente $T, T' \in \mathcal{T}_h$ mit $T \neq T'$ existieren, sodass $E \subset T$ und $E \subset T'$ gilt. Wir definieren nun $h_E := (h_T + h_{T'})/2$. Für den globalen Fehlerschätzer erhalten wir damit

$$\eta_h^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_h(T)^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|R_T\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h^\circ} h_E \|J_E\|_{L^2(E)}^2.\tag{4.7}$$

Satz 32. Es existiert eine Konstante $C_{\text{rel}} > 0$, die nur von κ und Ω abhängt, sodass für alle Triangulierungen $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}$ von Ω gilt:

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{X}} \leq C_{\text{rel}} \eta_h.\tag{4.8}$$

Bevor wir diesen Satz beweisen können, benötigen wir noch drei Hilfsresultate.

Proposition 33 (Minkowski-Ungleichung). Seien $(a_\ell)_{\ell=1}^N, (b_\ell)_{\ell=1}^N \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\left(\sum_{\ell=1}^N (a_\ell + b_\ell)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{\ell=1}^N a_\ell^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{\ell=1}^N b_\ell^2 \right)^{1/2}.\tag{4.9}$$

Beweis. Siehe [Kal14, S.70f]. □

Proposition 34 (Poincaré–Friedrichs-Ungleichung). Es existiert eine Konstante $C_p > 0$ sodass gilt

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).\tag{4.10}$$

Insbesondere erhalten wir damit $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq (C_p + 1) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.

Beweis. Siehe [Bra13, S.29]. □

Proposition 35. Es sei eine κ -formreguläre Triangulierung \mathcal{T}_h von Ω gegeben. Weiters sei $v \in \mathcal{X}$ beliebig. Setze

$$\omega_h(T) := \bigcup \{T' \in \mathcal{T}_h \mid T \cap T' \neq \emptyset\}.$$

Dann existieren eine Konstante $C_1 > 0$, die nur von κ abhängt, und ein Element $v_h \in \mathcal{X}_h$ mit

$$\begin{aligned}\|v - v_h\|_{L^2(T)} &\leq C_1 h_T \|v\|_{H^1(\omega_h(T))} \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_h \text{ und} \\ \|v - v_h\|_{L^2(E)} &\leq C_1 h_T^{1/2} \|v\|_{H^1(\omega_h(T))} \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}_h^\circ(T).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Beweis. Siehe [Bra13, S.80f]. □

Beweis von Satz 32. Wir folgen dem Beweis aus [Bra13, S.170f] und bemerken zunächst, dass gilt

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\mathcal{X}} &= \|u - u_h\|_{\mathcal{X}}^{-1} a(u - u_h, u - u_h) \leq \sup_{\substack{v \in \mathcal{X} \\ \|v\|_{\mathcal{X}}=1}} a(u - u_h, v) \\ &\leq \sup_{\substack{v \in \mathcal{X} \\ \|v\|_{\mathcal{X}}=1}} \|u - u_h\|_{\mathcal{X}} \|v\|_{\mathcal{X}} = \|u - u_h\|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{X}} = \sup_{\substack{v \in \mathcal{X} \\ \|v\|_{\mathcal{X}}=1}} (\nabla(u - u_h), \nabla v)_{\Omega}. \quad (4.12)$$

Ist nun $v \in \mathcal{X}$ mit $\|v\|_{\mathcal{X}} = 1$ beliebig, dann folgt mit der schwachen Formulierung der Poisson-Gleichung (4.1) und elementweiser partieller Integration

$$\begin{aligned} (\nabla(u - u_h), \nabla v)_{\Omega} &\stackrel{(4.1)}{=} (f, v)_{\Omega} - (\mathbf{f}, \nabla v)_{\Omega} - (\nabla u_h, \nabla v)_{\Omega} \\ &= (f, v)_{\Omega} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{f} + \nabla u_h, \nabla v)_T \\ &= (f, v)_{\Omega} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(-(\operatorname{div}(\mathbf{f}) + \Delta u_h, v)_T + ((\mathbf{f} + \nabla u_h) \cdot \nu_T, v)_{\partial T} \right) \\ &= (f, v)_{\Omega} - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(-(\operatorname{div}(\mathbf{f}) + \Delta u_h, v)_T + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h^{\circ}(T)} (J_E, v)_E \right) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left((R_T, v)_T - \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h^{\circ}(T)} (J_E, v)_E \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

wobei ν_T wieder den äußeren Normalvektor auf $T \in \mathcal{T}_h$ bezeichnet. Proposition 35 liefert nun ein Element $v_h \in \mathcal{X}_h$, sodass die Abschätzungen aus (4.11) erfüllt sind. Mit der Galerkin-Orthogonalität erhalten wir

$$(\nabla(u - u_h), \nabla v_h)_{\Omega} = a(u - u_h, v_h) = 0. \quad (4.14)$$

Gemeinsam mit der der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt daher

$$\begin{aligned} (\nabla(u - u_h), \nabla v)_{\Omega} &\stackrel{(4.14)}{=} (\nabla(u - u_h), \nabla(v - v_h))_{\Omega} \\ &\stackrel{(4.13)}{\leq} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\|R_T\|_{L^2(T)} \|v - v_h\|_{L^2(T)} + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h^{\circ}(T)} \|J_E\|_{L^2(E)} \|v - v_h\|_{L^2(E)} \right) \\ &\stackrel{(4.11)}{\lesssim} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\|v\|_{H^1(\omega_h(T))} \left(h_T \|R_T\|_{L^2(T)} + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h^{\circ}(T)} h_T^{1/2} \|J_E\|_{L^2(E)} \right) \right) \\ &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{H^1(\omega_h(T))}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(h_T \|R_T\|_{L^2(T)} + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h^{\circ}(T)} h_T^{1/2} \|J_E\|_{L^2(E)} \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Wegen der κ -Regularität von \mathbb{T} erhalten wir eine von der Wahl der Triangulierung \mathcal{T}_h unabhängige Konstante $C > 0$, sodass

