

Hardy-Raum Methoden zur numerischen Lösung von Streu- und Resonanzproblemen auf unbeschränkten Gebieten

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Lothar Nannen
aus Oldenburg (Oldb)

Göttingen 2008

D7

Referent: Prof. Dr. Thorsten Hohage

Korreferent: Prof. Dr. Rainer Kreß

Tag der mündlichen Prüfung: 9. April 2008

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, die zum Entstehen dieser Arbeit besonders beigetragen haben.

Dabei ist vor allem mein Doktorvater Prof. Dr. Thorsten Hohage zu nennen, der mir die Möglichkeit gegeben hat, ein überaus interessantes Gebiet in der Numerischen Mathematik genauer kennenzulernen. Seine Ratschläge haben mir sehr geholfen, meinen Weg vorbei an theoretischen und technischen Schwierigkeiten zu finden.

Mein Dank gilt Prof. Dr. Rainer Kreß, der das Korreferat der Arbeit übernommen hat, und Prof. Dr. Ulrich Mertins, der mich während meines Diplomstudiums auf den richtigen Weg gebracht hat.

Ebenfalls danken möchte ich den Kollegen vom Zuse Institut Berlin PD Dr. Frank Schmidt, Lin Zschiedrich und Dr. Achim Schädle für die hilfreichen Diskussionen während meiner Besuche in Berlin. Dank ihrer Hilfe ist es möglich gewesen, die in dieser Arbeit vorgestellten numerischen Methoden in das dort entwickelte Programmpaket JCMWave zu integrieren und auf leistungsfähigen Computern zu testen.

In diesem Zusammenhang möchte ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Förderung des gemeinsamen Projektes mit dem Zuse Institut Berlin unter der Nummer Ho 2551/2-1 danken.

Prof. Dr. Joachim Schöberl danke ich für seine Hilfe bei der Implementierung der Methoden in das Programm NGSolve.

Weiterhin gilt mein Dank meinen Kollegen und Freunden aus dem Institut für Numerische und Angewandte Mathematik in Göttingen. Insbesondere Jochen Schulz und Eric Heinemeyer waren eine große Hilfe bei Computerproblemen aller Art und haben mit ihrer Vorlage dieser Arbeit das passende Aussehen verliehen.

Zu guter Letzt bleibt der Dank an Inge und Günter Tilli für ihr energisches Eintreten für die neue deutsche Rechtschreibung und an meine Eltern, die mich immer unterstützt und in meinen Entscheidungen bestärkt haben.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| 1. Einleitung | 1 |
| 2. Helmholtz Probleme auf beschränkten Gebieten | 9 |
| 2.1. Sobolev-Räume | 10 |
| 2.2. Variationsformulierung | 11 |
| 2.3. FE-Diskretisierung | 13 |
| 2.4. Konvergenz der FEM | 18 |
| 2.5. Eigenwertprobleme | 21 |
| 3. Helmholtz Probleme auf unbeschränkten Gebieten | 27 |
| 3.1. Streuprobleme | 28 |
| 3.1.1. Polarkoordinaten und Laplace-Beltrami-Operator | 28 |
| 3.1.2. Streuung an einer Kugel | 30 |
| 3.1.3. DtN-Operator | 33 |
| 3.1.4. Eindeutigkeit und Äquivalenz | 35 |
| 3.2. Transparente Randbedingungen | 36 |
| 3.2.1. Lokale absorbierende Randbedingungen | 37 |
| 3.2.2. Klassische Infinite Elemente Methoden | 38 |
| 3.2.3. PML Methode | 40 |
| 3.3. Resonanzprobleme | 41 |
| 4. Eine transparente Randbedingung basierend auf der Polbedingung | 45 |
| 4.1. Polbedingung und Hardy-Räume | 45 |
| 4.1.1. Polbedingung | 46 |
| 4.1.2. Hardy-Räume | 48 |
| 4.1.3. Hardy-Raum Formulierung der Polbedingung | 52 |
| 4.2. Transformation der Helmholtz-Gleichung | 53 |
| 4.3. Linienmethode | 56 |
| 5. Hardy-Raum Infinite Elemente Methode | 59 |
| 5.1. Variationsformulierung der Helmholtz-Gleichung | 59 |
| 5.1.1. Eindimensionaler Fall | 59 |
| 5.1.2. Mehrdimensionale Variationsformulierung | 65 |
| 5.2. Galerkin-Diskretisierung | 70 |
| 5.2.1. Allgemeines Vorgehen | 71 |
| 5.2.2. Eindimensionaler Fall | 72 |
| 5.2.3. Sphärischer Koppplungsrand | 73 |
| 5.2.4. Allgemeine Koppplungsänder | 76 |

| | |
|--|------------|
| 5.3. Konvergenz der HSIEM | 79 |
| 5.3.1. Eindimensionales Problem | 79 |
| 5.3.2. Separiertes Problem | 82 |
| 6. Numerische Beispiele | 93 |
| 6.1. Kondition und Konvergenz | 94 |
| 6.2. Beispiele mit sphärischem Kopplungsrand | 97 |
| 6.3. Beispiele mit allgemeineren Außenräumen | 99 |
| 7. Zusammenfassung und Ausblick | 105 |
| A. Laplace- und Fourier-Transformation | 109 |
| Index | 113 |
| Symbolverzeichnis | 115 |
| Literaturverzeichnis | 119 |

1. Einleitung

Diese Arbeit ist der numerischen Behandlung eines Phänomens gewidmet, das bei der Ausbreitung von Wellen in inhomogenen Medien vorkommt: Die Streuung. Im einfachsten Fall kann man sich darunter eine Wasserwelle vorstellen, die auf einen festen Gegenstand, wie z.B. einen Stein oder ein Schiff trifft, diesen umfließt und dabei interessante Muster ausbildet.

Ein weiteres anschauliches Beispiel ist die Ausbreitung von Straßenlärm. Mit speziellen Lärmschutzwänden wird an vielen Autobahnen versucht, die Schallwellen zu dämpfen, um so die Lärmbelastung der Anwohner so weit wie möglich zu reduzieren. Dass dennoch eine Lärmbelastung nie ganz vermieden werden kann, liegt an Streu- bzw. Beugungsphänomenen. Selbst wenn der direkte Weg zwischen Autobahn und Wohnhäusern durch die Wand versperrt ist, so pflanzt sich der Schall durch den Boden oder auch durch den Luftraum oberhalb der Mauer fort und erreicht somit indirekt die Häuser.

Solche akustischen Wellen lassen sich mit Hilfe des Druckes $p(x, t)$ als Lösungen der skalaren Wellengleichung

$$\Delta_x p(x, t) + \frac{1}{c(x)^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(x, t) = f(x, t) \quad (1.1)$$

beschreiben. $c(x)$ ist dabei die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle und $f(x, t)$ die Quelle oder Anregung der Welle. Wenn wir die Anregung als zeitharmonisch annehmen, d.h. $f(x, t) = \Re\{l(x)e^{-i\kappa t}\}$ mit der Frequenz $\kappa > 0$, so ist auch

$$p(x, t) = \Re\{u(x)e^{-i\kappa t}\}, \quad (1.2)$$

und u löst die skalare Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u + \frac{\kappa^2}{c^2} u = l. \quad (1.3)$$

Diese Gleichung steht im Zentrum der vorliegenden Arbeit und beschreibt das Verhalten von skalaren Wellen. Von besonderem Interesse ist die Abhängigkeit der Lösung u von der Frequenz κ bei gleichbleibender Ausbreitungsgeschwindigkeit $c(x)$ und Anregung l . Üblicherweise treten bei bestimmten Frequenzen κ besonders starke oder auch ungewöhnliche Reaktionen des Systems aufgrund der Anregung durch l auf. Solche Frequenzen werden Resonanzfrequenzen genannt.

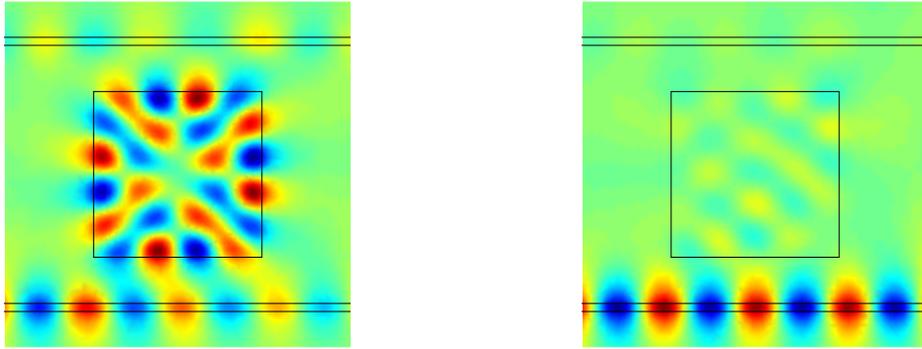


Abbildung 1.1.: 2 Wellenleiter mit quadratischem Einschluss aus [Ham02] bei unterschiedlichen Frequenzen

Physikalische Motivation

In Abbildung 1.1 ist ein Beispiel aus dem Bereich der integrierten optischen Bauteile dargestellt, bei dem zwei Wellenleiter über einen quadratischen Einschluss des Hintergrundmediums aneinander gekoppelt werden. Wenn in dem unteren Wellenleiter eine geeignete Welle mit einer von κ abhängigen Frequenz κ_{x_2} entlangläuft, so springt diese auf den oberen Wellenleiter über, wenn κ eine Resonanzfrequenz des Systems ist. Für andere Frequenzen ist dieses Verhalten, wie Abbildung 1.2 zu entnehmen ist, sehr schwach ausgeprägt. Der Einschluss wirkt somit als Frequenzfilter, da nur Wellen mit bestimmten Resonanzfrequenzen durchgelassen werden. In [Ham07] werden weitere Beispiele solcher Einschlüsse und deren Optimierung vorgestellt.

In diesem Beispiel sind die Resonanzfrequenzen gewollt und deren Ausnutzung wesentlicher Bestandteil der Bauteile. Ähnlich ist dies bei den in [Sch07a] vorgestellten eindimensionalen Problemen in der Röntgen-Spektroskopie. Dort wird auf Basis der Theorie von [LVLH92] und der in dieser Arbeit vorgestellten Hardy-Raum Methoden die Abhängigkeit der Lösung in einer Umgebung um die Resonanzfrequenzen untersucht.

Im Gegensatz dazu sind die in [HHKS07] untersuchten Resonanzfrequenzen an den Flügeln eines Flugzeuges ungewollt und störend. In [PPAGD03] wurde über eine Messung des Lärmspektrums eines solchen Flügels in einem Windkanal berichtet. Das Spektrum zeigt deutlich ausgeprägte Spitzen des Lärmpegels bei bestimmten Frequenzen. Um die Lärmbelastung der Anwohner von Flughäfen so gering wie möglich zu halten, wäre es sinnvoll, solche Resonanzfrequenzen weitestgehend zu vermeiden.

Das wohl bekannteste und am besten dokumentierte Beispiel einer Resonanzkatastrophe ist der Einsturz der auch unter dem Spitznamen „Galloping Gertie“ bekannten Tacoma-Narrows-Brücke am 7.11.1940. Die erst 7 Monate vorher eingeweihte Hängebrücke hatte sich immer wieder bei leichten, aber konstanten Seitenwinden aufgeschaukelt, weil sich auf der dem Wind abgewandten Seite Wirbel ausbildeten, die sich in regelmäßigen Abständen von der Brücke ablösten. Dadurch verursachten

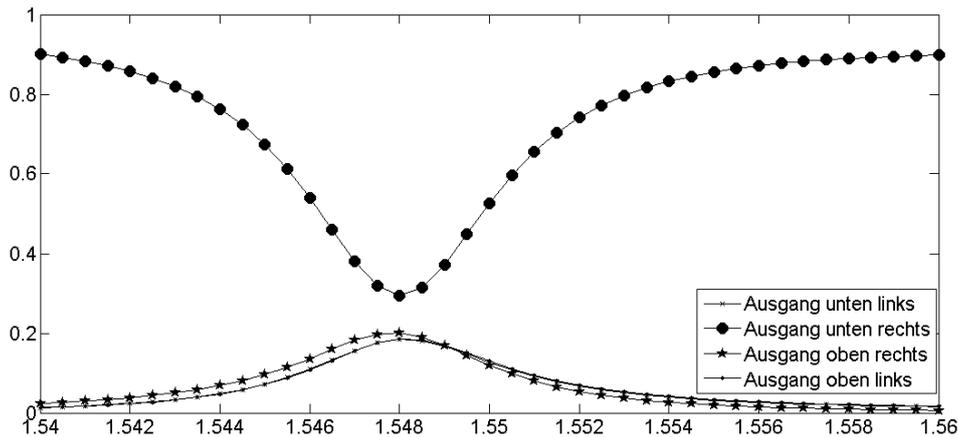


Abbildung 1.2.: Austrittsenergie an den Enden der Wellenleiter aus Abb. 1.1 in Abhängigkeit von der Frequenz, berechnet mit dem Beispielskript aus [BKSZ03]

sie eine zeitharmonische Anregung, die unglücklicherweise in der Resonanzfrequenz der Brücke erfolgte (siehe [BS91, Lar00]). Nach diesem Einsturz wurden neue Brücken häufig im Windkanal getestet, um solchen Katastrophen vorzubeugen.

Ebenfalls mit Resonanzfrequenzen in Verbindung gebracht wird der Einsturz einer Brücke in Angers (1850), als sie von französischen Soldaten im Gleichschritt passiert wurde. Obgleich nicht nachgewiesen ist, dass der Einsturz tatsächlich auf eine durch den Gleichschritt der Soldaten angeregte Resonanzfrequenz der Brücke zurückzuführen ist, überqueren seitdem Soldaten Brücken häufig nicht im Gleichschritt.

Auch wenn die beiden Beispiele für Resonanzkatastrophen bei Brücken nicht mit den in dieser Arbeit vorgestellten Methoden für skalare Probleme behandelbar sind, so veranschaulichen sie die physikalische Bedeutung von Resonanzfrequenzen.

Mathematische Formulierung

Auch aus mathematischer Sicht spielen Resonanzfrequenzen eine wesentliche Rolle bei der Frage der Lösbarkeit der Helmholtz-Gleichung (1.3). So ist die Helmholtz-Gleichung auf beschränkten Gebieten mit $c \equiv 1$ genau dann eindeutig lösbar, wenn κ^2 kein Eigenwert des negativen Laplace-Operators Δ ist. Da sich dem Laplace-Operator auf beschränkten Gebieten ein selbstadjungierter Operator zuordnen lässt, sind diese Eigenwerte alle reell.

Auf unbeschränkten Gebieten der Form $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus K$ mit einer kompakten Teilmenge K des \mathbb{R}^d ist dagegen die Helmholtz-Gleichung bei geeigneter rechter Seite für alle

1. Einleitung

positiven Frequenzen κ eindeutig lösbar. Die Eigenwerte κ^2 von

$$-c^2\Delta u = \kappa^2 u \quad \text{auf } \Omega, \quad (1.4a)$$

$$u|_{\partial K} = 0 \quad \text{auf } \partial K, \quad (1.4b)$$

$$u \quad \text{erfüllt eine Ausstrahlungsbedingung} \quad (1.4c)$$

sind in diesem Fall komplex, und deren Wurzeln mit positivem Realteil werden nach der Theorie von [LP67] Resonanzen genannt. Der Realteil dieser Resonanzen entspricht den Resonanzfrequenzen, während der Imaginärteil als Maß für die Dämpfung angesehen werden kann. Äquivalente Definitionen der Resonanzen über Pole der meromorphen Fortsetzung der Resolvente sind z.B. in [HS96] zu finden.

Besonderes Augenmerk ist auf die Wahl der Funktionenräume für die zu den Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen u zu richten. In [HS96] wird nachgewiesen, dass der Laplace-Operator auf dem Sobolev-Raum $H^2(\mathbb{R})$ der reellen Achse keine Eigenwerte besitzt. Dies ist kein Widerspruch zur Existenz von Resonanzen nach [LP67], da die Eigenfunktionen dort zwar eine bestimmte Ausstrahlungsbedingung erfüllen, jedoch nicht notwendig in $H^2(\mathbb{R})$ liegen müssen.

Es erscheint sinnvoll an die Eigenfunktionen eine Ausstrahlungsbedingung zu stellen, denn zur eindeutigen Lösbarkeit der Helmholtz-Gleichung auf beschränkten Gebieten werden Randbedingungen an die Lösung u auf den Rändern des Gebietes benötigt. In diesem Fall liegt ein Teil des Randes im Unendlichen und eine „Randbedingung“ im Unendlichen beschreibt das Verhalten der Lösung für große Argumente. Für die vorliegende Arbeit sind solche Ausstrahlungsbedingungen von entscheidender Bedeutung.

Betrachten wir zunächst eine dreidimensionale Kugelwelle der Form

$$u^\pm(x) = \frac{e^{\pm i\frac{\kappa}{c}|x|}}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \kappa > 0, \quad c > 0 \text{ konstant.} \quad (1.5)$$

u^\pm ist eine Lösung der Helmholtz-Gleichung und mit (1.2) ist der zugehörige Druck rotationssymmetrisch

$$p^\pm(x, t) = p^\pm(|x|, t) = \frac{\cos\left(\frac{\kappa}{c}(\pm|x| - ct)\right)}{|x|}. \quad (1.6)$$

Es gelten die Relationen

$$p^+(|x| + c, t + 1) = \frac{|x|}{|x| + c} p^+(|x|, t), \quad p^-(|x| - c, t + 1) = \frac{|x|}{|x| - c} p^-(|x|, t), \quad |x| > c. \quad (1.7)$$

Im ersten Fall hat sich der Druck nach einem Zeitschritt um c nach außen bewegt und dabei um den Faktor $\frac{|x|}{|x|+c} < 1$ abgeschwächt, während sich im zweiten Fall der Druck auf den Nullpunkt zubewegt und dabei immer mehr zunimmt. Für p^- ist somit im Nullpunkt eine Senke mit unendlich hohem Druck. Physikalisch wesentlich sinnvoller ist p^+ , da dort der Nullpunkt als Quelle der Kugelwelle betrachtet werden kann und die Kugelwelle sich mit der Geschwindigkeit c von dieser entfernt.

Ausgehend von dieser Beobachtung kann eine Ausstrahlungsbedingung für die Dimensionen $d = 1, 2, 3$ und $\kappa > 0$ definiert werden durch

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial |x|} - i \frac{\kappa}{c} \right) u(x) = 0 \quad \text{gleichmäßig in } \frac{x}{|x|}. \quad (1.8)$$

(1.8) heißt Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung. u^+ erfüllt diese Ausstrahlungsbedingung, u^- dagegen nicht. Genauere physikalische Begründungen für beliebige, ausstrahlende Wellen sind z.B. in [Jon86] zu finden.

Im Falle der oben angesprochenen komplexen Resonanzen ist diese Ausstrahlungsbedingung nicht sinnvoll, da für $d = 2, 3$ und κ mit negativem Imaginärteil die Funktion u^- und nicht die Funktion u^+ (1.8) erfüllt. Für diese Fälle existieren äquivalente Ausstrahlungsbedingungen, z.B. über eine Reihendarstellung von u in Form von (sphärischen) Hankel-Funktionen $\mathcal{H}_\nu^{(1)}$ erster Art [CK98, Jon86, Wat95]

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)} \left(\frac{\kappa}{c} |x| \right) \Phi_n \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad (1.9)$$

wobei Φ_n ein Orthonormalsystem des Laplace-Beltrami-Operators auf der $(d-1)$ -dimensionalen Einheitssphäre ist.

