

Optimalität adaptiver FEM

David Pavlicek

12.10.2010

Inhaltsverzeichnis

1	Newest Vertex Bisection	2
1.1	Einleitung	2
1.2	Verfeinerungen von Triangulierungen	5
1.2.1	Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0	5
1.2.2	Uniforme Verfeinerung	5
1.3	Formregularität	7
1.4	Verfeinerungen, die die Konformität erhalten	9
1.4.1	Algorithmus COMPLETE	10
1.4.2	Algorithmus REFINE	10
1.4.3	Eigenschaften von REFINE	11
2	Optimalität von Newest Vertex Bisection	14
2.1	Satz von Stevenson für NVB	14
2.2	Überdeckung von Triangulierungen	19
2.3	Optimalität	21
2.3.1	Modellproblem	21
2.3.2	Adaptive Netzverfeinerung	21
2.3.3	Konvergenz	23
2.3.4	Optimalitätsbeweis	23
3	Newest Vertex Bisection mit inneren Knoten	28
3.1	Algorithmus REFINE BISEC	28
3.2	Algorithmus REFINE BISEC5	30
3.3	Optimalität von NVB mit inneren Knoten	33
3.3.1	Satz von Stevenson für REFINE BISEC5	33
3.3.2	Überdeckung von Triangulierungen für REFINE BISEC5	34
3.4	Optimalität	34
4	Modifiziertes RGB-Verfahren	35
4.1	Algorithmus REFINE MRGB	35
4.2	Vergleich mit Bisektionsverfahren	37
4.3	Aussagen für modifiziertes RGB-Verfahren	42
4.4	RGB-Verfahren	45

1 Newest Vertex Bisection

1.1 Einleitung

Definition 1.1 (Dreieck). Es seien $x_T, y_T, z_T \in \mathbb{R}^2$. Dann nennen wir

$$T = \text{conv}\{x_T, y_T, z_T\}$$

ein *Dreieck*, falls $\text{meas}(T) > 0$. Insbesondere ist ein Dreieck eine abgeschlossene Menge des \mathbb{R}^2 und damit kompakt. Weiters bezeichnen wir mit

$$\mathcal{K}_T := \{x_T, y_T, z_T\}$$

die Menge der *Knoten* eines Dreiecks T und mit

$$\mathcal{E}_T := \{\text{conv}\{x_T, y_T\}, \text{conv}\{y_T, z_T\}, \text{conv}\{z_T, x_T\}\}$$

die Menge der *Kanten* von T .

A priori hat jedes Dreieck T eine (vorerst beliebige) ausgezeichnete Kante $E_T \in \mathcal{E}_T$. Diese wird *Referenzkante* genannt. Es gibt also zu einem gegebenen Dreieck $T = \text{conv}\{x_T, y_T, z_T\}$ drei verschiedene Möglichkeiten die Referenzkante zu wählen. Siehe Abbildung 1.1.

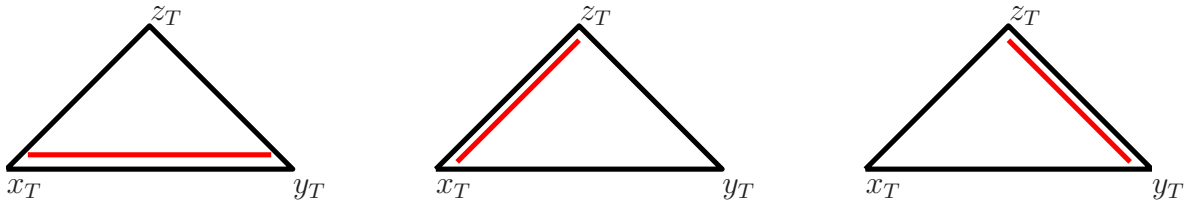


Abbildung 1.1: Die 3 Möglichkeiten bei einem Dreieck $T = \text{conv}\{x_T, y_T, z_T\}$ die Referenzkante E_T zu wählen. Diese ist rot markiert.

Wird ein Dreieck T bisektiert, so bedeutet das, dass es durch Einfügen einer neuen Kante, die von der Mitte der Referenzkante E_T zum gegenüberliegenden Knoten geht, in 2 Dreiecke geteilt wird. In der Mitte der Referenzkante entsteht also ein neuer Knoten und die diesem Knoten gegenüberliegenden Kanten sind die Referenzkanten der 2 neu entstandenen Dreiecke. Wegen des Entstehens eines neuen Knotens („Newest Vertex“) wird dieses Bisektionsverfahren auch „Newest Vertex Bisection“ genannt. Siehe Abbildung 1.2.

Die beiden durch Bisektion des Dreiecks T neu entstandenen Dreiecke werden auch „Söhne“ von T genannt. Umgekehrt wird T auch als „Vater“ der neu entstandenen Dreiecke bezeichnet. Ein Dreieck, das durch k -malige Bisektion von T entsteht, wird analog *Level- k -Sohn* genannt. Es werden auch die Bezeichnungen „Nachkommen“ bzw. „Vorfahren“ verwendet. Man erkennt, dass die Referenzkante eines Dreiecks bis zur Erzeugung eines Level-3-Sohnes nur einmal geteilt wird. Außerdem wird eine Kante nie in zwei aufeinanderfolgenden Schritten des Verfahrens geteilt. Siehe Abbildung 1.3.

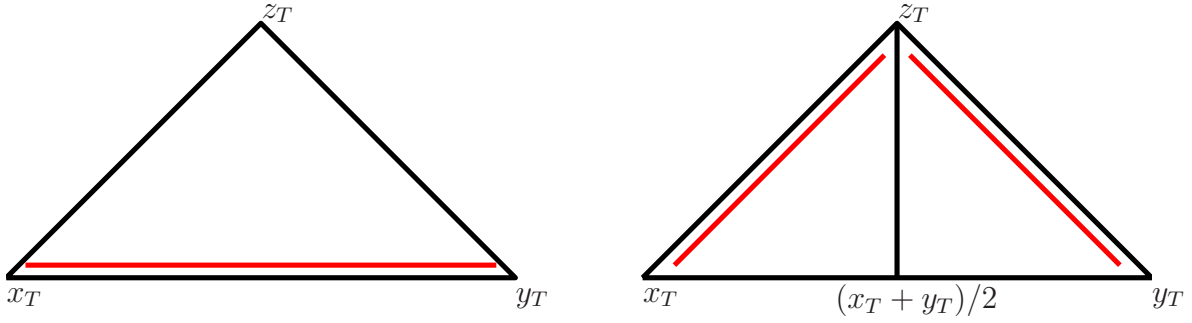


Abbildung 1.2: Das Dreieck $T = \text{conv}\{x_T, y_T, z_T\}$ mit der Referenzkante $E_T = \text{conv}\{x_T, y_T\}$ wird mittels Newst Vertex Bisection geteilt. Die Referenzkanten der so entstandenen neuen Dreiecke liegen gegenüber des neu entstandenen Knotens.

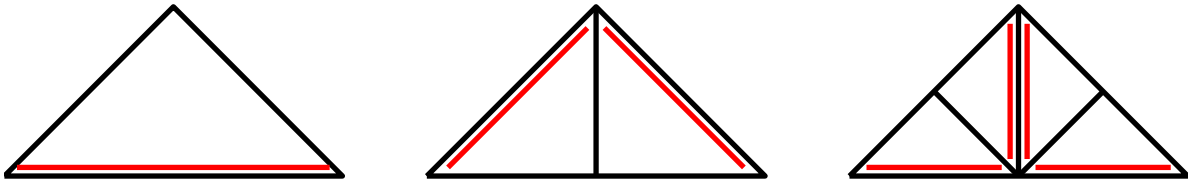


Abbildung 1.3: Ein Dreieck sowie dessen Level-1- und Level-2-Söhne.

Definition 1.2. Sei T ein Dreieck. Dann ist σ_T wie folgt definiert:

$$\sigma_T := \frac{\text{diam}(T)^2}{\text{meas}(T)} \geq 1$$

Weiters wird mit R_T der *Umkreisradius* und mit r_T der *Innkreisradius* des Dreiecks T bezeichnet.

Lemma 1.3. *Der kleinste Winkel α_T eines Dreiecks T ist durch monoton steigende Funktionen von $\frac{1}{\sigma_T}$ nach unten beschränkt und nach oben beschränkt. Es gilt*

$$\arcsin\left(\frac{2}{3\sigma_T}\right) \leq \alpha_T \leq \arctan\left(\frac{1}{4\sigma_T}\right). \quad (1.1)$$

Die Größe des kleinsten Winkels α_T hängt damit nur von σ_T ab und umgekehrt.

Beweis. Für ein Dreieck T gilt allgemein:

$$R_T \leq \text{diam}(T) \quad (1.2)$$

sowie

$$\text{meas}(T) = \frac{r_T(a+b+c)}{2} \leq \frac{3r_T \text{diam}(T)}{2} \leq \frac{3r_T R_T}{2}, \quad (1.3)$$

wobei a, b, c die Kantenlängen des Dreiecks sind. Sei α_T der kleinste Winkel von T . Da die Höhe auf die länste Kante des Dreiecks h_T gilt: $h_T \geq \tan(\alpha_T)\text{diam}(T)/2$ ist, folgt

$$\text{meas}(T) \geq \frac{\tan(\alpha_T) \text{diam}(T)^2}{4}. \quad (1.4)$$

Sei nun a die Länge der dem Winkel α_T gegenüberliegenden Kante. Dann gilt

$$\frac{a}{\sin(\alpha_T)} = 2R.$$

Somit folgt

$$\sin(\alpha_T) = \frac{a}{2R} \geq \frac{2r}{2R}$$

aus (1.3) und (1.2) folgt

$$\begin{aligned} &\geq \frac{2 \text{meas}(T)}{3 R^2} \geq \frac{2 \text{meas}(T)}{3 \text{diam}(T)^2} \\ &= \frac{2}{3\sigma_T}. \end{aligned}$$

Da der kleinste Winkel α_T eines Dreiecks sicher kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, und da $\frac{2}{3\sigma_T} \leq 1$ ist, folgt mit der Bijektivität und strengen Monotonität von $\sin : [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow [0, 1]$

$$\alpha_T \geq \arcsin\left(\frac{2}{3\sigma_T}\right)$$

und somit die erste Ungleichung in (1.1).

Aus (1.4) folgt

$$\frac{1}{\sigma_T} = \frac{\text{meas}(T)}{\text{diam}(T)^2} \geq \frac{\tan(\alpha_T)}{4}.$$

Da der kleinste Winkel α_T eines Dreiecks sicher kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, und da $\tan : [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow [0, \infty)$ bijektiv und streng monoton steigend ist, folgt

$$\arctan\left(\frac{1}{4\sigma_T}\right) \geq \alpha_T,$$

und somit die zweite Ungleichung in (1.1)

□

1.2 Verfeinerungen von Triangulierungen

Definition 1.4 (Triangulierung). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Eine endliche Menge \mathcal{T} von Dreiecken in \mathbb{R}^2 , deren Inneres paarweise disjunkt ist, heißt eine *Triangulierung* von Ω wenn gilt:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T.$$

Eine Triangulierung \mathcal{T} wird *konform* genannt, wenn der Schnitt $T \cap T'$ von jeweils zwei verschiedenen Dreiecken $T, T' \in \mathcal{T}$ entweder leer, eine gemeinsame Kante oder ein gemeinsamer Eckpunkt der beiden Dreiecke ist. Anderenfalls entstehen Knoten, die gleichzeitig innere Punkte von Kanten sind. Man spricht in diesem Fall von sogenannten „hängenden Knoten“.

Zwei Dreiecke $T, T' \in \mathcal{T}$ mit $T \neq T'$ heißen *Nachbarn* wenn sie eine gemeinsame Kante haben:

$$\mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{T'} \neq \emptyset.$$

1.2.1 Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0

Definition 1.5 (zulässige Anfangstriangulierung). Eine Triangulierung \mathcal{T}_0 wird *zulässige Anfangstriangulierung* genannt, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (A)₁ \mathcal{T}_0 ist konform
- (A)₂ Für zwei beliebige benachbarte Dreiecke $T, T' \in \mathcal{T}_0$ gilt, dass die Kante $E = T \cap T'$ entweder Referenzkante beider Dreiecke ist ($E_T = E = E_{T'}$), oder keines der beiden Dreiecke ($E_T \neq E \neq E_{T'}$). Siehe Abbildung 1.4.

Bemerkung 1.6. In [BDD04, Lemma 2.1] wird gezeigt, dass für eine beliebige konforme Triangulierung eine Zuordnung der Referenzkanten der Dreiecke existiert, sodass die Bedingung (A)₂ erfüllt ist.

1.2.2 Uniforme Verfeinerung

Ausgehend von einem Dreieck T mit Referenzkante E_T , das unendlich oft durch Anwendung von Newest Vertex Bisektion geteilt wird, entsteht wie folgt ein Binärbaum: Jeder Knoten des Binärbaumes symbolisiert ein Dreieck. Es hat folglich jeder Knoten 2 Nachfolger (Söhne des Dreiecks) sowie (jeder Knoten bis auf den Knoten, der das Ausgangsdreieck T symbolisiert) einen Vorgänger (Vater).

Definition 1.7 (Master-Wald). Sei \mathcal{T}_0 eine (zulässige) Anfangstriangulierung. Die Vereinigung aller Binärbäume, die durch die Elemente $T \in \mathcal{T}_0$ entstehen, wird der aus \mathcal{T}_0 entstandene *Master-Wald* genannt und mit $\mathbb{F}_{\mathcal{T}_0}$ bezeichnet.

Definition 1.8 (Wald). Sei \mathcal{T}_0 eine (zulässige) Anfangstriangulierung. Eine endliche Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathbb{F}_{\mathcal{T}_0}$ wird *Wald* genannt, falls $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{F}$ gilt, und folgende 2 Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Alle Knoten von $\mathcal{F} \setminus \mathcal{T}_0$ haben einen Vorgänger.

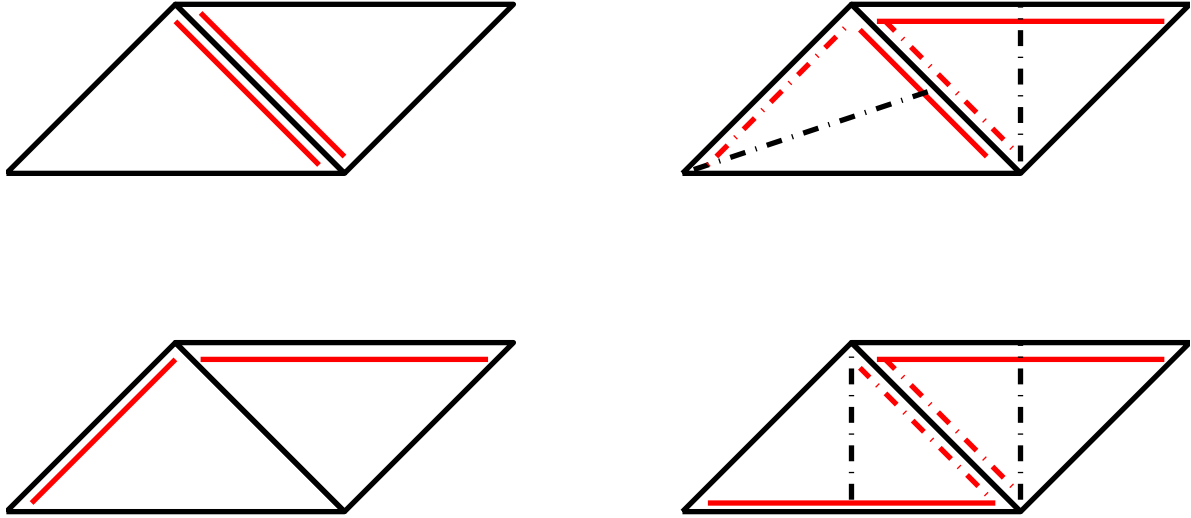


Abbildung 1.4: Die 4 Möglichkeiten für die Lage der Referenzkanten bei 2 benachbarten Dreiecken. Alle Dreiecke bis auf das Paar rechts oben erfüllen die Bedingung $(A)_2$.

(ii) Alle Knoten von \mathcal{F} haben entweder 2 Nachfolger oder keinen.

Bemerkung 1.9. Jeder Knoten von $\mathcal{F} \subset \mathbb{F}_{\mathcal{T}_0}$ ist eindeutig mit einem Knoten, der ein Element aus der Anfangstriangulierung symbolisiert, verbunden. \mathcal{F} kann Knoten mit 2 Nachfolgern, sogenannte *innere Knoten*, haben. Auf jeden Fall hat aber \mathcal{F} Knoten ohne Nachfolger. Diese werden *Blätter von \mathcal{F}* genannt. Mit der Definition

$$\mathcal{T}(\mathcal{F}) := \text{Menge der Blätter von } \mathcal{F}$$

erkennt man, dass es zu jedem Wald \mathcal{F} eine eindeutige Triangulierung $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ gibt. Umgekehrt gibt es zu jeder Triangulierung \mathcal{T} einen eindeutigen Wald \mathcal{F} , sodass $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ ist. Dieser Wald wird mit $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ bezeichnet.

Definition 1.10 (Verfeinerung). Wenn zwei Wälder $\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}} \subset \mathbb{F}_{\mathcal{T}_0}$ mit $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}$ gegeben sind, dann nennen wir $\tilde{\mathcal{T}} := \mathcal{T}(\tilde{\mathcal{F}})$ eine Verfeinerung von $\mathcal{T} := \mathcal{T}(\mathcal{F})$ und schreiben $\mathcal{T} \leq \tilde{\mathcal{T}}$.

Definition 1.11 (Level-Funktion). Sei \mathcal{T}_0 eine (zulässige) Anfangstriangulierung und $\mathcal{F} \subset \mathbb{F}_{\mathcal{T}_0}$ ein Wald. Dann ist durch

$$\ell : \begin{cases} \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N} \\ T \mapsto \text{Anzahl der Vorgänger von } T \text{ in } \mathcal{F} \end{cases}$$

die *Level-Funktion* definiert.

Definition 1.12 (Uniforme Verfeinerung). Sei \mathcal{T}_0 eine (zulässige) Anfangstriangulierung. Eine Triangulierung $\hat{\mathcal{T}}$ wird *uniforme Verfeinerung* (mit Level k) von \mathcal{T}_0 genannt, wenn für alle Elemente $T \in \hat{\mathcal{T}}$ gilt

$$\ell(T) = k.$$

Satz 1.13. Sei \mathcal{T}_0 eine zulässige Anfangstriangulierung und sei $k \in \mathbb{N}$. Jede uniforme Verfeinerung $\widehat{\mathcal{T}}_k$ mit Level k von \mathcal{T}_0 erfüllt $(A)_1$ und $(A)_2$.

Beweis. Sei \mathcal{T}_0 eine zulässige Anfangstriangulierung. \mathcal{T}_0 erfüllt also $(A)_1$ und $(A)_2$. Wir zeigen, dass $\widehat{\mathcal{T}}_1$ ebenfalls $(A)_1$ und $(A)_2$ erfüllt. Die Aussage von Satz 1.13 folgt dann mittels Induktion.

Es seien $T, T' \in \widehat{\mathcal{T}}_1$ zwei benachbarte Dreiecke und S bzw. S' seien die Väter von T bzw. T' .

Wenn $S = S'$ gilt, also wenn T und T' durch Bisektion eines gemeinsamen Vaters entstanden sind, so ist ihr Schnitt eine gemeinsame Kante, die weder Referenzkante von T , noch von T' ist. Die Bedingungen $(A)_1$ und $(A)_2$ sind somit erfüllt.

Sei nun $S \neq S'$: Die einzige Möglichkeit, wie ein hängender Knoten und damit eine nicht konforme Triangulierung entstehen kann, ist, dass sich die Referenzkante des einen Dreiecks im Schnitt $S \cap S'$ befindet und die des Anderen nicht. (Vgl. Abbildung 1.4.) Laut der Bedingung $(A)_2$ ist das aber nicht möglich. Also ist $(A)_1$ für $\widehat{\mathcal{T}}_1$ erfüllt.

Weiters ist es nicht möglich, dass sich beispielsweise die Referenzkante E_T von T im Schnitt $T \cap T'$ und die Referenzkante $E_{T'}$ von T' nicht. Die Referenzkante $E_{S'} \in \mathcal{E}_{S'}$ des Vaters von T' wäre dann eine echte Obermenge der Kante E_T (die aber auch Element von \mathcal{E}_S ist), was zu bedeuten hätte, dass ein hängender Knoten und damit eine nicht konforme Triangulierung vorliegen hätte müssen. Da dies laut $(A)_1$ nicht sein kann, ist die Bedingung $(A)_2$ für $\widehat{\mathcal{T}}_1$ ebenfalls erfüllt. \square

Bemerkung 1.14. Eine Verfeinerung einer (zulässigen) Anfangstriangulierung, die nicht unbedingt uniform sein muss, wird auch adaptive Verfeinerung genannt. Eine adaptive Verfeinerung kann konform sein, muss diese Eigenschaft aber nicht haben. Ziel von Abschnitt 1.4 ist die Erstellung adaptiver Verfeinerungen, die dennoch konform sind.