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{H^1(\omega_h(T))}^2 \right)^{1/2} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} (\nabla(u - u_h), \nabla v)_\Omega &\lesssim \|v\|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(h_T \|R_T\|_{L^2(T)} + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h^\circ(T)} h_T^{1/2} \|J_E\|_{L^2(E)} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\lesssim \|v\|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(h_T^2 \|R_T\|_{L^2(T)}^2 + \frac{1}{4} \sum_{E \in \mathcal{E}_h^\circ(T)} h_T \|J_E\|_{L^2(E)}^2 \right) \right)^{1/2} \\ &\leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_h(T)^2 \right)^{1/2} \\ &= \|v\|_{H^1(\Omega)} \stackrel{(4.10)}{\eta_h} \lesssim \|v\|_{\mathcal{X}} \eta_h = \eta_h, \end{aligned}$$

was den Beweis beschließt. \square

Satz 36. Es existiert eine Konstante $C_2 > 0$, die nur von κ und dem Polynomgrad p aus Definition 28 abhängt, sodass für alle $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}$ und $T \in \mathcal{T}_h$ sowie $v_h, w_h \in \mathcal{X}_h$ gilt

$$\eta_h(T, v_h) \leq \eta_h(T, w_h) + C_2 \|\nabla(v_h - w_h)\|_{L^2(\omega_h(T))}.$$

Beweis. Setzen wir $r_h := v_h - w_h$ so erhalten wir mit der Dreiecks- und der Minkowski-Ungleichung (4.9)

$$\begin{aligned} \eta_h(T, v_h) &= \eta_h(T, w_h + r_h) \\ &= \left(h_T^2 \|R_T(w_h) + \Delta r_h\|_{L^2(T)}^2 + \frac{h_T}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h^\circ(T)} \|J_E(w_h) + J_E(r_h)\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(h_T^2 (\|R_T(w_h)\|_{L^2(T)} + \|\Delta r_h\|_{L^2(T)})^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_T}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h^\circ(T)} (\|J_E(w_h)\|_{L^2(E)} + \|J_E(r_h)\|_{L^2(E)})^2 \right)^{1/2} \\ &\stackrel{(4.9)}{\leq} \left(h_T^2 \|R_T(w_h)\|_{L^2(T)}^2 + \frac{h_T}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h^\circ(T)} \|J_E(w_h)\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(h_T^2 \|\Delta r_h\|_{L^2(T)}^2 + \frac{h_T}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h^\circ(T)} \|J_E(r_h)\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2} \\ &= \eta_h(T, w_h) + \left(h_T^2 \|\Delta r_h\|_{L^2(T)}^2 + \frac{h_T}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h^\circ(T)} \|J_E(r_h)\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Durch erneutes Anwenden der Minkowski-Ungleichung (4.9) folgt damit

$$\eta_h(T, v_h) \leq \eta_h(T, w_h) + h_T \|\Delta r_h\|_{L^2(T)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h^\circ(T)} h_T \|J_E(r_h)\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2}.$$

Eine inverse Abschätzung wie z.B. jene in [Bra13, S.79] liefert die Ungleichung

$$h_T \|\Delta r_h\|_{L^2(T)} \lesssim \|\nabla r_h\|_{L^2(T)}, \quad (4.15)$$

wobei der konstante Faktor nur von κ und dem Polynomgrad p aus Definition 28 abhängt. Um eine Abschätzung für den Sprung-Term zu finden, sei zunächst eine innere Kante $E \in \mathcal{E}_h^\circ(T)$ gegeben, dann existiert ein Element $T' \in \mathcal{T}_h$ mit $E = T \cap T'$. Wir nutzen die Spurabschätzung aus [CKNS08, S.2534] und erhalten

$$\begin{aligned} \|\nabla(r_h|_T)\|_{L^2(E)} &\lesssim h_T^{-1/2} \|\nabla r_h\|_{L^2(T)} \quad \text{sowie} \\ \|\nabla(r_h|_{T'})\|_{L^2(E)} &\lesssim h_{T'}^{-1/2} \|\nabla r_h\|_{L^2(T')}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

wobei der konstante Faktor nur von κ abhängt. Wegen der Quasiuniformität von \mathcal{T}_h können wir dabei $h_{T'}$ durch h_T ersetzen. Gemeinsam mit der Dreiecksungleichung erhalten wir also