Alternativ kann auch die sogenannte Polbedingung [SD95, Sch02, HSZ03a] verwendet werden, welche die theoretische Grundlage der in dieser Arbeit vorgestellten numerischen Methoden zur Berechnung von Resonanzen bildet. Auslaufende Wellen werden dabei anhand deren Laplace-Transformierten in radialer Richtung charakterisiert. Der Name der Bedingung resultiert aus dem eindimensionalen Fall. Dort hat die Laplace-Transformierte einer Lösung der Helmholtz-Gleichung eine meromorphe Fortsetzung auf \mathbb{C} mit zwei zueinander konjugierten Polen: Der Pol mit positivem Imaginärteil repräsentiert eine auslaufende Welle, der mit negativem Imaginärteil eine einlaufende Welle. In höheren Dimensionen ist eine Welle genau dann auslaufend, wenn die Laplace-Transformierte eine holomorphe Fortsetzung auf die negative imaginäre Halbebene besitzt.

Diese Formulierung einer Ausstrahlungsbedingung ist, ähnlich wie die Formulierung über die (sphärischen) Hankel-Funktionen, vom numerischen Standpunkt aus unhandlich. Mit den Ergebnissen aus [HSZ03a] lässt sich nachweisen, dass die Einschränkung auf \mathbb{R} der holomorphen Fortsetzung der Laplace-Transformierten einer auslaufenden Welle im Hardy-Raum $H^-(\mathbb{R})$ liegt.

Funktionen aus $H^-(\mathbb{R})$ können nach [Har15, Dur70, Hof62] als L^2 -Randfunktionen von in der negativen imaginären Halbebene holomorphen Funktionen aufgefasst werden. Es lässt sich zeigen, dass $H^-(\mathbb{R})$ mit Hilfe der Möbius-Transformation unitär auf den Hardy-Raum $H^+(S^1)$ abgebildet werden kann, der analog zu $H^-(\mathbb{R})$ aus L^2 -Randwerten von auf der komplexen Einheitsscheibe holomorphen Funktionen besteht. Für diesen Raum existiert mit den Monomen $\{z^0, z^1, \dots\}$ eine einfache, bezüglich des L^2 -Innenproduktes orthogonale Basis.

Numerische Verfahren

Numerisch kann dies durch Transformation der Helmholtz-Gleichung in diesen Raum genutzt werden, und es entsteht eine neue Klasse von numerischen Verfahren zur Lösung von Streu- und Resonanzproblemen. In [HSZ02, Sch02, SHK⁺07] werden einige auf der Polbedingung basierende Verfahren zur numerischen Lösung der Helmholtz-Gleichung ohne Verwendung der Hardy-Räume vorgestellt; zeitabhängige Probleme werden in [RSSZ07] mit Hilfe der Hardy-Räume behandelt.

Die in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Hardy-Raum Infinite Elemente Methoden (**HSIEM**) sind in [HN07] zusammengefasst. Sie ähneln in der Struktur den klassischen Infinite Elemente Methoden [DI01, DG98, Ih198], welche auf der Ausstrahlungsbedingung (1.9) beruhen. Diese Methoden sind aufgrund des κ im Argument der (sphärischen) Hankel-Funktionen im Gegensatz zu den **HSIEM** nichtlinear in κ^2 und führen deshalb bei der numerischen Berechnung von Resonanzproblemen (1.4) auf nicht-lineare Eigenwertprobleme.

In [LVLH92] werden zwar auf ähnliche Weise Resonanzprobleme gelöst, der Aufwand ist jedoch sehr groß. Ebenfalls auf nichtlineare Eigenwertprobleme führen die in [LVLH92] auch verwendeten Randelementmethoden [GKW03, SS04], bei denen von zentraler Bedeutung ist, dass das Rechengebiet Ω außerhalb eines künstlichen Schnitttrandes homogen, d.h. $c \equiv \text{konst.}$, ist. Auf diesem Schnitttrand können dann Integraldarstellungen der ausstrahlenden Lösung abgeleitet werden [CK98, Kre99].

Andere häufig bei Streuproblemen verwendete Methoden, wie z.B. lokale, absorbierende Randbedingungen [BGT82, EM77, Giv91, GK95], sind zum großen Teil nicht bei Resonanzproblemen anwendbar, weil sie für κ mit negativem Imaginärteil die Ausstrahlungsbedingung nicht hinreichend nachbilden.

Die hier verwendeten Hardy-Raum Methoden führen dagegen zu linearen Eigenwertproblemen und können auch auf inhomogene Außenräume wie in Abbildung 1.1 angewendet werden. Vorgestellt werden zwei unterschiedliche Varianten: Die oben bereits erwähnte Infinite Elemente Methode und eine Art Linienmethode.

Letztere erinnert an die bei zeitabhängigen Problemen häufig verwendeten Linienmethoden [GR94, KA00], da sie $x \in \Omega$ in eine radiale Variable $r = |x|$ und eine winkelartige $\hat{\mathbf{x}} = \frac{x}{|x|}$ trennt und beide in unterschiedlicher Art und Weise behandelt. Die Anteile bezüglich $\hat{\mathbf{x}}$ werden mit einer üblichen Finiten Elemente Methode behandelt, während die Anteile bezüglich r in den Hardy-Raum $H^+(S^1)$ transformiert und dort auf die Lineare Hülle der ersten $N_r + 1$ Basisfunktionen $\{z^0, \dots, z^{N_r}\}$ projiziert werden.

Die **HSIEM** ist eine spezielle Finite Elemente Methode: Die Helmholtz-Gleichung wird mit geeigneten Testfunktionen multipliziert und über das unbeschränkte Rechengebiet Ω integriert. Nach einer partiellen Integration zur Reduktion der Ableitungsordnung wird das entstehende Integral in Polarkoordinaten überführt und die radialen Anteile in den Hardy-Raum $H^+(S^1)$ transformiert. So entsteht ein Variationsproblem, welches mit Hilfe einer Galerkin-Methode diskretisiert werden kann. Im Hardy-Raum $H^+(S^1)$ werden dazu wie bei der Linienmethode die trigonometrischen Monome als Ansatzfunktionen verwendet.

Mit den Ergebnissen dieser Arbeit kann die **HSIEM** auch als eine Art *Perfectly Matched Layer* (kurz **PML**) Methode aufgefasst werden. In ihr wird die ausstrahlende Lösung der Helmholtz-Gleichung in radialer Richtung derart gedämpft, dass die gedämpfte Lösung exponentiell abfällt. An einem zu wählenden Schnitttrand wird schließlich eine einfache Dirichletsche oder Neumannsche Nullrandbedingung gesetzt und so das unbeschränkte Gebiet auf ein beschränktes zurückgeführt, welches mit den üblichen Finite Elemente Methoden behandelt werden kann.

Die Idee der **PML** Methode ist auf eine unter dem Namen *complex rescaling* [Moi98] in der Molekularphysik bekannte Methode zurückzuführen. Bérénger hat in [Ber94] die **PML** Methode auf elektromagnetische Wellen angewandt, und in [CM98, BP07, HSZ03b] wurde die Konvergenz der Methode für elektromagnetische bzw. akustische Streuprobleme nachgewiesen. In [HSZ03b] wurde zudem unter bestimmten Voraussetzungen die Äquivalenz der **PML** Methode, bzw. der dazu verwendeten Ausstrahlungsbedingung, mit der Polbedingung gezeigt.

Die **PML** Methode ist zur Zeit die wohl am meisten verwendete Methode zur numerischen Lösung von Streuproblemen [ZKSS06, BHNPR06, CL05] und auch Resonanzproblemen [HHKS07, HSS⁺04, ZBKS06, ZBK⁺05] mittels Finiter Elemente Methoden. Aufgrund der Vielzahl der zu wählenden Parameter wie des Dämpfungstensors und des Abschneiderands müssen die Ergebnisse in jedem Fall kritisch überprüft werden. Wenn z.B. der Abschneiderand zu eng um das zu betrachtende Gebiet gelegt wird, ist die gedämpfte Lösung noch nicht weit genug auf 0 abgefallen, und der Fehler durch eine Dirichletsche Nullrandbedingung ist relativ groß.

Eine gute Alternative dazu bilden die in dieser Arbeit vorgestellten Hardy-Raum Methoden, da sie keinen Abschneiderand benötigen, sondern immer das komplette Rechengebiet behandeln.

Gliederung der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich in 7 Teile. Nach dieser Einleitung wird im 2. Kapitel die numerische Lösung der Helmholtz-Gleichung auf beschränkten Gebieten mittels Finiter Elemente Methoden vorgestellt. Im letzten Abschnitt des Kapitels werden Eigenwertprobleme behandelt, die das Analogon auf beschränkten Gebieten zu den Resonanzproblemen auf unbeschränkten Gebieten bilden.

Im 3. Kapitel folgt die Erweiterung der Probleme auf unbeschränkte Gebiete mit einigen klassischen Resultaten zur Streutheorie und einigen der bereits angesprochenen numerischen Verfahren zur Behandlung des unbeschränkten Gebietes. Diese sind unter dem Namen *Transparente Randbedingungen* zusammengefasst. Ebenso gebräuchlich in der Literatur sind die Namen *absorbierende* oder *nicht-reflektierende Randbedingungen*. Den Schluss des Kapitels bilden theoretische Aussagen über Resonanzprobleme bei Helmholtz-Problemen, ohne auf deren numerische Behandlung einzugehen.

Zu Beginn des 4. Kapitels werden theoretische Grundlagen zur Polbedingung zusammengefasst und in den Kontext von Hardy-Räumen gestellt. Anschließend wird

1. Einleitung

die nötige Transformation der Helmholtz-Gleichung in den Hardy-Raum $H^+(S^1)$ erläutert und auf dieser Basis die Linienmethode **HSLM** vorgestellt.

Das 5. Kapitel beschreibt die Hardy-Raum Infinite Elemente Methode (**HSIEM**) als Galerkin-Methode, basierend auf einer Variationsformulierung des Streu- bzw. Resonanzproblems. Dazu wird anhand eines eindimensionalen Problems erläutert, wie sich die auftretenden unendlichen Integrale in den Hardy-Raum $H^+(S^1)$ transformieren lassen. In höheren Dimensionen treten durch die Transformation auf Polarkoordinaten technische Schwierigkeiten auf, die im zweiten Unterabschnitt des Kapitels behandelt werden. Bei der nachfolgenden Erläuterung der Assemblierung der durch die Galerkin-Methode entstehenden Matrizen dient ebenfalls der eindimensionale Fall als Veranschaulichung der etwas komplizierten Behandlung des Variationsproblems in höheren Dimensionen. Im letzten Abschnitt des Kapitels werden Konvergenzaussagen zur **HSIEM** vorgestellt.

Die Hardy-Raum Methoden wurden in unterschiedlichen Programmpaketen implementiert und getestet. Von diesen Tests finden sich im 6. Kapitel einige Beispiele. Eine in Matlab [[The71](#)] programmierte Version dient hauptsächlich zu Tests bezüglich der Konvergenzordnung der Verfahren und der Kondition der entstehenden Matrizen. Eine spezielle symmetrische Variante der **HSIEM** wurde in **NGsolve** [[Sch07b](#)], einem Finite Elemente Programm basierend auf dem Gittergenerator **netgen** [[Sch97](#)], implementiert. Diese Variante ist ohne weitere Probleme auch in andere Finite-Elemente Programme zu integrieren, bleibt jedoch auf spezielle, homogene Außenräume beschränkt. Um Beispiele wie in [Abbildung 1.1](#) berechnen zu können, ist eine etwas aufwendigere Methode in das Programm **JCMWave** [[JCM08](#)] integriert worden.

Den Schluss der Arbeit bildet in Kapitel 7 die Zusammenfassung der vorgestellten Verfahren mit einer Erörterung der Vor- und Nachteile sowie einen Ausblick auf mögliche Erweiterungen und Verbesserungen.

2. Helmholtz Probleme auf beschränkten Gebieten

Es sei $G \subset \mathbb{R}^d$ eine offene, beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^d mit Lipschitz-Rand ∂G . Ein solcher Rand ∂G kann durch endlich viele offene Mengen U_i überdeckt werden, $\partial G \cap U_i$ ist der Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion und $G \cap U_i$ liegt jeweils auf einer Seite dieses Graphen (vergleiche [Alt99, A 6.2]). G wird kurz als Lipschitz-Gebiet bezeichnet. Analog können C^k -Gebiete definiert werden, wenn $\partial G \cap U_i$ der Graph einer k -mal stetig differenzierbaren Funktion ist.

Seien weiter $\kappa \in \mathbb{C}$ eine Wellenzahl mit positivem Realteil $\Re(\kappa) > 0$ und $u : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Lösung der (skalaren) Helmholtz-Gleichung

$$-\Delta u(x) - \kappa^2 u(x) = l(x), \quad x \in G. \quad (2.1)$$

Ist $u \in C^2(G)$, d.h. auf G zweimal stetig differenzierbar, so ist der Laplace-Operator Δ in kartesischen Koordinaten x_j durch $\Delta := \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2$ wohldefiniert. In diesem Fall wird u eine *klassische* Lösung von (2.1) genannt. In dem nächsten Abschnitt werden wir an u schwächere Regularitätsvoraussetzungen stellen und den Laplace-Operator entsprechend im schwachen Sinne interpretieren.

Zusätzlich zu (2.1) stellen wir an u folgende Randbedingungen

$$(D) \quad u|_{\partial G}(x) = 0, \quad x \in \Gamma \subset \partial G, \quad (2.2a)$$

$$(N) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial G}(x) = 0, \quad x \in \partial G \setminus \Gamma. \quad (2.2b)$$

ν ist dabei der nach außen gerichtete Normalenvektor, der nach [Alt99, A 6.5(3)] für Lipschitz-Gebiete fast überall existiert. Zur Vermeidung von Schwierigkeiten an den Rändern von Γ und $\partial G \setminus \Gamma$ sei $\partial \Gamma = 0$, d.h. der Rand ∂G zerfällt in zwei disjunkte Teilmengen. Wir werden auf die Eindeutigkeit dieses Problems im letzten Abschnitt dieses Kapitels eingehen, da diese mit den dort dargestellten Eigenwertproblemen zusammenhängt. Es wird sich herausstellen, dass der Laplace-Operator auf beschränkten Gebieten höchstens abzählbar viele, reelle Eigenwerte besitzt und dass die Gleichung (2.1) mit den Randbedingungen (2.2) genau für diejenigen κ nicht eindeutig lösbar ist, die Wurzeln der Eigenwerte des Laplace-Operators sind.

Bemerkung 2.1. *Die Wahl von homogenen Randbedingungen ist keine wesentliche Einschränkung: Sei v Lösung von (2.1) mit $v|_{\partial G} = g_d$ auf Γ und $\frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\partial G} = g_n$ auf $\partial G \setminus \Gamma$. Sofern die Funktionen g_d und g_n und der Rand ∂G hinreichend glatt sind, existiert eine Funktion $u^* \in C^2(G)$, die diese Randbedingungen erfüllt. $u := u^* - v$ ist dann eine Lösung von (2.1) mit $\tilde{l} := -l - \Delta u^* - \kappa^2 u^*$ und den Randbedingungen (2.2).*

2. Helmholtz Probleme auf beschränkten Gebieten

Bemerkung 2.2. Die Helmholtz-Gleichung (2.1) beschreibt das Verhalten von skalaren Wellen in homogenen Medien. Eine wesentlich allgemeinere Formulierung ist

$$-\nabla \cdot A(x)\nabla u(x) + b(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) = l(x) \quad (2.3)$$

mit $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$, $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ und $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Unter bestimmten Voraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen A , b und c wie z.B. Glattheitsbedingungen lassen sich auch solche Gleichungen mit der in den nächsten Kapiteln dargestellten Theorie behandeln. Insbesondere sollte A gleichmäßig positiv definit sein, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$ unabhängig von $x \in \mathbb{R}^d$, sodass $\xi^\top A(x)\xi \geq C\|\xi\|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$. In diesem Falle ist (2.3) eine elliptische Differentialgleichung.

Wir werden in diesem sowie auch in den nächsten Kapiteln die einfachere Gleichung (2.1) betrachten und auf eine Darstellung der allgemeinen Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen verzichten.

2.1. Sobolev-Räume

Zur Vorbereitung der numerischen Behandlung des vorgestellten Problems mittels Finiten Elemente Methoden (FEM) ist es notwendig, an die Lösung u von (2.1) schwächere Regularitätsanforderungen zu stellen. Dazu interpretieren wir zunächst den Laplace-Operator im schwachen Sinne: Sei ein Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit zugehöriger klassischer Ableitung $D^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d}$ gegeben. Die Funktion $f \in L^2(G)$ besitzt eine schwache Ableitung, wenn eine Funktion $g \in L^2(G)$ existiert mit

$$\int_G g(x)v(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_G f(x) (D^\alpha v)(x)dx, \quad v \in C_0^\infty(G). \quad (2.4)$$

Sofern $g \in L^2(G)$ existiert, definieren wir $D^\alpha f := g$. Mit Hilfe der partiellen Integration ist diese Definition im Falle hinreichender Regularität von f äquivalent mit der klassischen Ableitung, da die Testfunktionen $v \in C_0^\infty(G)$ auf ∂G verschwinden. Auf diese Weise kann der Laplace-Operator im schwachen Sinne aufgefasst werden und es genügt, dass $u \in H^2(G)$ mit dem Sobolev-Raum

$$H^k(G) := \{f \in L^2(G) \mid D^\alpha f \in L^2(G), \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |\alpha| \leq k\}. \quad (2.5)$$

In diesem Fall wird u starke Lösung von (2.1) genannt. Mit dem Innenprodukt

$$\begin{aligned} (f, g)_0 &:= \int_G f(x)\overline{g(x)}dx, \quad f, g \in L^2(G), \\ (f, g)_k &:= \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha f, D^\alpha g)_0, \quad f, g \in H^k(G), \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (2.6)$$

und der dazugehörigen kanonischen Norm

$$\|f\|_k := \sqrt{(f, f)_k}, \quad f \in H^k, \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (2.7)$$

wird $H^k(G)$ zu einem Hilbert-Raum. Die Theorie der Sobolev-Räume bildet die Basis für FEM. Zusammenfassungen dieser Theorie finden sich deshalb in den meisten Werken zu FEM (siehe z.B. [GR94, §3.2], [Hac96, §6.2] oder [BS02, §1]), weitergehende Darstellungen z.B. in [Ada75], [McL00, §3] und [RR93, §6.4]. Wir werden an dieser Stelle auf eine Darstellung der Theorie verzichten und an den entsprechenden Stellen auf die Literatur verweisen. Es sei jedoch erwähnt, dass es weitere Definitionen der Sobolev-Räume über dicht liegende Teilmengen oder auch mit Hilfe der Fourier-Transformation A.1 gibt. Unter bestimmten Voraussetzungen an ∂G sind diese äquivalent (siehe [McL00, Theorem 3.30] für Lipschitz-Gebiete G).