1.3 Formregularität

Definition 1.15 (Formregularität). Sei \mathcal{T} eine Triangulierung. Dann wird durch

$$\sigma(\mathcal{T}) := \max_{T \in \mathcal{T}} \sigma_T$$

die *Formregularitätskonstante* der Triangulierung definiert. Eine Folge von Triangulierungen $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *formregulär*, wenn

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(\mathcal{T}_n) < \infty.$$

Satz 1.16. Sei T ein Dreieck und sei \widehat{T} ein Level- k -Sohn von T , $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Der kleinste Winkel $\alpha_{\widehat{T}}$ von \widehat{T} hängt nur vom kleinsten Winkel α_T von T ab.

Beweis. Sei $k \in \{1, 2\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{meas}(\widehat{T}) &\geq \frac{1}{4} \text{meas}(T) \\ \text{diam}(\widehat{T}) &\leq \text{diam}(T) \end{aligned}$$

Mit der Definition 1.2 folgt daraus

$$\sigma_{\hat{T}} = \frac{\text{diam}(\hat{T})^2}{\text{meas}(\hat{T})} \leq 4 \frac{\text{diam}(T)^2}{\text{meas}(T)} = 4\sigma_T.$$

Laut Lemma 1.3 ist $\alpha_{\hat{T}}$ nur von $\sigma_{\hat{T}}$ abhängig und σ_T nur von α_T . Somit gilt die Aussage für $k \in \{1, 2\}$.

Sei $k \geq 3$. Zu jedem Level- k -Sohn \hat{T} von T gibt es ein kongruentes Dreieck, das ein Level- $(k-2)$ -Sohn von T ist. (Vgl. Abbildung 1.5 für $k = 3$.) Somit hängt der kleinste Winkel $\alpha_{\hat{T}}$ von \hat{T} nur vom kleinsten Winkel eines Level-1- oder Level-2-Sohnes von T und damit nur vom kleinsten Winkel von T ab. Es gilt sogar: Es können durch wiederholte Anwendung von Newest Vertex Bisection auf ein Dreieck höchstens 4 verschiedene Ähnlichkeitsklassen von Dreiecken entstehen. Siehe Abbildung 1.5. \square

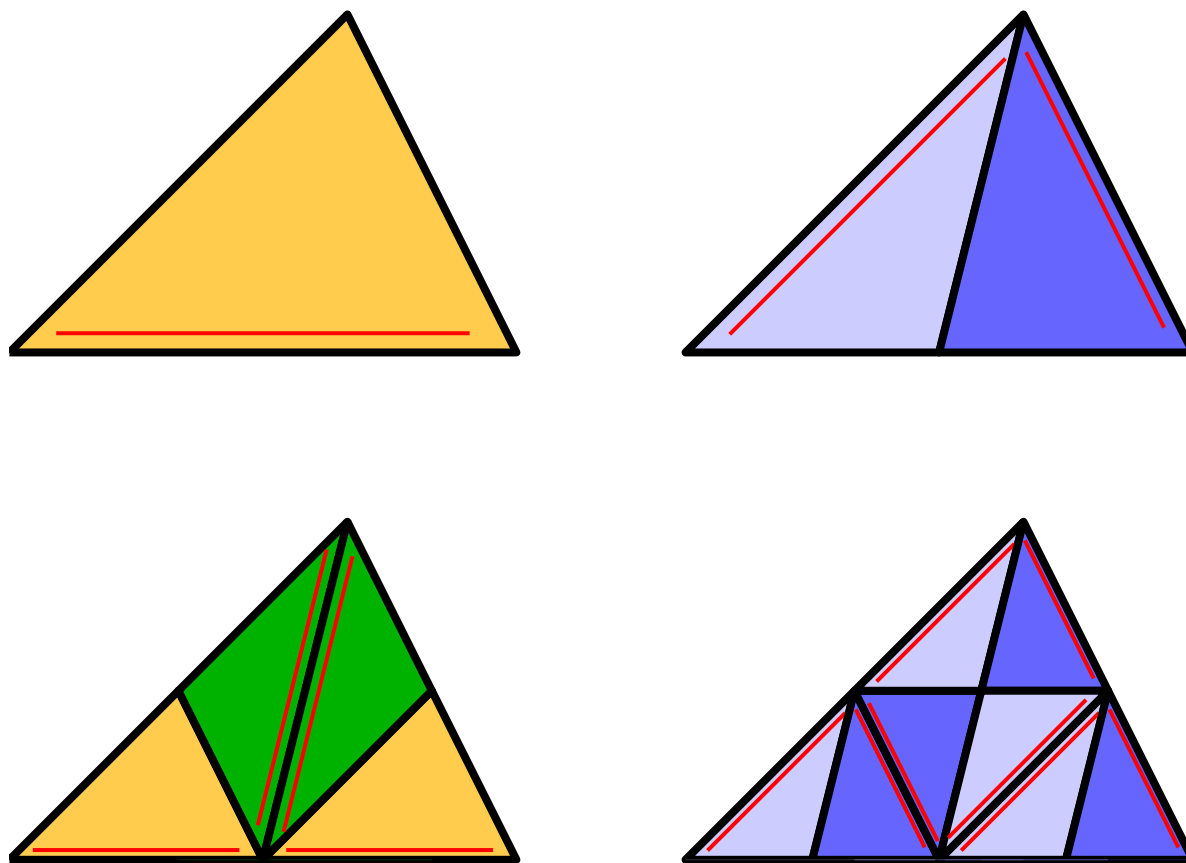


Abbildung 1.5: Durch Newest Vertex Bisection entstehen 4 verschiedene Ähnlichkeitsklassen von Dreiecken.

Korollar 1.17 (Formregularität von NVB). *Sei \mathcal{T}_0 eine (zulässige) Anfangstriangulierung. Sei $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Triangulierungen, wobei \mathcal{T}_n eine Verfeinerung von \mathcal{T}_{n-1} ist, die dadurch entsteht, dass man eine Menge $\mathcal{M}_{n-1} \subset \mathcal{T}_{n-1}$ von Elementen mittels*

Newest Vertex Bisection verfeinert. Dann gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(\mathcal{T}_n) < \infty.$$

Newest Vertex Bisection erzeugt also eine formreguläre Folge von Triangulierungen.

Beweis.

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(\mathcal{T}_n) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{T \in \mathcal{T}_n} \sigma_T \\ &= \max_{T_0 \in \mathcal{T}_0} \sup_{T \in K_{T_0}} \sigma_T \end{aligned}$$

Wobei K_{T_0} definiert ist als die Menge der Dreiecke, die durch wiederholte Bisektion von T_0 entstehen. Laut Satz 1.16 gibt es zu jedem T_0 nur 4 Ähnlichkeitsklassen von Dreiecken in K_{T_0} . Somit gilt $\sup_{T \in K_{T_0}} \sigma_T < \infty$. Da es nur endlich viele Dreiecke in \mathcal{T}_0 gibt, ist

$$\max_{T_0 \in \mathcal{T}_0} \sup_{T \in K_{T_0}} \sigma_T < \infty.$$

Somit folgt die Behauptung. □

1.4 Verfeinerungen, die die Konformität erhalten

Definition 1.18 (kompatibel teilbar). Im Folgenden werden benachbarte Dreiecke T, T' *kompatibel teilbar* genannt, wenn

$$E_T = E_{T'}$$

gilt. Mit anderen Worten, wenn die gemeinsame Kante $T \cap T'$ Referenzkante beider Dreiecke ist. Für eine Triangulierung \mathcal{T} und $T \in \mathcal{T}$ setzen wir:

$$N(T, \mathcal{T}) := \text{Nachbar } T' \in \mathcal{T} \text{ von } T \in \mathcal{T}, \text{ der die Referenzkante von } T \text{ enthält}$$

Lemma 1.19. *Sei \mathcal{T}_0 eine zulässige Anfangstriangulierung. Für jede konforme Triangulierung \mathcal{T} , die eine Verfeinerung von \mathcal{T}_0 ist, $T \in \mathcal{T}$, und $T' := N(T, \mathcal{T})$ gilt genau einer der folgenden Fälle:*

(L)₁ $\ell(T') = \ell(T)$ und T, T' sind kompatibel teilbar

(L)₂ $\ell(T') = \ell(T) - 1$ und T ist kompatibel teilbar mit einem Sohn von T'

Beweis. Sei $p \geq 2$. Angenommen, es gibt Nachbarn T_1, T_2 mit $\ell(T_1) = \ell(T_2) - p$. Dann existiert laut Satz 1.13 ein Level- p -Sohn von T_1 , der ein Nachbar von T_2 ist, und deshalb eine gemeinsame Kante mit T_2 und damit auch mit T_1 haben muss. Dieser Sohn kann aber maximal einen gemeinsamen Eckpunkt mit T_1 haben, was zu einem Widerspruch führt.

Angenommen, es gilt $\ell(T') = \ell(T) + 1$. Wiederum folgt laut Satz 1.13, dass einer der beiden Söhne von T ein Nachbar von T' sein muss. Da aber die Referenzkante von T in $T \cap T'$ enthalten sein muss und an dieser geteilt wird, kann das nicht der Fall sein.

Den vorausgegangen Widersprüche zufolge, muss also entweder $\ell(T') = \ell(T) - 1$ oder

$\ell(T') = \ell(T)$ gelten.

Sei nun $\ell(T') = \ell(T)$: Wenn T, T' nicht kompatibel teilbar wären, dann wäre die uniforme Verfeinerung mit Dreiecken von Level $\ell(T) + 1$ nicht konform.

Wenn $\ell(T') = \ell(T) - 1$ gilt, dann ist laut Satz 1.13 einer der Söhne von T' ein Nachbar von T . Da die uniforme Verfeinerung mit Dreiecken von Level $\ell(T) + 1$ konform ist, schließen wir daraus, dass dieser Sohn kompatibel teilbar mit T ist. \square

Sei \mathcal{T}_j eine konforme Triangulierung, und sei $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{T}_j$ eine Teilmenge von Dreiecken, die für die Bisektion markiert wurden. Nachdem man auf die Dreiecke aus \mathcal{M}_j das Bisektionsverfahren anwendet entsteht im Allgemeinen eine nicht-konforme Triangulierung $\widetilde{\mathcal{T}}_{j+1}$. Um Konformität herzustellen, kann man den folgenden Algorithmus anwenden:

1.4.1 Algorithmus COMPLETE

Algorithmus 1.20 (COMPLETE[$\widetilde{\mathcal{T}}_{j+1}$]).

Eingabe: Triangulierung $\widetilde{\mathcal{T}}_{j+1}$, die durch Bisektion der Elemente \mathcal{M}_j aus \mathcal{T}_j entstanden ist.

Ausgabe: Kleinste konforme Triangulierung \mathcal{T}_{j+1} , die eine Verfeinerung von $\widetilde{\mathcal{T}}_{j+1}$ ist.

```

function  $\mathcal{T}_{j+1} = \text{COMPLETE}[\widetilde{\mathcal{T}}_{j+1}]$ 
  while es existiert ein  $T \in \widetilde{\mathcal{T}}_{j+1}$  für das ein  $T' \in \widetilde{\mathcal{T}}_{j+1}$  existiert, sodass gilt:
     $T \cap T'$  enthält einen Punkt  $P$  mit  $P \in \mathcal{K}_{T'}$  und  $P \subset E \in \mathcal{E}_T$ 
  do wende Newest Vertex Bisection auf  $T$  an
  until kein solches  $T$  mehr existiert
end

```

Da eine Bisektion von T die einzige Möglichkeit ist, die in der while-Schleife beschriebenen hängenden Knoten verschwinden zu lassen, entsteht durch Anwendung von COMPLETE[$\widetilde{\mathcal{T}}_{j+1}$] die kleinste konforme Verfeinerung von $\widetilde{\mathcal{T}}_{j+1}$, wenn es eine konforme Verfeinerung gibt. Das ist aber laut Satz 1.13 der Fall.

1.4.2 Algorithmus REFINE

In Algorithmus 1.20 wird, nachdem zunächst alle Dreiecke in \mathcal{M}_j geteilt wurden, die Konformität der entstandenen Triangulierung hergestellt. Eine Alternative dazu ist, schon während man über die Elemente $T \in \mathcal{M}_j$ läuft, für jedes T die Triangulierung \mathcal{T}_j durch die kleinste konforme Verfeinerung zu ersetzen, in der T geteilt wurde. Dieser Algorithmus wird REFINE genannt. Siehe Algorithmus 1.21 bzw. Algorithmus 1.22.

Algorithmus 1.21 (REFINE[\mathcal{T}_j, T]).

Eingabe: Konforme Triangulierung \mathcal{T}_j sowie zur Bisektion markiertes Element $T \in \mathcal{T}_j$.

Ausgabe: Kleinste konforme Triangulierung \mathcal{T}_{j+1} , in der T bisektiert wurde.

```

function  $\mathcal{T}_{j+1} = \text{REFINE}[\mathcal{T}_j, T]$ 
   $K = \{T\}$ 
  if  $T$  ist kompatibel teilbar mit  $T' := N(T, \mathcal{T}_j)$ 
     $K = K \cup \{T'\}$ 
  else

```

```

    REFINE[ $\mathcal{T}_j, T'$ ]
     $K = K \cup \{ \text{Sohn von } T', \text{ der Nachbar von } T \text{ ist} \}$ 
end
do bisektiere alle Elemente aus  $K$ 
end

```

Algorithmus 1.21 arbeitet wie folgt: Wenn das Element $T' := N(T, \mathcal{T}_j)$ kompatibel teilbar mit T ist, dann wird es gleichzeitig mit dem Ausgangsdreieck T bisektiert. Wenn nicht, dann wird das Dreieck T' im rekursiven Aufruf zum Ausgangsdreieck des Algorithmus und es wird abermals unterschieden ob das Dreieck $T'' := N(T', \mathcal{T}_j)$ kompatibel teilbar ist mit T' . Wenn ja, dann werden zunächst T' und T'' bisektiert und dann erst T und der Sohn von T' , der mit T benachbart ist. Wenn dem nicht so ist, so startet der Algorithmus einen weiteren rekursiven Aufruf, diesmal mit dem Dreieck T'' als Ausgangsdreieck. Es werden so lange rekursive Aufrufe gestartet, bis ein $T^{(n)} := N(T^{(n-1)}, \mathcal{T}_j)$ kompatibel teilbar ist mit $T^{(n-1)}$. Man beachte hierbei, dass $N(T^{(n-1)}, \mathcal{T}_j)$ auch die leere Menge sein kann. In diesem Fall grenzt das Dreieck $T^{(n-1)}$ an den Rand des Gebiets $\partial\Omega$. Weiters kann laut Korollar 1.19 nicht der Fall eintreten, dass $T = T^{(n)} := N(T^{(n-1)}, \mathcal{T}_j)$ gilt und sich dadurch die rekursiven Aufrufe unendlich oft wiederholen. Die Anzahl der rekursiven Aufrufe ist also endlich und der Algorithmus bricht in jedem Fall ab.

Natürlich kann es sein, dass durch das Verfahren ein bereits zur Verfeinerung markiertes Dreieck $T \in \mathcal{M}_j$ geteilt wird. Der Aufruf der Routine für dieses T kann dann entfallen. Siehe Algorithmus 1.22. In anderen Worten, die Anzahl der Durchläufe der for-Schleife im Algorithmus REFINE[$\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j$] ist sicher kleiner gleich der Anzahl der Elemente in \mathcal{M}_j . Da nur Dreiecke, die entweder markiert sind, oder deren Bisektion notwendig für die Herstellung von Konformität ist, geteilt werden, erhält man ebenfalls die kleinste konforme Triangulierung, in der alle $T \in \mathcal{M}_j$ bisektiert wurden. Diese Aussage wird ausführlicher in Satz 1.23 und Bemerkung 1.24 behandelt.

Algorithmus 1.22 (REFINE[$\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j$]).

Eingabe: Konforme Triangulierung \mathcal{T}_j sowie zur Bisektion markierte Elemente $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{T}_j$.
Ausgabe: Kleinste konforme Triangulierung \mathcal{T}_{j+1} , in der alle Elemente aus \mathcal{M}_j bisektiert wurden.

```

function  $\mathcal{T}_{j+1} = \text{REFINE}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$ 
    forall  $T \in \mathcal{M}_j$ , die in dieser Schleife noch nicht bisektiert wurden
        do  $\mathcal{T}_j = \text{REFINE}[\mathcal{T}_j, T]$ 
    end
     $\mathcal{T}_{j+1} = \mathcal{T}_j$ 
end

```

1.4.3 Eigenschaften von REFINE

Satz 1.23. Sei $T' \in \mathcal{T}_{j+1}$ nun ein Dreieck, dass bei durch Aufruf von $\mathcal{T}_{j+1} = \text{REFINE}[\mathcal{T}_j, T]$ erstellt wurde. Dann gilt

$$\ell(T') \leq \ell(T) + 1. \quad (1.5)$$

Außerdem ist $\mathcal{T}_{j+1} = \text{REFINE}[\mathcal{T}_j, T]$ die kleinste konforme Verfeinerung von \mathcal{T}_j , in der T bisektiert wurde.

Beweis. Die Aussage erfolgt durch vollständige Induktion nach dem Level $\ell(T)$.

Sei $\ell(T) = 0$. Aus Lemma 1.19 folgt, dass es keine rekursiven Aufrufe von REFINE gibt, weil das Element $N(T, \mathcal{T}_j)$ dasselbe Level wie T hat und daher kompatibel teilbar mit T sein muss. Nach der Bisektion von T und $N(T, \mathcal{T}_j)$ haben alle dadurch entstandenen Elemente Level 1. In diesem Fall gilt also (1.5). Die Konformität bleibt erhalten, wenn man T und $N(T, \mathcal{T}_j)$ gleichzeitig bisektiert. Außerdem ist klar, dass $N(T, \mathcal{T}_j)$ bisektiert werden muss um Konformität zu erhalten und dass $\ell(T') = \ell(T) + 1$ gilt.

Sei $k \geq 0$. Wir nehmen an, dass die Aussage für alle T mit $\ell(T) = k$ gilt. Zu zeigen bleibt, dass die Aussage für ein Dreieck T mit $\ell(T) = k + 1$ gilt.

Sei nun T ein Dreieck mit $\ell(T) = k + 1$. Mögliche rekursive Aufrufe von $\text{REFINE}[\mathcal{T}_j, T]$ sind unvermeidbar. Gibt es keine rekursiven Aufrufe, so folgt (1.5) mit den gleichen Argumenten wie bei $\ell(T) = 0$. Laut Lemma 1.19 gilt bei rekursiven Aufrufen

$$\ell(N(T, \mathcal{T}_j)) = \ell(T) - 1 = k.$$

Laut Induktionsvoraussetzung erzeugt $\text{REFINE}[\mathcal{T}_j, N(T, \mathcal{T}_j)]$ die kleinste konforme Triangulierung, in der $N(T, \mathcal{T}_j)$ bisektiert wurde, und es gilt für alle Elemente T'' , die erstellt wurden, dass $\ell(T'') \leq \ell(N(T, \mathcal{T}_j)) + 1 = k + 1$. Da nun nur noch der Sohn von $N(T, \mathcal{T}_j)$, der an T grenzt, sowie natürlich T selbst bisektiert werden müssen, um Konformität zu erhalten, erzeugt $\text{REFINE}[\mathcal{T}_j, T]$ die kleinste konforme Triangulierung, in der T bisektiert wurde. Für alle Elemente T' , die erstellt wurden, gilt $\ell(T') \leq k + 2 = \ell(T) + 1$. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt. \square

Bemerkung 1.24. Aus Satz 1.23 folgt, dass durch $\text{REFINE}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$ die kleinste konforme Triangulierung, in der alle $T \in \mathcal{M}_j$ bisektiert wurden, entsteht.

Definition 1.25. Sei \mathcal{T}_0 eine (zulässige) Anfangstriangulierung. Dann sind mit

$$d := \min_{T_0 \in \mathcal{T}_0} \{\text{meas}(T_0)\}$$

sowie

$$D := \max_{T_0 \in \mathcal{T}_0} \{\text{diam}(T_0)\}$$

zwei Konstanten definiert, die nur von \mathcal{T}_0 abhängen.

Bemerkung 1.26. Weil sich der Flächeninhalt eines Dreiecks bei einer Bisektion halbiert und weil sich der Durchmesser während 2 Bisektionsschritten halbiert (siehe Abbildung 1.5), gelten die Abschätzungen:

$$\text{meas}(T) \geq 2^{-\ell(T)} d \tag{1.6}$$

$$\text{diam}(T) \leq 2^{\frac{-\ell(T)+2}{2}} D \tag{1.7}$$

Satz 1.27. *Mit der Konstante D aus Definition 1.25 gilt für alle T' , die durch den Aufruf von $\text{REFINE}[\mathcal{T}_j, T]$ erzeugt wurden:*

$$\text{dist}(T, T') := \inf_{x' \in T', x \in T} |x' - x| \leq D2^{1/2} \sum_{k=\ell(T')}^{\ell(T)} 2^{-k/2} \leq \frac{D2}{\sqrt{2}-1} 2^{-\ell(T')}. \quad (1.8)$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach dem Level $\ell(T)$.

Sei $\ell(T) = 0$. Aus Lemma 1.19 folgt, dass es keine rekursiven Aufrufe von $\text{REFINE}[\mathcal{T}_j, T]$ gibt, weil das Element $N(T, \mathcal{T}_j)$ dasselbe Level wie T hat und daher kompatibel teilbar mit T sein muss. Jedes neu erstellte Dreieck T' ist entweder Sohn von T oder von $N(T, \mathcal{T}_j)$. Somit gilt: $\text{dist}(T', T) = 0$. Außerdem ist die Summe über k leer, da $\ell(T') = \ell(T) + 1$. Die Ungleichung (1.8) gilt also für $\ell(T) = 0$.