$$\begin{aligned} \|J_E(r_h)\|_{L^2(E)} &= \|(\partial_\nu r_h|_T)|_E + (\partial_\nu r_h|_{T'})|_E\|_{L^2(E)} \\ &\leq \|\nabla r_h|_T\|_{L^2(E)} + \|\nabla r_h|_{T'}\|_{L^2(E)} \\ &\stackrel{(4.16)}{\lesssim} h_T^{-1/2} \|\nabla r_h\|_{L^2(T)} + h_T^{-1/2} \|\nabla r_h\|_{L^2(T')}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Wieder liefert die Minkowski-Ungleichung

$$\begin{aligned} \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h^\circ(T)} h_T \|J_E(r_h)\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2} &\stackrel{(4.17)}{\lesssim} \left(\sum_{\substack{T' \in \mathcal{T}_h \\ T \cap T' \neq \emptyset}} (\|\nabla r_h\|_{L^2(T)} + \|\nabla r_h\|_{L^2(T')})^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{\substack{T' \in \mathcal{T}_h \\ T \cap T' \neq \emptyset}} \|\nabla r_h\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{\substack{T' \in \mathcal{T}_h \\ T \cap T' \neq \emptyset}} \|\nabla r_h\|_{L^2(T')}^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{\substack{T' \in \mathcal{T}_h \\ T \cap T' \neq \emptyset}} \|\nabla r_h\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} + \|\nabla r_h\|_{L^2(\omega_h(T))}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Mit der κ -Regularität von \mathbb{T} folgt

$$\left(\sum_{\substack{T' \in \mathcal{T}_h \\ T \cap T' \neq \emptyset}} \|\nabla r_h\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \lesssim \|\nabla r_h\|_{L^2(T)} \leq \|\nabla r_h\|_{L^2(\omega_h(T))}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\eta_h(T, v_h) \leq \eta_h(T, w_h) + C_2 \|\nabla(v_h - w_h)\|_{L^2(\omega_h(T))}$$

für eine passende Konstante $C_2 > 0$, was den Beweis beschließt. \square

Korollar 37 (Stabilität auf nicht-verfeinerten Elementen). Es existiert eine Konstante $C_{\text{stab}} > 0$, sodass für alle $\mathcal{T}_H \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}(\mathcal{T}_H)$ sowie $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H$ gilt

$$\eta_h(\mathcal{U}) \leq \eta_H(\mathcal{U}) + C_{\text{stab}} \|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}}. \quad (4.19)$$

Insbesondere erfüllt der Fehlerschätzer η_h Stabilität auf nicht-verfeinerten Elementen (2.4).

Beweis. Satz 36 angewandt auf $u_h \in \mathcal{X}_h$ und $u_H \in \mathcal{X}_H \subseteq \mathcal{X}_h$ liefert

$$\eta_h(T, u_h) \leq \eta_h(T, u_H) + C_2 \|\nabla(u_h - u_H)\|_{L^2(\omega_h(T))} \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_h. \quad (4.20)$$

Aus der Definition der Verfeinerungsindikatoren (4.6) folgt $\eta_h(T, u_H) = \eta_H(T, u_H)$ für alle $T \in \mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H$. Insgesamt erhalten wir mit der Minkowski-Ungleichung (4.9) und der κ -Regularität von \mathbb{T}

$$\begin{aligned} \eta_h(\mathcal{U}) &= \left(\sum_{T \in \mathcal{U}} \eta_h(T, u_h)^2 \right)^{1/2} \\ &\stackrel{(4.20)}{\leq} \left(\sum_{T \in \mathcal{U}} (\eta_H(T, u_H) + C_2 \|\nabla(u_h - u_H)\|_{L^2(\omega_h(T))})^2 \right)^{1/2} \\ &\stackrel{(4.9)}{\leq} \left(\sum_{T \in \mathcal{U}} \eta_H(T, u_H)^2 \right)^{1/2} + C_2 \left(\sum_{T \in \mathcal{U}} \|\nabla(u_h - u_H)\|_{L^2(\omega_h(T))}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \eta_H(\mathcal{U}) + C_{\text{stab}} \|\nabla(u_h - u_H)\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

für eine passende Konstante $C_{\text{stab}} > 0$. \square

Korollar 38 (Reduktion auf verfeinerten Elementen). Es existieren Konstanten $q_{\text{red}} \in (0, 1)$ und $C_{\text{red}} > 0$, sodass für alle $\mathcal{T}_H \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}(\mathcal{T}_H)$ gilt

$$\eta_h(\mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_H)^2 \leq q_{\text{red}} \eta_H(\mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_H)^2 + C_{\text{red}}^2 \|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}}^2. \quad (4.21)$$

Also erfüllt der Fehlerschätzer η_h Reduktion auf verfeinerten Elementen (2.5).