Die Definition von Sobolev-Räumen auf dem Rand von Lipschitz-Gebieten wird z.B. in [McL00, §3, Seite 96ff] dargestellt. Diese sind notwendig, um Randfunktionen $u|_{\partial G}$, wie sie in (2.2) auftauchen, sinnvoll zu definieren. Es gilt

Satz 2.3 (Spuroperator). *Sei G ein Lipschitz-Gebiet. Dann existiert ein eindeutiger, stetiger Operator*

$$T : H^1(G) \rightarrow H^{1/2}(\partial G) \text{ mit } Tf := f|_{\partial G}, \quad f \in C(G) \cap H^1(G). \quad (2.8)$$

Beweis. Siehe dazu [McL00, Theorem 3.37] oder [RR93, Theorem 6.109] mit stärkeren Regularitätsanforderungen an ∂G . Unter diesen gilt dann allgemeiner

$$T : H^s(G) \rightarrow H^{s-1/2}(\partial G), \quad s > \frac{1}{2}.$$

□

2.2. Variationsformulierung

Ähnlich wie bei der Definition der schwachen Ableitung (2.4) multiplizieren wir (2.1) mit Testfunktionen \bar{v} , integrieren über das Grundgebiet G und nutzen die partielle Integration

$$\int_G \left(\nabla u(x) \cdot \overline{\nabla v(x)} - \kappa^2 u(x) \overline{v(x)} \right) dx = \int_G l(x) \overline{v(x)} dx + \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) \overline{v(s)} ds. \quad (2.9)$$

Wir setzen die Gültigkeit der Formel zur partiellen Integration, bzw. in diesem Fall der Greenschen Formel, voraus. Für Lipschitz-Gebiete ist diese z.B. in [McL00, Lemma 4.1] bewiesen. Während die natürliche Randbedingung (2.2b) im Randintegral berücksichtigt wird, bestimmt die wesentliche Randbedingung (2.2a) den Funktionenraum für die Funktionen u und v :

$$X := \{f \in H^1(G) \mid Tf(x) = 0, \quad x \in \Gamma\}. \quad (2.10)$$

Satz 2.4. *Sei $u \in H^2(G)$ eine Lösung von (2.1) mit den Randbedingungen (2.2) und $l \in L^2(G)$. Dann löst $u \in X$ das Variationsproblem*

$$a(u, v) - \kappa^2 b(u, v) = l^*(v), \quad v \in X \quad (2.11)$$

2. Helmholtz Probleme auf beschränkten Gebieten

mit den Sesquilinearformen

$$a(f, g) := \int_G \nabla f(x) \cdot \overline{\nabla g(x)} dx \quad \text{und} \quad b(f, g) := \int_G f(x) \overline{g(x)} dx \quad (2.12)$$

sowie dem antilinearen, stetigen Funktional l^* mit $l^*(f) := \int_G l(x) \overline{f(x)} dx$.

Eine Lösung u von (2.11) wird *schwache* Lösung genannt. Es ist $b(f, g) = (f, g)_0$.

Lemma 2.5 (Sesquilinearform). *Für eine stetige Sesquilinearform s auf $X \times X$ existiert ein eindeutig bestimmter, linearer und stetiger Operator $S : X \rightarrow X$ mit $s(u, v) = (Su, v)_1$ und die Gleichung $s(u, v) = l^*(v)$ ist genau dann für ein beliebiges antilineares, stetiges Funktional l^* eindeutig lösbar, wenn S invertierbar ist.*

Beweis. Eine Sesquilinearform s ist linear im ersten Argument und antilinear im zweiten Argument, d.h. $s(\lambda f, g) = \lambda s(f, g)$ und $s(f, \lambda g) = \overline{\lambda} s(f, g)$. Da jedem $g \in X$ durch $s_g(f) := s(f, g)$ ein lineares, stetiges Funktional $s_g \in X'$ zugeordnet werden kann, folgt mit dem Rieszischen Darstellungssatz (siehe [Heu75, Satz 66.1]) die Existenz eines stetigen, linearen Operators \tilde{S} mit $s(f, g) = (f, \tilde{S}g)_1$ und der zu \tilde{S} adjungierte Operator $S := \tilde{S}^*$ erfüllt den ersten Teil der Behauptung. Analog existiert ein $l \in X$ mit $l^*(f) = (l, f)_1$, wenn der Rieszische Darstellungssatz auf das stetige, lineare Funktional $\tilde{l}(f) := l^*(f) = (f, l)_1 = \overline{(l, f)_1}$ angewandt wird. Es gilt

$$s(u, v) = (Su, v)_1 = (l, v)_1 = l^*(v), \quad v \in X \quad \Leftrightarrow \quad Su = l \text{ in } X.$$

Damit ist die Lösbarkeit der Gleichung $s(u, v) = l^*(v)$ auf die Invertierbarkeit von S zurückgeführt. \square

Definition 2.6 (X -Elliptizität, X -Koerzivität). *Eine Sesquilinearform s heißt X -elliptisch, falls sie auf $X \times X$ stetig ist und eine Konstante $C > 0$ existiert mit*

$$\Re(s(f, f)) \geq C \|f\|_1^2, \quad f \in X. \quad (2.13)$$

Eine Sesquilinearform s heißt X -koerzitiv, falls sie auf $X \times X$ stetig ist und Konstanten $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$ existieren mit

$$\Re(s(f, f)) \geq C_1 \|f\|_1^2 - C_2 \|f\|_0^2, \quad f \in X. \quad (2.14)$$

Folgendes Lemma garantiert für X -elliptische Sesquilinearformen die eindeutige Lösbarkeit des zugehörigen Variationsproblems (zum Beweis siehe [Alt99, Satz 4.2]).

Lemma 2.7 (Lax-Milgram). *Sei $(V, (\bullet, \bullet)_V)$ ein Hilbert-Raum und s eine V -elliptische Sesquilinearform. Dann existiert für alle antilinearen, stetigen Funktionale l^* eine eindeutige Lösung $u \in V$ des Variationsproblems*

$$s(u, v) = l^*(v), \quad v \in V, \quad (2.15)$$

und die Lösung hängt stetig von l^ ab.*

Bemerkung 2.8. Ungleichung (2.14) wird auch Gårdingsche Ungleichung genannt und stellt eine Abschwächung der X -Elliptizität dar. Da eine stetige, kompakte Einbettung $E : H^1(G) \rightarrow L^2(G)$ mit adjungiertem Operator $E^* : L^2(G) \rightarrow H^1(G)$ existiert (vgl. [McL00, Theorem 3.27]), ermöglicht sie den Zugang zur Riesz-Fredholm Theorie, angewendet auf $S = (S + C_2 E^* E) - C_2 E^* E$, wobei der erste Term X -elliptisch und der zweite kompakt ist.

Die Anwendung der Riesz-Fredholm Theorie ist für die nächsten beiden Abschnitte von entscheidender Bedeutung, da $a - \kappa^2 b$ für $\kappa > 0$ nicht X -elliptisch ist.

Bemerkung 2.9. Die Sesquilinearform $a - \kappa^2 b$ erfüllt für $\kappa^2 > 0$ Ungleichung (2.14) mit $C_1 = 1$ und $C_2 = 1 + \kappa^2$, nicht jedoch Ungleichung (2.13). Für den Fall $\kappa = 0$ ist a X -elliptisch, sofern ein Dirichlet-Rand Γ mit positivem Maß existiert und damit in X die konstanten Funktionen mit Ausnahme der Nullfunktion nicht mehr enthalten sind (siehe auch [KA00, Satz 3.15]). Falls dies nicht der Fall ist, ist a X -koerzitiv mit beliebig kleiner Konstante C_2 . Für alle anderen κ existiert ein $\Theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, sodass die Sesquilinearform $e^{i\Theta}(a - \kappa^2 b)$ X -elliptisch ist mit $C = \min\{\Re(e^{i\Theta}), -\Re(e^{i\Theta}\kappa^2)\}$.

Für die Umkehrung des Satzes 2.4 sind stärkere Regularitätsanforderungen an ∂G erforderlich.

Satz 2.10 (Regularität). Seien G C^2 -Gebiet, $l \in L^2(G)$ und $u \in X$ eine schwache Lösung von (2.11). Dann ist $u \in H^2(G)$ eine starke Lösung von (2.1) mit den Randbedingungen (2.2).

Falls $u \in X$ Lösung des Variationsproblems

$$a(u, v) - \kappa^2 b(u, v) = \int_G l(x) \overline{v(x)} dx + \int_{\partial G \setminus \Gamma} j(s) \overline{v|_{\partial G \setminus \Gamma}(s)} ds, \quad v \in X$$

und $j \in H^{-1/2}(\partial G \setminus \Gamma)$ ist, dann gehört u ebenfalls zu $H^2(G)$ und ist eine starke Lösung von (2.1) mit Neumannscher Randbedingung j in (2.2b).

Beweis. Zur Regularität siehe [Hac96, Satz 9.1.16 und 9.1.17]. Mit Hilfe der Green-schen Formel ergibt sich dann (2.1). \square

Bemerkung 2.11. Es gilt sogar allgemeiner $u \in H^{m+1}(G)$ für $m \geq 1$, falls G ein C^{m+1} -Gebiet und $l \in H^{m-1}(G)$ ist.

2.3. FE-Diskretisierung

Die Grundlage konformer FEM bildet die Lösung des Variationsproblems (2.11) auf endlich-dimensionalen Unterräumen $X_h \subset X$ des Lösungsraumes X :

$$u_h \in X_h \text{ löse } a(u_h, v_h) - \kappa^2 b(u_h, v_h) = l^*(v_h), \quad v_h \in X_h. \quad (2.16)$$

2. Helmholtz Probleme auf beschränkten Gebieten

Seien $\{b_i, i = 1, \dots, N\}$ eine Basis des Raumes X_h und $u_h = \sum_{i=1}^N \alpha_i b_i \in X_h$ eine Lösung von (2.16). Genau dann löst $\alpha_h := (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^\top \in \mathbb{C}^d$ das Gleichungssystem

$$(A_h - \kappa^2 B_h) \alpha_h = l_h \quad (2.17)$$

mit den Matrizen

$$A_h = (a_{i,j})_{i,j=1}^N, \quad a_{i,j} := a(b_i, b_j) \quad \text{und} \quad B_h = (b_{i,j})_{i,j=1}^N, \quad b_{i,j} := b(b_i, b_j) \quad (2.18)$$

sowie dem Vektor $l_h = (l^*(b_1), \dots, l^*(b_N))^\top$.

Die grundlegende Idee von FEM ist die Wahl von Basisfunktionen $b_i \in X_h$, sodass sie auf einem möglichst kleinen Träger $\text{supp}(b_i) := \overline{\{x \in G \mid b_i(x) \neq 0\}}$ definiert sind. Auf diese Weise besitzen viele Basisfunktionen voneinander disjunkte Träger und die entsprechenden Einträge in der sogenannten Steifigkeitsmatrix A_h und der Massematrix B_h verschwinden. Gewährleistet wird diese Eigenschaft, indem das Gebiet G in einzelne Teilgebiete aufgeteilt wird und die Basisfunktionen lokal auf diesen Elementen definiert werden. Üblich sind dabei Dreiecks- bzw. Tetraederelemente und Rechtecks- bzw. Quaderelemente. Die Generierung eines geeigneten Gitters stellt eine besondere Herausforderung dar, auf die hier nicht weiter eingegangen wird (siehe dazu [Sch97] oder [Ede06]). Im Folgenden sei stets eine Triangulierung \mathcal{T} mit folgenden Eigenschaften gegeben (siehe [KA00, §3.3]).

Definition 2.12 (Triangulierung). *Eine Triangulierung \mathcal{T} eines Gebietes G besteht aus endlich vielen Teilmengen $T \subset \overline{G}$ mit den Eigenschaften*

1. *Jedes T ist ein abgeschlossenes Lipschitz-Gebiet mit nichtleerem Inneren $\overset{\circ}{T}$,*
2. *$\overline{G} = \cup_{T \in \mathcal{T}} T$*
3. *und für je zwei verschiedene $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ gilt $\overset{\circ}{T}_1 \cap \overset{\circ}{T}_2 = \emptyset$.*

Die Triangulierung heißt zulässig, wenn für je zwei Elemente T_1, T_2 einer Triangulierung $\partial T_1 \cap \partial T_2$ entweder

- *leer ist*
- *ein gemeinsamer Eckpunkt ist,*
- *eine gemeinsame Kante ist*
- *oder für $d = 3$ eine gemeinsame Randfläche ist.*

Dann ist nach dem Vorbild von [Cia78] ein Finites Element formal durch folgende Definition gegeben.

Definition 2.13 (Finites Element). *Ein Finites Element besteht aus dem Tripel (T, P_T, \mathcal{N}_T) mit den Eigenschaften*

1. *T ist ein Element der Triangulierung \mathcal{T} .*
2. *$P_T \subset \mathbb{C}^m(T)$ ist ein Funktionenraum von auf T definierten Funktionen (meist Polynomen) der Dimension k_T .*
3. *$\mathcal{N}_T = \{N_1^T, \dots, N_{k_T}^T\}$ ist eine Basis des Dualraumes P_T' , d.h. jedes lineare Funktional $N_j^T \in \mathcal{N}_T$ ist stetig bezüglich der Norm $\|\bullet\|_{C^m(T)}^2 := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \bullet\|_\infty$.*

Die zu \mathcal{N}_T duale Basis $\mathcal{B}_T := \{b_n^T, n = 1, \dots, k_T\}$ von P_T ist durch

$$N_j^T(b_n^T) = \delta_{j,n}, \quad j, n = 1, \dots, k_T$$

eindeutig definiert und heißt nodale Basis von P_T . Ein Finites Element kann somit auch als Tripel (T, P_T, \mathcal{B}_T) definiert werden.

Die globalen Basisfunktionen b_i werden abschnittsweise so definiert, dass für jedes $T \in \mathcal{T}$ die Einschränkungen $b_i|_T$ in den Räumen P_T , die durch die lokalen Basisfunktionen b_n^T aufgespannt werden, liegen. Dabei ist folgendes Lemma zu beachten.

Lemma 2.14. *Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ zwei verschiedene Elemente der Triangulierung \mathcal{T} mit gemeinsamen, nichtverschwindenden Rand $R := \partial T_1 \cap \partial T_2 \neq \emptyset$ und $p_1 \in H^1(T_1)$, $p_2 \in H^1(T_2)$. Unter der Bedingung $p_1 = p_2$ auf R ist*

$$p := \begin{cases} p_1 & \text{auf } T_1 \\ p_2 & \text{auf } T_2 \end{cases}$$

wohldefiniert, und es gilt $p \in H^1(T_1 \cup T_2)$.

Beweis. Siehe dazu [Cia78, Theorem 2.1.1] oder auch etwas spezieller [GR94, Lemma 4.1]. \square

Damit die Basisfunktionen b_i in $H^1(G)$ liegen, müssen sie folglich stetig auf den Rändern der Elemente $T \in \mathcal{T}$ sein. Seien dazu $R := \partial T_1 \cap \partial T_2 \neq \emptyset$ und $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$, $b_n^{T_{1,2}}|_R$ die Einschränkungen der auf R nicht verschwindenden nodalen Basisfunktionen $b_n^{T_{1,2}}$ und $P_{T_1}(R) = P_{T_2}(R)$ mit $P_{T_{1,2}}(R) := \{p_R = p|_R \mid p \in P_{T_{1,2}}\}$. Werden nun die Funktionen $b_n^{T_{1,2}}|_R$ ausschließlich durch Funktionale $N_j^{T_{1,2}}$ aus $P_{T_{1,2}}(R)'$ bestimmt und ist $N_j^{T_1} = N_j^{T_2}$, so können die auf R nicht verschwindenden nodalen Basisfunktionen $b_n^{T_1}$ und $b_n^{T_2}$ stetig zusammengesetzt werden.

Für konforme FEM ($b_i \in X_h \subset X$) ist zusätzlich die Dirichletsche Randbedingung (2.2a) zu beachten, d.h die Basisfunktionen müssen auf Γ verschwinden.

Zur Assemblierung der Matrizen A_h und B_h bietet sich ein elementweises Vorgehen für jedes Element $T \in \mathcal{T}$ an: Sei I die Indexmenge der auf T nicht verschwindenden Basisfunktionen b_i mit $|I| = k_T$ und $i_{\text{loc}} : \{1, \dots, k_T\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$ eine lokale Abzählung dieser Basisfunktionen. Dann heißen die Matrizen

$$S^{(T)} := \left(\int_T \nabla b_n^T(x) \cdot \nabla b_m^T(x) dx \right)_{n,m=1}^{k_T} \quad \text{und} \quad M^{(T)} := \left(\int_T b_n^T(x) b_m^T(x) dx \right)_{n,m=1}^{k_T} \quad (2.19)$$

die zu T gehörenden Elementmatrizen, und A_h und B_h ergeben sich durch Summation der Einträge aus den Elementmatrizen:

2. Helmholtz Probleme auf beschränkten Gebieten

Setze $A_h = B_h = 0$.

Für jedes $T \in \mathcal{T}$:

Berechne Elementmatrizen $S^{(T)}$ und $M^{(T)}$.

Für $n, m = 1, \dots, k_T$:

$$A_h(i_{\text{loc}}(n), i_{\text{loc}}(m)) = A_h(i_{\text{loc}}(n), i_{\text{loc}}(m)) + S^{(T)}(n, m).$$

$$B_h(i_{\text{loc}}(n), i_{\text{loc}}(m)) = B_h(i_{\text{loc}}(n), i_{\text{loc}}(m)) + M^{(T)}(n, m).$$

Einige Beispiele für finite Elemente finden sich z.B. in [GR94, §4.2.2] und [KA00, §3.3]. Meist werden dabei zunächst auf einem Referenzelement T_0 lokale Basisfunktionen $b_n^{T_0}$ definiert und diese mittels einer affinen Abbildung auf allgemeine Elemente T der Triangulierung \mathcal{T} übertragen.

Definition 2.15 (Affin äquivalente Finite Elemente). *Zwei unterschiedliche Finite Elemente $(T_1, P_{T_1}, \mathcal{B}_{T_1})$ und $(T_2, P_{T_2}, \mathcal{B}_{T_2})$ heißen affin äquivalent, falls es eine affine Abbildung $g : T_1 \rightarrow T_2$ gibt mit*

1. $g(T_1) = T_2$,
2. $P_{T_2} = \{p \circ g^{-1} \mid p \in P_{T_1}\}$ und
3. $b_n^{T_2} = b_n^{T_1} \circ g^{-1}$ für alle $b_n^{T_1} \in \mathcal{B}_{T_1}$ und $b_n^{T_2} \in \mathcal{B}_{T_2}$.

Folgendes Beispiel für Finite Elemente, die auch für hohe Polynomgrade geeignet sind, ist [Sch98, §3] entnommen.

Beispiel 2.16 (Eindimensionales Finites Element). *Seien $d = 1$, $T_0 = [-1, 1]$, $\mathcal{T} = \{[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{N_{\mathcal{T}}-1}, x_{N_{\mathcal{T}}}]\}$ und die affine Abbildung*

$$\xi \mapsto g(\xi) := \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \xi + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}, \quad \xi \in T_0, i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}.$$

Die Referenzbasisfunktionen bilden eine Basis des Raumes $P_k(T_0)$, $k \geq 1$ der Dimension $k + 1$. Wir definieren zwei Randfunktionen

$$\Psi_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} \quad \text{und} \quad \Psi_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2}, \quad \xi \in T_0 \tag{2.20}$$

und $k - 1$ innere Funktionen

$$\Psi_n(\xi) = \sqrt{\frac{2n - 3}{2}} \int_{-1}^{\xi} L_{n-2}(t) dt, \quad n = 3, \dots, k + 1. \tag{2.21}$$

$L_{n-2}(t)$ sind die Legendre Polynome (siehe [Sch98, §C.2]). Es gilt:

$$\begin{aligned} \Psi_1(-1) &= 1, & \Psi_n(-1) &= 0, & n &= 2, \dots, k + 1 \quad \text{und} \\ \Psi_2(1) &= 1, & \Psi_n(1) &= 0, & n &= 1, 3, \dots, k + 1. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Die Stetigkeitsbedingung aus Lemma 2.14 ist somit erfüllt, sofern die Freiheitsgrade bezüglich der Randfunktionen auf benachbarten Elementen von \mathcal{T} übereinstimmen. Diese werden deshalb auch Randfreiheitsgrade genannt, während die Freiheitsgrade bezüglich der inneren Funktionen innere Freiheitsgrade genannt werden.