Wir nehmen an, (1.8) gilt für $\ell(T) = k \geq 0$. Wir wollen zeigen, dass (1.8) auch für $\ell(T) = k + 1$ gilt.

Betrachten wir ein T mit $\ell(T) = k + 1$. Wenn T' direkt durch einen Aufruf von $\text{REFINE}[\mathcal{T}_j, T]$ (also ohne weitere rekursive Aufrufe von REFINE) erzeugt wird, dann folgt (1.8) mit den gleichen Argumenten wie im Fall $\ell(T) = 0$. Wenn T' durch einen rekursiven Aufruf $\text{REFINE}[\mathcal{T}_j, T'']$ erzeugt wird (wobei $T'' := N(T, \mathcal{T}_j)$ nicht kompatibel teilbar mit T ist), gilt laut Lemma 1.19, dass $\ell(T'') = \ell(T) - 1 = k$. Dann folgt aus $\text{dist}(T, T'') = 0$ und der Dreiecksungleichung

$$\text{dist}(T', T) \leq \text{dist}(T', T'') + \text{diam}(T'').$$

Mit der Induktionsvoraussetzung und (1.7) folgt

$$\leq D2^{1/2} \sum_{j=\ell(T')}^{\ell(T'')} 2^{-j/2} + D2^{-\ell(T'')/2}.$$

Da $\ell(T'') = \ell(T) - 1$ ist, gilt weiter

$$\begin{aligned} &= D2^{1/2} \sum_{j=\ell(T')}^{\ell(T)-1} 2^{-j/2} + D2^{1/2} 2^{-\ell(T)/2} \\ &= D2^{1/2} \sum_{j=\ell(T')}^{\ell(T)} 2^{-j/2} \\ &\leq \frac{D2^{1/2}}{1 - 2^{-1/2}} 2^{-\ell(T')} \\ &= \frac{D2}{\sqrt{2}-1} 2^{-\ell(T')}. \end{aligned}$$

Der Induktionsschritt ist somit gezeigt, und die Ungleichung (1.8) gilt. \square

2 Optimalität von Newest Vertex Bisection

2.1 Satz von Stevenson für NVB

Satz 2.1. Sei \mathcal{T}_0 eine zulässige Anfangstriangulierung. Sei $(\mathcal{T}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine durch

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_j &\subset \mathcal{T}_j \text{ beliebig} \\ \mathcal{T}_{j+1} &:= \text{REFINE}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j] \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

induktiv definierte Folge von Triangulierungen. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von den Konstanten d und D aus Definition 1.25 und damit nur von der Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0 abhängt, sodass

$$\#\mathcal{T}_\ell \setminus (\mathcal{T}_\ell \cap \mathcal{T}_0) \leq C \sum_{j=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_j \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Beweis. Sei $\ell \in \mathbb{N}$. Definiere zur besseren Lesbarkeit des Beweises

$$\mathcal{T} := \mathcal{T}_\ell$$

sowie

$$\mathcal{M} := \bigcup_{j \leq \ell-1} \mathcal{M}_j.$$

Die Aussage (2.1) lautet dann

$$\#\mathcal{T} \setminus (\mathcal{T} \cap \mathcal{T}_0) \leq C \#\mathcal{M}. \quad (2.2)$$

Seien

$$a : \mathbb{N}_0 \cup \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

sowie

$$b : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$$

zwei Folgen, die die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

$$\sum_{p=-1}^{\infty} a(p) < \infty, \quad (2.3)$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} b(p) 2^{-p/2} < \infty, \quad (2.4)$$

$$\inf_{p \geq 0} b(p) a(p) > 0. \quad (2.5)$$

Diese Bedingungen werden zum Beispiel von den Folgen

$$a(p) = (p+2)^{-2}$$

und

$$b(p) = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ p^3 & p \geq 1 \end{cases}$$

erfüllt. Definiere:

$$A := D \left(\frac{2}{\sqrt{2}-1} + 1 \right) \sum_{p=0}^{\infty} b(p) 2^{-p/2} \quad (2.6)$$

Mit (2.4) folgt $A < \infty$. Wir definieren $\lambda : \mathcal{T} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\lambda(T', T) = \begin{cases} a(\ell(T) - \ell(T')) & \text{falls } \text{dist}(T', T) < A2^{-\ell(T')/2} \text{ und } \ell(T') \leq \ell(T) + 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Der Beweis verläuft in 2 Schritten. Im ersten Schritt werden wird gezeigt, dass

$$\sum_{T \in \mathcal{M}} \sum_{T' \in \mathcal{T}} \lambda(T', T) \lesssim \#\mathcal{M}, \quad (2.8)$$

wobei \lesssim heißt, dass es eine Konstante C gibt, die nur von d und D abhängt, sodass die Ungleichung gilt. Im zweiten Schritt wird gezeigt, dass für alle $T' \in \mathcal{T} \setminus (\mathcal{T} \cap \mathcal{T}_0)$ gilt

$$\sum_{T \in \mathcal{M}} \lambda(T', T) \gtrsim 1. \quad (2.9)$$

Aus (2.8) und (2.9) folgt die Behauptung (2.1):

$$\#(\mathcal{T} \setminus (\mathcal{T} \cap \mathcal{T}_0)) \lesssim \sum_{T' \in \mathcal{T} \setminus (\mathcal{T} \cap \mathcal{T}_0)} \sum_{T \in \mathcal{M}} \lambda(T', T) \leq \sum_{T \in \mathcal{M}} \sum_{T' \in \mathcal{T}} \lambda(T', T) \lesssim \#\mathcal{M}.$$

1. Schritt:

Zunächst zeigen wir (2.8): Es existiert eine Konstante C , die nur von d und D abhängt, sodass mit der Schreibweise

$$K_{\ell'}^T := \{T' \in \mathcal{T} \mid \text{dist}(T', T) < A2^{-\ell(T')/2} \text{ und } \ell(T') = \ell'\}$$

gilt

$$\#K_{\ell'}^T \leq C \quad \text{für alle } \ell' \in \mathbb{N} \text{ und für alle } T \in \mathcal{M} \text{ mit } \ell' \leq \ell(T) + 1. \quad (2.10)$$

Sei $\ell' \in \mathbb{N}_0$ fest und sei $T \in \mathcal{M}$ mit $\ell' \leq \ell(T) + 1$ beliebig. Bei festem Level ℓ' kann die Fläche eines Dreiecke T' mit $\ell(T') = \ell'$ durch (1.6) mit

$$\text{meas}(T') \geq 2^{-\ell'} d \quad (2.11)$$

nach unten, sowie der Durchmesser eines Dreiecks T mit $\ell' \leq \ell(T) + 1$ durch (1.7) durch

$$\text{diam}(T) \leq 2^{\frac{-\ell(T)+2}{2}} D \leq 2^{\frac{-\ell(T')-1+2}{2}} D = \sqrt{8} D 2^{-\ell'/2} \quad (2.12)$$

nach oben abgeschätzt werden. Wie man erkennt, geschieht dies jeweils mit Konstanten, die nur von d , D und ℓ' abhängen. Mit (2.12) gilt nun für die Anzahl der Elemente der Menge $K_{\ell'}^T$

$$\begin{aligned} \#K_{\ell'}^T &= \#\{T' \in \mathcal{T} \mid \text{dist}(T', T) < A2^{-\ell(T')/2} \text{ und } \ell(T') = \ell'\} \\ &\leq \#\{T' \in \mathcal{T} \mid T' \in K_{(A+(\sqrt{8}+2)D)2^{-\ell'/2}}(x_T) \text{ und } \ell(T') = \ell'\}, \end{aligned}$$

wobei mit $K_{(A+(\sqrt{8}+2)D)2^{-\ell'/2}}(x_T)$ ein Kreis mit Radius $(A + (\sqrt{8} + 2)D)2^{-\ell'/2}$ um einen beliebigen, aber festen Punkt $x_T \in T$ bezeichnet ist. Laut (2.11) gilt für die Dreiecke T' aus dieser Menge $\text{meas}(T') \geq d2^{-\ell'}$. In einem Kreis mit Fläche $(A + (\sqrt{8} + 2)D)^2 2^{-\ell'} \pi$ können sich aber höchstens

$$\frac{(A + (\sqrt{8} + 2)D)^2 2^{-\ell'} \pi}{d2^{-\ell'}} = (A + (\sqrt{8} + 2)D)^2 / d$$

Elemente T' mit $\text{meas}(T') \geq d2^{-\ell'}$ befinden. Daraus folgt, dass

$$\#K_{\ell'}^T \leq (A + (\sqrt{8} + 2)D)^2 / d =: C.$$

Wie man erkennt, ist C eine Konstante, die nur von d und D (nicht aber von ℓ' , und damit auch nicht von T) abhängt. Mit der Definition von λ in (2.7) folgt, dass für alle fest gewählten $T \in \mathcal{M}$ gilt

$$\sum_{T' \in \mathcal{T}} \lambda(T', T) = \sum_{\ell'=0}^{\ell(T)+1} \sum_{T' \in K_{\ell'}^T} a(\ell(T) - \ell(T')).$$

Mit (2.10) und (2.3) folgt

$$\begin{aligned} &\lesssim \sum_{\ell'=0}^{\ell(T)+1} a(\ell(T) - \ell') \\ &= \sum_{p=-1}^{\ell(T)} a(p) \lesssim \sum_{p=-1}^{\infty} a(p) < \infty, \end{aligned}$$

und deshalb

$$\sum_{T \in \mathcal{M}} \sum_{T' \in \mathcal{T}} \lambda(T', T) \lesssim \#\mathcal{M}.$$

Damit ist (2.8) gezeigt.

2.Schritt:

Wir zeigen nun (2.9). Es sei $T_0 \in \mathcal{T} \setminus (\mathcal{T} \cap \mathcal{T}_0)$. Es sei weiters eine endliche Folge $(T_j)_{j \geq 0}$ so erstellt, dass wenn T_j gegeben ist und $T_j \notin \mathcal{T}_0$ ist, $T_{j+1} \in \mathcal{M}$ so gewählt wird, dass

T_j durch einen Aufruf von $\text{REFINE}[\tilde{\mathcal{T}}, T_{j+1}]$ erstellt wird. ($\tilde{\mathcal{T}}$ ist hierbei eine unbekannte Triangulierung.) Laut Satz 1.23 gilt

$$\ell(T_j) \leq \ell(T_{j+1}) + 1.$$

Das ist äquivalent zu

$$\ell(T_{j+1}) \geq \ell(T_j) - 1.$$

Da es laut Definition der Folge ein $n \in \mathbb{N}$ geben muss, sodass T_n in \mathcal{T}_0 liegt und deswegen $\ell(T_n) = 0$ gilt, existiert auch ein $t \in \mathbb{N}$, sodass $\ell(T_t) = \ell(T_0) - 1$. Sei s die kleinste natürliche Zahl, sodass $\ell(T_s) = \ell(T_0) - 1$ gilt. Für alle $1 \leq j \leq s$ gilt nun nach induktiver Anwendung der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \text{dist}(T_0, T_j) &\leq \text{dist}(T_0, T_1) + \text{diam}(T_1) + \text{dist}(T_1, T_j) \\ &\leq \sum_{k=1}^j \text{dist}(T_{k-1}, T_k) + \sum_{k=1}^{j-1} \text{diam}(T_k). \end{aligned}$$

Mit Satz 1.27 und (1.7) gilt

$$\begin{aligned} &< \sum_{k=1}^j \frac{D2}{\sqrt{2}-1} 2^{-\ell(T_{k-1})/2} + \sum_{k=0}^{j-1} D2^{-\ell(T_k)/2} \\ &< D \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}-1} \right) \sum_{k=0}^{j-1} 2^{-\ell(T_k)/2}. \end{aligned}$$

Sei $m(p, j)$ die Anzahl der T_k mit $k \leq j-1$ sodass $\ell(T_k) = \ell(T_0) + p$ ist. Dann folgt

$$= D \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}-1} \right) \sum_{p=0}^{\infty} m(p, j) 2^{-(\ell(T_0)+p)/2}.$$

Man bemerke hierbei, dass der Level $\ell(T_k)$ von T_k nicht kleiner als der Level $\ell(T_0)$ von T_0 sein kann, da dann $k = s \geq j$ gelten müsste. Wir unterscheiden nun 2 Fälle.

1. Fall:

Sei $m(p, s) \leq b(p)$ für alle p , dann folgt nach Definition von $A > 0$ in (2.6)

$$\begin{aligned} \text{dist}(T_0, T_s) &= D \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}-1} \right) \sum_{p=0}^{\infty} m(p, j) 2^{-(\ell(T_0)+p)/2} \\ &\leq D \left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}-1} \right) \sum_{p=0}^{\infty} b(p) 2^{-p/2} 2^{-\ell(T_0)/2} = A 2^{-(\ell(T_0)/2)}. \end{aligned}$$

Nach Definition von $\lambda(T_0, T_s)$ in (2.7) folgt deshalb

$$\lambda(T_0, T_s) = a(\ell(T_s) - \ell(T_0)) = a(-1) = 1.$$

Da $T_s \in \mathcal{M}$ ist, folgt für ein beliebiges $T' \in \mathcal{T} \setminus (\mathcal{T} \cap \mathcal{T}_0)$

$$\sum_{T \in \mathcal{M}} \lambda(T', T) \geq \lambda(T_0, T_s) = 1.$$

Damit ist in diesem Fall (2.9) gezeigt.

2.Fall:

Im anderen Fall existiert zumindest ein p , sodass $m(p, s) > b(p)$. Zu jedem dieser p existiert ein kleinstes $j = j(p)$ mit $m(p, j(p)) > b(p)$. Bezeichne mit \tilde{p} das p , sodass das kleinste $j(p)$ durch $j(\tilde{p})$ entsteht. Sei $\tilde{j} := j(\tilde{p})$. Nach der Wahl von \tilde{p}, \tilde{j} gilt für alle p

$$m(p, \tilde{j} - 1) \leq b(p) < m(p, \tilde{j}). \quad (2.13)$$

Laut Definition ist $m(p, j)$ die Anzahl der T_k mit $k \leq j - 1$ sodass $\ell(T_k) = \ell(T_0) + p$ ist. Die natürliche Zahl $m(p, j - 1)$ kann also höchstens um 1 geringer sein als die Zahl $m(p, j)$. Es gilt

$$\forall p > 0, \forall j > 0: \quad m(p, j) - 1 \leq m(p, j - 1) \leq m(p, j). \quad (2.14)$$

Aus (2.13) und (2.14) folgt

$$m(\tilde{p}, \tilde{j}) - 1 \leq m(\tilde{p}, \tilde{j} - 1) \leq b(\tilde{p}) < m(\tilde{p}, \tilde{j}). \quad (2.15)$$

Nun folgt mit (2.15) sowie der Tatsache, dass $b(p), m(p, j) \in \mathbb{N}$

$$m(\tilde{p}, \tilde{j} - 1) = b(\tilde{p}).$$

Für alle $k \leq \tilde{j} - 1$ gilt, dass $m(p, k) \leq b(p)$ für alle p , dann gilt analog zum ersten Fall nach Definition von $A > 0$ in (2.6)

$$\text{dist}(T_0, T_k) < A2^{-(\ell(T_0)/2)}.$$

Nach Definition von $\lambda(T_0, T_k)$ in (2.7) folgt deshalb

$$\lambda(T_0, T_k) = a(\ell(T_k) - \ell(T_0)). \quad (2.16)$$

Es gilt nun

$$\sum_{T \in \mathcal{M}} \lambda(T_0, T) \geq \sum_{k < \tilde{j}-1 : \ell(T_k) = \ell(T_0) + \tilde{p}} \lambda(T_0, T_k).$$

Aus der Definition von $m(\tilde{p}, \tilde{j} - 1)$ und (2.16) folgt

$$= m(\tilde{p}, \tilde{j} - 1)a(\tilde{p}).$$

Daraus folgt mit der Voraussetzung an die Folgen $a(p)$ und $b(p)$ aus (2.5)

$$\begin{aligned} &= b(\tilde{p})a(\tilde{p}) \\ &\geq \inf_{p \geq 0} b(p)a(p) > 0. \end{aligned}$$

Damit ist auch in diesem Fall (2.9) gezeigt. \square

Korollar 2.2. *Mit den Voraussetzungen von Satz 2.1 gilt*

$$\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 \leq C \sum_{j=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_j \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \quad (2.17)$$

Beweis. Wende die einfache Abschätzung $\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 \leq \#\mathcal{T}_\ell \setminus (\mathcal{T}_\ell \cap \mathcal{T}_0)$ auf (2.1) an. \square

2.2 Überdeckung von Triangulierungen

Definition 2.3 (Überdeckung von Triangulierungen). Sei \mathcal{T}_0 eine (zulässige) Anfangstriangulierung und sei $\mathbb{F}_{\mathcal{T}_0}$ der aus \mathcal{T}_0 entstandene Master-Wald. Seien $\mathcal{F}, \tilde{\mathcal{F}} \subset \mathbb{F}_{\mathcal{T}_0}$ zwei Wälder und $\mathcal{T} := \mathcal{T}(\mathcal{F})$ bzw. $\tilde{\mathcal{T}} := \mathcal{T}(\tilde{\mathcal{F}})$ die dazugehörigen Triangulierungen. (Siehe Definition 1.7, Definition 1.8 und Bemerkung 1.9.)

Sei $\mathcal{F} \cup \tilde{\mathcal{F}}$ die Vereinigung aller Knoten von \mathcal{F} und $\tilde{\mathcal{F}}$. $\mathcal{F} \cup \tilde{\mathcal{F}}$ erfüllt klarerweise die 2 Bedingungen aus Definition 1.8 und ist somit auch ein Wald. Wir nennen die eindeutige zu $\mathcal{F} \cup \tilde{\mathcal{F}}$ gehörende Triangulierung $\mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \tilde{\mathcal{F}})$ *Überdeckung von \mathcal{T} und $\tilde{\mathcal{T}}$* und schreiben

$$\mathcal{T} \oplus \tilde{\mathcal{T}} := \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \tilde{\mathcal{F}}).$$

Satz 2.4 (Überdeckung von Triangulierungen). Sei \mathcal{T}_0 eine (zulässige) Anfangstriangulierung und seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei konforme Triangulierungen, die durch wiederholte Anwendung von REFINE aus \mathcal{T}_0 entstanden sind. Dann ist die Überdeckung der beiden Triangulierungen $\mathcal{T} := \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ wieder eine konforme Triangulierung. Insbesondere gilt

$$\#\mathcal{T} \leq \#\mathcal{T}_1 + \#\mathcal{T}_2 - \#\mathcal{T}_0. \quad (2.18)$$

Beweis. Wir nehmen an, dass \mathcal{T} einen hängenden Knoten z hat. Das heißt, es existieren zwei Dreiecke $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$, sodass $z \in \mathcal{K}_{T_1}$ aber z innerer Punkt einer Kante $E \in \mathcal{E}_{T_2}$ ist. O.B.d.A. sei $T_1 \in \mathcal{T}_1$. Da \mathcal{T}_1 konform ist, existiert ein $T' \in \mathcal{T}_1$ mit $T' \subset T_2$, sodass $z \in \mathcal{K}_{T'}$ gilt. Daher kann T_2 kein Blatt von $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ sein, also ist $T_2 \notin \mathcal{T}$, was einen Widerspruch zur Annahme bedeutet. \mathcal{T} hat demnach keine hängenden Knoten und ist somit eine konforme Triangulierung. Damit ist die erste Aussage von Satz 2.4 gezeigt.

Sei $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ der eindeutige Wald zur Triangulierung \mathcal{T} . Außerdem sei $\mathcal{F}(\mathcal{T}_i)$ der eindeutige Wald zur Triangulierung \mathcal{T}_i für $i = 1, 2$.

Für $T \in \mathcal{T}_0$ bezeichnen wir mit $\mathcal{F}(T) \subset \mathcal{F}(\mathcal{T})$ den Binärbaum zum Ausgangselement T . Analog dazu bezeichnen wir für $i = 1, 2$ mit $\mathcal{F}_i(T) \subset \mathcal{F}(\mathcal{T})$ den Binärbaum zum Ausgangselement T , für den $\mathcal{F}_i(T) \subset \mathcal{F}(\mathcal{T}_i)$ gilt.

Sei $\mathcal{T}(T) := \mathcal{T}(\mathcal{F}(T))$ die eindeutige, zum Binärbaum $\mathcal{F}(T)$ gehörende Triangulierung und wiederum analog dazu für $i = 1, 2$ $\mathcal{T}_i(T) := \mathcal{T}(\mathcal{F}_i(T))$.

Da

$$\mathcal{T}(T) \subset \mathcal{T}_1(T) \cup \mathcal{T}_2(T)$$

gilt, erhalten wir

$$\#\mathcal{T}(T) \leq \#\mathcal{T}_1(T) + \#\mathcal{T}_2(T).$$

Wir wollen nun zeigen, dass sogar

$$\#\mathcal{T}(T) \leq \#\mathcal{T}_1(T) + \#\mathcal{T}_2(T) - 1 \quad (2.19)$$

gilt. Dazu unterscheiden wir zwischen 2 Fällen.