Beweis. Für gegebene Triangulierungen $\mathcal{T}_H \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}(\mathcal{T}_H)$ sowie $\delta > 0$ liefert Korollar 37 angewandt auf $\mathcal{U}_h := \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_H \subseteq \mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_h$ gemeinsam mit der Young-Ungleichung (2.19)

$$\eta_h(\mathcal{U}_h, u_h)^2 \leq (1 + \delta) \eta_h(\mathcal{U}_h, u_H)^2 + (1 + \delta^{-1}) C_{\text{stab}}^2 \|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}}^2. \quad (4.22)$$

Für $T \in \mathcal{T}_H$ setzen wir $\mathcal{T}_h|_T := \{T' \in \mathcal{T}_h \mid T' \subseteq T\}$. Ist nun $T \in \mathcal{T}_H \setminus \mathcal{T}_h$, dann folgt zunächst

$$h_{T'} = |T'|^{1/2} \leq 2^{-1/2} |T|^{1/2} = 2^{-1/2} h_T$$

für alle $T' \in \mathcal{T}_h|_T$ und damit

$$\begin{aligned} \eta_h(\mathcal{U}_h, u_H)^2 &= \sum_{T' \in \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_H} \eta_h(T', u_H)^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_H \setminus \mathcal{T}_h} \left(\sum_{T' \in \mathcal{T}_h|_T} \eta_h(T', u_H)^2 \right) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_H \setminus \mathcal{T}_h} \left(\sum_{T' \in \mathcal{T}_h|_T} \left(h_{T'}^2 \|R_{T'}(u_H)\|_{L^2(T')}^2 + \frac{h_{T'}}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h^\circ(T')} \|J_E(u_H)\|_{L^2(E)}^2 \right) \right) \\ &\leq 2^{-1/2} \sum_{T \in \mathcal{T}_H \setminus \mathcal{T}_h} \left(\sum_{T' \in \mathcal{T}_h|_T} \left(h_T^2 \|R_{T'}(u_H)\|_{L^2(T')}^2 + \frac{h_T}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h^\circ(T')} \|J_E(u_H)\|_{L^2(E)}^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Ist nun $T \in \mathcal{T}_H \setminus \mathcal{T}_h$ so ist $u_H|_T$ ein Polynom und damit insbesondere stetig differenzierbar. Es folgt also für alle $T' \in \mathcal{T}_h|_T$ und $E \in \mathcal{E}_h^\circ(T')$ mit $E \cap \partial T = \emptyset$, dass gilt $J_E(u_H) = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \eta_h(\mathcal{U}_h, u_H)^2 &\leq 2^{-1/2} \sum_{T \in \mathcal{T}_H \setminus \mathcal{T}_h} \left(h_T^2 \|R_T(u_H)\|_{L^2(T)}^2 + \frac{h_T}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h^\circ(T)} \|J_E(u_H)\|_{L^2(E)}^2 \right) \\ &= 2^{-1/2} \eta_H(\mathcal{T}_H \setminus \mathcal{T}_h)^2. \end{aligned}$$

Wählen wir nun $\delta > 0$ hinreichend klein, sodass $q_{\text{red}} := (1 + \delta)2^{-1/2} < 1$ und setzen $C_{\text{red}} := \sqrt{1 + \delta^{-1}} C_{\text{stab}}$ so erhalten wir die Behauptung. \square

Bemerkung 39. Die Ergebnisse der Korollare 37 bzw. 38 entsprechen noch nicht ganz unseren Annahmen der Stabilität (2.4) bzw. Reduktion (2.5). Setzen wir jedoch

$$S(t) := C_{\text{red}} t \quad \text{für } t \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

so erhalten wir wegen $C_{\text{red}} > C_{\text{stab}}$

$$\begin{aligned} \eta_h(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H) &\stackrel{(4.19)}{\leq} \eta_H(\mathcal{T}_h \cap \mathcal{T}_H) + S(\|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}}) \quad \text{und} \\ \eta_h(\mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_H)^2 &\stackrel{(4.21)}{\leq} q_{\text{red}} \eta_H(\mathcal{T}_H \setminus \mathcal{T}_h)^2 + S(\|u_h - u_H\|_{\mathcal{X}})^2 \end{aligned}$$

für alle $\mathcal{T}_H \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}_h \in \mathbb{T}(\mathcal{T}_H)$.

5 Numerische Experimente

In diesem Kapitel wollen wir einige numerische Resultate präsentieren. Für unsere Berechnungen in Abschnitt 5.1 nutzen wir dazu das Matlab Paket `plafem` aus [FPW11]. Für jene in Abschnitt 5.2 haben wir Matlab Codes aus [Imm18, S.84ff] um die hier verwendeten Markierungsstrategien erweitert. Die Netzverfeinerung erfolgt jeweils durch NVB (Algorithmus 10).

5.1 AFEM

Wir folgen dem ersten Beispiel aus [FPW11, S.482] und betrachten das Modellproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{5.1}$$

mit $\Omega := (-1, 1)^2 \setminus [0, 1] \times [-1, 0]$. Abbildung 5.1 zeigt die Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 .

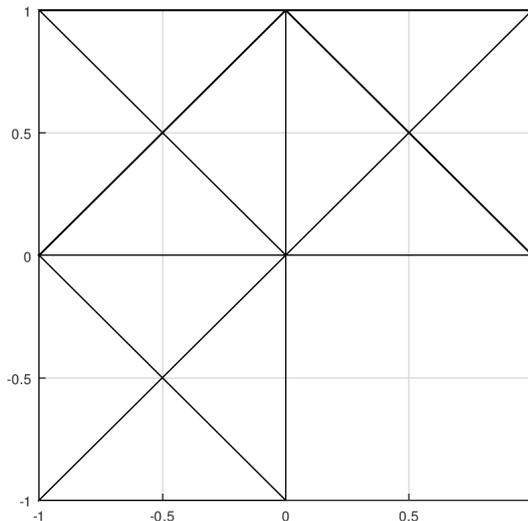


Abbildung 5.1: Die Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_0 .