Im Sinne von Definition 2.13 ist folglich für jedes $i = 1, \dots, N_{\mathcal{T}}$ ein Finites Element gegeben durch

1. $T := [x_i, x_{i+1}]$,
2. $P_T := P_k(T)$ mit $k \geq 1$ und $\dim P_T = k + 1$
3. und den nodalen Basisfunktionen $b_n^T := \Psi_n \circ g^{-1}$, $n = 1, \dots, k + 1$.

Insgesamt erhalten wir so $N = kN_T + 1$ Freiheitsgrade. Die Elementmatrizen ergeben sich für jedes $T = [x_i, x_{i+1}] \in \mathcal{T}$, $h_T := x_{i+1} - x_i$ und z.B. $k = 5$ zu

$$\begin{aligned}
 S^{(T)} &= \frac{2}{h_T} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \\
 M^{(T)} &= \frac{h_T}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3\sqrt{10}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{3\sqrt{10}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5\sqrt{21}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{10}} & -\frac{1}{3\sqrt{10}} & 0 & \frac{2}{21} & 0 & -\frac{1}{21\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5\sqrt{21}} & 0 & \frac{2}{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{21\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{77} \end{pmatrix}. \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

Die Steifigkeitsmatrix ist besonders einfach, da die Legendre Polynome ein Orthogonalsystem des Hilbert-Raumes $L^2([-1, 1])$ bilden.

Für das zweite Beispiel benötigen wir zunächst den Begriff des Tensorproduktes zweier Funktionenräume.

Definition und Satz 2.17 (Tensorprodukt). *Seien V, W endlich-dimensionale Funktionenräume von auf D_V bzw. D_W definierten, komplexwertigen Funktionen. Dann ist der Tensorproduktraum $V \otimes W$ definiert durch*

$$V \otimes W := \{f : D_V \times D_W \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall w \in D_W : f(\bullet, w) \in V \text{ und } \forall v \in D_V : f(v, \bullet) \in W\}.$$

Für $v \in V$ und $w \in W$ ist $v \otimes w \in V \otimes W$ definiert durch

$$(v \otimes w)(x, y) := v(x)w(y), \quad x \in D_V, y \in D_W.$$

Für beliebige (auch unendlich-dimensionale) Hilbert-Räume $(V, (\bullet, \bullet)_V), (W, (\bullet, \bullet)_W)$ kann nach [Mur90, Theorem 6.3.1] durch

$$(v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2)_{V \otimes W} := (v_1, v_2)_V (w_1, w_2)_W, \quad v_{1,2} \in V, w_{1,2} \in W \tag{2.24}$$

ein Skalarprodukt definiert werden. Wenn Orthonormalbasen von V, W durch $\{v_i \mid i \in I_V\}$ bzw. $\{w_j \mid j \in I_W\}$ gegeben sind, dann ist $V \otimes W$ als Vervollständigung von $\text{span}\{v_i \otimes w_j \mid i \in I_V, j \in I_W\}$ unter dem Skalarprodukt $(\bullet, \bullet)_{V \otimes W}$ nach [Mur90, §6.3] ebenfalls ein Hilbert-Raum.

Seien weiter $A : V_1 \rightarrow V_2, B : W_1 \rightarrow W_2$ lineare, beschränkte Abbildungen und V_1, V_2, W_1, W_2 Hilbert-Räume. Dann ist nach [Mur90, Lemma 6.3.2] $A \otimes B$ mit

$$(A \otimes B)(v \otimes w) = A(v) \otimes B(w), \quad v \in V_1, w \in W_1 \tag{2.25}$$

eine lineare, beschränkte Abbildung von $V_1 \otimes W_1$ nach $V_2 \otimes W_2$ mit $\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$.

2. Helmholtz Probleme auf beschränkten Gebieten

Wenn die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_A \times m_A} \quad \text{und} \quad B \in \mathbb{C}^{n_B \times m_B}$$

als lineare Abbildungen von $\mathbb{C}^{n_A} \otimes \mathbb{C}^{m_A}$ bzw. $\mathbb{C}^{n_B} \otimes \mathbb{C}^{m_B}$ nach \mathbb{C} aufgefasst werden, dann ist $A \otimes B$ mit Hilfe voriger Definition eine lineare Abbildung von $(\mathbb{C}^{n_A} \otimes \mathbb{C}^{m_A}) \otimes (\mathbb{C}^{n_B} \otimes \mathbb{C}^{m_B})$ nach $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$. Der erste Raum kann mit dem Raum $\mathbb{C}^{n_A n_B} \otimes \mathbb{C}^{m_A m_B}$ und der zweite mit \mathbb{C} identifiziert werden. Somit ist das Tensorprodukt zweier Matrizen durch

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(n_A n_B) \times (m_A m_B)} \quad (2.26)$$

sinnvoll definiert.

Mit diesen Vorüberlegungen können wir analog zu [Sch98, §4.4.2.1] ein Finites Element für $d = 2$ vorstellen.

Beispiel 2.18 (2d-Element). Seien $d = 2$ und das Referenzelement gegeben durch

1. $T_0 := [-1, 1] \times [-1, 1]$,
2. $P_{T_0} := P_{k_1}([-1, 1]) \otimes P_{k_2}([-1, 1])$ mit $k_1, k_2 > 1$ und $\dim P_{T_0} = (k_1 + 1)(k_2 + 1)$,
3. den nodalen Basisfunktionen $b_{n,m}^{T_0} := \Psi_n \otimes \Psi_m$ mit Ψ aus Beispiel 2.16 und $n = 1, \dots, k_1$, $m = 1, \dots, k_2$.

Dann kann eine Triangulierung \mathcal{T} aus Viereckselementen mit Eckpunkten $(x_1, y_1)^\top$, $(x_2, y_2)^\top$, $(x_3, y_3)^\top$ und $(x_4, y_4)^\top$ durch die bilineare Abbildung

$$g \left(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) := \frac{1}{4} \left((\xi - 1)(\eta - 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - (\xi + 1)(\eta - 1) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - (\xi - 1)(\eta + 1) \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + (\xi + 1)(\eta + 1) \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} \right), \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in T_0$$

gebildet werden. Falls die Elemente $T \in \mathcal{T}$ Parallelogramme bilden, ist g sogar affin linear.

Die Elementmatrizen auf T_0 lassen sich sehr einfach als Tensorprodukte der eindimensionalen Elementmatrizen berechnen; für allgemeine $T \in \mathcal{T}$ geht diese Eigenschaft jedoch verloren.

2.4. Konvergenz der FEM

Das Lax-Milgram Lemma 2.7 garantiert für X -elliptische Sesquilinearformen nicht nur die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u \in X$ des kontinuierlichen Variationsproblems (2.11), sondern auch Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u_h \in X_h$

des diskreten Variationsproblems (2.16). Dies ist für X -koerzitive Sesquilinearformen nicht der Fall, denn die folgende Verallgemeinerung des Lax-Milgram Lemma überträgt sich nicht automatisch von X auf X_h .

Satz 2.19 (inf-sup Bedingung). *Seien $(V, (\bullet, \bullet)_V)$ ein Hilbert-Raum und s auf $V \times V$ eine stetige, symmetrische Sesquilinearform. Dann ist die Babuška-Brezzi Bedingung*

$$\inf_{0 \neq f \in V} \sup_{0 \neq g \in V} \frac{|s(f, g)|}{\|f\|_V \|g\|_V} =: \beta > 0 \quad (2.27)$$

hinreichend und notwendig für die Aussage: Für alle $l^ \in V'$ existiert eine eindeutige Lösung $u \in V$ des Variationsproblems*

$$s(u, v) = l^*(v), \quad v \in V,$$

und die Lösung hängt stetig von l^ ab.*

Beweis. In [Sch98, Theorem 1.15] oder auch [Hac96, 6.5.3] ist dieser Satz mit etwas allgemeineren Voraussetzungen bewiesen. Die zweite Bedingung dort ist in diesem Fall auf Grund der Symmetrie immer erfüllt. \square

Falls s X -elliptisch ist, so ist die Bedingung (2.27) sowohl für X als auch für die Unterräume X_h erfüllt:

$$\begin{aligned} C \|f\|_1 &\leq \frac{\Re(s(f, f))}{\|f\|_1} \leq \sup_{0 \neq g \in X} \frac{|s(f, g)|}{\|g\|_1}, \quad 0 \neq f \in X \\ &\Rightarrow C \leq \inf_{0 \neq f \in X} \sup_{0 \neq g \in X} \frac{|s(f, g)|}{\|f\|_1 \|g\|_1} = \beta. \end{aligned}$$

Für allgemeine Sesquilinearformen ist dies nicht automatisch der Fall.

Beispiel 2.20. *Seien*

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s(x, y) := x^\top S y, \quad x, y \in \mathbb{R}^2. \quad (2.28)$$

Da S stetig invertierbar ist, ist die Babuška-Brezzi Bedingung (2.27) mit $V := \mathbb{R}^2$ erfüllt. Sei nun $V_h \subset V$ mit Basisvektor $(1, 1)^\top$. Dann ist für alle $x_h, y_h \in V_h$ $s(x_h, y_h) = 0$, und die Babuška-Brezzi Bedingung ist für dieses V_h nicht erfüllt.

Für X -koerzitive Sesquilinearformen gilt jedoch folgender Satz.

Satz 2.21. *Sei s eine X -koerzitive Sesquilinearform und das Problem*

$$s(u, v) = l^*(v), \quad v \in X$$

für alle $l^ \in X'$ eindeutig lösbar, d.h. (2.27) sei erfüllt. Weiter sei $X_h \subset X$ mit $\dim X_h = N$ eine Folge von Unterräumen, die gegen X streben:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{g_h \in X_h} \|f - g_h\|_1 = 0, \quad f \in X. \quad (2.29)$$

Dann existiert für hinreichend großes N eine Konstante $C > 0$ mit

$$\inf_{0 \neq f_h \in X_h} \sup_{0 \neq g_h \in X_h} \frac{|s(f_h, g_h)|}{\|f_h\|_1 \|g_h\|_1} =: \beta_h \geq C\beta. \quad (2.30)$$

2. Helmholtz Probleme auf beschränkten Gebieten

Beweis. Mit Bemerkung 2.8 kann das Problem auf eine kompakte Störung einer X -elliptischen Sesquilinearform zurückgeführt werden. Mit der Hilfe des Lax-Milgram Lemmas 2.7 und des Beweises von [Kre99, Theorem 13.7] folgt dann die Behauptung mit der Riesz-Fredholm Theorie. Ein alternativer Beweis findet sich in [Hac96, Satz 8.2.8 und Lemma 11.2.7]. \square

Mit diesen Voraussetzungen lässt sich der Diskretisierungsfehler $\|u - u_h\|_1$ durch einen Approximationsfehler abschätzen.

Lemma 2.22 (Céa). *Sei s entweder eine X -elliptische oder X -koerzitive Sesquilinearform. Im letzteren Falle seien zusätzlich die Konstante β aus der Babuška-Brezzi Bedingung positiv und X_h eine im Sinne von (2.29) geeignete Folge von Unterräumen mit $N = \dim X_h$. Weiter seien u die eindeutige Lösung des Variationsproblems (2.11) und u_h die eindeutige Lösung des diskreten Variationsproblems (2.16) für hinreichend großes N . Dann existiert eine von N unabhängige Konstante $C > 0$ mit*

$$\|u - u_h\|_1 \leq C \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_1. \quad (2.31)$$

Beweis. Die Aussage ergibt sich zum einen direkt aus der Definition der X -Elliptizität 2.6 und ist z.B. in [KA00, Satz 2.17] nachzulesen. Es gilt dabei $C := \frac{C_s}{C_e}$ mit den Konstanten C_s aus der Stetigkeit der Sesquilinearform und C_e aus der X -Elliptizität. Im Falle der X -Koerzitivität gilt der Satz mit Satz 2.21 und [Hac96, Satz 8.2.1] oder auch [Sch98, Theorem 2.20] mit $C = 1 + \frac{C_s}{\beta}$. \square

Ein ähnlicher Satz, der keine Babuška-Brezzi Bedingung, dafür jedoch weitere Voraussetzungen benötigt, wird in [BS02, Theorem 5.7.6] bewiesen.

„Gute“ FEM zeichnen sich folglich dadurch aus, dass die Funktionen aus den endlich-dimensionalen Unterräumen X_h die kontinuierliche Lösung u möglichst gut approximieren. Dies wird auch im folgenden Konvergenzsatz für FEM deutlich. In diesem wird der Approximationsfehler durch eine Maß für die Feinheit der Triangulierung abgeschätzt. Sei dazu \mathcal{T} eine Triangulierung. Dann ist für jedes $T \in \mathcal{T}$ h_T der Radius der kleinsten Kugel, die T enthält, und ρ_T der Radius der größten Kugel, die in T enthalten ist. Das Maß für die Feinheit von \mathcal{T} wird durch $h := \max_{T \in \mathcal{T}} h_T$ definiert.

Ein Folge \mathcal{T}_h Triangulierungen aus Dreiecks- bzw. Tetraederelementen heißt geeignet, wenn

$$\sup_{T \in \cup_h \mathcal{T}_h} \frac{h_T}{\rho_T} \leq C$$

gilt.

Satz 2.23. *Seien (\mathcal{T}_h) eine solche Folge von Triangulierungen, $k \geq 1$ und alle Finite Elemente aus \mathcal{T}_h affin äquivalent nach Definition 2.15 zum Referenzelement $(T_0, P_{T_0}, \mathcal{B}_{T_0})$ mit*

$$P_k(T_0) \subset P_{T_0} \subset H^1(T_0), \quad (2.32a)$$

$$H^{k+1} \hookrightarrow C^m(T_0) \quad (2.32b)$$

und m aus Definition 2.13.

Weiter sei $u \in X \cap H^{k+1}(G)$ Lösung von (2.11). Dann existiert eine von h unabhängige Konstante $C > 0$ mit

$$\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_1 \leq Ch^k \|u\|_{k+1}. \quad (2.33)$$

Beweis. Zum Beweis siehe [Cia78, Theorem 3.2.1 und Theorem 3.2.2]. □

2.5. Eigenwertprobleme

Wir haben bereits gesehen, dass für X -elliptische Sesquilinearformen das Lax-Milgram Lemma 2.7 die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung (2.11) sicherstellt. Für X -koerzitive Sesquilinearformen war jedoch im vorigen Abschnitt die Babuška-Brezzi Bedingung (2.27) Voraussetzung für Existenz- und Konvergenzaussagen des Problems. Wir werden sehen, dass genau für diejenigen Werte von κ , die Wurzeln von Eigenwerten eines verallgemeinerten Eigenwertproblems sind, diese Bedingung nicht erfüllt ist. Dazu definieren wir zunächst das Spektrum eines Operators S :

Definition 2.24 (Spektrum eines Operators). *Seien $(V, (\cdot, \cdot)_V)$ ein komplexer Hilbert-Raum, $S : V \supset \mathcal{D}(S) \rightarrow V$ ein linearer Operator und id die Identität in V . Dann bezeichnet*

$$\rho(S) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(S - \lambda \text{id}) = \{0\} \text{ und } \overline{(S - \lambda \text{id})(\mathcal{D}(S))} = V\}$$

die Resolventenmenge von S und

$$\sigma(S) := \mathbb{C} \setminus \rho(S)$$

das Spektrum von S . Weiter seien

$$\sigma_p(S) := \{\lambda \in \sigma(S) \mid \dim(\ker(S - \lambda \text{id})) \neq 0\}$$

das Punktspektrum,

$$\sigma_d(S) := \{\lambda \in \sigma(S) \mid 0 < \dim(\ker(S - \lambda \text{id})) < \infty\}$$

das diskrete Spektrum und

$$\sigma_e(S) := \sigma(S) \setminus \sigma_d(S)$$

das wesentliche oder essentielle Spektrum. $\lambda \in \sigma_p(S)$ wird Eigenwert mit Vielfachheit $\dim(\ker(S - \lambda \text{id}))$, $\ker(S - \lambda \text{id})$ Eigenraum und $f \in \ker(S - \lambda \text{id}) \setminus \{0\}$ Eigenfunktion genannt.

Die Resolventenmenge spielt bei der Frage der Lösbarkeit eine entscheidende Rolle, da aus dem Prinzip der offenen Abbildung die Existenz einer stetigen Inversen $(S - \lambda \text{id})^{-1}$ folgt, wenn $(S - \lambda \text{id})(\mathcal{D}(S)) = V$. Letzteres ist z.B. für abgeschlossene Operatoren S nach [DL90, Chapt. VIII, §1, Prop. 1] der Fall. Für jedes $\lambda \in \rho(S)$ und jedes $l \in V$

2. Helmholtz Probleme auf beschränkten Gebieten

ist dann die Gleichung $(S - \lambda \text{id})u = l$ eindeutig lösbar und die Lösung hängt stetig von l ab.

Die Unterscheidung des Spektrums in ein diskretes und ein wesentliches Spektrum liegt im nachfolgenden Satz für normale Operatoren S begründet. Wir verweisen für den Beweis auf [Heu75, Sätze 70.5 und 70.6].

Satz 2.25. *Sei $S : V \rightarrow V$ ein normaler Operator. Dann gilt:*

1. *Ein isolierter Punkt λ des Spektrums $\sigma(S)$ ist ein Eigenwert von S , d.h. $\lambda \in \sigma_p(S)$.*
2. *Das wesentliche Spektrum $\sigma_e(S)$ besteht aus den Häufungspunkten des Spektrums $\sigma(S)$ und den Eigenwerten unendlicher Vielfachheit.*

Demnach besteht für normale Operatoren das diskrete Spektrum aus den isolierten Eigenwerten mit endlicher Vielfachheit.

Satz 2.26 (Spektrum eines kompakten Operators). *Sei $S : V \rightarrow V$ ein kompakter Operator. Dann besteht $\sigma(S) \setminus \{0\}$ aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten mit endlicher Vielfachheit, die im Falle von $\#\sigma_d(S) = \infty$ eine Nullfolge bilden.*

Beweis. Der Satz wird z.B. in [Heu75, Satz 43.2] und in [Alt99, Satz 9.8] bewiesen. Er ist Teil der Theorie von Riesz-Schauder über kompakte Operatoren. \square

Obige Theorie lässt sich auf X -koerzitive und X -elliptische Sesquilinearformen übertragen. Dazu könnte das Spektrum einer Sesquilinearform s durch das Spektrum des nach Lemma 2.5 zugeordneten Operators $S : X \rightarrow X$ definiert werden. Für die Sesquilinearform a aus 2.12, die durch partielle Integration aus $\int_G (-\Delta f)g dx$ entstanden ist, wäre dies jedoch nicht der negative Laplace Operator $-\Delta : H^2(G) \rightarrow L^2(G)$.