1. Fall:

$\mathcal{T}_1(T) \cap \mathcal{T}_2(T) \neq \emptyset$. Dann existiert ein $T' \in \mathcal{T}_1(T) \cap \mathcal{T}_2(T)$, und damit ist $T' \in \mathcal{T}(T)$. Da aber T' in $\#(\mathcal{T}_1(T) \cup \mathcal{T}_2(T))$ nur einmal gezählt wird, gilt

$$\begin{aligned} \#\mathcal{T}(T) &\leq \#(\mathcal{T}_1(T) \cup \mathcal{T}_2(T)) \\ &\leq \#\mathcal{T}_1(T) + \#\mathcal{T}_2(T) - 1, \end{aligned}$$

und somit die Abschätzung (2.19).

(2.20)

2. Fall:

$\mathcal{T}_1(T) \cap \mathcal{T}_2(T) = \emptyset$. Dann existiert ein $T' \in \mathcal{T}_1(T)$ oder ein $T' \in \mathcal{T}_2(T)$, sodass $T' \notin \mathcal{T}(T)$. Anderenfalls würde $T' \in \mathcal{T}_1(T) \cap \mathcal{T}_2(T)$ gelten. Daraus folgt aber

$$\#\mathcal{T}(T) \leq \#\mathcal{T}_1(T) + \#\mathcal{T}_2(T) - 1.$$

Somit gilt auch in diesem Fall die Abschätzung (2.19).

(2.21)

Da $\mathcal{T}_i = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_0} \mathcal{T}_i(T)$, folgt die Aussage (2.18) durch Aufsummieren über $T \in \mathcal{T}_0$. Satz 2.4 ist somit gezeigt. \square

Korollar 2.5. *Mit den Voraussetzungen von Satz 2.4 gilt*

$$\#(\mathcal{T}_1 \setminus \mathcal{T}) \leq \#\mathcal{T}_2 - \#\mathcal{T}_0. \quad (2.22)$$

Beweis. Da die Anzahl der Elemente $\#(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_1)$, die während der Verfeinerung der Triangulierung \mathcal{T}_1 zur Überdeckung \mathcal{T} zumindest einmal bisektiert wurden, mindestens doppelt so groß ist, wie die Anzahl der Elemente $\#(\mathcal{T}_1 \setminus \mathcal{T})$, die während dieser Verfeinerungsschritte verfeinert werden müssen, gilt

$$2\#(\mathcal{T}_1 \setminus \mathcal{T}) \leq \#(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_1).$$

Es folgt daher mit

$$\begin{aligned} \#(\mathcal{T}_1 \setminus \mathcal{T}) + \#\mathcal{T}_1 &= 2\#(\mathcal{T}_1 \setminus \mathcal{T}) + \#(\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T},) \\ &\leq \#(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_1) + \#(\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T},) \\ &= \#\mathcal{T}. \end{aligned}$$

Mit (2.18) gilt daher

$$\begin{aligned} \#(\mathcal{T}_1 \setminus \mathcal{T}) &\leq \#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_1 \\ &\leq \#\mathcal{T}_2 - \#\mathcal{T}_0. \end{aligned}$$

Somit ist Korollar 2.5 gezeigt. \square

2.3 Optimalität

2.3.1 Modellproblem

Wir betrachten die Poisson-Gleichung mit Dirichlet-Randdaten

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega, \\ u &= 0 & \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Die schwache Formulierung von (2.23) lautet:

Finde $u \in H_0^1(\Omega)$ sodass

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.24}$$

2.3.2 Adaptive Netzverfeinerung

Definition 2.6 (a posteriori Fehlerschätzer). Sei $f \in L^2(\Omega)$ und sei $u \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung von (2.24). Sei $U \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ die P1-FEM Approximation von u . Ist die numerisch berechenbare Größe $\eta(\mathcal{T}, f, U)$ eine Schranke für $\langle u - U, H_0^1(\Omega) \rangle$, so wird sie *a posteriori Fehlerschätzer* genannt. Ein Fehlerschätzer heißt *zuverlässig*, wenn

$$\|u - U\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{\text{rel}} \eta,$$

und *effizient*, wenn

$$C_{\text{eff}} \eta \leq \|u - U\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Bemerkung 2.7. Sei für Kanten $E = T_E^- \cap T_E^+$, die im Inneren von Ω liegen, durch $\llbracket \partial U / \partial n \rrbracket := \frac{\partial U}{\partial n_E^+} + \frac{\partial U}{\partial n_E^-}$ der Sprung der Normalenableitungen definiert. Dann ist durch

$$\begin{aligned} \eta(\mathcal{T}, U) &:= \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \eta(T, U)^2 \right)^{1/2}, \\ \eta(T, U) &:= (\text{diam}(T)^2 \|f\|_{L^2(T)} + \text{diam}(T) \|\llbracket \partial U / \partial n \rrbracket\|_{L^2(\partial T \cap \Omega)})^{1/2}, \end{aligned}$$

ein zuverlässiger und (bis auf Oszillation) effizienter a posteriori Fehlerschätzer $\eta = \eta(\mathcal{T}, U)$ gegeben, wobei mit $\eta(T, U)$ elementweise der lokale Fehler $\|\nabla(u - U)\|_{L^2(T)}$ für alle $T \in \mathcal{T}$ geschätzt wird. Es gilt also

$$\|u - U\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{\text{rel}} \eta(\mathcal{T}, U), \tag{2.25}$$

$$C_{\text{eff}} \eta(\mathcal{T}, U) \leq \|u - U\|_{H_0^1(\Omega)} + \text{osc}_{\mathcal{T}}, \tag{2.26}$$

wobei

$$\text{osc}_{\mathcal{T}} := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \text{diam}(T)^2 \|f - \text{meas}(T)^{-1} \int_T f\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2}.$$

Dieser Fehlerschätzer wird auch Residuen-basierter Fehlerschätzer genannt. Die Zuverlässigkeitskonstante C_{rel} sowie die Effizienzkonstante C_{eff} des Fehlerschätzers $\eta(T, U)$ sind unter anderem von der Formregularitätskonstante $\sigma(\mathcal{T})$ abhängig.

Mit der Energienorm $\|u\| := \|\nabla(u)\|_{L^2(\Omega)}$ ist eine zu $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ äquivalente Norm auf $H_0^1(\Omega)$ definiert. Sei $\eta(\mathcal{T}, U)$ der Residuen-basierte Fehlerschätzer aus Bemerkung 2.7. Dann gilt die Zuverlässigkeitsabschätzung

$$\|\nabla(u - U)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\text{rel}}\eta(\mathcal{T}, U).$$

Sei \mathcal{T}_* eine Verfeinerung von \mathcal{T} . Dann gilt $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}) \subset \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_*)$. Seien $U \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ und $U_* \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_*)$ die dazugehörigen Galerkin-Lösungen. Mit der Galerkin-Orthogonalität folgt

$$\begin{aligned} \|\nabla(U_* - U)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\nabla(u - U_*)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(U_* - U)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|\nabla(u - U)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_{\text{rel}}\eta(\mathcal{T}, U). \end{aligned}$$

Diese Abschätzung kann aber dahingehend verschärft werden, dass die Zuverlässigkeit auch für den lokalen Fehlerschätzer $\eta(\mathcal{R}, U) := (\sum_{T \in \mathcal{R}} \eta(T, U)^2)^{1/2}$, der nur den Fehler für die Menge $\mathcal{R} := \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_*$ schätzt, gilt. Also nur für die Elemente aus \mathcal{T} , die verfeinert wurden um zu \mathcal{T}_* zu gelangen.

Lemma 2.8 (diskrete lokale Zuverlässigkeit). *Sei \mathcal{T} eine konforme Triangulierung und sei $\mathcal{T}_* := \text{REFINE}[\mathcal{T}]$ eine Verfeinerung von \mathcal{T} . Sei $\mathcal{R} := \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_*$. Seien $U \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ und $U_* \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_*)$ die dazugehörigen Galerkin-Lösungen. Dann gilt für den Residuen-basierten Fehlerschätzer $\eta(\mathcal{R}, U)$*

$$\|\nabla(U_* - U)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\text{rel}}\eta(\mathcal{R}, U). \quad (2.27)$$

Sei \mathcal{T}_0 eine zulässige Anfangstriangulierung. Es wird nun eine Folge \mathcal{T}_ℓ von adaptiv verfeinerten Triangulierungen erstellt, indem nur die Elemente T zur Verfeinerung markiert werden, bei denen $\eta(T, U)$ vergleichsweise groß ist. Der Schätzer $\eta(T, U)$ ist also ein Indikator, ob ein Element verfeinert werden soll, oder nicht. Ein solches Verfahren ist in Algorithmus 2.9 detailliert beschrieben. Es sei dazu $U_\ell \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell)$ die Galerkin Lösung von (2.24) sowie $\theta \in (0, 1)$ ein Parameter.

Algorithmus 2.9 (adaptive Netzverfeinerung).

Eingabe: Zulässige Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0 , Parameter $\theta \in (0, 1)$, Toleranz $\varepsilon > 0$.

Ausgabe: Endliche Folgen von Triangulierungen \mathcal{T}_ℓ , Galerkin-Lösungen $U_\ell \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell)$ sowie Fehlerschätzern $\eta_\ell(\mathcal{T}_\ell, U_\ell)$.

function ADAPTIVE NETZVERFEINERUNG

$\ell := 0$

while $\eta(\mathcal{T}_\ell, U_\ell) > \varepsilon$

 berechne Galerkin Lösung U_ℓ

 berechne $\eta(T, U_\ell)$ sowie $\eta(\mathcal{T}_\ell, U_\ell) := (\sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \eta(T, U_\ell)^2)^{1/2}$.

 wähle minimale Menge $\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{T}_\ell$ markierter Elemente, sodass

$\theta\eta(\mathcal{T}_\ell, U_\ell)^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \eta(T, U_\ell)^2$. (DÖRFLER MARKING)

$\mathcal{T}_{\ell+1} := \text{REFINE BISEC}[\mathcal{T}_\ell, \mathcal{M}_\ell]$

$\ell = \ell + 1$

end

end

2.3.3 Konvergenz

Für folgende „kombinierte Fehlergröße“, die aus dem Fehler und dem Fehlerschätzer besteht, ist eine Kontraktionseigenschaft gezeigt worden.

Satz 2.10 (Cascón, Kreuzer, Nocketto, Siebert). *Seien U_ℓ, \mathcal{T}_ℓ und $\eta_\ell := \eta(\mathcal{T}_\ell, U_\ell)$ die durch Algorithmus 2.9 erstellten, unendlichen Folgen. Dann existieren zwei Konstanten $\gamma > 0$ und $q \in (0, 1)$, sodass*

$$\left(\|\nabla(u - U_{\ell+1})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma\eta_{\ell+1}^2\right)^{1/2} \leq q\left(\|\nabla(u - U_\ell)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma\eta_\ell^2\right)^{1/2} \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}.$$

Im Speziellen gilt die Konvergenz $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|\nabla(u - U_\ell)\|_{L^2(\Omega)} = 0 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \eta_\ell$.

2.3.4 Optimalitätsbeweis

Es wird nun die Optimalität der Konvergenz $\|\nabla(u - U_{\ell+1})\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(N_\ell^{-\alpha})$ bei adaptiver Verfeinerung durch Algorithmus 2.9 gezeigt. N_ℓ steht hierbei für die Anzahl der Elemente der Triangulierung \mathcal{T}_ℓ .

Definition 2.11. Sei eine zulässige Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0 gegeben. Wie im Beweis zu Satz 2.1 bezeichnen wir mit $\mathcal{T} := \mathcal{T}_\ell$ eine konforme Triangulierung, falls es eine Folge $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_\ell$ von Triangulierungen gibt, sowie dazugehörige Mengen markierter Elemente $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{T}_j$, sodass $\mathcal{T}_{j+1} = \text{REFINE}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$ für alle $j = 0, \dots, \ell - 1$. Wir schreiben in diesem Fall auch $\mathcal{T} = \text{REFINE}(\mathcal{T}_0)$.

Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{T} := \{\mathcal{T} \mid \mathcal{T} = \text{REFINE}(\mathcal{T}_0)\}$$

die Menge aller Triangulierungen, die aus der gegebenen Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0 entstehen können. Weiters sei

$$\mathbb{T}_N := \{\mathcal{T} \in \mathbb{T} \mid \#\mathcal{T} - \#\mathcal{T}_0 \leq N\}$$

die Menge aller Triangulierungen, die aus \mathcal{T}_0 entstanden sind, und höchstens N Elemente mehr haben als \mathcal{T}_0 .

Definition 2.12 (Approximationsklasse). Mit den Bezeichnungen aus Definition 2.11 definieren wir die *Approximationsklasse*

$$\mathbb{A}_\alpha := \{(u, f) \mid \sup_{N>0} (N^\alpha \sigma(N, u, f)) < \infty\},$$

wobei

$$\sigma(N, u, f) := \inf_{\mathcal{T}_N \in \mathbb{T}_N} \inf_{U \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_N)} \left(\|\nabla(u - U)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2 \right)^{1/2}.$$

Befinden sich die exakte Lösung und die Daten (u, f) in der Approximationsklasse \mathbb{A}_α , so kann im Allgemeinen bei geeigneter Wahl der Räume $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell)$ Konvergenz $\|\nabla(u - U_\ell)\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(N_\ell^{-\alpha})$ erreicht werden. Optimalität bei adaptiver Verfeinerung nach Algorithmus 2.9 bedeutet, dass diese Konvergenzrate des Fehlers auch durch die von Algorithmus 2.9 erstellten Räume $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell)$ erreicht werden kann.

Satz 2.13. Sei $\Delta_\ell := (\|\nabla(u - U_\ell)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma\eta_\ell^2)^{1/2}$ die kombinierte Fehlergröße aus Satz 2.10. Sei mit den Bezeichnungen aus Definition 2.11 \mathcal{T}_ℓ die ℓ -te Triangulierung und $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{T}_j$, $j = 0, \dots, \ell - 1$ die Menge der zur Verfeinerung markierten Elemente. Weiters wird angenommen

- $\Delta_{\ell+1} \leq \Delta_\ell$ für ein $q \in (0, 1)$,
- $\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 \leq C_1 \sum_{j=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_j$,
- $\#\mathcal{M}_j \leq C_2 \Delta_j^{-1/\alpha}$.

Dann gilt $\Delta_\ell \leq C(\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0)^{-\alpha}$, wobei die Konstante C von C_1, C_2, q und α abhängt.

Beweis. Aus der ersten Annahme folgt $\Delta_\ell \leq q^{\ell-j} \Delta_j$, und damit auch $\Delta_j^{-1} \leq q^{\ell-j} \Delta_\ell^{-1}$. Somit gilt mit den übrigen beiden Annahmen

$$\begin{aligned} \#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 &\lesssim \sum_{j=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_j \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{\ell-1} \Delta_j^{-1/\alpha} \\ &\lesssim \Delta_\ell^{-1/\alpha} \sum_{j=0}^{\ell-1} q^{(\ell-j)/\alpha}. \end{aligned}$$

Für die geometrische Reihe gilt $\sum_{j=0}^{\ell-1} q^{(\ell-j)/\alpha} = \sum_{k=1}^{\ell} (q^{1/\alpha})^k \leq \frac{q^{1/\alpha}}{1-q^{1/\alpha}}$, womit folgt

$$\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 \lesssim \Delta_\ell^{-1/\alpha}.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.14. Die erste Annahme, also die Kontraktionseigenschaft $\Delta_{\ell+1} \leq \Delta_\ell$, gilt laut Satz 2.10. Die zweite Annahme $\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 \leq C_1 \sum_{j=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_j$ wurde in Abschnitt 2.1 gezeigt. Im Folgenden wird gezeigt, dass die dritte Annahme, $\#\mathcal{M}_j \leq C_2 \Delta_j^{-1/\alpha}$, mit Hilfe der Resultate aus Abschnitt 2.2 gezeigt werden kann.

Lemma 2.15 (Verwendung der Approximationsklasse). Sei $(u, f) \in \mathbb{A}_\alpha$ für ein $\alpha > 0$. Sei $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \sigma(1, u, f)$. Dann gibt es eine Triangulierung \mathcal{T}_ε und eine diskrete Funktion $U_\varepsilon \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\varepsilon)$, sodass

$$\#\mathcal{T}_\varepsilon - \#\mathcal{T}_0 \leq 2(\sup_{N>0} (N^\alpha \sigma(N, u, f)))^{1/\alpha} \varepsilon^{-1/\alpha} \quad (2.28)$$

sowie

$$(\|\nabla(u - U_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_\varepsilon})^{1/2} \leq \varepsilon. \quad (2.29)$$

Beweis. Es gilt $\sigma(N, u, f) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ ist monoton fallend. Wähle das kleinste $N \in \mathbb{N}$, sodass $\sigma(N, u, f) < \varepsilon$. Wegen $\varepsilon < \sigma(1, u, f)$ wissen wir, dass $N \geq 2$, und deshalb $\frac{N}{N-1} \leq 2$. Aus der Wahl von N folgt $\varepsilon \leq \sigma(N-1, u, f)$ und damit

$$\begin{aligned} N^\alpha \varepsilon &= \left(\frac{N}{N-1}\right)^\alpha (N-1)^\alpha \varepsilon \\ &\leq \left(\frac{N}{N-1}\right)^\alpha (N-1)^\alpha \sigma(N-1, u, f) \\ &\leq 2^\alpha \left(\sup_{N>0} (N^\alpha \sigma(N, u, f))\right). \end{aligned}$$

Insgesamt gilt

$$N \leq 2 \left(\sup_{N>0} (N^\alpha \sigma(N, u, f))\right)^{1/\alpha} \varepsilon^{-1/\alpha}.$$

Wähle $\delta > 0$, sodass $\sigma(N, u, f) + \delta \leq \varepsilon$. Mit der Definition von $\sigma(N, u, f)$ in Definition 2.12 ist es möglich, aufgrund des Infimums ein $\mathcal{T}_\varepsilon \in \mathbb{T}_N$ und ein $U_\varepsilon \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\varepsilon)$ zu wählen, sodass

$$\sigma(N, u, f) \leq (\|\nabla(u - U_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_\varepsilon})^{1/2} \leq \sigma(N, u, f) + \delta \leq \varepsilon.$$

Damit ist die Abschätzung (2.29) gezeigt. Aus $\mathcal{T}_\varepsilon \in \mathbb{T}_N$ folgt $\#\mathcal{T}_\varepsilon - \#\mathcal{T}_0 \leq N$ und damit die Abschätzung (2.28). Somit ist Lemma 2.15 gezeigt. \square

Lemma 2.16 (Optimalität des Dörfler Marking). *Sei \mathcal{T} eine konforme Triangulierung und sei $\mathcal{T}_* := \text{REFINE}[\mathcal{T}]$ eine Verfeinerung von \mathcal{T} . Sei $\mathcal{R} := \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_*$. Seien $U \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ und $U_* \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_*)$ die dazugehörigen Galerkin-Lösungen. Definiere*

$$\theta_*^2 := \frac{1}{(C_{\text{rel}}^2 + 1)C_{\text{eff}}^2} > 0, \quad (2.30)$$

wobei C_{eff} die Effizienzkonstante des Residuen-basierten Schätzers $\eta(\mathcal{T}, U)$ ist, und C_{rel} die diskrete lokale Zuverlässigkeitskonstante aus Abschätzung (2.27) ist. Sei $\theta \in (0, 1)$ mit $\theta < \theta_*$ und sei $q := (1 - \theta^2/\theta_*^2)^{1/2} \in (0, 1)$. Es sei weiters

$$(\|\nabla(u - U_*)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2)^{1/2} \leq q(\|\nabla(u - U)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2)^{1/2} \quad (2.31)$$

vorausgesetzt. Dann gilt die Eigenschaft des Dörfler-Marking für die Menge \mathcal{R}

$$\theta \eta(\mathcal{T}, U) \leq \eta(\mathcal{R}, U). \quad (2.32)$$

Beweis. Mit der Effizienzabschätzung aus (2.26) sowie (2.31) gilt:

$$\begin{aligned} (1 - q^2)C_{\text{eff}}^{-2} \eta(\mathcal{T}, U)^2 &\leq (1 - q^2)(\|\nabla(u - U)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2) \\ &= (\|\nabla(u - U)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2) - q^2(\|\nabla(u - U)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2) \\ &\leq (\|\nabla(u - U)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2) - (\|\nabla(u - U_*)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2). \end{aligned}$$

Mit der Galerkin-Orthogonalität folgt

$$= \|\nabla(U_* - U)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2 - \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2.$$

Aus $\mathcal{T} = \mathcal{R} \dot{\cup} (\mathcal{T} \cap \mathcal{T}_*)$ folgt $\mathcal{T} \setminus \mathcal{R} = (\mathcal{T} \cap \mathcal{T}_*)$. Außerdem ist $\text{osc}_{\mathcal{T}}(\mathcal{T} \cap \mathcal{T}_*) \leq \text{osc}_{\mathcal{T}_*}(\mathcal{T} \cap \mathcal{T}_*) \leq \text{osc}_{\mathcal{T}_*}$. Deswegen gilt

$$\text{osc}_{\mathcal{T}}^2 - \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2 = \text{osc}_{\mathcal{T}}(\mathcal{R})^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}(\mathcal{T} \setminus \mathcal{R})^2 - \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2 \leq \text{osc}_{\mathcal{T}}(\mathcal{R})^2 \leq \eta(\mathcal{R}, U)^2.$$