Diskretisierung sowie Fehlerschätzer folgen dem Setting aus Kapitel 4. Wir werden die Konvergenz von Algorithmus 1 mit den folgenden fünf verschiedenen Markierungsstrategien überprüfen:

(D) Das Dörfler Kriterium (2.17) mit Markierungsparameter $\theta = 1/2$.

(Max) Das Maximumskriterium

$$\mathcal{M}_\ell := \{T \in \mathcal{T}_\ell \mid \eta_\ell(T) \geq \theta \max_{T' \in \mathcal{T}_\ell} \eta_\ell(T')\} \quad (5.2)$$

mit Markierungsparameter $\theta = 1/2$.

(Max') Das Maximumskriterium (5.2) mit Markierungsparameter $\theta = 1$.

(P) Prozentuale Verfeinerung

$$\#\mathcal{M}_\ell \geq \theta \#\mathcal{T}_\ell \quad \text{und} \quad \max_{T \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell} \eta_\ell(T) \leq \min_{T \in \mathcal{M}_\ell} \eta_\ell(T). \quad (5.3)$$

mit Markierungsparameter $\theta = 1/2$.

(U) Uniforme Verfeinerung $\mathcal{M}_\ell := \mathcal{T}_\ell$.

Alle der obigen Strategien erfüllen Bedingung (2.6) (vgl. Bemerkung 11 bzw. [GP21, S.5]), nach Satz 4 erwarten wir also Konvergenz des Fehlerschätzers $\eta_\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$. Die berechneten Werte sind in Abbildung 5.2 zu sehen. Abbildung 5.3 zeigt die Triangulierungen nach Erreichen der Abbruchbedingung. Hierbei ist zu bemerken, dass die vier adaptiven Verfahren (D), (Max), (Max') und (P) zur Singularität der Lösungsfunktion an der einspringenden Ecke hin verfeinern, wodurch bessere Konvergenzraten als mit der nicht adaptiven Strategie (U) erreicht werden.

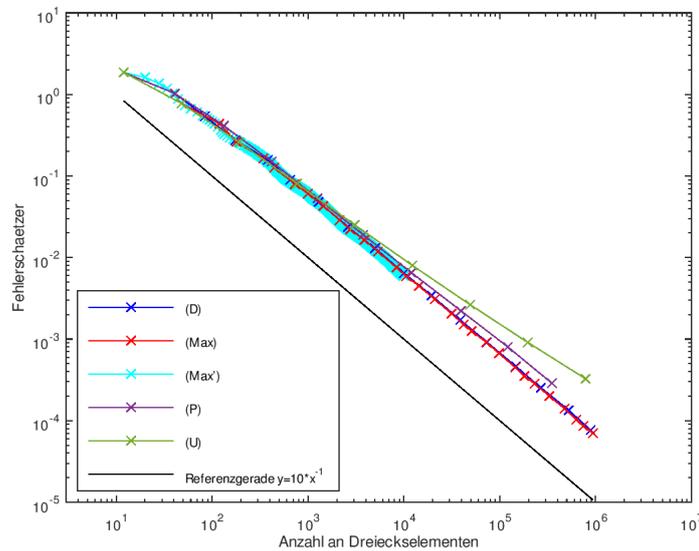


Abbildung 5.2: Werte der Fehlerschätzer unter Verwendung verschiedener Markierungsstrategien in Algorithmus 1.

5.2 GOAFEM

In diesem Abschnitt wollen wir die Analyse aus Kapitel 3 numerisch betrachten. Wir wählen dazu das Modellproblem aus [FPZ16, S.1438]

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \operatorname{div}(\mathbf{f}) && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (5.4)$$

mit $\Omega := (0, 1)^2$. Die Funktion \mathbf{f} ist gegeben durch

$$\mathbf{f}(x) = \begin{cases} (1, 0)^\top, & \text{falls } x \in T_F, \\ (0, 0)^\top, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei setzen wir $T_F := \operatorname{conv}\{(0, 0)^\top, (\frac{1}{2}, 0)^\top, (0, \frac{1}{2})^\top\}$. Die schwache Formulierung des Modellproblems (5.4) lautet also: Finde $u \in H_0^1(\Omega)$, sodass

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = - \int_{T_F} \frac{\partial v}{\partial x_1} \, dx =: F(v) \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.5)$$

Wir definieren das duale Problem analog durch: Finde $z \in H_0^1(\Omega)$, sodass

$$a(v, z) = - \int_{T_G} \frac{\partial v}{\partial x_1} \, dx =: G(v) \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega), \quad (5.6)$$

mit $T_G := \operatorname{conv}\{(1, 1)^\top, (\frac{1}{2}, 1)^\top, (1, \frac{1}{2})^\top\}$; vgl. [Inn18, S.84].

Wir wollen Algorithmus 2 mit der Markierungsstrategie MARK A₁ (Algorithmus 5) aus Abschnitt 3.1.4 und den Markierungsstrategien aus Abschnitt 3.1.5 (Algorithmen 7–9) anwenden, um den Wert von $G(u)$ zu approximieren. Die berechneten Fehlerschätzer sind in Abbildung 5.4 zu sehen. Für alle vier Markierungsstrategien wurde der Verfeinerungsparameter $\theta = 1/2$ gewählt.