Aus diesem Grund ordnen wir einer Sesquilinearform s_1 den in [DL90, Chapt. VIII, §2.6] definierten Operator $\tilde{S}_1 : X \supset \mathcal{D}(\tilde{S}_1) \rightarrow L^2(G)$ mit den Eigenschaften

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1(f, g) = (\tilde{S}_1 f, g)_0, \quad f \in \mathcal{D}(\tilde{S}_1), g \in X \quad \text{und} \\ \mathcal{D}(\tilde{S}_1) = \{f \in X \mid g \mapsto s_1(f, g) \text{ ist in der Norm von } L^2(G) \text{ stetig auf } X\} \end{array} \right. \quad (2.34)$$

zu.

Bemerkung 2.27.

- (i) *Der Operator \tilde{S}_1 ist unbeschränkt und der Definitionsbereich $\mathcal{D}(\tilde{S}_1)$ liegt dicht in $L^2(G)$. Versehen mit der Graphennorm $\|\bullet\|_{\mathcal{D}(\tilde{S}_1)}^2 := \|\bullet\|_0^2 + \|\tilde{S}_1 \bullet\|_0^2$ und dem zugehörigen Skalarprodukt ist $\mathcal{D}(\tilde{S}_1)$ stetig in X eingebettet. Da X durch $E : X \rightarrow L^2(G)$ kompakt in $L^2(G)$ eingebettet ist, ist auch $\mathcal{D}(\tilde{S}_1)$ kompakt in $L^2(G)$ eingebettet.*
- (ii) *Sei $a(f, g)$ aus (2.12), $f, g \in X$ und $\Gamma = \partial G$. Dann gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung*

$$|a(f, g)| = \left| \int_G (-\Delta f)(x) \overline{g(x)} dx \right| = |(-\Delta f, g)_0| \leq \|\Delta f\|_0 \|g\|_0, \quad (2.35)$$

wenn nur $\Delta f \in L^2(G)$. Damit ist $\tilde{A} = -\Delta$ und $\mathcal{D}(\tilde{A}) = \{f \in X \mid \Delta f \in L^2(G)\} \supset H^2(G)$.

Der s durch (2.34) zugeordnete Operator \tilde{S} erscheint somit für unsere Zwecke sinnvoller.

Definition 2.28 (Spektrum einer Sesquilinearform). *Sei s eine Sesquilinearform auf $X \times X$ und \tilde{S} der durch (2.34) zugeordnete Operator. Dann bezeichnet $\sigma(\tilde{S})$ aus Definition 2.24 mit $V = L^2(G)$ das Spektrum von s . Speziell für die Eigenwerte λ mit zugehörigen Eigenfunktion f von \tilde{S} gilt*

$$\tilde{S}f = \lambda \operatorname{id}_{L^2(G)} f \quad \Leftrightarrow \quad s(f, g) = \lambda(f, g)_0, \quad g \in X. \quad (2.36)$$

Wir werden im nächsten Satz sehen, dass eine X -koerzitive Sesquilinearform ein rein diskretes Spektrum besitzt. Da $b(f, g) = (f, g)_0$ mit b aus (2.12), ist die Konstante in der Babuška-Brezzi Bedingung (2.27) für $a - \kappa^2 b$ genau dann positiv, wenn $\kappa^2 \in \rho(\tilde{A})$ und somit kein Eigenwert des verallgemeinerten Eigenwertproblems

$$a(u, v) = \kappa^2 b(u, v), \quad v \in X \quad (2.37)$$

mit zugehöriger nichttrivialer Eigenfunktion $u \in \mathcal{D}(\tilde{A})$ ist. Wenn G ein C^2 -Gebiet ist, so kann auch $u \in X$ zugelassen werden, da daraus mit Satz 2.10 $u \in H^2(G) \subset \mathcal{D}(\tilde{A})$ folgt.

Satz 2.29 (Spektrum einer X -koerziven Sesquilinearform). *Sei s eine X -koerzitive Sesquilinearform mit zugehörigem Operator \tilde{S} . Dann ist das Spektrum $\sigma(\tilde{S})$ rein diskret und besteht aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten, die sich im Falle von $\#\sigma_d(\tilde{S}) = \infty$ nur im Unendlichen häufen.*

Beweis. Der Beweis aus [DL90, Chapt. VIII, §2.6] sei hier kurz skizziert. Sei $\tilde{S} : \mathcal{D}(\tilde{S}) \rightarrow L^2(G)$ der s zugeordnete Operator. Dann existiert zu $T := \tilde{S} + C_k \operatorname{id}_{L^2(G)}$ mit C_k aus der Gårdingschen Ungleichung (2.14) nach dem Lax-Milgram Lemma 2.7 eine stetige Inverse $T^{-1} : L^2(G) \rightarrow \mathcal{D}(T)$. Da nach Bemerkung 2.27(i) $\mathcal{D}(T)$ kompakt in $L^2(G)$ eingebettet ist, ist T^{-1} ein kompakter Operator von $L^2(G)$ nach $L^2(G)$ und Satz 2.26 ist anwendbar.

Seien nun $\lambda^{-1} \notin \sigma_d(T^{-1})$, $f \in L^2(G)$ und $g = T^{-1}f \in \mathcal{D}(T)$. Dann ist mit Hilfe der Fredholmschen Alternative

$$\left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{id} - T^{-1} \right) u = \frac{1}{\lambda} g$$

eindeutig lösbar. Aus $T^{-1}u, \lambda^{-1}g \in \mathcal{D}(T)$ schließt man $u \in \mathcal{D}(T)$. Weiterhin ist u die eindeutige Lösung der Gleichung

$$(T - \lambda \operatorname{id}) u = f \quad \Leftrightarrow \quad \left(\tilde{S} - (\lambda - C_k) \operatorname{id} \right) u = f. \quad (2.38)$$

Damit ist $\lambda - C_k \in \rho(\tilde{S})$ und die Behauptung ist mit Satz 2.26 gezeigt. \square

2. Helmholtz Probleme auf beschränkten Gebieten

Von entscheidender Bedeutung in vorigem Beweis ist die Kompaktheit der Einbettung $X \subset L^2(G)$, da sie die Benutzung der Riesz-Schauder Theorie über kompakte Operatoren ermöglicht. Für unbeschränkte Gebiete G ist dies jedoch nicht mehr gegeben (vgl. Abschnitt 3.3).

Bemerkung 2.30. Für hermitesche Sesquilinearformen $(s(f, g) = \overline{s(g, f)})$ ist \tilde{S} selbstadjungiert. Mit den obigen Voraussetzungen sind in diesem Fall die Eigenräume von \tilde{S} nach [DL90, Chapt. VIII, Theorem 2.6] endlich-dimensional und die zugehörigen Eigenfunktionen bilden ein Orthogonalsystem. Zusätzlich sind die Eigenwerte alle reell, wie folgende einfache Rechnung zeigt

$$\lambda \|f\|_0^2 = \lambda(f, f)_0 = s(f, f) = \overline{s(f, f)} = \overline{\lambda(f, f)_0} = \bar{\lambda} \|f\|_0^2.$$

Dies deckt sich mit den Ergebnissen aus Bemerkung 2.9. Dort wurde bereits gezeigt, dass die Sesquilinearform $a - \kappa^2 b$ nur für $\kappa^2 > 0$ (in Ausnahmefällen auch $\kappa = 0$) nicht X -elliptisch ist. Somit sind alle $\kappa^2 \not\geq 0$ in der Resolventenmenge $\rho(\tilde{A})$ von a und das Spektrum $\sigma(\tilde{A})$ besteht aus Eigenwerten λ endlicher Vielfachheit mit $\lambda \geq 0$. Sofern $\Gamma \subset \partial G$ ein nicht verschwindendes Maß hat, ist $\lambda > 0$ bereits in Bemerkung 2.9 gezeigt. Andernfalls sei im Widerspruch zur Behauptung der kleinste Eigenwert von a $\lambda_1 < 0$. Dann existiert ein $C_k > 0$ mit $\lambda_1 < -C_k$, sodass $s := a + C_k b$ X -elliptisch ist und somit ein echt positives, diskretes Spektrum mit kleinstem Eigenwert $\tilde{\lambda}_1 > 0$ besitzt. Nach dem Beweis des Satzes 2.29 ist $\sigma_d(\tilde{A}) = \sigma_d(\tilde{S}) - C_k$ und somit der kleinste Eigenwert von a $\tilde{\lambda}_1 - C_k > \lambda_1$ und die Behauptung gezeigt.

Fassen wir die Ergebnisse für $a - \kappa^2 b$ zusammen:

Satz 2.31. Die in (2.12) definierte Sesquilinearform a besitzt ein rein diskretes Spektrum $\sigma(\tilde{A})$ aus nicht negativen Eigenwerten. Das Eigenpaar

$$(\lambda, u) \in \sigma(\tilde{A}) \times \ker(\tilde{A} - \lambda \text{id}) \setminus \{0\}$$

löst das verallgemeinerte Eigenwertproblem

$$a(u, v) = \lambda b(u, v), \quad v \in X. \quad (2.39)$$

Genau für die Wurzeln mit positivem Realteil $\kappa = \sqrt{\lambda}$ der Eigenwerte λ ist das Variationsproblem (2.11) nicht eindeutig lösbar.

In Bemerkung 2.27(ii) wurde bereits gezeigt, dass der a zugeordnete Operator \tilde{A} der negative Laplace-Operator ist. Somit ist das Spektrum des negativen Laplace-Operators auf beschränkten Gebieten durch vorigen Satz charakterisiert.

Beispiel 2.32 (Rechteck). Sei $G := (0, a) \times (0, b)$ mit $a, b > 0$ ein Rechteck. Dann besitzt das Dirichletsche ($\Gamma = \partial G$) Eigenwertproblem (2.39) die Eigenwerte

$$\lambda_{\nu, \mu} = \left(\frac{\nu\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mu\pi}{b}\right)^2, \quad \nu, \mu \in \mathbb{N}$$

und die zugehörigen Eigenfunktionen

$$u_{\nu, \mu} = \sin\left(\frac{\nu\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\mu\pi}{b}y\right), \quad (x, y) \in G.$$

Die FE-Diskretisierung aus Abschnitt 2.3 für das Eigenwertproblem (2.39) oder allgemeiner für (2.37) führt zur Rayleigh-Ritz Methode:

$$(\lambda_h, u_h) \text{ sei nichttriviales Eigenpaar von } a(u_h, v_h) = \lambda_h b(u_h, v_h), \quad v_h \in X_h. \quad (2.40)$$

Dies ist äquivalent zur Lösung des verallgemeinerten Matrix-Eigenwertproblems

$$A_h \alpha_h = \lambda_h B \alpha_h. \quad (2.41)$$

Dieses Matrix-Eigenwertproblem kann mit der im Software-Paket ARPACK [LSY98] enthaltenen Arnoldi-Methode gelöst werden, bei der das Eigenwertproblem in geeignete Krylov-Unterräume projiziert wird. Eine ausführlichere Erläuterung der Methode findet sich in [LSY98, §4.5].

Satz 2.33 (Konvergenz der Rayleigh-Ritz Methode). *Sei $X_h \subset X$ mit $\dim X_h = N$ eine Folge von Unterräumen, die im Sinne von (2.29) gegen X streben. Weiter seien $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ die Eigenwerte von (2.39) mit zugehörigen paarweise orthonormalen Eigenvektoren $u_1, u_2 \dots$ und $\lambda_h^{(1)} \leq \lambda_h^{(2)} \leq \dots \leq \lambda_h^{(N)}$ die Eigenwerte von (2.40). Die Eigenwerte seien jeweils ihrer Vielfachheit nach aufgeführt. Dann gilt für hinreichend großes N*

$$0 \leq \lambda_h^{(j)} - \lambda_j \leq r(h, j) \sum_{i=1}^j \inf_{v_h \in X_h} \|v_h - u_i\|_V, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.42)$$

mit $\lim_{h \rightarrow 0} r(h, j) = 1$.

Beweis. Der Beweis ist in [Mer91, Satz 4.1] ausgeführt. Zentraler Punkt der Theorie ist dabei die Charakterisierung der Eigenwerte mit Hilfe des Rayleighschen Quotienten $R(f) := \frac{a(f, f) + \epsilon(f, f)_0}{(f, f)_0}$, $0 \neq f \in X$

$$\lambda_j = \min_{\substack{E \subset X \\ \dim E = j}} \max_{v \in E} R(v), \quad (2.43)$$

welche mit Hilfe der Spektraldarstellung eines selbstadjungierten Operators gewonnen wird (siehe [WS72, Kapitel 2]). Der Term $\epsilon(f, f)_0$ mit $\epsilon > 0$ garantiert die X -Elliptizität des Zählers und verschiebt das Spektrum ins Positive. Falls Γ nicht verschwindendes Maß besitzt, kann $\epsilon = 0$ gesetzt werden. \square

Der Satz ist das Analogon zum Céa Lemma 2.22; mit Hilfe des Satzes 2.23 ist die Konvergenz der Ritz-Eigenwerte sichergestellt.

Bemerkung 2.34. *Auch wenn wir den Satz nur für die Sesquilinearformen a und b aus (2.12) formuliert haben, so kann er auf allgemeinere Sesquilinearformen erweitert werden. Entscheidend dafür ist, dass die Sesquilinearformen hermitesch sind. Nach Bemerkung 2.30 ist dann der zugeordnete Operator selbstadjungiert, das Spektrum reellwertig und eine Aussage der Form (2.43) erst möglich. Weiter muss das Spektrum nach unten beschränkt sein, damit nach einer Spektralverschiebung durch einen Term wie $\epsilon(f, f)_0$ die Sesquilinearform positiv definit wird und ein Skalarprodukt definiert.*

2. Helmholtz Probleme auf beschränkten Gebieten

Aus (2.43) folgt, dass die Ritz-Eigenwerte $\lambda_h^{(j)}$ monoton von unten gegen die Eigenwerte λ_j konvergieren. Da mit Hilfe des Goerisch-Verfahrens [Mer96] auch numerische Schranken von oben für λ_j möglich sind, lassen sich die Eigenwerte des Problems (2.39) sehr genau bestimmen. Zur Konvergenz der Ritz-Eigenfunktionen siehe [Mer91, Satz 3.1].

3. Helmholtz Probleme auf unbeschränkten Gebieten

Es sei im Gegensatz zum vorigen Kapitel $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene, *unbeschränkte* Teilmenge des \mathbb{R}^d mit $d = 2, 3$. Weiter sei Ω das Komplement eines kompakten Lipschitz-Gebietes K , d.h. $\Omega := \mathbb{R}^d \setminus K$, $\kappa \in \mathbb{C}$ eine Wellenzahl mit positivem Realteil $\Re(\kappa) > 0$ und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine Lösung des externen Helmholtz Problems

$$-\Delta u(x) - \kappa^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3.1a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = l, \quad x \in \partial\Omega, \tag{3.1b}$$

$$u \quad \text{erfüllt eine Ausstrahlungsbedingung.} \tag{3.1c}$$

Aus der Unbeschränktheit des Grundgebietes Ω resultieren einige wesentliche Unterschiede zu den bereits vorgestellten Helmholtz Problemen auf beschränkten Gebieten G :

- Die Gleichung (2.1) wird durch die Vorgabe der Bedingungen (2.2) auf dem gesamten Rand des Grundgebietes ∂G für geeignete κ eindeutig lösbar. Da Ω unbeschränkt ist, liegt ein Teil des Randes „im Unendlichen“, d.h. für die Eindeutigkeit werden in diesem Fall Bedingungen an das Verhalten der Lösung für $|x| \rightarrow \infty$ benötigt. Eine klassische Ausstrahlungsbedingung wird zusammen mit den daraus resultierenden Lösungen im nächsten Abschnitt vorgestellt.
- FEM arbeiten mit einer Zerlegung \mathcal{T} des Grundgebietes in endliche Teilgebiete (FE), auf denen lokal Ansatzfunktionen definiert werden (siehe Beispiele 2.16 und 2.18). Es müssen folglich Techniken entwickelt werden, entweder das Grundgebiet künstlich zu beschränken oder unbeschränkte Finite Elemente zu behandeln. Einen Teil dieser Methoden wird im zweiten Abschnitt unter dem Begriff transparente Randbedingungen zusammengefasst.
- Im Satz 2.31 bzw. in der Bemerkung im Anschluss an den Satz wurde gezeigt, dass das Spektrum des negativen Laplace-Operators auf beschränkten Gebieten G aus reellen, diskreten Eigenwerten mit endlicher Vielfachheit besteht. Dies liegt im wesentlichen in der Kompaktheit der Einbettung $H^1(G) \subset L^2(G)$ begründet, da diese die Benutzung der Riesz-Fredholm Theorie ermöglicht. Für unbeschränkte Gebiete ist die Einbettung nicht mehr kompakt; die reellen Eigenwerte werden, wie im letzten Abschnitt des Kapitels beschrieben, zu komplexen Resonanzen.

Die Unbeschränktheit des Gebietes Ω macht es notwendig, lokale Sobolev-Räume $H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ einzuführen.

3. Helmholtz Probleme auf unbeschränkten Gebieten

Definition 3.1. $H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ ist der Raum aller Funktionen auf Ω , für die die Einschränkungen auf kompakte Teilmengen $K \subset \Omega$ mit Lipschitz-Rand ∂K in $H^s(K)$ liegen.

Für $l \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ suchen wir eine Lösung von (3.1) in $H_{\text{loc}}^2(\Omega)$. Wir werden später sehen, dass abhängig von κ diese Lösung nicht in $H^2(\Omega)$ liegen muss.

3.1. Streuprobleme

Wir wollen in diesem Abschnitt einige klassische Resultate zu dem Streuproblem (3.1) mit $\kappa > 0$ und der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial |x|} - i\kappa \right) u(x) = 0 \quad (3.2)$$

vorstellen. Die Konvergenz in der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung wird als gleichmäßig in $x/|x|$ vorausgesetzt.

Bemerkung 3.2. In diesem Kapitel wird im Wesentlichen der zwei- und dreidimensionale Fall $d = 2, 3$ behandelt. Für den Fall $d = 1$ reduziert sich die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung auf $u' = i\kappa u$. Vergleiche dazu auch den Beginn von Abschnitt 4.1.