Insgesamt gilt also

$$(1 - q^2)C_{\text{eff}}^{-2}\eta(\mathcal{T}, U)^2 \leq \|\nabla(U_* - U)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta(\mathcal{R}, U)^2.$$

Mit der diskreten lokalen Zuverlässigkeit aus (2.27) folgt

$$\leq (C_{\text{rel}}^2 + 1)\eta(\mathcal{R}, U)^2.$$

Insgesamt gilt deshalb

$$\begin{aligned} \theta^2\eta(\mathcal{T}, U)^2 &\leq (1 - q^2)\theta_*^2\eta(\mathcal{T}, U)^2 \\ &= (1 - q^2)\frac{1}{(C_{\text{rel}}^2 + 1)C_{\text{eff}}^2}\eta(\mathcal{T}, U)^2 \\ &\leq \eta(\mathcal{R}, U)^2. \end{aligned}$$

Damit ist die Abschätzung (2.32) gezeigt. \square

Satz 2.17 (Anzahl markierter Elemente für NVB). *Sei $(u, f) \in \mathbb{A}_\alpha$ für ein $\alpha > 0$. Für $\theta_* > 0$ aus (2.30) und $\theta \in (0, 1)$ mit $\theta < \theta_*$, sei $\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{T}_\ell$ die kleinste Menge, die die Eigenschaft des Dörfler-Markings $\theta\eta(\mathcal{T}_\ell, U_\ell) \leq \eta(\mathcal{M}_\ell, U_\ell)$ erfüllt. Dann gilt*

$$\#\mathcal{M}_\ell \lesssim (\|\nabla(u - U_\ell)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_\ell^2)^{-1/(2\alpha)} \lesssim (\|\nabla(u - U_\ell)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma\eta(\mathcal{T}_\ell, U_\ell)^2)^{-1/(2\alpha)}. \quad (2.33)$$

Beweis. Wegen der Effizienz des Fehlerschätzers $\eta_\ell := \eta(\mathcal{T}_\ell, U_\ell)$ aus (2.26) gilt

$$\eta_\ell^2 \leq C_{\text{eff}}^2(\|\nabla(u - U_\ell)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_\ell^2),$$

und deshalb

$$(\|\nabla(u - U_\ell)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma\eta_\ell^2) \leq (1 + \gamma C_{\text{eff}}^2)(\|\nabla(u - U_\ell)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_\ell^2).$$

Daraus folgt die zweite Abschätzung in (2.33). Man bemerke, dass die Konstante γ hierbei beliebig gewählt werden kann. Insbesondere gilt die Abschätzung auf für γ aus Satz 2.10. Wir verwenden nun die Aussage aus Lemma 2.15 für ein kleines $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine Triangulierung \mathcal{T}_ε und eine diskrete Funktion $U_\varepsilon \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\varepsilon)$, sodass

$$\#\mathcal{T}_\varepsilon - \#\mathcal{T}_0 \leq 2(\sup_{N>0} (N^\alpha \sigma(N, u, f)))^{1/\alpha} \varepsilon^{-1/\alpha}$$

sowie

$$(\|\nabla(u - U_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_\varepsilon})^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Sei $\mathcal{T}_* := \mathcal{T}_\ell \oplus \mathcal{T}_\varepsilon$ die größte gemeinsame Verfeinerung. Laut Korollar 2.5 gilt

$$\#\mathcal{R} := \#(\mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{T}_*) \leq \#\mathcal{T}_\varepsilon - \#\mathcal{T}_0.$$

Mit der Wahl von \mathcal{T}_ε gilt

$$\leq 2(\sup_{N>0} (N^\alpha \sigma(N, u, f)))^{1/\alpha} \varepsilon^{-1/\alpha}.$$

Wird ε proportional zum Fehler $\|\nabla(u - U_\ell)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_\ell^2)^{1/2}$ gewählt, so reicht es zu zeigen, dass $\#\mathcal{M}_\ell \leq \#\mathcal{R}$ ist, denn dann gilt die erste Abschätzung aus (2.33)

$$\begin{aligned} \#\mathcal{M}_\ell &\leq \#\mathcal{R} \\ &\lesssim \|\nabla(u - U_\ell)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_\ell^2)^{-1/(2\alpha)}. \end{aligned}$$

Hierfür verwenden wir Lemma 2.16. Es ist $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\varepsilon) \subset \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_*)$ und damit gilt laut Lemma von Cea für $U_* \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_*)$

$$(\|\nabla(u - U_*)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_*}^2)^{1/2} \leq (\|\nabla(u - U_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}_\varepsilon}^2)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Wir wählen nun $\varepsilon := q(\|\nabla(u - U_\ell)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_\ell^2)^{1/2}$ mit $q \in (0, 1)$ aus Lemma 2.16. Somit gilt

$$\leq q(\|\nabla(u - U)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{osc}_{\mathcal{T}}^2)^{1/2}.$$

Damit ist die Voraussetzung von Lemma 2.16 erfüllt und es gilt die Eigenschaft des Dörfler-Markings $\theta\eta(\mathcal{T}, U) \leq \eta(\mathcal{R}, U)$. Da \mathcal{M}_ℓ die kleinste Menge mit dieser Eigenschaft ist, gilt $\#\mathcal{M}_\ell \leq \#\mathcal{R}$. Damit ist Satz 2.17 gezeigt. \square

Wir fassen nun die bisherigen Aussagen zusammen.

Satz 2.18 (Optimalität von adaptiver FEM für NVB). *Sei \mathcal{T}_0 eine zulässige Anfangstriangulierung. Seien $C_{\text{eff}}, C_{\text{rel}}$ die Konstanten für die Effizienz und die lokale diskrete Zuverlässigkeit des Fehlerschätzers η_ℓ . Sei θ_* wie in (2.30) gewählt und sei $\theta \in (0, 1)$ mit $\theta < \theta_*$. Weiters sei $\mathcal{M}_\ell \subset \mathcal{T}_\ell$ die kleinste Menge, die die Eigenschaft des Dörfler-Markings $\theta\eta(\mathcal{T}_\ell, U_\ell) \leq \eta(\mathcal{M}_\ell, U_\ell)$ erfüllt. Dann gilt*

$$(\|\nabla(u - U_\ell)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma\eta_\ell^2)^{1/2} \lesssim (\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0)^{-\alpha}$$

für alle $\alpha > 0$ mit $(u, f) \in \mathbb{A}_\alpha$.

3 Newest Vertex Bisection mit inneren Knoten

3.1 Algorithmus REFINE BISEC

Wird in den folgenden Abschnitten von einer konformen Triangulierung \mathcal{T}_j gesprochen, so ist eine konforme Triangulierung gemeint, die durch wiederholte Bisektion beliebiger Elemente aus einer zulässigen Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0 entstanden ist. Wir betrachten den folgenden Algorithmus:

Algorithmus 3.1 (REFINE BISEC[$\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j$]).

Eingabe: Konforme Triangulierung \mathcal{T}_j sowie zur Bisektion markierte Elemente $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{T}_j$.
Ausgabe: Kleinste konforme Triangulierung \mathcal{T}_{j+1} , in der alle Elemente aus \mathcal{M}_j bisektiert wurden.

function $\mathcal{T}_{j+1} = \text{REFINE BISEC}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$

do finde die kleinste Menge $\widetilde{\mathcal{M}}_j \subset \mathcal{T}_j$ mit $\widetilde{\mathcal{M}}_j \supset \mathcal{M}_j$, sodass für jedes Element $T \in \widetilde{\mathcal{M}}_j$ gilt, dass die Referenzkante $E_T \in \mathcal{E}_j^{\mathcal{M}}$ ist.

$\mathcal{E}_j^{\mathcal{M}} := \bigcup_{T \in \widetilde{\mathcal{M}}_j} E_T$

forall $T \in \widetilde{\mathcal{M}}_j$

do verfeinere T durch Anwendung von

- (i) Newest Vertex Bisection, wenn nur die Referenzkante E_T aus $\mathcal{E}_j^{\mathcal{M}}$ ist
- (ii) Bisec(2), wenn E_T und eine weitere Kante von T aus $\mathcal{E}_j^{\mathcal{M}}$ sind
- (iii) Bisec(3), wenn alle Kanten von T aus $\mathcal{E}_j^{\mathcal{M}}$ sind

end

Wie man leicht erkennt, erzeugt Algorithmus 3.1 zu den gleichen Eingangsdaten $[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$ auch die gleiche Triangulierung \mathcal{T}_{j+1} wie Algorithmus 1.21. Der einzige Unterschied besteht darin, dass es bei REFINE BISEC keine rekursiven Aufrufe gibt, und sich somit die Reihenfolge der Bisektionsvorgänge ändert. Es wird nämlich zuerst die kleinste Menge $\widetilde{\mathcal{M}}_j \supset \mathcal{M}_j$ von Dreiecken gesucht, die, wenn sie nicht bisektiert werden würden, zu hängenden Knoten führen würden. Zudem werden alle Kanten, die Referenzkanten von Dreiecken aus $\widetilde{\mathcal{M}}_j$ sind, markiert. Dann werden die Elemente aus $\widetilde{\mathcal{M}}_j$ gleichzeitig durch eine oder mehrere Bisektionen verfeinert. Dies geschieht entweder durch NVB, Bisec(2) oder durch Bisec(3), je nachdem wieviele Kanten eines Dreiecks markiert sind.

Ist nur die Referenzkante eines Dreiecks T markiert, so wird Newest Vertex Bisection auf T angewendet. Gibt es neben der Referenzkante $E_T \in \mathcal{E}_T$ noch eine weitere markierte Kante $E \in \mathcal{E}_T$, so wird zuerst T und dann der Sohn von T , der E enthält, durch Newest Vertex Bisection bisektiert. Dieses Verfahren wird Bisec(2) genannt. Sind alle Kanten des Dreiecks markierte Kanten, so wird zuerst T bisektiert, und danach beide Söhne von T . Da hierbei 3 Bisektionen stattfinden, wird dieses Verfahren Bisec(3) genannt. Siehe Abbildung 3.1.

Eine Möglichkeit, zu einer gegebenen Menge $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{T}_j$ die in Algorithmus 3.1 beschriebene Menge $\widetilde{\mathcal{M}}_j \subset \mathcal{T}_j$ zu erstellen, ist durch Erstellung sogenannter Referenzkantenketten gegeben.

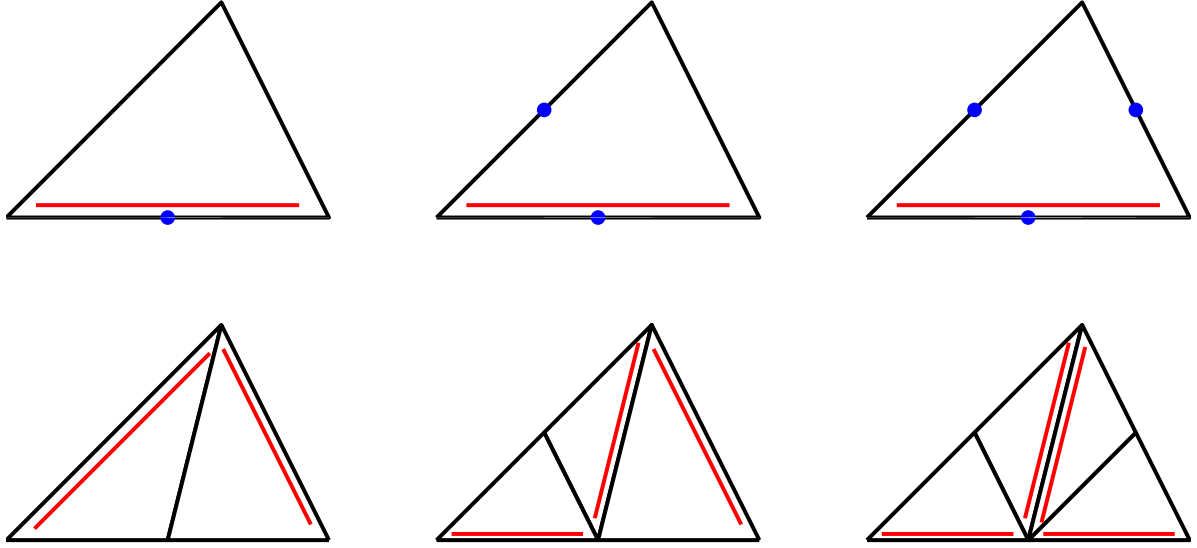


Abbildung 3.1: Die 3 Verfeinerungsmöglichkeiten für ein Dreieck von Algorithmus 3.1. Newest Vertex Bisection, Bisec(2) und Bisec(3).

Definition 3.2 (Referenzkantenkette). Für jedes $T_i^{(0)} \in \mathcal{M}_j$ sei $(T_i^{(k)})$ die eindeutig bestimmte endliche Folge, sodass

$$T_i^{(k+1)} := N(T_i^{(k)}, \mathcal{T}_j), \quad k = 0, \dots, m_{i-1}. \quad (3.1)$$

$$m_{i-1} := \min \{m \in \mathbb{N}_0 \mid N(T_i^{(m)}, \mathcal{T}_j) = \emptyset \text{ oder kompatibel teilbar mit } T_i^{(m)}\}$$

Diese Folge wird *Referenzkantenkette* zum Ausgangselement $T_i^{(0)}$ genannt.

Die Folge endet also, wenn es 2 aufeinanderfolgende Folgenglieder $T_i^{(m_{i-1})}$ und $T_i^{(m_i)}$ gibt, die kompatibel teilbar sind, oder wenn $T_i^{(m_{i-1})}$ ein Element ist, dessen Referenzkante sich auf dem Rand des Gebietes Ω befindet. (Das letzte Folgenglied wird in diesem Fall aus formalen Gründen als die leere Menge definiert.) Kompatibel teilbare Folgenglieder existieren aber, da laut Lemma 1.19 spätestens $\ell(T_i^{(\ell(T_i^{(0)}))}) = 0$ ist. Also ist $m_i \leq \ell(T_i^{(0)}) + 1$. Außerdem kann es laut Lemma 1.19 nicht sein, dass es ein $\tilde{m} \leq m_{i-1}$ gibt, sodass $T_i^{(\tilde{m})} = T_i^{(m_i)}$ ist. Es können also keine „ringförmigen“ Referenzkantenketten entstehen. Die genaue Erstellung von $\widetilde{\mathcal{M}}_j$ ist in Algorithmus 3.3 beschrieben.

Algorithmus 3.3 (RKK $[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$).

Eingabe: Konforme Triangulierung \mathcal{T}_j sowie zur Bisektion markierte Elemente $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{T}_j$.

Ausgabe: Kleinste Menge $\widetilde{\mathcal{M}}_j \supset \mathcal{M}_j$ wie in Algorithmus 3.1 beschrieben.

function $\widetilde{\mathcal{M}}_j = \text{RKK}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$

while $\mathcal{M}_j \neq \emptyset$

 wähle ein $T_i^{(0)} \in \mathcal{M}_j$

for $k = 0..m_i$

if $T_i^{(k)} \notin \widetilde{\mathcal{M}}_j$

```

        füge  $T_i^{(k)}$  zu  $\widetilde{\mathcal{M}}_j$  hinzu
    else
         $m_i = k$     % die Länge der RKK wird gekürzt
        break;
    end
end
 $\mathcal{M}_j = \mathcal{M}_j \setminus \widetilde{\mathcal{M}}_j$ 
end
end

```

Es wird also nacheinander zu jedem $T_i^{(0)} \in \mathcal{M}_j$ die Referenzkantenkette gesucht und zu $\widetilde{\mathcal{M}}_j$ hinzugefügt. Es wird allerdings durch Abbruchbedingungen (if-Schleife sowie Aktualisierung der Mengen \mathcal{M}_j) auch sichergestellt, dass jedes Element nur einmal zu $\widetilde{\mathcal{M}}_j$ hinzugefügt wird. Außerdem werden die formalen Längen m_i der Referenzkantenketten mit Ausgangselement $T_i^{(0)}$ so gekürzt, dass das Endelement einer Kette (wenn es nicht kompatibel teilbar mit seinem Vorgänger ist, also wenn m_i neu definiert wird) Element einer weiteren Kette ist. Im Folgenden werden bei Aussagen über Referenzkantenketten ($T_i^{(k)}$) immer die Länge m_i , die in Algorithmus 3.3 (teilweise neu) definiert wurden, verwendet. Weiters bezeichnet man mit *Anfangs-* bzw. *Endglied* die Elemente $T_i^{(0)}$ bzw. $T_i^{(m_i)}$ einer Referenzkantenkette ($T_i^{(k)}$). Elemente, die weder Anfangs-, noch Endglied sind, werden auch *innere Glieder* genannt.

Bemerkung 3.4 (Referenzkantenketten). Allgemein erkennt man leicht, dass wenn ein Element $T \in \mathcal{T}_j$ ein inneres Glied einer Referenzkantenkette ($T_i^{(k)}$) ist, es höchstens in einer weiteren Referenzkantenkette ($T_{\tilde{i}}^{(k)}$) enthalten sein kann, und dann als Endglied $T_{\tilde{i}}^{(m_{\tilde{i}})}$.

Ist ein Element Anfangsglied $T_i^{(0)}$ einer Referenzkantenkette ($T_i^{(k)}$), so kann es maximal in zwei weiteren Referenzkantenketten enthalten sein. In diesem Fall ist das Element ebenfalls Endglied der beiden Ketten.

Ist ein Element $T_i^{(m_i)}$ Endglied einer Referenzkantenkette ($T_i^{(k)}$), so kann es insgesamt entweder in zwei oder in drei Referenzkantenketten enthalten sein. Im ersten Fall ist es - wie schon erwähnt - ein inneres Element einer anderen Kette, im zweiten Fall ist es entweder Endelement dreier, oder Anfangselement einer und Endelement zweier Ketten.

3.2 Algorithmus REFINE BISEC5

Die durch Algorithmus 3.1 entstandenen Knoten der Triangulierung \mathcal{T}_{j+1} liegen auf den Kanten der Dreiecke der Ausgangstriangulierung \mathcal{T}_j . Es sind also keine Knoten im Inneren von Dreiecken entstanden. Will man nun sicherstellen, dass, falls ein Dreieck T drei markierte Kanten hat, ein Knoten im Inneren des Dreiecks entsteht, so ist eine kleine Modifikation an Algorithmus 1.21 vorzunehmen. Es werden in diesem Fall nicht nur beide Söhne des Dreiecks T , sondern auch die beiden benachbarten und kompatibel teilbaren Level-2-Söhne von T geteilt. Siehe Abbildung 3.2. Ein solches Verfeinerungsverfahren wird REFINE BISEC5 genannt. Es ist in Algorithmus 3.5 genau beschrieben.

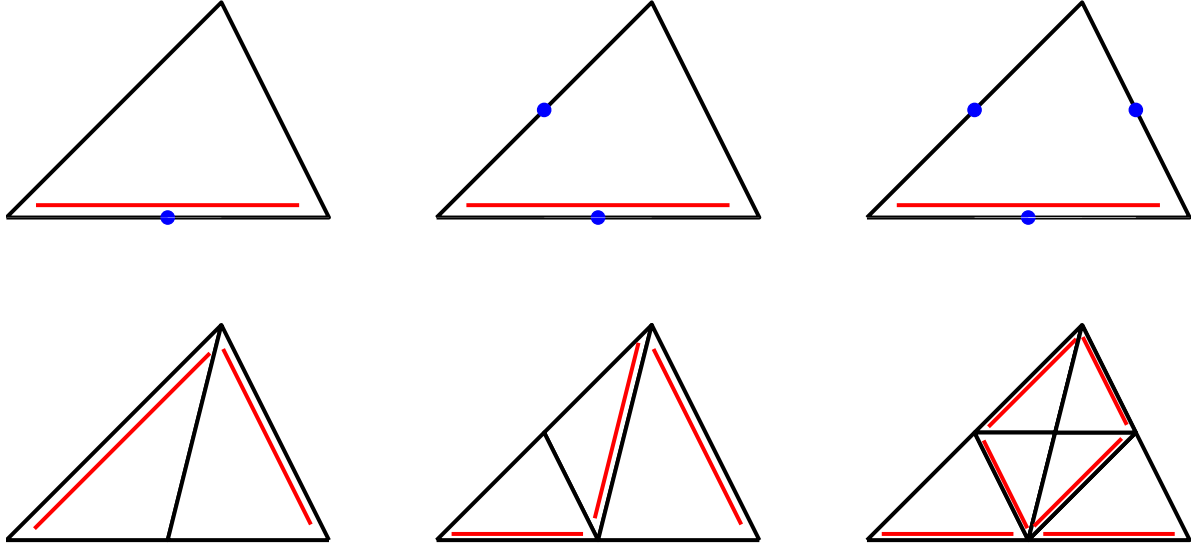


Abbildung 3.2: Die 3 Verfeinerungsmöglichkeiten für ein Dreieck von Algorithmus 3.5. Newest Vertex Bisection, Bisec(2) und Bisec(5).

Algorithmus 3.5 (REFINE BISEC5[$\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j$]).