In Abbildung 5.5 ist zu sehen, dass sowohl zu den Singularitäten der primalen Lösung an den Punkten $(\frac{1}{2}, 0)^\top$ bzw. $(0, \frac{1}{2})^\top$ als auch zu jenen der dualen Lösung an den Punkten $(\frac{1}{2}, 1)^\top$ bzw. $(1, \frac{1}{2})^\top$ verfeinert wurde. Die einzige Ausnahme hierbei stellt die Markierungsstrategie MARK B₂ (Algorithmus 8) dar, die anhand der primalen Verfeinerungsindikatoren $\eta_\ell(T)$ eine Dörfler Markierung durchführt, wodurch nur die Singularitäten der primalen Lösung erfasst werden; vgl. Abbildung 5.6 sowie [Inn18].

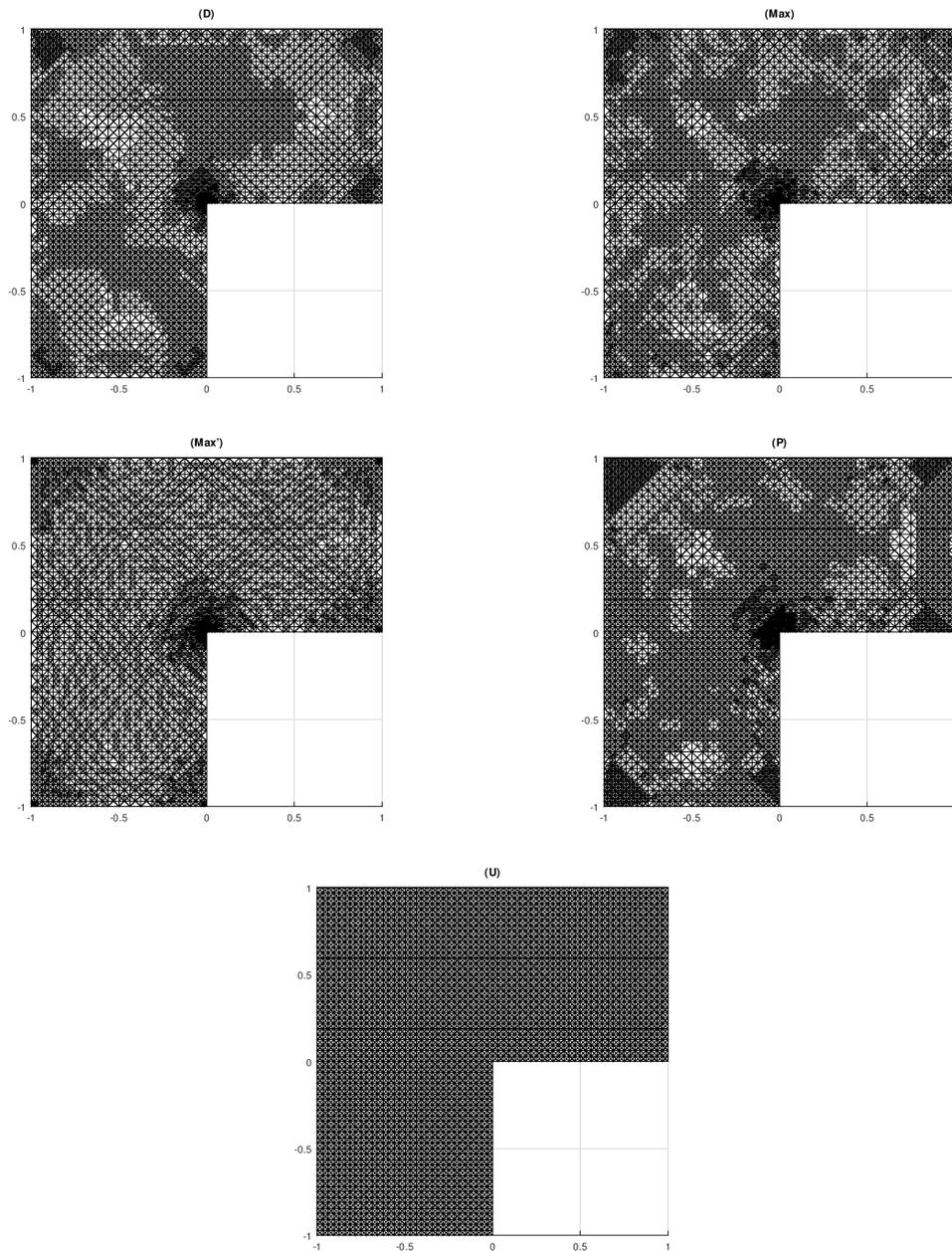


Abbildung 5.3: Triangulierungen nach Erreichen der Abbruchbedingung $\#\mathcal{T}_\ell \geq 10^4$ in Algorithmus 1.