3.1.1. Polarkoordinaten und Laplace-Beltrami-Operator

Seien $B_a := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq a\}$ ein Ball mit Radius $a > 0$ und $\Gamma_a := \partial B_a$ der zugehörige Rand. Für kreisförmige Gebiete Ω wie $\mathbb{R}^d \setminus B_a$ ist der Übergang zu Polarkoordinaten $r := |x| \in \mathbb{R}_+$ und $\hat{\mathbf{x}} := x/|x| \in \Gamma_1$ sinnvoll. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird es sich als nützlich erweisen, diese Definition etwas zu verallgemeinern und $r := |x|/a$ bzw. $\hat{\mathbf{x}} := x/r \in \Gamma_a$ zu verwenden. Der Laplace-Operator ist in $(r, \hat{\mathbf{x}})$ gegeben durch

$$\Delta = \frac{1}{a^2} \left(\partial_r^2 + \frac{d-1}{r} \partial_r \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\hat{\mathbf{x}}} \quad (3.3)$$

mit dem Laplace-Beltrami-Operator $\Delta_{\hat{\mathbf{x}}}$ auf Γ_a . Sind

$$\hat{\mathbf{x}} = a \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{x}} = a \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\theta \in [0, \pi)$ Parametrisierungen von Γ_a , so gilt

$$\Delta_{\hat{\mathbf{x}}} = \frac{1}{a^2} \begin{cases} \partial_\varphi^2, & d = 2 \\ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{(\sin \theta)^2} \partial_\varphi^2, & d = 3 \end{cases} \quad (3.5)$$

Bemerkung 3.3. Sowohl (3.3) als auch (3.5) ergibt sich aus der Definition des Laplace-Beltrami-Operators $\Delta = \text{div grad}$ mit den verallgemeinerten Divergenz- und Gradientenoperatoren auf einer Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^d . Diese wiederum werden für eine Parametrisierung der Mannigfaltigkeit $x(\xi)$ mit Hilfe des Metrischen Tensors

$$g = (g_{ij}) \quad \text{mit} \quad g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi_j} \quad (3.6)$$

bzw. des zu g inversen Tensors $g^{-1} = (g^{ij})$ sowie der Determinante $|g|$ von g definiert durch

$$\text{grad} = \sum_j \begin{pmatrix} g^{1j} \partial_{\xi_j} \\ g^{2j} \partial_{\xi_j} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{div} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_i \partial_{\xi_i} (\sqrt{|g|} f_i). \quad (3.7)$$

Insgesamt gilt

$$\Delta = \sum_{i,j} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\xi_i} (\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_{\xi_j}) \quad (3.8)$$

und z.B. (3.5) mit $d = 3$ folgt mit $g = a^2 \text{diag}(\sin^2 \theta, 1)$. Der Oberflächengradient $\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}$ ist dabei mit obiger Parametrisierung

$$\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} := \frac{1}{a^2} \partial_\varphi \quad \text{für } d = 2 \quad \text{und} \quad \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} := \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi \\ \partial_\theta \end{pmatrix} \quad \text{für } d = 3. \quad (3.9)$$

Lemma 3.4 (Eigenfunktionen von $\Delta_{\hat{\mathbf{x}}}$). Der Laplace-Beltrami-Operator $\Delta_{\hat{\mathbf{x}}}$ besitzt auf $L^2(\Gamma_a)$ ein vollständiges Orthonormalsystem aus Eigenfunktionen Φ_n , $n \in \mathbb{N}_0$, mit zugehörigen Eigenwerten λ_n .

1. Für $d = 2$ sind die Eigenwerte von der Form $\lambda_n = -\frac{\nu(n)^2}{a^2}$ mit $\nu(n) := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Mit Ausnahme $\lambda_0 = 0$ haben die Eigenwerte die Vielfachheit 2 und Eigenfunktionen sind durch $\Phi_n(\hat{\mathbf{x}}(\varphi)) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm \nu(n)i\varphi}$ gegeben.
2. Für $d = 3$ sind die Eigenwerte von der Form $\lambda_n = -\frac{\nu(n)(\nu(n)+1)}{a^2}$ und haben die Vielfachheit $2\nu(n) + 1$, wobei ν eine bijektive Abbildung von \mathbb{N}_0 nach \mathbb{N}_0 mit

$$\nu(0) = 0, \quad \nu(\{1, 2, 3\}) = \{1, 1, 1\}, \quad \nu(\{4, \dots, 8\}) = \{2, \dots, 2\}, \dots$$

ist. Als Eigenfunktionen können Kugelflächenfunktionen, die Einschränkungen auf Γ_a von homogenen, harmonischen Polynomen der Ordnung ν sind, verwendet werden.

Beweis. Homogene Polynome (siehe [FGS98, Abschnitt 2.1]) der Ordnung ν besitzen eine Polarkoordinatendarstellung der Form $r^\nu Y_\nu(\hat{\mathbf{x}})$, wobei Y_ν genau die Einschränkungen dieser Polynome auf Γ_a darstellen. Da harmonische, homogene Polynome Lösungen der Laplace-Gleichung sind, ergibt sich mit (3.3) für Y_ν

$$\left(\frac{\nu(\nu+1)}{a^2} + \Delta_{\hat{\mathbf{x}}} \right) Y_\nu = 0.$$

3. Helmholtz Probleme auf unbeschränkten Gebieten

Damit sind die Kugelflächenfunktionen der Ordnung ν Eigenfunktionen zum Eigenwert $-\frac{\nu(\nu+1)}{a^2}$. Mit der Greenschen Formel, angewandt auf zwei Kugelflächenfunktionen, ergibt sich die Orthogonalität. In [CK98, Theorem 2.6] wird die Existenz von exakt $2\nu + 1$ linear unabhängigen Kugelflächenfunktionen der Ordnung ν und in [CK98, Theorem 2.7] die Vollständigkeit des Systems aus Kugelflächenfunktionen gezeigt. Zum Schluss wird in [FGS98, Lemma 3.5.2] gezeigt, dass keine weiteren Eigenfunktionen existieren.

Für $d = 2$ bilden die trigonometrischen Polynome ein Orthogonalsystem aus Eigenvektoren. Die Vollständigkeit dieses Systems folgt z.B. mit dem Weierstraßschen Approximationssatz. \square

Der erste Teil des vorigen Lemmas kann auch direkt aus Bemerkung 2.30 gefolgert werden. Da wir im weiteren Verlauf jedoch immer wieder auf dieses Lemma und die genaue Gestalt der Eigenwerte zurückkommen werden, haben wir den Beweis explizit durchgeführt.

3.1.2. Streuung an einer Kugel

Eine Lösung $u \in C^2(\Omega)$ von (3.1) mit $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus B_a$ lässt sich bezüglich $\{\Phi_n | n \in \mathbb{N}\}$ in eine Fourier-Reihe entwickeln

$$u(r\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r) \Phi_n(\hat{\mathbf{x}}) \quad \text{mit} \quad u_n(r) := \int_{\Gamma_a} u(r\hat{\mathbf{x}}) \overline{\Phi_n(\hat{\mathbf{x}})} d\hat{\mathbf{x}} \quad (3.10)$$

und (3.1) ist äquivalent zu

$$u_n''(r) + \frac{d-1}{r} u_n'(r) + \left((a\kappa)^2 + \frac{a^2 \lambda_n}{r^2} \right) u_n(r) = 0, \quad r \geq 1, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.11)$$

oder speziell für $d = 2$ und $\lambda_n = -\frac{\nu^2}{a^2}$

$$u_\nu''(r) + \frac{1}{r} u_\nu'(r) + \left((a\kappa)^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) u_\nu(r) = 0, \quad r \geq 1. \quad (3.12)$$

(3.12) wird Besselsche Differentialgleichung und (3.11) für $d = 3$ sphärische Besselsche Differentialgleichung genannt.

Bemerkung 3.5. Wenn $U_\nu(a\kappa r)$ eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung (3.12) ist, so ist

$$u_\nu(a\kappa r) := \frac{1}{\sqrt{a\kappa r}} U_{\nu+1/2}(a\kappa r) \quad (3.13)$$

eine Lösung der sphärischen Besselschen Differentialgleichung.

Als Differentialgleichung 2. Ordnung kann jede Lösung von (3.12) als Linearkombination zweier linear unabhängiger Lösungen dargestellt werden. Ein solches Lösungspaar ist u.a. durch die bekannten Hankel-Funktionen $H_\nu^{(1/2)}$ erster und zweiter Art gegeben.

Auf eine genaue Definition soll an dieser Stelle verzichtet werden. Eine Herleitung, basierend auf Reihendarstellungen für die Bessel-Funktionen 1. und 2. Art, findet sich z.B. in [Arf66, §11]. Eine besondere Schwierigkeit stellt dabei die Definition einer von den Bessel-Funktionen 1. Art linear unabhängigen Bessel-Funktion 2. Art dar. Lösungen der sphärischen Besselschen Differentialgleichung sind mit Bemerkung 3.5 durch die sphärischen Hankel-Funktionen $h_\nu^{(1/2)}(a\kappa r) := (a\kappa r)^{-1/2} H_{\nu+1/2}^{(1/2)}(a\kappa r)$ gegeben. Es gilt

$$h_0^{(1,2)}(r) = \frac{e^{\pm it}}{\pm it}. \quad (3.14)$$

Die weiteren sphärischen Hankel-Funktionen lassen sich mit den Rekursionsformeln des folgenden Lemmas ebenfalls explizit berechnen.

Lemma 3.6. *Seien $\mathcal{H}_\nu^{(1/2)} := (\bullet)^{1-d/2} H_{\nu-1+d/2}^{(1/2)}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_- \cup \{0\})$. Dann gilt*

$$\mathcal{H}_{\nu+1}^{(1/2)}(z) = -z^\nu \partial_z (z^{-\nu} \mathcal{H}_\nu^{(1/2)}(z)), \quad \nu = 0, 1, \dots, \quad (3.15a)$$

$$\mathcal{H}_{\nu+1}^{(1/2)}(z) + \mathcal{H}_{\nu-1}^{(1/2)}(z) = \frac{2(\nu-1) + d}{z} \mathcal{H}_\nu^{(1/2)}(z), \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (3.15b)$$

$$|\mathcal{H}_\nu^{(1/2)}(z)| = \frac{|e^{\pm iz}|}{|z|^{(d-1)/2}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right) \right), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (3.15c)$$

$$z \mapsto \mathcal{H}_\nu^{(1)}(\kappa|z|) \text{ erfüllt (3.2)}. \quad (3.15d)$$

Beweis. Die Beweise der ersten beiden Formeln verwenden die Reihendarstellungen der Hankel-Funktionen und sind in [CK98, §2.4 und §3.4] beschrieben. Zusammen mit (3.14) ergibt sich das asymptotische Verhalten der sphärischen Hankel-Funktionen und damit die letzte Aussage für $d = 3$. Das asymptotische Verhalten im Falle $d = 2$ wird in [Wat95] nachgewiesen. \square

Wird die Randfunktion l analog zu (3.10) bezüglich $\{\Phi_n\}$ in ihre Fourier-Koeffizienten $l_n := (l, \Phi_n)_{L^2(\Gamma_a)}$ entwickelt, so lösen die Fourier-Koeffizienten u_n der Lösung u von (3.1) die separierten Probleme

$$u_n''(r) + \frac{d-1}{r} u_n'(r) + \left((a\kappa)^2 + \frac{a^2 \lambda_n}{r^2} \right) u_n(r) = 0, \quad r \geq 1, \quad (3.16a)$$

$$u_n'(1) = a l_n, \quad (3.16b)$$

$$u \text{ erfüllt (3.2)} \quad (3.16c)$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$. Zu beachten ist hierbei, dass wegen der Skalierung $r = |x|/a$ gilt $\partial_\nu u = (1/a)\partial_r$. Da wegen (3.15c) und (3.15d) die (sphärischen) Hankel-Funktionen 1. Art (3.2) erfüllen und die (sphärischen) Hankel-Funktionen 2. Art nicht, ist

$$u_n(r) = c_n \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)}(a\kappa r), \quad r \geq 1 \quad \text{mit } c_n \in \mathbb{C}.$$

Mit (3.16b) folgt $c_n = \frac{l_n}{\kappa \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)}(\kappa a)}$ und es existiert genau eine im Sinne von (3.2) ausstrahlende Lösung u_n von (3.16) mit

$$u_n(r) = \frac{l_n}{\kappa \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)}(\kappa a)} \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)}(a\kappa r), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.17)$$

3. Helmholtz Probleme auf unbeschränkten Gebieten

In [CK98, Theorem 2.14] wird gezeigt, dass die zusammengesetzte Funktion

$$u(r\hat{\mathbf{x}}) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_n}{\kappa \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)'(\kappa a)}} \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)}(a\kappa r) \Phi_n(\hat{\mathbf{x}}). \quad (3.18)$$

für geeignete l_n auf kompakten Teilmengen von Ω konvergiert und die eindeutig bestimmte, im Sinne von (3.2) ausstrahlende Lösung von (3.1) ist. Wir werden später in den Sätzen 3.9 und 3.12 auf diesen Punkt genauer eingehen.

Für $\kappa > 0$ ist $\mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)'(\kappa a)} \neq 0$, wie aus folgendem Lemma hervorgeht. Wir werden später in Abschnitt 3.3 auf die Nullstellen der (sphärischen) Hankel-Funktionen zurückkommen.

Lemma 3.7. *Für $\Re(\kappa) > 0$ und $\nu \geq 0$ existieren endlich viele Nullstellen κ von $\mathcal{H}_{\nu}^{(1)}$ bzw. $\mathcal{H}_{\nu}^{(1)'}$. Für diese gilt $\Im(\kappa) < 0$ und $|\kappa| \geq C > 0$.*

Beweis. Der Beweis folgt mit [AS64, S.373 und S.441]. Vergleiche auch Abbildung 3.1. \square

Bemerkung 3.8. *Wenn wir an Stelle von (3.1b) eine Dirichletsche Randbedingung*

$$u|_{\partial\Omega} = l, \quad x \in \partial\Omega \quad (3.19)$$

stellen, so ergibt sich vollständig analog

$$u(r\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_n}{\mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)}(a\kappa)} \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)}(a\kappa r) \Phi_n(\hat{\mathbf{x}}). \quad (3.20)$$

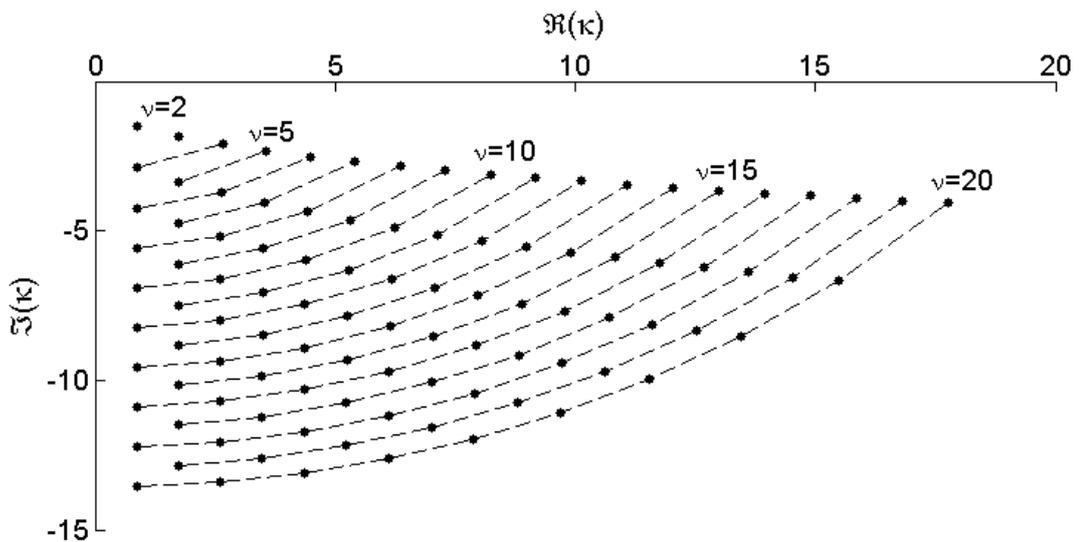


Abbildung 3.1.: Nullstellen der sphärischen Hankel-Funktionen für $\nu = 2, \dots, 20$

3.1.3. DtN-Operator

Die bekannte Lösung des Streuproblems an einer Sphäre Γ_a kann für allgemeine Streuprobleme der Form $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus K$ mit kompaktem $K \subset B_a$ genutzt werden, indem das Grundgebiet in zwei Teilgebiete $\Omega_{\text{int}} := B_a \setminus K$ und $\Omega_{\text{ext}} := \mathbb{R}^d \setminus \overline{B_a}$ zerlegt wird (siehe Abbildung 3.2).

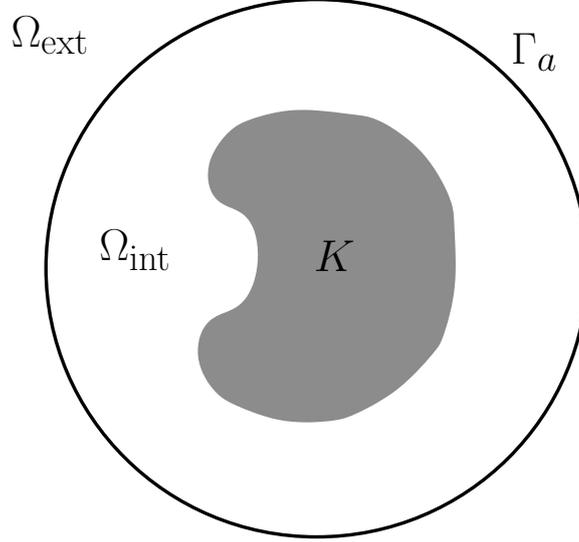


Abbildung 3.2.: Zerlegung des Grundgebietes Ω

Formal kann das Streuproblem (3.1) auf diese Weise in zwei miteinander gekoppelte Probleme für $u_{\text{int}} := u|_{\Omega_{\text{int}}}$ und $u_{\text{ext}} := u|_{\Omega_{\text{ext}}}$ zerlegt werden:

$$-\Delta u_{\text{int}} - \kappa^2 u_{\text{int}} = 0, \quad \text{in } \Omega_{\text{int}}, \quad (3.21a)$$

$$\frac{\partial u_{\text{int}}}{\partial \nu} \Big|_{\partial K} = l, \quad \text{auf } \partial K, \quad (3.21b)$$

$$\frac{\partial u_{\text{int}}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_a} = g'_0, \quad \text{auf } \Gamma_a \quad (3.21c)$$

und

$$-\Delta u_{\text{ext}} - \kappa^2 u_{\text{ext}} = 0, \quad \text{in } \Omega_{\text{ext}}, \quad (3.22a)$$

$$u_{\text{ext}}|_{\Gamma_a} = g_0, \quad \text{auf } \Gamma_a, \quad (3.22b)$$

$$u_{\text{ext}} \text{ erfüllt eine Ausstrahlungsbedingung.} \quad (3.22c)$$

Die Kopplung entsteht durch $u_{\text{int}} = u_{\text{ext}}$ und $\partial_\nu u_{\text{int}} = \partial_\nu u_{\text{ext}}$ auf Γ_a und spiegelt sich in einer Beziehung zwischen g_0 und g'_0 wieder. Mit $g_0^{(n)} := (g_0, \Phi_n)_{L^2(\Gamma_a)}$ lässt sich diese Beziehung durch die Lösung (3.20) des externen Problems darstellen

$$g'_0 = \frac{\partial u_{\text{ext}}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)'}(a\kappa)}{\mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)}(a\kappa)} \Phi_n(\hat{\mathbf{x}}) g_0^{(n)}. \quad (3.23)$$

3. Helmholtz Probleme auf unbeschränkten Gebieten

Dabei ist zu beachten, dass die Reihe in (3.20) wegen [Néd01, Theorem 2.6.2] gliedweise differenziert werden darf. Die Abbildung $g_0 \mapsto g'_0$ wird Dirichlet-to-Neumann-Operator (kurz DtN-Operator) und die inverse Abbildung DtN^{-1} Neumann-to-Dirichlet-Operator genannt.