Eingabe: Konforme Triangulierung \mathcal{T}_j sowie zur Bisektion markierte Elemente $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{T}_j$.
Ausgabe: Kleinste konforme Triangulierung \mathcal{T}_{j+1} , in der alle Elemente aus \mathcal{M}_j bisektiert wurden und in der alle Elemente aus \mathcal{T}_j , deren Nachbarn auch verfeinert wurden, durch 5 Bisektionen in 5 neue Dreiecke verfeinert werden, sodass ein innerer Knoten entsteht.

function $\mathcal{T}_{j+1} = \text{REFINE BISEC5}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$

do finde die kleinste Menge $\widetilde{\mathcal{M}}_j \subset \mathcal{T}_j$ mit $\widetilde{\mathcal{M}}_j \supset \mathcal{M}_j$, sodass für jedes Element $T \in \widetilde{\mathcal{M}}_j$ gilt, dass die Referenzkante $E_T \in \mathcal{E}_j^{\mathcal{M}}$ ist.

$$\mathcal{E}_j^{\mathcal{M}} := \bigcup_{T \in \widetilde{\mathcal{M}}_j} E_T$$

forall $T \in \widetilde{\mathcal{M}}_j$

do verfeinere T durch Anwendung von

- (i) Newest Vertex Bisection, wenn nur die Referenzkante E_T aus $\mathcal{E}_j^{\mathcal{M}}$ ist
- (ii) Bisec(2), wenn E_T und eine weitere Kante von T aus $\mathcal{E}_j^{\mathcal{M}}$ sind
- (iii) Bisec(5), wenn alle Kanten von T aus $\mathcal{E}_j^{\mathcal{M}}$ sind

end

end

Bemerkung 3.6. Sei \mathcal{T}_j eine konforme Triangulierung, und sei $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{T}_j$ beliebig. Wird auf \mathcal{T}_j der Verfeinerungsalgorithmus $\text{REFINE BISEC5}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$ angewendet, um zu einer Triangulierung \mathcal{T}_{j+1} zu gelangen, so gelangt man zur gleichen Triangulierung, wenn man den Algorithmus REFINE BISEC (oder natürlich den dazu äquivalenten Algorithmus RE-

FINE) wie folgt zweimal hintereinander anwendet. Zuerst wird durch $\mathcal{T}_{j+0.5} := \text{REFINE BISEC}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$ eine Triangulierung erstellt, die noch keine neuen „inneren Knoten“ besitzt. Dann wird eine Menge $\mathcal{M}_{j+0.5}$ wie folgt erstellt: Für jedes Dreieck T , auf das BISEC(3) angewendet wurde, wird einer der beiden Level-2-Söhne von T , die zueinander kompatibel teilbar sind, zur Menge $\mathcal{M}_{j+0.5}$ hinzugefügt. Wendet man nun $\text{REFINE BISEC}[\mathcal{T}_{j+0.5}, \mathcal{M}_{j+0.5}]$ an, so erhält man die Triangulierung \mathcal{T}_{j+1} .

Lemma 3.7. *Sei \mathcal{T}_j eine konforme Triangulierung, und sei $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{T}_j$ eine beliebige Menge zu verfeinernder Dreiecke. Sei $\mathcal{T}_{j+1} := \text{REFINE BISEC5}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$ und sei $\mathcal{T}_{j+0.5} := \text{REFINE BISEC}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$. Sei $\mathcal{M}_{j+0.5} \subset \mathcal{T}_{j+0.5}$ die kleinste Menge, sodass $\mathcal{T}_{j+1} = \text{REFINE BISEC}[\mathcal{T}_{j+0.5}, \mathcal{M}_{j+0.5}]$ ist. (Siehe Bemerkung 3.6.) Dann gilt*

$$\#\mathcal{M}_{j+0.5} \leq \#\mathcal{M}_j - 1. \quad (3.2)$$

Der nachfolgende Beweis beruht auf der Tatsache, dass man ein Element T nur dann zur Menge $\mathcal{M}_{j+0.5}$ hinzufügen muss, wenn alle 3 Kanten des Level-2-Vaters $S \in \widetilde{\mathcal{M}}_j \subset \mathcal{T}_j$ markierte Kanten waren. Dies kann aber nur geschehen, wenn S entweder in 2 oder in 3 Referenzkantenketten enthalten ist. (Vergleiche Bemerkung 3.4.) Außerdem muss man klarerweise für jedes solche Element S , das 3 markierte Kanten hat, nur einen Level-2-Sohn zu $\mathcal{M}_{j+0.5}$ hinzufügen.

Beweis von Lemma 3.7. Wie schon erwähnt, genügt es zu zeigen, dass für die Anzahl der Elemente der Menge $K := \{T \in \widetilde{\mathcal{M}}_j \mid T \text{ hat 3 markierte Kanten}\}$ gilt

$$\#K \leq \#\mathcal{M}_j - 1. \quad (3.3)$$

Sei $\#RKK$ die Anzahl der Referenzkantenketten. Da es jedes markierte Element Ausgangselement von maximal einer Referenzkantenkette ist, gilt

$$\#RKK \leq \#\mathcal{M}_j. \quad (3.4)$$

Es genügt also zu zeigen, dass

$$\#K \leq \#RKK - 1. \quad (3.5)$$

Dann folgt (3.3) mit (3.4).

$$(3.6)$$

Der Beweis hierzu verläuft induktiv nach der Anzahl der Referenzkantenketten $\#RKK$. Sei $\#RKK = 1$. Wenn beim Markierungsvorgang nur eine Referenzkantenkette entsteht, dann haben alle inneren Glieder dieser Kette 2 markierte Kanten. Das Anfangs- und das Endglied enthalten jeweils nur eine markierte Kante. Somit können auch keine Dreiecke mit 3 markierten Kanten entstehen. Damit gilt in diesem Fall (3.5).

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, (3.5) gilt für $\#RKK = n$. Sei $\#RKK = n+1$. Laut Annahme gibt es für n Referenzkantenketten höchstens $n-1$ Elemente aus K . Wenn nun noch eine Referenzkantenkette $(T_i^{(k)})$ zu den n Bestehenden hinzugefügt wird, so gilt laut Definition von m_i in Algorithmus 3.3 für Schnitt mit anderen Referenzkantenketten entweder dass

der Schnitt leer ist, oder dass er nur das Element $T_i^{(m_i)}$ enthält.

Im ersten Fall ist jedes Element von $(T_i^{(k)})$ nur Element von einer Referenzkantenkette. Mit den Argumenten vom Induktionsstart $n = 1$ folgt, dass es keine weiteren Dreiecke mit 3 markierten Kanten gibt. Die Anzahl solcher Dreiecke bleibt damit bei $\#K = n - 1 \leq \#RKK = n + 1$. Somit gilt (3.5).

Falls der Schnitt nur das Element $T_i^{(m_i)}$ enthält, gilt, dass es nur ein Dreieck in $(T_i^{(k)})$ gibt, dass in mehr als einer Referenzkantenkette enthalten ist. Es kann somit auch maximal ein Dreieck in $(T_i^{(k)})$ geben, für das alle 3 Kanten markiert sind. Damit ist $\#K = n \leq \#RKK = n + 1$. Somit gilt (3.5) auch in diesem Fall. \square

Bemerkung 3.8. Es gilt also, dass wenn man mit $N := \#\mathcal{M}_j$ markierten Elementen durch einen Aufruf von REFINE BISEC5 ausgehend von einer Triangulierung \mathcal{T}_j eine Triangulierung \mathcal{T}_{j+1} erstellen kann, dass man dann durch Markierung von $\#\mathcal{M}_j + \#\mathcal{M}_{j+0.5} \leq 2N$ Elementen durch 2 aufeinanderfolgende Aufrufe von REFINE BISEC (oder REFINE) dasselbe erreichen kann. Diese Beobachtung ist für Satz 3.9 relevant.

3.3 Optimalität von NVB mit inneren Knoten

Ziel dieses Kapitels ist es, die Aussagen von Abschnitt 2 für das Verfeinerungsverfahren REFINE BISEC5 zu zeigen.

3.3.1 Satz von Stevenson für REFINE BISEC5

Satz 3.9. Sei \mathcal{T}_0 eine zulässige Anfangstriangulierung. Sei $(\mathcal{T}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine durch

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_j &\subset \mathcal{T}_j \text{ beliebig} \\ \mathcal{T}_{j+1} &:= \text{REFINE BISEC5}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j] \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

induktiv definierte Folge von Triangulierungen. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von den Konstanten d und D aus Definition 1.25 und damit nur von der Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0 abhängt, sodass

$$\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 \leq 2C \sum_{j=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_j \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Beweis. \mathcal{T}_ℓ ist eine Triangulierung, die durch ℓ -malige Anwendung von REFINE BISEC5 aus \mathcal{T}_0 entstanden ist. Laut Bemerkung 3.6 kann man die Triangulierung \mathcal{T}_ℓ auch erhalten, in dem man 2ℓ -mal den Algorithmus REFINE BISEC anwendet. Hierbei wird der Algorithmus jeweils abwechselnd genau ℓ -mal auf die Mengen \mathcal{M}_j bzw. $\mathcal{M}_{j+0.5}$, $j = 0, \dots, \ell - 1$ angewendet.

Laut Korollar 2.17 gilt deshalb

$$\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 \leq C \sum_{j=0}^{\ell-1} (\#\mathcal{M}_j + \#\mathcal{M}_{j+0.5}).$$

Da laut Lemma 3.7

$$\#\mathcal{M}_{j+0.5} \leq \#\mathcal{M}_j - 1 \leq \#\mathcal{M}_j$$

gilt, folgt

$$\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 \leq C \sum_{j=0}^{\ell-1} 2^j \#\mathcal{M}_j = 2C \sum_{j=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_j.$$

Damit ist Satz 3.9 gezeigt. □

3.3.2 Überdeckung von Triangulierungen für REFINE BISEC5

Satz 2.4 sowie Korollar 2.5 aus Abschnitt 2.2 gelten natürlich auch für schwächere Voraussetzungen.

Satz 3.10 (Überdeckung von Triangulierungen). *Sei \mathcal{T}_0 eine (zulässige) Anfangstriangulierung und seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei konforme Triangulierungen, die durch wiederholte Anwendung von REFINE BISEC5 aus \mathcal{T}_0 entstanden sind. Dann ist die Überdeckung der beiden Triangulierungen $\mathcal{T} := \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ wieder eine konforme Triangulierung. Insbesondere gilt die Abschätzung (2.22) für die Überdeckung*

$$\#(\mathcal{T}_1 \setminus \mathcal{T}) \leq \#\mathcal{T}_2 - \#\mathcal{T}_0. \tag{3.8}$$

Beweis. Laut Korollar 2.5 gilt (3.8) sogar für alle konformen Triangulierungen, die durch wiederholte Bisektionen (ohne Einschränkungen) entstehen. □

3.4 Optimalität

Die Optimalität der Konvergenzrate bei Verfeinerung durch Newest Vertex Bisection mit inneren Knoten gilt analog zu Satz 2.18, da die einzigen Voraussetzungen, die für den Beweis benötigt wurden, und die von der Verfeinerungsstrategie abhängen, durch Satz 3.9 und Satz 3.10 gezeigt wurden.

4 Modifiziertes RGB-Verfahren

4.1 Algorithmus REFINE MRGB

Wird in den folgenden Abschnitten von einer konformen MRGB-Triangulierung (oder einfach: MRGB-Triangulierung) \mathcal{T}_j gesprochen, so ist eine konforme Triangulierung gemeint, die durch wiederholte Anwendung von Red, Green oder Blue (vgl. Abbildung 4.1) auf beliebige Elemente aus einer zulässigen Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0 entstanden ist. Wir betrachten den folgenden Algorithmus:

Algorithmus 4.1 (REFINE MRGB[$\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j$]).

Eingabe: Konforme MRGB-Triangulierung \mathcal{T}_j sowie zur Verfeinerung markierte Elemente $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{T}_j$.

Ausgabe: Kleinste konforme Triangulierung \mathcal{T}_{j+1} , in der alle Elemente aus \mathcal{M}_j durch RGB verfeinert wurden.

function $\mathcal{T}_{j+1} = \text{REFINE MRGB}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$

do finde die kleinste Menge $\widetilde{\mathcal{M}}_j \subset \mathcal{T}_j$ mit $\widetilde{\mathcal{M}}_j \supset \mathcal{M}_j$, sodass für jedes Element $T \in \widetilde{\mathcal{M}}_j$ gilt, dass die Referenzkante $E_T \in \mathcal{E}_j^{\mathcal{M}}$ ist.

$\mathcal{E}_j^{\mathcal{M}} := \bigcup_{T \in \widetilde{\mathcal{M}}_j} E_T$

forall $T \in \widetilde{\mathcal{M}}_j$

do verfeinere T durch Anwendung von

(i) Green, wenn nur die Referenzkante E_T aus $\mathcal{E}_j^{\mathcal{M}}$ ist

(ii) Blue, wenn E_T und eine weitere Kante von T aus $\mathcal{E}_j^{\mathcal{M}}$ sind

(iii) Red wenn alle Kanten von T aus $\mathcal{E}_j^{\mathcal{M}}$ sind

end

Die in Algorithmus 4.1 beschriebenen Verfeinerungsstrategien (Red, Green und Blue) sind in Abbildung 4.1 skizziert. Die Anwendung von Green entspricht der Newest Vertex Bisection und die von Blue ist gleich einer Anwendung von $\text{Bisec}(2)$. Der Algorithmus arbeitet also analog zu Algorithmus 3.1, mit dem großen Unterschied, dass wenn 3 Kanten eines Dreiecks markiert sind, eine Red-Verfeinerung angewendet wird. Das Dreieck wird hierbei nicht bisektiert, sondern durch Einfügen von 3 neuen Kanten zu 4 gleich großen, kongruenten Dreiecken verfeinert. Die Referenzkanten der neuen Dreiecke werden dann als die Kanten gewählt, die zur Referenzkante des Ausgangsdreiecks kongruent sind. Der Algorithmus REFINE MRGB ist also kein Bisektionsverfahren. Es kann also sein, dass bei einer gegebenen konformen Triangulierung \mathcal{T}_j und gegebenen Mengen für die Verfeinerung markierter Dreiecke $\mathcal{M}_j, \mathcal{M}_j', \mathcal{M}_j''$ mit $\mathcal{M}_j' \dot{\cup} \mathcal{M}_j'' = \mathcal{M}_j$ nach Anwendung von $\mathcal{T}_{j+1} = \text{REFINE MRGB}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$ eine andere Triangulierung entsteht als nach aufeinanderfolgender Anwendung von $\mathcal{T}_{j+0.5} = \text{REFINE MRGB}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j']$ und $\mathcal{T}_{j+1}' = \text{REFINE MRGB}[\mathcal{T}_{j+0.5}, \mathcal{M}_j'']$. Es kann also die Markierung der gleichen Menge an Dreiecken (in verschiedenen Schritten) zu verschiedenen Triangulierungen führen.

Wir wollen nun die Resultate aus Abschnitt 2 auch für MRGB-Triangulierungen erhalten. Hierbei sei nochmals angemerkt, dass das modifizierte RGB-Verfahren kein Bi-

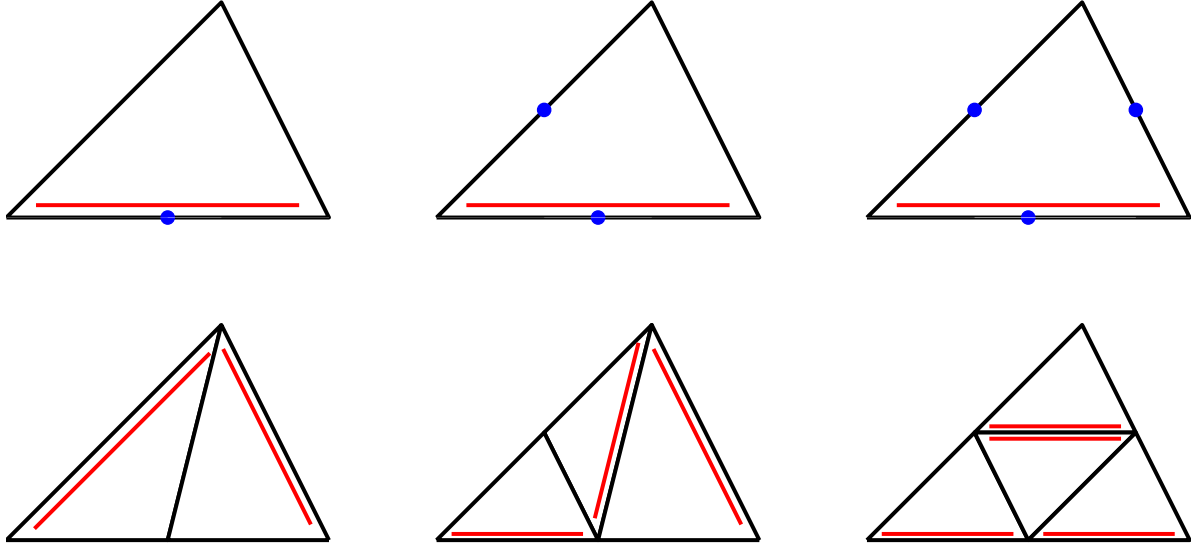


Abbildung 4.1: Die 3 Verfeinerungsmöglichkeiten für ein Dreieck von Algorithmus 4.1. Green (Newest Vertex Bisection), Blue (Bisec(2)) und Red.

sektionsverfahren ist. Es entstehen durch Red-Verfeinerung eines Dreiecks T aus diesem 4 neue Dreiecke, von denen 2 nicht durch wiederholte Bisektion erstellt werden können (siehe Abbildung 4.1). Dadurch ist es nicht möglich, jedem Dreieck und dessen Nachkommen einen Binärbaum zuzuordnen. Eine Definition der Level-Funktion wie in Definition 1.11 ist damit nicht möglich. Wir führen aber für Elemente T , die durch mehrmalige Anwendung von 4.1 ausgehend von einer Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0 entstanden sind, induktiv eine Level-Funktion $\ell^{ind}(T)$ ein.

Definition 4.2. Sei \mathcal{T}_0 eine zulässige Anfangstriangulierung. Für alle $T \in \mathcal{T}_0$ ist $\ell^{ind}(T) := 0$. Sei

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_j &\subset \mathcal{T}_j \text{ beliebig,} \\ \mathcal{T}_{j+1} &:= \text{REFINE MRGB}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j], \quad \forall j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Sei $\ell \in \mathbb{N}$ und sei $T \in \mathcal{T}_\ell$ mit Vater $\hat{T} \in \mathcal{T}_{\ell-1}$. Sei $\ell^{ind}(\hat{T}) = k$. Dann ist

$$\ell^{ind}(T) := \begin{cases} k, & \text{falls } \text{meas}(T) = \text{meas}(\hat{T}), \\ k + 1, & \text{falls } \text{meas}(T) = \text{meas}(\hat{T})/2, \\ k + 2, & \text{falls } \text{meas}(T) = \text{meas}(\hat{T})/4. \end{cases}$$

Das Level bleibt also gleich, wenn \hat{T} nicht verfeinert wurde. Wenn T durch Anwendung von Green entstanden ist, also durch einmalige Bisektion, so hat es ein Level mehr als sein Vater \hat{T} . Ist T durch Anwenden von Blue auf \hat{T} entstanden, so ist $\ell^{ind}(T) = \ell^{ind}(\hat{T}) + 1$ oder $\ell^{ind}(\hat{T}) + 2$. Nach einer Red-Verfeinerung von \hat{T} , gilt $\ell^{ind}(T) = \ell^{ind}(\hat{T}) + 1$. Man erkennt leicht, dass für Elemente T , die durch wiederholte Anwendung eines Bisektionsverfahrens (REFINE BISEC oder REFINE BISEC5) entstanden sind, $\ell^{ind}(T) = \ell(T)$ ist. Aus diesem Grund werden wir im weiteren Verlauf auch die induktiv definierte Level-Funktion mit ℓ bezeichnen.

Bemerkung 4.3. Es besteht die Vermutung, dass die Hilfssätze aus Abschnitt 1 auch für das modifizierte RGB-Verfahren gezeigt werden können.

Damit gemeint sind Satz 1.13 und das daraus folgende Lemma 1.19. Diese könnten ebenfalls für Triangulierungen, die durch wiederholte Anwendung von Algorithmus 4.1 entstanden sind, gelten, da bei Anwendung von Red-Verfeinerung auf ein Element T keine neuen Knoten entstehen, die nicht bei Anwendung von Bisec(3) auch entstehen würden. Dass die Abschätzungen (1.6) sowie (1.7) auch für Elemente aus MRGB-Triangulierungen gelten ist aufgrund von Definition 4.2 leicht ersichtlich.

Satz 1.23 (ist im Grunde eine Folgerung von 1.19) und Satz 1.27 (ist eine Folgerung aus 1.23, (1.6) und (1.7)) gelten vermutlich auch für das MRGB-Triangulierungen.

Mit diesen Hilfssätzen ließe sich Satz 4.14 dann analog zu 2.1 beweisen. Wir gehen aber einen anderen Weg.

4.2 Vergleich mit Bisektionsverfahren

Vergleicht man die Anwendung von REFINE BISEC5 auf ein Dreieck T , mit der von REFINE MRGB, so stellt man fest, dass es nur einen Unterschied bei den Nachkommen gibt, wenn T 3 markierte Kanten hat. Es wird entweder Bisec(5) oder Red auf T angewendet. Man erkennt, dass jeder durch Red entstandene Nachkomme von T entweder eine Vereinigung von 2 durch Bisec(5) entstandenen Nachkommen ist, oder einem solchen Nachkommen gleicht. Man spricht deshalb auch von einer größeren Verfeinerung von T . Es werden nun Bezeichnungen für die Elemente, die „echt größer“ sind, eingeführt.