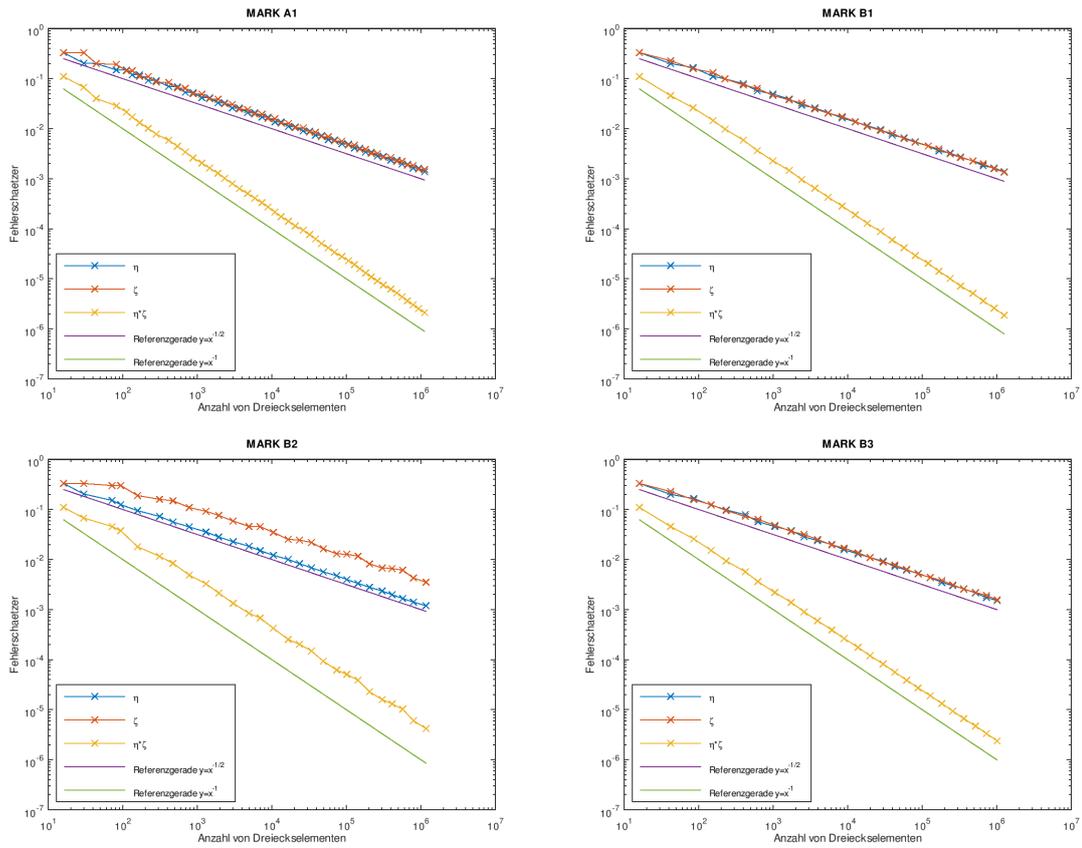


Abbildung 5.4: Werte der Fehlerschätzer unter Verwendung verschiedener Markierungsstrategien in Algorithmus 2.

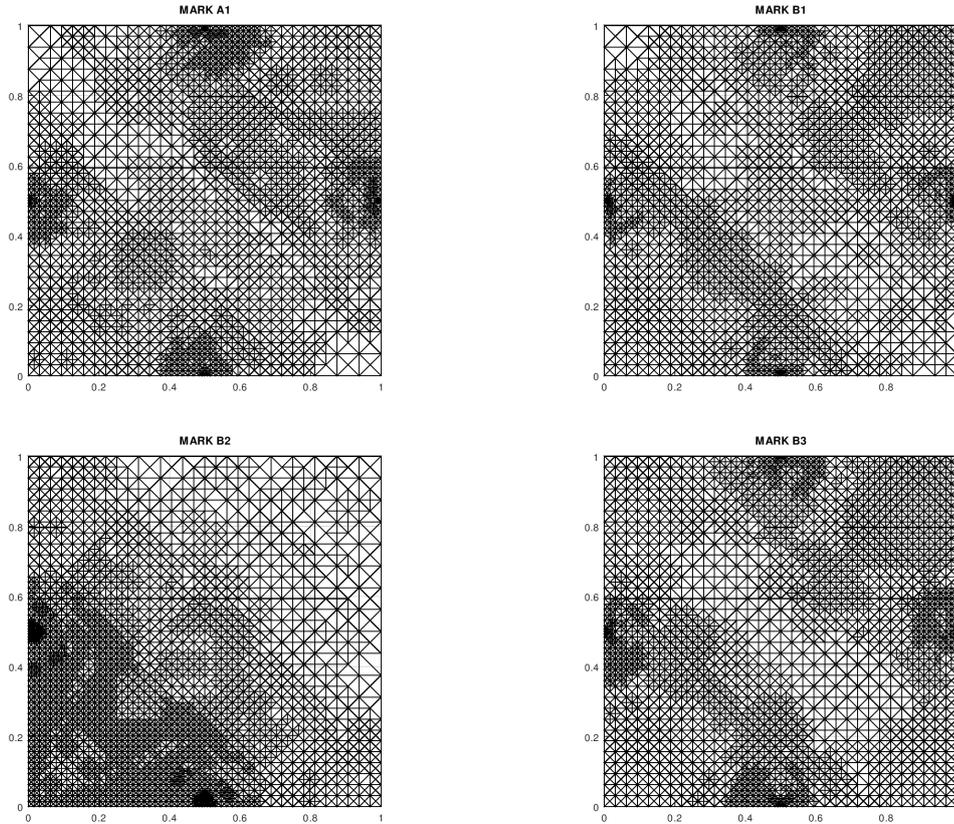


Abbildung 5.5: Triangulierungen nach Erreichen der Abbruchbedingung $\#\mathcal{T}_\ell \geq 5000$ in Algorithmus 2.