Satz 3.9. *Der DtN-Operator hat für $\Re(\kappa) > 0$ die folgenden Eigenschaften:*

- (i) *DtN ist ein linearer, stetiger Operator von $H^{1/2}(\Gamma_a)$ nach $H^{-1/2}(\Gamma_a)$.*
- (ii) *Es existiert ein linearer, kompakter Operator $L : H^{1/2}(\Gamma_a) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_a)$, sodass $\text{DtN} - L$ nicht mehr von κ abhängt und $\Re \left(\int_{\Gamma_a} (\text{DtN} - L)(f) \bar{f} d\hat{\mathbf{x}} \right) < 0$ für alle $f \in H^{1/2}(\Gamma_a) \setminus \{0\}$.*
- (iii) *Für $\kappa > 0$ gilt $\Im \left(\int_{\Gamma_a} \text{DtN}(f) \bar{f} d\hat{\mathbf{x}} \right) > 0$ für alle $f \in H^{1/2}(\Gamma_a) \setminus \{0\}$.*

Beweis. Die Linearität von DtN ist unmittelbar ersichtlich. Für $f \in H^s(\Gamma_a)$ kann eine zu $\|\bullet\|_{H^s(\Gamma_a)}$ äquivalente Norm analog zu [FGS98, §5.1] mit den Fourier-Koeffizienten $f_n := (f, \Phi_n)_{L^2(\Gamma_a)}$ definiert werden durch

$$\|f\|_{H^s(\Gamma_a)}^2 \sim \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \nu(n))^{2s} |f_n|^2. \quad (3.24)$$

Für $\alpha_\nu := \frac{\kappa \mathcal{H}_\nu^{(1)'(a\kappa)}}{\mathcal{H}_\nu^{(1)}(a\kappa)}$ gilt mit Hilfe von (3.15a) und (3.15b)

$$\alpha_\nu = -\frac{\nu + d - 2}{a} + \frac{\kappa \mathcal{H}_{\nu-1}^{(1)}(a\kappa)}{\mathcal{H}_\nu^{(1)}(a\kappa)}. \quad (3.25)$$

Dann ist wegen

$$\|\text{DtN } f\|_{H^{-1/2}(\Gamma_a)}^2 \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\alpha_{\nu(n)}}{1 + \nu(n)} \right|^2 (1 + \nu(n)) |f_n|^2 \quad (3.26)$$

die erste Behauptung bewiesen, sofern $\alpha_\nu = \mathcal{O}(\nu)$. Mit den asymptotischen Entwicklungen für die (sphärischen) Hankel-Funktionen (siehe [CK98, §2.4 und §3.4])

$$\begin{aligned} h_\nu^{(1)}(z) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2\nu - 1)}{iz^{\nu+1}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right) \right), \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{und} \\ H_\nu^{(1)}(z) &= \frac{2^\nu (\nu - 1)!}{\pi iz^\nu} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right) \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

folgt dies mit

$$\frac{\kappa \mathcal{H}_{\nu-1}^{(1)}(a\kappa)}{\mathcal{H}_\nu^{(1)}(a\kappa)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right). \quad (3.28)$$

Die zweite Behauptung ist ebenfalls gezeigt, wenn der Operator L durch

$$\int_{\Gamma_a} L(f) \bar{g} d\hat{\mathbf{x}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa \mathcal{H}_{\nu(n)-1}^{(1)}(a\kappa)}{\mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)}(a\kappa)} f_n \overline{f_n(g, \Phi_n)_{L^2(\Gamma_a)}}, \quad f, g \in H^{1/2}(\Gamma_a), \quad (3.29)$$

definiert wird, da wegen $\|Lf\|_{H^{1/2}(\Gamma_a)} < \infty$ L als Abbildung von $H^{1/2}(\Gamma_a)$ nach $H^{1/2}(\Gamma_a)$ aufgefasst werden kann und die Einbettung $H^{1/2}(\Gamma_a) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_a)$ kompakt ist.

Die dritte Behauptung ist äquivalent zu $\Im(\alpha_\nu) > 0$ und findet sich z.B. in [Ihl98, Lemma 3.3]. \square

Bemerkung 3.10. *Wir unterdrücken aus Notationsgründen die Abhängigkeit des DtN-Operators von κ . Für Streuprobleme stellt dies kein größeres Problem dar. Bei Resonanzproblemen hingegen ist diese Abhängigkeit entscheidend, da sie nichtlinear in den gesuchten Eigenwerten κ^2 ist.*

3.1.4. Eindeutigkeit und Äquivalenz

Mit Hilfe des DtN-Operators kann eine Variationsformulierung für (3.21) in $X := H^1(\Omega_{\text{int}})$ angegeben werden:

$$s(u_{\text{int}}, v) = l^*(v), \quad v \in X \quad (3.30)$$

mit

$$\begin{aligned} s(f, g) &:= \int_{\Omega_{\text{int}}} (\nabla f \cdot \overline{\nabla g} - \kappa^2 f \overline{g}) \, dx - \int_{\Gamma_a} \text{DtN}(f|_{\Gamma_a}) \overline{g|_{\Gamma_a}} \, d\hat{\mathbf{x}}, \\ l^*(f) &:= \int_{\partial K} \overline{l f} \, ds \end{aligned} \quad (3.31)$$

für $f, g \in X$.

Lemma 3.11. *Für die Sesquilinearform s gilt:*

- (i) *Für $\Re(\kappa) > 0$ ist die Sesquilinearform s aus X -koerzitiv, d.h. s ist stetig auf $X \times X$ und es existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit*

$$\Re(s(f, f)) + C_1 \|f\|_{L^2(\Omega_{\text{int}})} + \Re\left((Lf|_{\Gamma_a}, f|_{\Gamma_a})_{H^{-1/2}(\Gamma_a) \times H^{1/2}(\Gamma_a)}\right) \geq C_2 \|f\|_{H^1(\Omega_{\text{int}})}. \quad (3.32)$$

- (ii) *s erfüllt für $\kappa > 0$ eine inf-sup Bedingung (2.27), d.h. (3.30) besitzt für alle $l \in H^{-1/2}(\partial K)$ eine eindeutige Lösung, und die Lösung hängt stetig von l ab.*

Beweis. Die Stetigkeit von s folgt direkt aus Satz 3.9(i) mit dem nach Satz 2.3 stetigen Spuroperator $T : H^1(\Omega_{\text{int}}) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_a)$. Die Ungleichung (3.32) ist eine direkte Folge aus Satz 3.9(ii) und Bemerkung 2.9. Dies ist in der Tat eine Gårding Ungleichung im Sinne von Bemerkung 2.8, da

$$(Lf|_{\Gamma_a}, f|_{\Gamma_a})_{H^{-1/2}(\Gamma_a) \times H^{1/2}(\Gamma_a)} = (T'LTf, f)_{L^2(\Omega_{\text{int}})} \quad (3.33)$$

mit dem dualen Operator $T' : H^{-1/2}(\Gamma_a) \rightarrow H^{-1}(\Omega_{\text{int}})$. Mit der Kompaktheit von L ergibt sich somit eine kompakte Störung einer X -elliptischen Sesquilinearform.

Für die zweite Behauptung ist mit der Riesz-Fredholm Theorie nur noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Hinreichend dafür ist 3.9(iii) (siehe [Ihl98, Theorem 3.2]). \square

3. Helmholtz Probleme auf unbeschränkten Gebieten

Mit Hilfe der eindeutigen Lösbarkeit von (3.30) gilt folgender Äquivalenzsatz.

Satz 3.12. *Seien $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$ eine Lösung von (3.1) und $\Re(\kappa) > 0$. Dann ist $u_{\text{int}} = u|_{\Omega_{\text{int}}} \in H^1(\Omega_{\text{int}})$ Lösung von (3.30). Umgekehrt kann die für $\kappa > 0$ eindeutige Lösung $u_{\text{int}} \in H^1(\Omega_{\text{int}})$ von (3.30) eindeutig zu einer Lösung $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$ von (3.1) fortgesetzt werden.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ist trivialerweise mit der Definition (3.23) des DtN-Operators erfüllt. Für den zweiten Teil sei $u_{\text{int}} \in H^1(\Omega_{\text{int}})$ die eindeutige Lösung von (3.30) und

$$u(x) := \begin{cases} u_{\text{int}}(x), & \text{für } x \in \Omega_{\text{int}} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u_{\text{int}}|_{\Gamma_a}, \Phi_n)_{L^2(\Gamma_a)}}{\mathcal{H}_{\nu^{(n)}}^{(1)}(a\kappa)} \mathcal{H}_{\nu^{(n)}}^{(1)}(\kappa|x|) \Phi_n\left(\frac{ax}{|x|}\right), & \text{für } x \in \Omega_{\text{ext}} \end{cases}. \quad (3.34)$$

$u_{\text{ext}} := u|_{\Omega_{\text{ext}}}$ liegt für jedes kompakte $K_1 \subset \Omega_{\text{ext}}$ nach [Néd01, Theorem 2.6.2] in $H^1(K_1)$ und ist wegen [CK98, Theorem 2.14] austrahlende Lösung der Helmholtz-Gleichung (3.22a). Die Beweise werden zwar nur für $\kappa > 0$ und in [Néd01] für $d = 2$ und in [CK98] für $d = 3$ geführt, können jedoch in dieser Formulierung auf $\Re(\kappa) > 0$ und $d = 2, 3$ verallgemeinert werden.

Sei weiter $K_2 \subset \Omega$ ein kompaktes Gebiet mit C^2 -Rand ∂K_2 . Dann ist wegen $\frac{\partial u_{\text{int}}}{\partial \nu}|_{\Gamma_a} = \frac{\partial u_{\text{ext}}}{\partial \nu}|_{\Gamma_a}$ und $u_{\text{int}}|_{\Gamma_a} = u_{\text{ext}}|_{\Gamma_a}$ die eingeschränkte Funktion $u|_{K_2} \in H^1(K_2)$ Lösung der Gleichung

$$\int_{K_2} (\nabla u \cdot \overline{\nabla v} - \kappa^2 u \overline{v}) dx = \int_{\partial K_2} \frac{\partial u}{\partial \nu}(s) \overline{v(s)} ds, \quad v \in H^1(K_2).$$

und mit dem Regularitätssatz 2.10 folgt $u|_{K_2} \in H^2(K_2)$. Somit ist $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$ und löst (3.1). Aus der Eindeutigkeit in Bemerkung 3.8 der Lösung u_{ext} auf Ω_{ext} bei gegebenen Dirichlet-Daten $u_{\text{int}}|_{\Gamma_a}$ folgt die Eindeutigkeit von u . \square

Damit ist theoretisch die in Abschnitt 2.4 dargestellte Konvergenztheorie konformer Finite Elemente Methoden anwendbar. Eine Schwierigkeit stellt in der praktischen Anwendung der DtN-Operator dar, da er aus einer unendlichen Reihe besteht und so nicht ohne weiteres implementiert werden kann. Deswegen werden wir im nächsten Abschnitt klassische Methoden zur Approximation des DtN-Operators vorstellen.

3.2. Transparente Randbedingungen

In Abschnitt 3.1.3 wurde das Streuproblem (3.1), das auf dem unbeschränkten Gebiet Ω gegeben ist, auf das Gebiet Ω_{int} eingeschränkt. Der implizit in (3.21) oder explizit in der zugehörigen Variationsformulierung (3.30) auftauchende DtN-Operator ist numerisch nicht anwendbar. Wir werden deshalb an Stelle der exakten Randbedingung auf Γ_a

$$-\text{DtN}(u_{\text{int}}|_{\Gamma_a}) + \frac{\partial u_{\text{int}}}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_a} = 0 \quad (3.35)$$

eine sogenannte transparente Randbedingung verwenden:

$$- \text{DtN}_{\text{ap}}(u_{\text{int}}|_{\Gamma_a}) + \frac{\partial u_{\text{int}}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_a} = 0. \quad (3.36)$$

Diese Randbedingung soll möglichst wenig unnatürliche Reflektionen am künstlichen Rand Γ_a hervorrufen. Es gibt mehrere Zugänge zur Konstruktion solcher Randbedingungen. Wir werden uns in diesem Kapitel auf die Zugänge über die bereits definierten Hankel-Funktionen $\mathcal{H}^{(1)}$, über die wir auch den DtN-Operator eingeführt haben, beschränken.

Bemerkung 3.13. *Die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (3.2) ist nur für Wellenzahlen κ mit $\Im(\kappa) \geq 0$ eine sinnvolle Ausstrahlungsbedingung. Für $\kappa \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $\Re(\kappa) > 0$ wird das Verhalten der Lösung für $r \rightarrow \infty$ durch den Exponentialterm in der asymptotischen Formel der Hankel-Funktionen (3.15c) bestimmt. Der definierte DtN-Operator bleibt jedoch in diesem Fall gültig und übernimmt die Rolle der Ausstrahlungsbedingung. Genauer gesagt ist eine Lösung von (3.1) mit $\Omega := \mathbb{R}^d \setminus K$ und $K \subset B_a$ genau dann ausstrahlend, wenn sie für $x \in \Omega_{\text{ext}}$ eine Reihendarstellung der Form*

$$u(r\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)}(a\kappa r) \Phi_n(\hat{\mathbf{x}}), \quad r \geq 1 \quad (3.37)$$

besitzt, welche auf kompakten Teilmengen des Ω_{ext} gleichmäßig und absolut konvergiert. Analog definieren wir eine Lösung als einfallend, wenn sie (3.37) mit den Hankel-Funktionen 2. Art erfüllt.

3.2.1. Lokale absorbierende Randbedingungen

Die zunächst naheliegendste Möglichkeit wäre, die unendliche Reihe in der Definition (3.23) des DtN-Operators an einer endlichen Stelle abzubrechen. Dies würde jedoch die Eigenschaft (iii) in Satz 3.9 des DtN-Operators zerstören. Diese ist hinreichend für die Eindeutigkeit des Problems für $\kappa > 0$ in Satz 3.11. In der Tat reduziert sich für jeden Abbruchindex N eine solche absorbierende Randbedingung für Funktionen f mit $f_n := (f, \Phi_n)_{L^2(\Gamma_a)} = 0$ für $n \leq N$ zu einer Neumannschen Randbedingung. Für diese hat nach Abschnitt 2.5 der Laplace-Operator auf beschränkten Gebieten positive Eigenwerte und das Problem (3.21) wäre für die Wurzeln dieser Eigenwerte nicht mehr eindeutig lösbar.

Zudem wäre eine solche Randbedingung nicht lokal; es müssten zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten Integrale über ganz Γ_a gebildet werden. Dies widerspricht dem Konstruktionsprinzip von FEM, lokal zu rechnen, um so möglichst dünn besetzte Matrizen zu erhalten.

Die einfachste Form einer lokalen, absorbierenden Randbedingung („absorbing boundary condition“ - ABC) stellt die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung selber da. Wird der Grenzwert $r \rightarrow \infty$ durch eine Auswertung auf der Sphäre Γ_a ersetzt, so ergibt sich

$$- i\kappa u_{\text{int}}|_{\Gamma_a} + \frac{\partial u_{\text{int}}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_a} = 0 \quad \text{und} \quad \text{DtN}_{\text{ap}} g = i\kappa g, \quad g \in H^{1/2}(\Gamma_a). \quad (3.38)$$

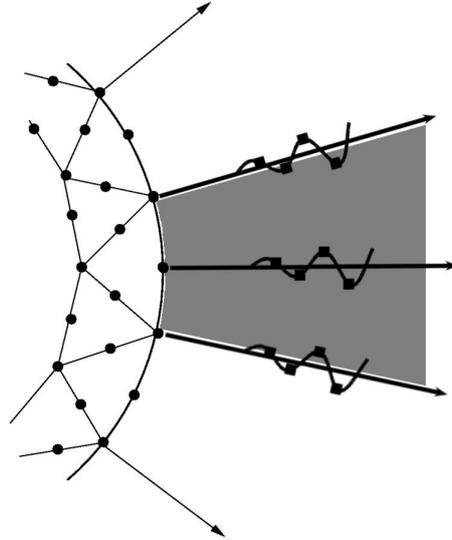


Abbildung 3.3.: Infinites Element

ABCs höherer Ordnung, die auch Ableitungen in $\hat{\mathbf{x}}$ enthalten, können mit der asymptotischen Formel der Hankel-Funktionen (3.15c) gewonnen werden. In [Ihl98, §3.3] sind mehrere, unterschiedliche Zugänge vorgestellt und verglichen. Sie haben jedoch eines gemeinsam: Der Exponentialterm in (3.15c) wird wie schon bei der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung vernachlässigt. Von daher sind diese Ausstrahlungsbedingungen nur für $\Im(\kappa) \geq 0$ sinnvoll.

3.2.2. Klassische Infinite Elemente Methoden

Für klassische Infinite Elemente Methoden (IEM) werden zunächst mit Standard-FEM auf Ω_{int} Basisfunktionen definiert. Die Spuren $b_n^{(\hat{\mathbf{x}})}$ der $N_{\hat{\mathbf{x}}} + 1$ auf Γ_a nicht verschwindenden Basisfunktionen werden in (3.37) an Stelle der Eigenfunktionen Φ_n des Laplace-Beltrami-Operators als Basis des $H^{1/2}(\Gamma_a)$ verwendet. Auch in dieser Basis hat eine Lösung von (3.1) asymptotisch für $r \rightarrow \infty$ das Verhalten der Hankel-Funktionen 1.Art. Werden nur endlich viele dieser Hankel-Funktionen benutzt, so ergibt sich folgender Ansatz für u :

$$u(r\hat{\mathbf{x}}) \approx \sum_{n=0}^{N_{\hat{\mathbf{x}}}} u_n(r) b_n^{(\hat{\mathbf{x}})}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \text{mit } u_n(r) := \sum_{\nu=0}^{N_r} c_{n\nu} \mathcal{H}_{\nu}^{(1)}(a\kappa r). \quad (3.39)$$

Ein Beispiel mit quadratischen Lagrange-Elementen auf Ω_{int} ist in Abbildung 3.3 zu sehen. Es ist nicht nötig, in (3.39) tatsächlich die Hankel-Funktionen zu verwenden. Vielmehr reicht es aus, für u_n ausstrahlende Lösungen im Sinne der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung zu verwenden. Häufig werden deshalb auch die einfacheren Basisfunktionen

$$b_0^{(r)}(r) := \frac{e^{ai\kappa(r-1)}}{r^{\frac{d-1}{2}}} \quad \text{und} \quad b_{\nu}^{(r)}(r) := \frac{e^{ai\kappa(r-1)}}{r^{(\nu+1)\frac{d-1}{2}}} - b_0^{(r)}(r), \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (3.40)$$

verwendet. Diese Darstellung entspricht der Atkinson-Wilcox Entwicklung (siehe z.B. [Ihl98, §2.1.4] oder [DI01]). Die Differenz für $\nu \geq 1$ ist dabei so gewählt, dass für $r = 0$ nur $b_0^{(r)}(0) = 1$ nicht verschwindet. Im Sinne der FEM heißt das, dass $b_0^{(r)}$ einen auf 1 normierten Randfreiheitsgrad darstellt und die weiteren Basisfunktionen als innere Freiheitsgrade des grau schraffierten infiniten Elementes zu betrachten sind.