Definition 4.4. Sei \mathcal{T}_j eine konforme MRGB-Triangulierung und sei $T \in \mathcal{T}_j$. Sei $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{T}_j$ beliebig. Wird durch den Aufruf von $\mathcal{T}_{j+1} := \text{REFINE MRGB}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$ eine Red-Verfeinerung auf T angewendet, so nennen wir den Nachkommen $S \in \mathcal{T}_{j+1}$ von T , der leeren Schnitt mit der Referenzkante E_T von T hat, *Top-Red-Sohn* von T und schreiben kurz $trs(T)$.

Den zu ihm kompatibel teilbaren Nachbarn $S' = N(S, \mathcal{T}_{j+1})$, der klarerweise auch ein Nachkomme von T ist, bezeichnen wir mit *Mittel-Red-Sohn* und schreiben $mrs(T)$.

Weiters sei mit $\mathcal{T}_{j+1}^{tms} := \bigcup_{T \in \mathcal{T}_j} \{mrs(T), trs(T)\} \subset \mathcal{T}_{j+1}$ die Menge aller Elemente von \mathcal{T}_{j+1} , die Top- oder Mittel-Red-Söhne sind, bezeichnet.

Bemerkung 4.5. Aus Abbildung 4.1 bzw. Abbildung 3.1 erkennt man leicht, dass wenn man die Elemente $trs(T), tms(T)$ eines durch Red verfeinerten Dreiecks T bisektiert, die gleichen Elemente entstehen, wie nach einer einzigen Anwendung von Bisec(5) auf T . Lemma 4.6 besagt, dass diese Aussage auch für Triangulierungen gilt.

Lemma 4.6. Sei \mathcal{T}_j eine MRGB-Triangulierung und sei $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{T}_j$ beliebig. Sei

$$\mathcal{T}_{j+1} := \text{REFINE MRGB}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$$

und sei $\mathcal{T}_{j+1}^{tms} \subset \mathcal{T}_{j+1}$ definiert wie in Definition 4.4. Sei außerdem

$$\widehat{\mathcal{T}}_{j+1} := \text{REFINE BISEC5}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j].$$

Dann gilt

$$\widehat{\mathcal{T}}_{j+1} = \text{REFINE BISEC}[\mathcal{T}_{j+1}, \mathcal{T}_{j+1}^{tms}].$$

Beweis. Wende Bemerkung 4.5 auf jedes Dreieck an, dass durch Red verfeinert wurde und bemerke, dass $\widetilde{\mathcal{T}}_{j+1}^{tmrs} = \mathcal{T}_{j+1}^{tmrs}$ ist, da jeweils 2 Elemente aus \mathcal{T}_{j+1}^{tmrs} kompatibel teilbar sind. \square

Wir wollen nun die Aussage von Lemma 4.6 für Triangulierungen die durch mehrmalige Anwendung von REFINE MRGB bzw. REFINE BISEC5 entstanden sind, verallgemeinern. Dazu benötigen wir einen Hilfssatz.

Lemma 4.7. *Sei S_0 ein gegebenes Dreieck und sei $k \in \mathbb{N}$. Sei $(S_j)_{j \in \{0, \dots, k\}}$ eine endliche Folge von Dreiecken, die durch wiederholte Anwendung von Red entsteht, mit der Eigenschaft*

$$S_{j+1} = trs(S_j) \text{ oder } mrs(S_j) \quad \forall j \in \{0, \dots, k-1\}.$$

Entsteht das Element S_k' durch NVB, Bisec(2) oder Bisec(3) von S_k , so ist S_k' auch ein Element, das durch $2k$ -malige Anwendung von NVB, Bisec(2) oder Bisec(5) aus S_0 entstehen kann.

Beweis. Der Beweis verläuft durch Induktion nach k . Sei $k=1$. Wir unterscheiden 2 Fälle: 1.Fall: Das Element S_1' entsteht durch Newest Vertex Bisection aus $S_1 = trs(S_0)$ oder $mrs(S_0)$. Dann ist S_1' wie schon erwähnt ein Nachkomme, der durch Anwendung von Bisec(5) auf S_0 entstehen kann.

2.Fall: Das Element S_1' entsteht durch Bisec(2) oder Bisec(3), also durch 2-malige NVB aus $S_1 = trs(S_0)$ oder $mrs(S_0)$. Mit dem ersten Fall folgt, dass S_1' ein Element ist, das durch Bisektion eines Elementes, das durch Anwendung von Bisec(5) auf S_0 entstanden ist, entstehen kann. Damit gilt die Aussage für $k = 1$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, die Aussage gilt für $k = n$. Wir wollen zeigen, dass die Aussage auch für $k = n+1$ gilt. Sei dazu S_{n+1} ein Element aus der Folge. Laut Definition ist $S_{n+1} = trs(S_n)$ oder $mrs(S_n)$. Erhält man S_{n+1}' durch ein (oder 2)-malige Bisektion von S_{n+1} , so ist wie im Fall $k = 1$ S_{n+1}' auch ein Nachkomme, der durch Anwendung Bisec(5) (oder Bisec(5) und NVB) auf S_n entsteht. Anstatt Bisec(5) auf S_n anzuwenden, kann man auch S_n zuerst einmal bisektieren um zu den Söhnen S_n^1, S_n^2 zu gelangen, und diese dann jeweils 2 mal bisektieren, um die gleichen Nachkommen herzustellen. Laut Induktionsannahme können S_n^1 sowie S_n^2 auch durch $2k$ -malige Anwendung von NVB, Bisec(2) oder Bisec(5), ausgehend von S_0 entstehen. Folglich entsteht auch S_{n+1}' durch $2k+2$ -malige Anwendung von NVB, Bisec(2) oder Bisec(5) ausgehend von S_0 . Der Induktionsschritt ist somit gezeigt. \square

Korollar 4.8. *Sei \mathcal{T}_0 eine zulässige Anfangstriangulierung und sei $\ell \in \mathbb{N}$. Sei $(\mathcal{T}_j)_{j \in \{0, \dots, \ell\}}$ eine durch*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_j &\subset \mathcal{T}_j \text{ beliebig} \\ \mathcal{T}_{j+1} &:= \text{REFINE MRGB}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j] \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, \ell-1\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

induktiv definierte Folge von Triangulierungen. Seien $\mathcal{T}_j^{tmrs} \subset \mathcal{T}_j$ die Mengen aller Top- und Mittel-Red-Söhne, die im j -ten Verfeinerungsschritt entstanden sind. Sei $\mathcal{M}_\ell^{tmrs} :=$

$$\left(\bigcup_{j \leq \ell} \mathcal{T}_j^{tmrs} \right) \setminus \bigcup_{j \leq \ell-1} \widetilde{\mathcal{M}}_j.$$

Dann lässt sich \mathcal{T}_ℓ durch

$$\mathcal{T}_\ell' := \text{REFINE BISEC}[\mathcal{T}_\ell, \mathcal{M}_\ell^{tmrs}] \quad (4.2)$$

verfeinern, sodass eine Folge $(\widehat{\mathcal{M}}_j)_{j \in \{0, \dots, 2\ell-1\}}$ existiert, sodass für die induktiv durch

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{M}}_j &\subset \widehat{\mathcal{T}}_j \\ \widehat{\mathcal{T}}_{j+1} &:= \text{REFINE BISEC5}[\widehat{\mathcal{T}}_j, \widehat{\mathcal{M}}_j] \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, 2\ell-1\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

definierte Folge von Triangulierungen $(\widehat{\mathcal{T}}_j)_{j \in \{0, \dots, 2\ell\}}$ gilt

$$\mathcal{T}' = \widehat{\mathcal{T}}_{2\ell}.$$

Beweis. Es ist also \mathcal{T}_ℓ eine Triangulierung, die durch ℓ -malige Anwendung von Algorithmus 4.1 auf \mathcal{T}_0 entsteht. Es werden nun genau die Dreiecke aus der Menge \mathcal{M}_ℓ^{tmrs} zur Bisektion markiert. Das sind die Dreiecke aus $\bigcup_{j \leq \ell} \mathcal{T}_j^{tmrs}$, die nicht weiter verfeinert wurden. Also die Dreiecke $trs(T), tms(T)$, die auch aus \mathcal{T}_ℓ sind und entweder Top-Red- oder Mittel-Red-Söhne von einem Dreieck T sind, das mittels Red verfeinert wurde. (Daraus folgt, dass alle anderen, nicht zur Verfeinerung markierten Elemente aus \mathcal{T}_ℓ durch NVB, Bisec(2) oder Bisec(3) aus ihrem Vorfahren entstehen können.) Da die Dreiecke $trs(T)$ und $tms(T)$ kompatibel teilbar sind, werden auch keine weiteren Dreiecke durch Referenzkantenketten markiert. Es werden also genau die Dreiecke aus \mathcal{M}_ℓ^{tmrs} bisektiert. Daraus folgt, dass alle Dreiecke aus \mathcal{T}'_ℓ durch durch NVB, Bisec(2) oder Bisec(3) ihres Vaters entstanden sind oder entstehen können. Laut Lemma 4.7 können diese Elemente auch durch 2ℓ -malige Anwendung von durch NVB, Bisec(2) oder Bisec(5), und damit auch durch 2ℓ -malige Anwendung von 3.5 auf \mathcal{T}_0 entstehen. Damit ist aber \mathcal{T}'_ℓ das $(2\ell+1)$ -te Element der in (4.3) definierten Folge. Somit ist Korollar 4.8 gezeigt. \square

Es ist nicht so einfach herauszufinden, wie die Mengen der Folge $(\widehat{\mathcal{M}}_j)_{j \in \{0, \dots, 2\ell-1\}}$ gewählt werden müssen. Betrachte dazu Algorithmus 4.9.

Algorithmus 4.9 (MRGB TO BISEC5 $[(\mathcal{T}_j)_{j \in \{0, \dots, \ell\}}, (\mathcal{M}_j)_{j \in \{0, \dots, \ell-1\}}]$).

Eingabe: Endliche Folge von Triangulierungen $(\mathcal{T}_j)_{j \in \{0, \dots, \ell\}}$ sowie von zur Verfeinerung markierter Elemente $(\mathcal{M}_j)_{j \in \{0, \dots, \ell-1\}}$, die (4.1) erfüllen.

Ausgabe: Folge $(\widehat{\mathcal{M}}_j)_{j \in \{0, \dots, 2\ell-1\}}$, von zu markierenden Elementen, die laut Korollar 4.8 existiert und zur Triangulierung $\widehat{\mathcal{T}}_{\ell+1} = \widehat{\mathcal{T}}_\ell$ führt.

function $(\widehat{\mathcal{M}}_j)_{j \in \{0, \dots, 2\ell-1\}} := \text{MRGB TO BISEC5}[(\mathcal{T}_j)_{j \in \{0, \dots, \ell\}}, (\mathcal{M}_j)_{j \in \{0, \dots, \ell-1\}}]$

$\widehat{\mathcal{T}}_0 := \mathcal{T}_0$

$\mathcal{T}_0^{tmrs} := \emptyset$

for $j = 0, \dots, \ell - 1$

$\widehat{\mathcal{M}}_{2j} := \mathcal{M}_j \cap \widehat{\mathcal{T}}_{2j}$

$\widehat{\mathcal{T}}_{2j+1} = \text{REFINE BISEC5}[\widehat{\mathcal{T}}_{2j}, \widehat{\mathcal{M}}_{2j}]$

%alternativ :

$\widetilde{\mathcal{M}}_j := \text{RKK}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$

$\widetilde{\mathcal{M}}_{2j} := \widetilde{\mathcal{M}}_j \cap \widehat{\mathcal{T}}_{2j}$

$\widetilde{\mathcal{T}}_{2j+1} = \text{REFINE BISEC5}[\widehat{\mathcal{T}}_{2j}, \widetilde{\mathcal{M}}_{2j}]$

$\widetilde{\mathcal{M}}_j := \text{RKK}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$


```

 $\mathcal{T}_j^{tmrs} := \mathcal{T}_j \setminus \widehat{\mathcal{T}}_{2j}$ 
forall  $T \in \bigcup_{k \leq j} \mathcal{T}_k^{tmrs} \cap \widetilde{\mathcal{M}}_j$ 
  if  $T$  wird bei REFINE MRGB durch Red verfeinert
    do finde die kompatibel teilbaren  $T', T'' \in \widehat{\mathcal{T}}_{2j+1}$  mit  $T', T'' \subset T$ 
    %bisektieren  $T', T''$  :
     $\widehat{\mathcal{M}}_{2j+1} := \{T'\}$ 
     $\widehat{\mathcal{T}}_{2j+2} = \text{REFINE BISEC5}[\widehat{\mathcal{T}}_{2j+1}, \widehat{\mathcal{M}}_{2j+1}]$ 
  else  $T$  wird bei REFINE MRGB durch Green oder Blue verfeinert
     $\widehat{\mathcal{T}}_{2j+2} = \widehat{\mathcal{T}}_{2j+1}$ 
  end
end
end

```

end

Es ist also durch (4.1) eine endliche Folge von Triangulierungen $\mathcal{T}_j, j \in \{0, \dots, \ell\}$ gegeben, die dadurch entsteht, dass man ausgehend von einer zulässigen Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0 die Mengen $\mathcal{M}_j \subset \mathcal{T}_j, j \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ durch REFINE MRGB verfeinert. Ziel von Algorithmus 4.9 ist es, ausgehend von derselben Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0 eine endliche Folge Triangulierungen $\widehat{\mathcal{T}}_j, j \in \{0, \dots, 2\ell\}$ zu erstellen, indem wiederholt REFINE BISEC5 auf gewisse Mengen $\widehat{\mathcal{M}}_j \subset \widehat{\mathcal{T}}_j, j \in \{0, \dots, 2\ell - 1\}$ angewendet wird. Dabei soll für alle $j \in \{0, \dots, \ell\}$ gelten, dass die Triangulierung $\widehat{\mathcal{T}}_{2j}$ feiner als die Triangulierung \mathcal{T}_j ist. (Siehe Definition 4.10.)

Definition 4.10. Seien $\widehat{\mathcal{T}}, \mathcal{T}$ zwei Triangulierungen. Wir nennen $\widehat{\mathcal{T}}$ feiner als \mathcal{T} , falls gilt, dass

$$\forall T \in \mathcal{T} \exists \mathcal{V} \subset \widehat{\mathcal{T}} : \mathcal{T} = \bigcup_{\tilde{\mathcal{T}} \in \mathcal{V}} \tilde{\mathcal{T}}.$$

Bemerkung 4.11. Ist die Triangulierung $\widehat{\mathcal{T}}$ feiner als \mathcal{T} , so gilt $\#\widehat{\mathcal{T}} \geq \#\mathcal{T}$.

Algorithmus 4.9 arbeitet wie folgt: In der for-Schleife wird für jedes $j \in \{0, \dots, \ell - 1\}$, beginnend mit $\widehat{\mathcal{T}}_0 := \mathcal{T}_0$, die Triangulierung $\widehat{\mathcal{T}}_{2j}$ (die, wie man induktiv leicht erkennt, feiner ist als \mathcal{T}_j) durch (mehrfache) Anwendung von REFINE BISEC5 so zu einer Triangulierung $\widehat{\mathcal{T}}_{2j+2}$ verfeinert, sodass $\widehat{\mathcal{T}}_{2j+2}$ die kleinste Verfeinerung von \mathcal{T}_{j+1} ist, die durch REFINE BISEC5 gewonnen werden kann.

Klarerweise versucht man, REFINE BISEC5 auf alle Elemente aus der Menge $(\mathcal{T}_j \supset) \widetilde{\mathcal{M}}_j := \text{RKK}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$, also auf alle Elemente die in (4.1) durch REFINE MRGB verfeinert werden, anzuwenden. Jedoch gilt

$$\widetilde{\mathcal{M}}_j = (\widetilde{\mathcal{M}}_j \cap \widehat{\mathcal{T}}_{2j}) \dot{\cup} (\widetilde{\mathcal{M}}_j \setminus \widehat{\mathcal{T}}_{2j}).$$

Aus $\widetilde{\mathcal{M}}_j \subset \mathcal{T}_j$ folgt

$$= (\widetilde{\mathcal{M}}_j \cap \widehat{\mathcal{T}}_{2j}) \dot{\cup} (\widetilde{\mathcal{M}}_j \cap (\mathcal{T}_j \setminus \widehat{\mathcal{T}}_{2j})).$$

Im Allgemeinen ist $\mathcal{T}_j \setminus \widehat{\mathcal{T}}_{2j} \neq \emptyset$ und daher kann es sein, dass es auch Elemente aus $\widetilde{\mathcal{M}}_j$ geben, die sich nicht in $\widehat{\mathcal{T}}_{2j}$ befinden.

Es wird dennoch in einem ersten Schritt auf alle Elemente aus $\widetilde{\mathcal{M}}_j \cap \widehat{\mathcal{T}}_{2j}$ REFINE BISEC5 angewendet, wodurch die Triangulierung $\widehat{\mathcal{T}}_{2j+1}$ entsteht. Man beachte, dass alle $T_i^{(k)} \in \widetilde{\mathcal{M}}_j \cap \widehat{\mathcal{T}}_{2j}$ Elemente einer Referenzkantenkette sind, und dass das Anfangsglied $T_i^{(0)}$ dieser Kette auch in $\widehat{\mathcal{T}}_{2j}$ liegen muss. Dies folgt, da mit Lemma 4.12 ein Element aus $\mathcal{T}_j \setminus \widehat{\mathcal{T}}_{2j}$ zu einem anderen Element aus $\mathcal{T}_j \setminus \widehat{\mathcal{T}}_{2j}$ kompatibel teilbar sein muss. Daher entsteht durch

$$\widehat{\mathcal{T}}_{2j+1} = \text{REFINE BISEC5}[\widehat{\mathcal{T}}_{2j}, \widetilde{\mathcal{M}}_j \cap \widehat{\mathcal{T}}_{2j}]$$

und

$$\widehat{\mathcal{T}}_{2j+1} = \text{REFINE BISEC5}[\widehat{\mathcal{T}}_{2j}, \mathcal{M}_j \cap \widehat{\mathcal{T}}_{2j}]$$

die gleiche Triangulierung. In diesem Schritt wurden nun alle Elemente von $\widetilde{\mathcal{M}}_j$, außer diejenigen aus $\mathcal{T}_j \setminus \widehat{\mathcal{T}}_{2j}$, durch REFINE BISEC5 anstatt durch REFINE MRGB verfeinert. (Insbesondere wurden alle Elemente aus $\widetilde{\mathcal{M}}_j \cap \widehat{\mathcal{T}}_{2j}$ verfeinert.) Für all diese Elemente entsteht dadurch klarerweise eine feinere Triangulierung als wenn man REFINE MRGB anwenden würde.

In einem zweiten Schritt werden die Elemente aus $\widetilde{\mathcal{M}}_j \cap (\mathcal{T}_j \setminus \widehat{\mathcal{T}}_{2j})$ genauer betrachtet. Die Menge $\mathcal{T}_j \setminus \widehat{\mathcal{T}}_{2j}$ ist laut Lemma 4.12 genau die in Definition 4.4 definierte Menge $\bigcup_{k \leq j} \mathcal{T}_k^{tmrs} \cap \mathcal{T}_j \subset \mathcal{T}_j$. Es sind also genau die markierten Elemente, die Top- oder Mittel-Red-Söhne einer Triangulierung waren, und aus \mathcal{T}_j sind. Diese können entweder 3, 2, oder nur eine Markierte Kante haben. Je nachdem wird während des Verfeinerungsschrittes REFINE MRGB Red, Bisec(2) oder NVB auf das Element angewendet. Sei nun $trs(T) \in \widetilde{\mathcal{M}}_j \cap (\mathcal{T}_j \setminus \widehat{\mathcal{T}}_{2j})$ ein Top-Red-Sohn oder ein Mittel-Red-Sohn des Elements T . Da $T \in \mathcal{T}_{j-1}$ während REFINE MRGB durch Red verfeinert wurde, wurde es während REFINE BISEC5 durch Bisec(5) verfeinert. Daraus folgt, dass es 2 Elemente $tbs(T), tbs'(T)$ aus $\widehat{\mathcal{T}}_{2j}$ geben muss, sodass $tbs(T) \cup tbs'(T) = trs(T)$ gilt. Insbesondere können $tbs(T)$ und $tbs'(T)$ auch durch NVB von $trs(T)$ entstehen. Wir unterscheiden nun 3 Fälle.

Hat $trs(T)$ eine markierte Kante (das heißt nur die Referenzkante ist markiert), so haben $tbs(T)$ und $tbs'(T)$ keine markierte Kante. Diese Elemente sind nicht aus $\widetilde{\mathcal{M}}_j \cap \widehat{\mathcal{T}}_{2j}$ und wurden im ersten Schritt auch nicht bisektiert. Das Element $trs(T)$ wird durch Aufruf von REFINE MRGB entlang der Referenzkante bisektiert, damit sind seine Nachkommen gleich $tbs(T)$ und $tbs'(T)$ und die Verfeinerung $\widehat{\mathcal{T}}_{2j+2} = \widehat{\mathcal{T}}_{2j+1}$ bleibt (eingeschränkt auf dieses Element) feiner als \mathcal{T}_{j+1} .