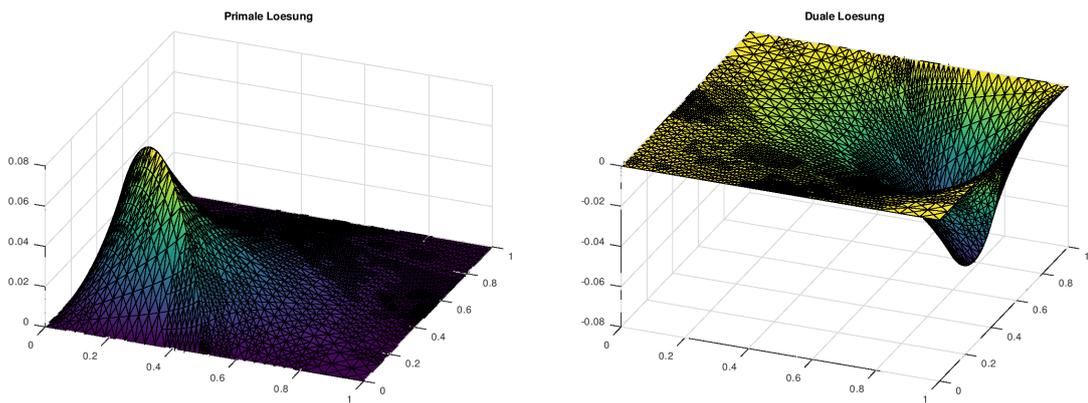


Abbildung 5.6: Lösungsfunktionen des primalen (5.5) bzw. dualen Problems (5.6), berechnet durch Algorithmus 2 mit Markierungsstrategie MARK B₁ (Algorithmus 7).

Literaturverzeichnis

- [BET11] Roland Becker, Elodie Estecahandy, and David Trujillo. Weighted marking for goal-oriented adaptive finite element methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 49(5/6):2451–2469, 2011.
- [BIP21] Roland Becker, Michael Innerberger, and Dirk Praetorius. Optimal convergence rates for goal-oriented FEM with quadratic goal-functional. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 21(2):267–288, 2021.
- [Bra13] Dietrich Braess. *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer, Berlin u.a., 2013.
- [CFPP14] Carsten Carstensen, Michael Feischl, Markus Page, and Dirk Praetorius. Axioms of adaptivity. *Computers & Mathematics with Applications*, 67(6):1195–1253, 2014.
- [CKNS08] J. Manuel Cascon, Christian Kreuzer, Ricardo H. Nochetto, and Kunibert G. Siebert. Quasi-optimal convergence rate for an adaptive finite element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(5):2524–2550, 2008.
- [Dö96] Willy Dörfler. A convergent adaptive algorithm for Poisson’s equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(3):1106–1124, 1996.
- [FKMP13] Michael Feischl, Michael Karkulik, Jens M. Melenk, and Dirk Praetorius. Quasi-optimal convergence rate for an adaptive boundary element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 51(2):1327–1348, 2013.
- [FPW11] Stefan Funken, Dirk Praetorius, and Philipp Wissgott. Efficient implementation of adaptive P1-FEM in Matlab. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 11(4):460–490, 2011.
- [FPZ16] Michael Feischl, Dirk Praetorius, and Kristoffer G. van der Zee. An abstract analysis of optimal goal-oriented adaptivity. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 54(3):1423–1448, 2016.
- [GP21] Gregor Gantner and Dirk Praetorius. Plain convergence of adaptive algorithms without exploiting reliability and efficiency. *IMA Journal of Numerical Analysis*, in print, <https://doi.org/10.1093/imanum/drab010>, 2021.
- [HP16] Michael Holst and Sara Pollock. Convergence of goal-oriented adaptive finite element methods for nonsymmetric problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 32(2):479–509, 2016.

- [Inn18] Michael Innerberger. *Zur Instanzoptimalität adaptiver 2D FEM*. Diplomarbeit, TU Wien, Institut für Analysis und Scientific Computing, 2018.
- [Kal14] Michael Kaltenbäck. *Fundament Analysis*. Heldermann Verlag, 2014.
- [KPP13] Michael Karkulik, David Pavlicek, and Dirk Praetorius. On 2D newest vertex bisection: optimality of mesh-closure and H^1 -stability of L_2 -projection. *Constructive Approximation*, 38(2):213–234, 2013.
- [MNS01] Pedro Morin, Ricardo H. Nochetto, and Kunibert G. Siebert. Data oscillation and convergence of adaptive FEM+. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(2):466–488, 2001.
- [MS09] Mario S. Mommer and Rob Stevenson. A goal-oriented adaptive finite element method with convergence rates. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(2):861–886, 2009.
- [MSV08] Pedro Morin, Kunibert G. Siebert, and Andreas Veerer. A basic convergence result for conforming adaptive finite elements. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18(5):707–737, 2008.
- [Sie11] Kunibert G. Siebert. A convergence proof for adaptive finite elements without lower bound. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 31(3):947–970, 2011.