Hat $trs(T)$ 2 markierte Kanten, so hat entweder $tbs(T)$ oder $tbs'(T)$ eine markierte Kante. Dieses Element ist zwar auch nicht aus $\widetilde{\mathcal{M}}_j \cap \widehat{\mathcal{T}}_{2j}$, aber aus und wurde im ersten Schritt schon bisektiert. Auf das Element $trs(T)$ wird durch Aufruf von REFINE MRGB Bisec(2) angewendet. Somit entstehen wiederum die gleichen Nachkommen und die Verfeinerung $\widehat{\mathcal{T}}_{2j+2} = \widehat{\mathcal{T}}_{2j+1}$ bleibt feiner als \mathcal{T}_{j+1} .

Hat $trs(T)$ 3 markierte Kanten, so haben $tbs(T)$ und $tbs'(T)$ jeweils eine markierte Kante. Diese Elemente zwar nicht aus $\widetilde{\mathcal{M}}_j \cap \widehat{\mathcal{T}}_{2j}$, aber aus $\widetilde{\mathcal{M}}_{2j}$ und wurden noch im ersten Schritt während REFINE BISEC5 bisektiert. Bisektiert man nun wie in der if-Schleife gefordert,

die kompatibel teilbaren Nachbarn, so entstehen die gleichen Nachkommen, wie nach Bisec(5)-Verfeinerung von $trs(T)$. Während eines Aufrufs von REFINE MRGB wird $trs(T)$ aber durch Red verfeinert, wodurch die Triangulierung $\widehat{\mathcal{T}}_{2j+2}$ (eingeschränkt auf dieses Element) sogar echt feiner ist als \mathcal{T}_{j+1} .

Es entsteht also eine Triangulierung $\widehat{\mathcal{T}}_{2\ell}$, die feiner ist als \mathcal{T}_ℓ und nur durch wiederholte Anwendung von REFINE BISEC5 entsteht.

Lemma 4.12. *Mit den Bezeichnungen aus Algorithmus 4.9 gilt: Für alle $j \in \{0, \dots, \ell\}$ ist*

$$\mathcal{T}_j \setminus \widehat{\mathcal{T}}_{2j} = \mathcal{T}_{\cup_j}^{tmrs} := \bigcup_{k \leq j} \bigcup_{T \in \mathcal{T}_{k-1}} \{mrs(T), trs(T)\} \cap \mathcal{T}_j$$

Beweis. Der Beweis verläuft induktiv. Sei $j = 1$. Da $\mathcal{T}_0 = \widehat{\mathcal{T}}_0$ ist, und da alle Elemente aus $\mathcal{T}_1 \setminus \widehat{\mathcal{T}}_2$ durch Red-Verfeinerung entstanden sein müssen, und da nur die Mittel-Red- bzw. Top-Red-Söhne nicht gleich Elementen sind, die durch Bisec(5) Verfeinerung entstanden sind, gilt die Aussage für $j = 1$.

Wir nehmen an, die Aussage gilt für $j = k$. Laut Induktionsvoraussetzung ist also $\mathcal{T}_k \setminus \widehat{\mathcal{T}}_{2k} = \mathcal{T}_{\cup_k}^{tmrs}$. Die Triangulierung \mathcal{T}_{k+1} entsteht durch Anwendung von REFINE MRGB aus \mathcal{T}_{k+1} . Die Triangulierung $\widehat{\mathcal{T}}_{2k+2}$ entsteht durch 2-malige Anwendung von REFINE BISEC5 aus $\widehat{\mathcal{T}}_{2k}$. Sei nun T' aus $\mathcal{T}_{\cup_k}^{tmrs}$. Dann ist T' durch Red-Verfeinerung entstanden, aber nicht durch Bisec(5)-Verfeinerung. Damit ist T' aus $\mathcal{T}_{k+1} \setminus \widehat{\mathcal{T}}_{2k+2}$, woraus $\mathcal{T}_{\cup_{k+1}}^{tmrs} \subset \mathcal{T}_{k+1} \setminus \widehat{\mathcal{T}}_{2k+2}$ folgt. Sei nun T' aus $\mathcal{T}_{k+1} \setminus \widehat{\mathcal{T}}_{2k+2}$. Falls T' durch Verfeinerung eines Elements aus \mathcal{T}_k entstanden ist, so muss T' aus \mathcal{T}_{k+1}^{tmrs} sein. (Durch die Arbeitsweise von Algorithmus 4.9 sind alle Elemente, die durch Bisektionen entstanden sind, oder Elemente, die durch Red-Verfeinerung entstanden sind, aber nicht aus \mathcal{T}_{k+1}^{tmrs} sind, auch Elemente aus $\widehat{\mathcal{T}}_{2k+2}$.) Ist T' nicht durch Verfeinerung eines Elements aus \mathcal{T}_k entstanden, so ist es auch kein Element von $\widehat{\mathcal{T}}_{2k}$ und damit laut Induktionsvoraussetzung aus $\mathcal{T}_{\cup_k}^{tmrs} \subset \mathcal{T}_{\cup_{k+1}}^{tmrs}$. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt. \square

Bemerkung 4.13. Da die Menge $\mathcal{T}_{\cup_j}^{tmrs}$ nur Top- und Mittel-Red-Söhne beinhaltet, und da diese zueinander kompatibel teilbar sind, folgt, dass ein Element aus $\mathcal{T}_{\cup_j}^{tmrs}$ nur Endglied oder vorletztes Glied einer während $\widetilde{\mathcal{M}}_j := \text{RKK}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j]$ gebildeten Referenzkantenkette sein kann. Insbesondere folgt, dass die Anzahl der Elemente aus $\mathcal{T}_{\cup_j}^{tmrs} \subset \mathcal{T}_j$, für die während dieses Markierungsvorganges 3 Kanten markiert werden, (also die Elemente, die wieder Red verfeinert werden würden) kleiner gleich $\frac{1}{2}(\#\mathcal{M}_j)$ ist. Da für solche Elemente genau ein Element in Algorithmus 4.9 zur Bisektion markiert wird, das heißt in die Menge $\widehat{\mathcal{M}}_{2j+1}$ aufgenommen wird, gilt

$$\#\widehat{\mathcal{M}}_{2j+1} \leq \frac{1}{2}\#\mathcal{M}_j.$$

4.3 Aussagen für modifiziertes RGB-Verfahren

Satz 4.14. *Sei \mathcal{T}_0 eine zulässige Anfangstriangulierung. Sei $(\mathcal{T}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine durch*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_j &\subset \mathcal{T}_j \text{ beliebig} \\ \mathcal{T}_{j+1} &:= \text{REFINE MRGB}[\mathcal{T}_j, \mathcal{M}_j] \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

induktiv definierte Folge von Triangulierungen. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von den Konstanten d und D aus Definition 1.25 und damit nur von der Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0 abhängt, sodass

$$\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 \leq 2C \sum_{j=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_j \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

Beweis. Sei $\ell \in \mathbb{N}$. Sei $(\widehat{\mathcal{M}}_j)_{j \in \{0, \dots, 2\ell-1\}} := \text{MRGB TO BISEC5}[(\mathcal{T}_j)_{j \in \{0, \dots, \ell\}}, (\mathcal{M}_j)_{j \in \{0, \dots, \ell-1\}}]$ die aus Algorithmus 4.9 gewonnene Folge und sei $(\widehat{\mathcal{T}}_j)_{j \in \{0, \dots, 2\ell\}}$ die durch (4.3) definierte Folge von Triangulierungen, die durch wiederholte Anwendung von REFINE BISEC5 entstehen.

Da die Triangulierung $\widehat{\mathcal{T}}_{2\ell}$ feiner ist als Die Triangulierung \mathcal{T}_ℓ gilt

$$\#\mathcal{T}_\ell - \#\mathcal{T}_0 \leq \#\widehat{\mathcal{T}}_{2\ell} - \#\mathcal{T}_0.$$

Mit Satz 3.9 gilt

$$\leq 2C \sum_{j=0}^{2\ell-1} \#\widehat{\mathcal{M}}_j.$$

Weil für $j = 2k$ gilt

$$\#\widehat{\mathcal{M}}_j \leq \#\mathcal{M}_k,$$

und für $j = 2k + 1$ laut Bemerkung 4.13 gilt

$$\#\widehat{\mathcal{M}}_j \leq \frac{1}{2} \#\mathcal{M}_k,$$

folgt

$$\leq 3C \sum_{j=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_j.$$

Damit ist Satz 4.14 gezeigt. □

Satz 2.4 aus Abschnitt 2.2 gilt allerdings nicht für Triangulierungen, die durch wiederholte Anwendung von Algorithmus 4.1 entstanden sind.

Satz 4.15. *Sei \mathcal{T}_0 eine (zulässige) Anfangstriangulierung und seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei konforme Triangulierungen, die durch wiederholte Anwendung von REFINE MRGB aus \mathcal{T}_0 entstanden sind. Dann gilt für die Überdeckung der beiden Triangulierungen $\mathcal{T} := \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ (hier definiert als die größte Triangulierung, die feiner ist als \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2) dass die Überdeckungseigenschaft nicht gegeben ist. Das bedeutet:*

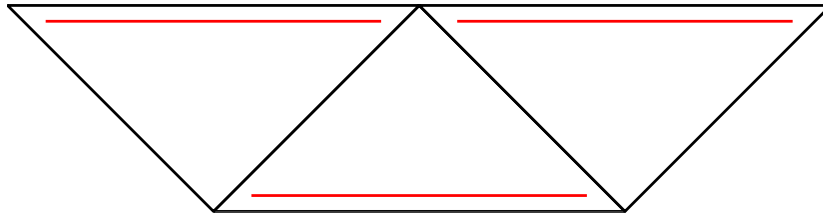
Es existiert eine Anfangstriangulierung , sodass für jede Konstante $C > 0$ gilt, dass eine konforme Triangulierung \mathcal{T}_1 und eine konforme Triangulierung \mathcal{T}_2 existiert, sodass

$$\#(\mathcal{T}_1 \setminus \mathcal{T}) > C(\#\mathcal{T}_2 - \#\mathcal{T}_0). \quad (4.5)$$

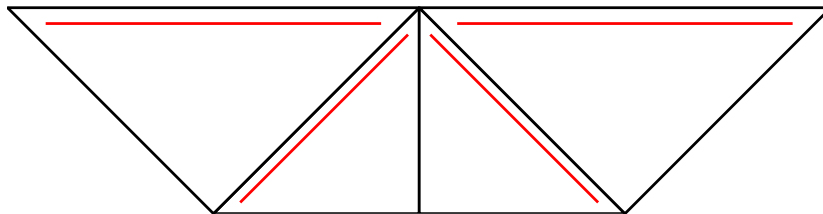
Beweis. Wir zeigen diese Aussage, indem wir uns eine Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0 , eine konforme Triangulierung \mathcal{T}_k sowie eine Folge von Triangulierungen \mathcal{T}_ℓ^j konstruieren, so dass

$$\#(\mathcal{T}_\ell^{2j} \setminus \mathcal{T}) > j(\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_0).$$

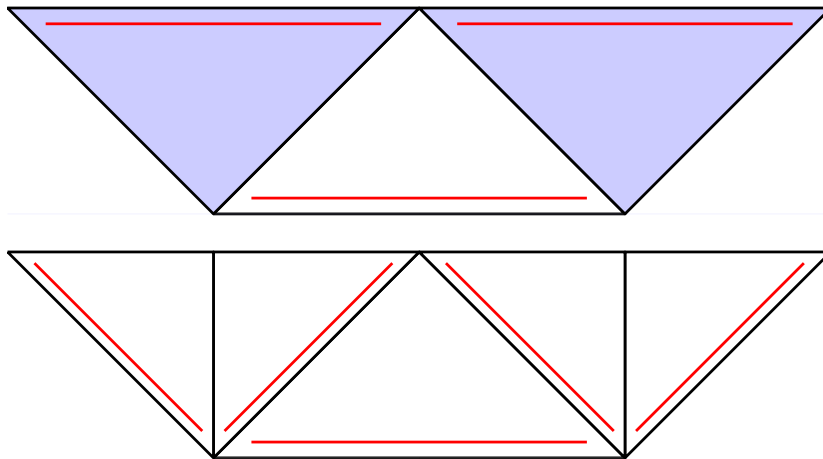
Die Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0 sei wie folgt gegeben. Die Anzahl der Elemente $\#\mathcal{T}_0 = 3$.



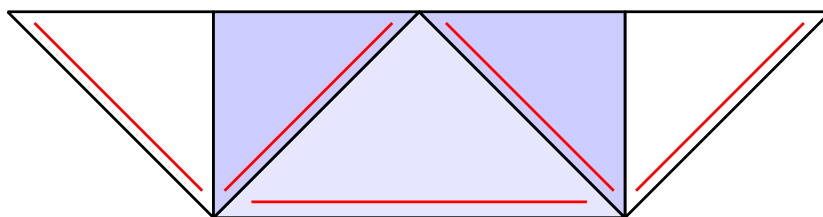
Die Triangulierung \mathcal{T}_k erfolgt durch Bisektion eines Elementes der Anfangstriangulierung. Es gilt $\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_0 = 1$.

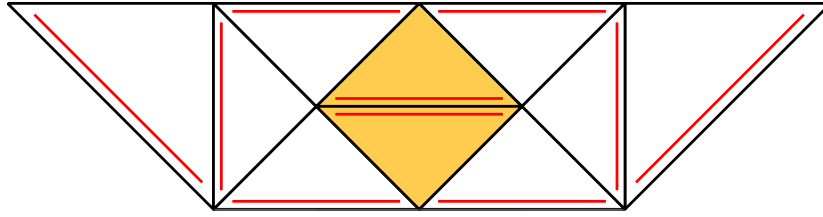


Die Folge \mathcal{T}_ℓ^j wird wie folgt konstruiert. Zunächst werden zwei Elemente der Anfangstriangulierung zur Verfeinerung markiert, und anschließend bisektiert.

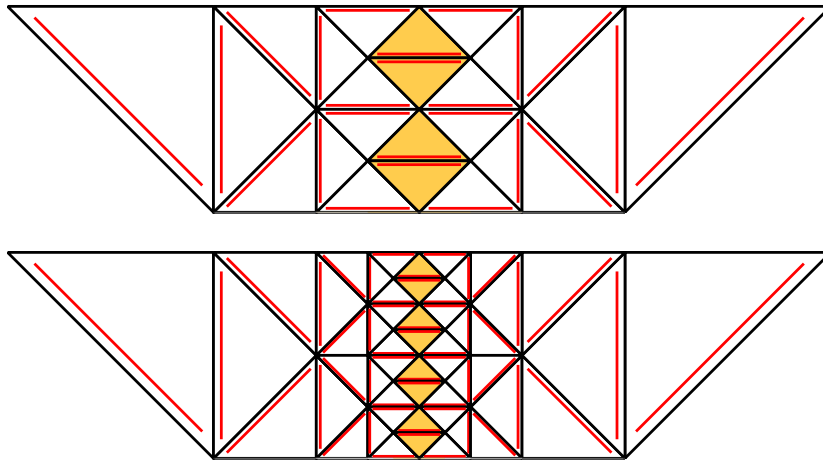


Es entsteht so die Triangulierung \mathcal{T}_ℓ^1 . Dann wird das Element, das bei der Erstellung der Triangulierung \mathcal{T}_k Green-verfeinert wurde, zur Verfeinerung markiert. Dieses Element wird Red-verfeinert. Es entsteht die Triangulierung \mathcal{T}_ℓ^2





Die Elemente aus $\mathcal{T}_\ell^2 \setminus \mathcal{T}$ sind orange markiert. Es gilt $\#(\mathcal{T}_\ell^2 \setminus \mathcal{T}) = 2$. Die Triangulierungen $\mathcal{T}_\ell^{2^j}, j \geq 2$ werden nun so erstellt, dass Elemente, die sich $\mathcal{T}_\ell^{2^{j-2}} \setminus \mathcal{T}$ befinden, nur Red-verfeinert, jedoch nie bisektiert werden dürfen. Für $j = 2, 3$ entstehen so folgende Triangulierungen $\mathcal{T}_\ell^{2^j}$:



Wie man erkennt, lässt sich diese Folge leicht fortsetzen und es gilt deswegen

$$\#(\mathcal{T}_\ell^{2^j} \setminus \mathcal{T}) = 2^j > j(\#\mathcal{T}_k - \#\mathcal{T}_0) = j.$$

Damit ist die Aussage gezeigt. □

4.4 RGB-Verfahren

Bemerkung 4.16. Das in Algorithmus 4.1 beschriebene Verfahren wird deswegen Modifiziertes RGB-Verfahren genannt, weil es eine Modifikation des ursprünglichen RGB-Verfahrens ist. Dieses arbeitet wie folgt:

Zu einer konformen Triangulierung \mathcal{T}_j , wird zunächst für jedes Dreieck $T \in \mathcal{T}$ die längste Kante als Referenzkante markiert. Auf diese Triangulierung mit den so ausgewählten Referenzkanten wird das Verfahren REFINE MRGB angewendet. Für die Anfangstriangulierung \mathcal{T}_0 wird also keine Zulässigkeitsbedingung benötigt, es wird nur Konformität gefordert. Man erkennt leicht, dass im Allgemeinen zur gleichen Triangulierung \mathcal{T}_j bei Markierung der selben Menge \mathcal{M}_j von Elementen, eine andere Triangulierung \mathcal{T}_{j+1} entsteht. Ebenfalls ist klar, dass es bei Anwendung des RGB-Verfahrens auf ein Dreieck T sein kann, dass nicht dieselben Ähnlichkeitsklassen von Dreiecken entstehen, wie bei Anwendung des MRGB-Verfahrens auf T . Selbst wenn im Dreieck T die längste Kante als Referenzkante markiert ist, muss das für die Söhne von T nicht gelten, womit die Enkel nicht in den Ähnlichkeitsklassen liegen müssen.

Satz 4.17. *Sei T ein Dreieck und sei die längste Kante von T als Referenzkante markiert. Das RGB-Verfahren führt genau dann auf dieselben Nachkommen wie das MRGB-Verfahren, wenn für den größten Winkel γ_T und für den kleinsten Winkel α_T des Dreiecks T gilt:*

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha_T)}{\sin(\gamma_T)} &\geq \frac{1}{2}, \\ \frac{\tan(\alpha_T)}{\tan(\beta_T)} &\leq \frac{1}{3}, \\ \sin(\arctan(\frac{\sin(\alpha_T) - \sin(\beta_T) - \sin(\gamma_T)}{\sin(\alpha_T) - \sin(\beta_T) - 2\sin(\gamma_T)} \tan \alpha_T)) &\leq 2 \sin(\alpha_T), \end{aligned}$$

wobei $\beta_T := \pi - (\gamma_T + \alpha_T)$.

Beweisskizze. Sei a die Länge der dem Winkel α_T gegenüberliegenden Seite und c die dem Winkel γ_T gegenüberliegende Seite. Sei außerdem d die Länge der bei NVB neu entstehenden Kante. Es muss gelten

$$a \geq c/2, \tag{4.6}$$

$$a \geq d, \tag{4.7}$$

$$d \geq b/2 \tag{4.8}$$

Aus (4.6) folgt $a/c \geq 1/2$, und mit dem Verhältnissatz $\frac{\sin(\alpha_T)}{\sin(\gamma_T)} \geq \frac{1}{2}$. Aus (4.7) folgt, dass $h \tan(\alpha_T)^{-1} \geq 3h \tan(\beta_T)^{-1}$, wobei mit h die Höhe des Dreiecks bezeichnet ist. Daraus folgt $\frac{\tan(\alpha_T)}{\tan(\beta_T)} \leq \frac{1}{3}$. Für den neu entstehenden Winkel α'_S , welcher den kleineren der beiden Winkel bezeichnet, die am Newest Vertex entstehen, muss wegen (4.8) $\sin(\alpha'_S) \leq 2 \sin(\alpha_T)$ gelten. Es gilt mit $\tan(\alpha_T) = h/q$ sowie $\tan(\alpha'_S) = h/(q - c/2)$ nach Berechnung von q mit dem Kosinussatz $\alpha'_S = \arctan(\frac{\sin(\alpha_T) - \sin(\beta_T) - \sin(\gamma_T)}{\sin(\alpha_T) - \sin(\beta_T) - 2\sin(\gamma_T)} \tan \alpha_T)$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Literatur

- [1] M. AURADA, P. GOLDENITS, D. PRAETORIUS: *Convergence of Data Perturbed Adaptive Boundary Element Methods*, ASC Report **40/2009**, Institute for Analysis and Scientific Computing, Vienna University of Technology, Wien, 2009.
- [2] P. BINEV, W. DAHMEN, R. DEVORE: *Adaptive Finite Element Methods with Convergence Rates*, Numer. Math. **97** (2004), 219-268.
- [3] J. CASCON, C. KREUZER, R. NOCHETTO, K. SIEBERT: *Quasi-Optimal Convergence Rate for an Adaptive Finite Element method*, SIAM J. Numer. Anal. **46** (2008), 2524-2550.
- [4] D. PRAETORIUS: *Finite Elemente Methode, Skript zur Vorlesung*, Institute for Analysis and Scientific Computing, Vienna University of Technology, Wien, 2009.
- [5] R. STEVENSON: *The Completion of Locally Refined Simplicial Partitions Created by Bisection*, Math. Comp. **77** (2008), 227-241.