Bemerkung 3.14. *In Polarkoordinaten definiert (3.39) ein einfaches Tensorprodukt-element für die Variationsformulierung*

$$\int_{\Omega_{\text{ext}}} \left(\nabla u_{\text{ext}} \cdot \overline{\nabla v|_{\Omega_{\text{ext}}}} - \kappa^2 u_{\text{ext}} \overline{v|_{\Omega_{\text{ext}}}} \right) dx = - \int_{\Gamma_a} \frac{\partial u_{\text{ext}}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_a} \overline{v|_{\Gamma_a}} d\hat{\mathbf{x}}. \quad (3.41)$$

Wenn obige Gleichung mit (3.3) in Polarkoordinaten überführt wird, so kann formal die Elementmatrix analog zu Beispiel 2.18 als Tensorprodukt aus den Elementmatrizen bezüglich $\hat{\mathbf{x}}$

$$M^{(\hat{\mathbf{x}})} := \left(\int_{\Gamma_a} b_n^{(\hat{\mathbf{x}})} \overline{b_m^{(\hat{\mathbf{x}})}} d\hat{\mathbf{x}} \right)_{m,n=0}^{N_{\hat{\mathbf{x}}}} \quad \text{und} \quad S^{(\hat{\mathbf{x}})} = \left(\int_{\Gamma_a} \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} b_n^{(\hat{\mathbf{x}})} \cdot \overline{\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} b_m^{(\hat{\mathbf{x}})}} d\hat{\mathbf{x}} \right)_{m,n=0}^{N_{\hat{\mathbf{x}}}} \quad (3.42)$$

sowie den Elementmatrizen bezüglich r

$$\begin{aligned} L_1 &:= \left(\frac{1}{a} \int_0^\infty \partial_r b_\nu^{(r)} \overline{\partial_r b_\mu^{(r)}} dr \right)_{\mu,\nu=0}^{N_r}, \quad L_2 := \left(\frac{d-1}{a} \int_0^\infty \frac{1}{r+1} \partial_r b_\nu^{(r)} \overline{b_\mu^{(r)}} dr \right)_{\mu,\nu=0}^{N_r}, \\ L_3 &:= \left(a \int_0^\infty \frac{1}{(r+1)^2} b_\nu^{(r)} \overline{b_\mu^{(r)}} dr \right)_{\mu,\nu=0}^{N_r} \quad \text{und} \quad L_4 := \left(a \int_0^\infty b_\nu^{(r)} \overline{b_\mu^{(r)}} dr \right)_{\mu,\nu=0}^{N_r} \end{aligned} \quad (3.43)$$

berechnet werden:

$$M^{(\hat{\mathbf{x}})} \otimes (L_1 - L_2 - \kappa^2 L_4) + S^{(\hat{\mathbf{x}})} \otimes L_3. \quad (3.44)$$

Die Matrizen L_k , $k = 1, 2, 3, 4$ sind zwar formal korrekt, die enthaltenen Integrale jedoch z.T. divergent. So hat für $d = 2$ und $\kappa > 0$ $b_0^{(r)}$ ein Abfallverhalten von \sqrt{r} und somit ist $b_0^{(r)} b_0^{(r)} \notin L_1(\mathbb{R}_+)$.

Bemerkung 3.15. *Ein alternativer Zugang ist in [Dem07, §16.1.2] beschrieben. Dort wird zunächst eine Variationsformulierung auf Ω_{int} aufgestellt und dann durch mehrere Transformationen die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung in die Formulierung eingeführt. Für positive κ existiert dann der Grenzwert der Integrale für $a \rightarrow \infty$ und es ergibt sich eine Formulierung für Ω . Im Kern führt dieser Ansatz jedoch zu den gleichen Elementen und den gleichen Problemen.*

Bemerkung 3.16. *Die IEM kann mit Hilfe von (3.41) als transparente Randbedingung bzw. als Approximation an den DtN-Operator aufgefasst werden, da*

$$- \int_{\Gamma_a} \text{DtN}(u_{\text{int}}|_{\Gamma_a}) \overline{v|_{\Gamma_a}} d\hat{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_{\text{ext}}} \left(\nabla u_{\text{ext}} \cdot \overline{\nabla v|_{\Omega_{\text{ext}}}} - \kappa^2 u_{\text{int}} \overline{v|_{\Omega_{\text{ext}}}} \right) dx. \quad (3.45)$$

Sie ist aufgrund der speziellen Wahl der Ansatzfunktionen $b_\nu^{(r)}$ auch lokal im Sinne der FEM.

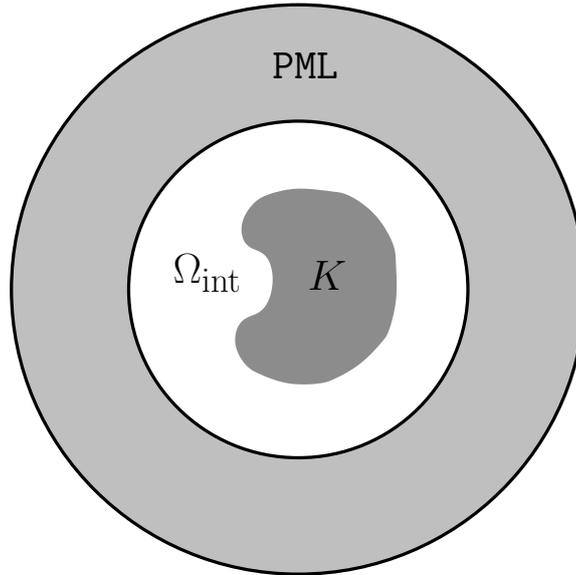


Abbildung 3.4.: Perfectly Matched Layer

3.2.3. PML Methode

Die sogenannte Perfectly Matched Layer (PML) Methode ist im Gegensatz zu den bisher vorgestellten transparenten Randbedingungen auch für komplexe κ mit $\Re(\kappa) > 0$ geeignet. Sie macht sich ebenfalls die asymptotische Formel (3.15c) der Hankel Funktionen zu Nutze, verwendet jedoch den Exponentialterm als Charakterisierungsmerkmal von ausstrahlenden Lösungen. Dafür wird im einfachsten Falle die Funktion u_{ext} als Funktion auf $\mathbb{R} \times \Gamma_a$ aufgefasst und in radialer Richtung holomorph fortgesetzt, d.h. $u_{\text{ext}} : \mathbb{C} \times \Gamma_a \rightarrow \mathbb{C}$. Dann kann eine Funktion $u_{\text{PML}}(r, \hat{\mathbf{x}}) := u_{\text{ext}}(r + i\sigma_0(r-1), \hat{\mathbf{x}})$ mit $\sigma_0 > 0$ und $r \geq 1$ definiert werden und es gilt

$$u_{\text{PML}}(r, \hat{\mathbf{x}}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1/2)}((1 + \sigma_0 i)\kappa r - i\sigma_0 \kappa) \Phi_n(\hat{\mathbf{x}}) \approx e^{\pm(i - \sigma_0)\kappa r}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.46)$$

wenn u_{ext} ausstrahlend bzw. einfallend ist. Falls $\sigma_0 > \frac{-\Im(\kappa)}{\Re(\kappa)}$, ist u_{PML} für ausstrahlende Lösungen exponentiell fallend und für einfallende exponentiell steigend. Dadurch erscheint es sinnvoll, das unbegrenzte Gebiet Ω_{ext} auf ein ringförmiges Gebiet mit endlicher Dicke zu begrenzen (siehe Abbildung 3.4). In diesem erfüllt u_{PML} die modifizierte Helmholtz-Gleichung

$$-\left(\frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{(1 + \sigma_0 i)^2} \partial_r^2 + \frac{d-1}{(1 + \sigma_0 i)r} \partial_r \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\hat{\mathbf{x}}} \right) u_{\text{PML}}(r, \hat{\mathbf{x}}) - \kappa^2 u_{\text{PML}}(r, \hat{\mathbf{x}}) = 0. \quad (3.47)$$

Da am Innenrand Γ_a die Funktionen u_{int} und u_{PML} übereinstimmen, sind an diesem keine unnatürlichen Reflektionen zu erwarten, sofern die durch partielle Integration in Ω_{int} und in der PML-Schicht auftretenden Randterme übereinstimmen. Am Außenrand müsste theoretisch wiederum ein DtN-Operator verwendet werden. In [HSZ03b, Theorem 5.8] wurde für $\kappa > 0$ jedoch gezeigt, dass der durch eine einfache Dirichlet'sche Nullrandbedingung hervorgerufene Fehler exponentiell mit der Dicke der Schicht

abnimmt. Dort wurden statt der relativ einfachen, linearen Komplexifizierung des Radius in der Definition von u_{PML} allgemeine Wege γ der Form

$$\gamma(1) = 1, \quad \Re(\gamma(r)) = r \quad \text{und} \quad \Im(\gamma'(r)) \geq 0, \quad r \geq 1 \quad (3.48)$$

mit $u_{\text{PML}}(r, \hat{\mathbf{x}}) := u_{\text{ext}}(\gamma(r), \hat{\mathbf{x}})$ behandelt.

Bemerkung 3.17. *Die PML Methode ist relativ einfach in bestehende FE-Codes zu implementieren, da sie lediglich in der PML-Schicht eine geänderte Sesquilinearform benötigt. Des Weiteren ist sie linear in κ^2 , wodurch auch die im nächsten Abschnitt vorgestellten Resonanzprobleme behandelt werden können. Eine Schwierigkeit stellt die Wahl eines optimalen Weges γ , der Dicke der PML-Schicht und natürlich der verwendeten FEM dar. Während letzteres durch adaptive Verfahren vollautomatisch geschehen kann, so ist eine adaptive Wahl der PML-Parameter nur mit großem Aufwand und a-priori Informationen über die Lösung möglich. Ein Beispiel hierfür ist in [ZBK⁺05] beschrieben.*

3.3. Resonanzprobleme

Im Zentrum dieses Abschnitts und der gesamten Arbeit steht folgende Definition.

Definition 3.18 (Resonanz). *Sei $(\kappa^2, u) \in \mathbb{C} \times H_{\text{loc}}^2(\Omega) \setminus \{0\}$ mit $\Re(\kappa) > 0$ eine Lösung des Eigenwertproblems*

$$-\Delta u = \kappa^2 u, \quad \text{in } \Omega = \mathbb{R}^d \setminus K, \quad (3.49a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial K} = 0, \quad \text{auf } \partial K, \quad (3.49b)$$

$$u \text{ ist von der Form (3.37)}. \quad (3.49c)$$

Dann heißt κ eine Resonanz des negativen Laplace-Operators $-\Delta$ auf Ω mit Neumannschen Randbedingungen auf ∂K und der Ausstrahlungsbedingung (3.37). Wir werden in diesem Fall auch kurz von einer Resonanz des durch (3.49) gegebenen Resonanzproblems sprechen.

Zur Untersuchung dieses Eigenwertproblems betrachten wir die Sesquilinearform s aus (3.31) und ordnen ihr mit Lemma 2.5 den Operator $S + \tilde{L}(\kappa)$ mit

$$(\tilde{L}(\kappa)f, g)_{H^1(\Omega_{\text{int}})} = -(1 + \kappa^2) \int_{\Omega_{\text{int}}} f \bar{g} \, dx - \int_{\Gamma_a} L(\kappa) (f|_{\Gamma_a}) \overline{g|_{\Gamma_a}} \, d\hat{\mathbf{x}} \quad (3.50)$$

und $L(\kappa)$ aus Satz 3.9(ii) zu. S ist ein stetig und stetig invertierbarer, von κ unabhängiger Operator und $\tilde{L}(\kappa) : H^1(\Omega_{\text{int}}) \rightarrow H^1(\Omega_{\text{int}})$ für $\Re(\kappa) > 0$ kompakt, wie bereits in Lemma 3.11(i) bewiesen wurde.

Bemerkung 3.19. *Die in Satz 3.12 für $\kappa > 0$ gezeigte Äquivalenz zwischen (3.1) und (3.30) führt uns zu der Vermutung, dass κ genau dann eine Resonanz des Problems (3.49) ist, wenn der Operator $S + \tilde{L}(\kappa)$ nicht stetig invertierbar ist. Den Beweis dieser Vermutung werden wir später in Satz 3.22 nachholen.*

3. Helmholtz Probleme auf unbeschränkten Gebieten

In Lemma 3.11(ii) wurde für $\kappa > 0$ gezeigt, dass (3.30) für alle rechten Seiten l^* eine eindeutige Lösung besitzt. Somit ist bereits klar, dass, wenn obige Vermutung zutrifft, im Gegensatz zu Abschnitt 2.5 die Resonanzen nicht reell sein können.

Lemma 3.20. *Sei Z die Menge aller Nullstellen κ von $\mathcal{H}_\nu^{(1)}(a\bullet)$ für $\nu \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die Funktion $\kappa \mapsto \tilde{L}(\kappa)$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\} \setminus Z$ holomorph.*

Beweis. Mit [Kat95, Theorem 3.12] ist nur die Holomorphie von $(\tilde{L}(\kappa)f, g)_{H^1(\Omega_{\text{int}})}$ für beliebige $f, g \in H^1(\Omega_{\text{int}})$ zu zeigen. Dies folgt jedoch direkt aus der Holomorphie der Hankel-Funktionen auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Der Operator L aus 3.9(ii) ist folglich in κ eine meromorphe Funktion mit Polstellen Z . \square

Da $\tilde{L}(\kappa)$ kompakt und auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\} \setminus Z$ holomorph ist und $S + \tilde{L}(\kappa)$ nach 3.11(ii) invertierbar für $\kappa > 0$ ist, sind die Voraussetzungen des Steinberg Theorems [Tay96, §9, Proposition 7.4] erfüllt und es gilt:

Lemma 3.21. *Die Funktion $\kappa \mapsto (S + \tilde{L}(\kappa))^{-1}$ ist auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\} \setminus Z$ eine meromorphe Funktion, d.h. es existiert eine diskrete Menge $O \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\} \setminus Z$, sodass $S + \tilde{L}(\kappa)$ auf $H^1(\Omega_{\text{int}})$ genau für $\kappa \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\} \setminus (O \cup Z)$ stetig invertierbar ist.*

Mit dieser Vorarbeit können wir die Vermutung in Bemerkung 3.19 beweisen.

Satz 3.22. *Sei $\kappa \in O$. Dann ist κ eine Resonanz des Problems (3.49).*

Sei umgekehrt (κ^2, u) eine Lösung von (3.49). Dann existiert ein $\tilde{a} \geq a$, sodass $\kappa \in O$ mit \tilde{a} an Stelle von a in den Definitionen von $\tilde{L}(\kappa)$ und Ω_{int} .

Beweis. Für jedes $\kappa \in O$ existiert eine Funktion u_{int} aus $H^1(\Omega_{\text{int}})$ mit

$$(S + \tilde{L}(\kappa)) u_{\text{int}} = 0,$$

da $S + \tilde{L}(\kappa)$ nicht stetig invertierbar und ein Fredholm-Operator mit Index 0 ist. Mit Hilfe des Beweises von Satz (3.12) existiert eine Fortsetzung $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$ von u_{int} und (κ^2, u) ist eine Lösung von (3.49).

Sei umgekehrt (κ^2, u) eine Lösung von (3.49). Mit Lemma 3.7 existiert ein \tilde{a} , sodass $\mathcal{H}_\nu^{(1)}(\tilde{a}\kappa) \neq 0$ für $\nu = 0, 1, \dots$. Dann löst $u_{\text{int}} := u|_{\Omega_{\text{int}}}$ für dieses \tilde{a} die Variationsformulierung (3.30) mit $l^* \equiv 0$, d.h. $(S + \tilde{L}(\kappa)) u_{\text{int}} = 0$. Damit ist $S + \tilde{L}(\kappa)$ nicht stetig invertierbar und κ liegt in O . \square

Zusammen mit Lemma 3.21 ergibt sich direkt folgendes Korollar.

Korollar 3.23.

- (i) *Die Umkehrung in Satz 3.12 gilt auch für $\Re(\kappa) > 0$, sofern κ weder Resonanz des Problems (3.49) noch Nullstelle von $\mathcal{H}_\nu^{(1)}(a\bullet)$ ist. Insbesondere ist das Streuproblem (3.1) genau dann für alle $l \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ eindeutig lösbar, wenn κ keine Resonanz des Problems (3.49) ist.*

(ii) Es existieren ausschließlich isolierte Resonanzen des Problems (3.49).

Für den einfachsten Fall $\Omega = \Omega_{\text{ext}}$ sind die Resonanzen sehr einfach zu berechnen.

Beispiel 3.24 (Resonanzen auf $\mathbb{R}^d \setminus B_a$). Sei $\Omega = \Omega_{\text{ext}}$. Dann sind mit (3.18) bzw. (3.20) die Resonanzen des Problems (3.49) mit Neumannscher bzw. Dirichletscher Randbedingung auf Γ_a durch die Nullstellen von $\mathcal{H}_\nu^{(1)'}(a\bullet)$ bzw. $\mathcal{H}_\nu^{(1)}(a\bullet)$ gegeben. Vergleiche dazu Lemma 3.7 und Abbildung 3.1.

Die Existenz und asymptotische Verteilung von Resonanzen auf $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus K$ für konvexe Gebiete K wird in [SZ99] eingehend untersucht. Neben anderen Resultaten wird dort nachgewiesen, dass für bestimmte konvexe Gebiete unendlich viele Resonanzen existieren und der Imaginärteil dieser Resonanzen negativ ist. Letzteres kann auch direkt aus [Tay96, §9, Proposition 7.7] gefolgert werden.

Bemerkung 3.25. Wegen der asymptotischen Formel der Hankel-Funktionen (3.15c) folgt, dass für $\Im(\kappa) < 0$ die zugehörigen Eigenfunktionen exponentiell für $r \rightarrow \infty$ ansteigen.

3. Helmholtz Probleme auf unbeschränkten Gebieten

4. Eine transparente Randbedingung basierend auf der Polbedingung

Die in Abschnitt 3.2 vorgestellten transparenten Randbedingungen sind bis auf die PML Methode zur Lösung des Resonanzproblems (3.49) nicht geeignet, da sie zum einen für $\Im(\kappa) < 0$ die Ausstrahlungsbedingung nicht ausreichend nachbilden und zum anderen zu einem nichtlinearen Eigenwertproblem führen würden. Letzteres ergibt sich aus der Tatsache, dass sowohl die absorbierenden Randbedingungen als auch die klassischen Infinite Element Methoden nichtlinear von κ^2 abhängen.

In diesem Kapitel wird deshalb eine neue Klasse von Methoden eingeführt, die auf Resonanzprobleme anwendbar sind und deren theoretische Grundlage die im nächsten Abschnitt vorgestellte Polbedingung bildet. Diese alternative Ausstrahlungsbedingung ermöglicht den Zugang zu unterschiedlichen numerischen Lösungsverfahren, von denen eine in den folgenden Abschnitten dargestellt wird.

4.1. Polbedingung und Hardy-Räume

Die zuerst in [SD95] vorgeschlagene Methode zur Charakterisierung von auslaufenden Wellen basiert auf den Eigenschaften der Laplace-Transformierten einer solchen Welle. Vergleichbare Methoden werden in anderem Kontext seit langer Zeit in der Regelungstechnik zur Untersuchung der Stabilität eines Regelkreises angewandt [Föl92]. Dort müssen die Pole der Laplace-Transformierten der Übertragungsfunktion negativen Realteil aufweisen.

In unserem Falle betrachten wir zunächst das eindimensionale Beispielproblem

$$-u''(r) - \kappa^2 u(r) = 0, \quad r \geq 0, \quad (4.1a)$$

$$u(0) = u_0. \quad (4.1b)$$

Eine allgemeine Lösung ist von der Form

$$u(r) = C_1 e^{i\kappa r} + C_2 e^{-i\kappa r}, \quad C_1 + C_2 = u_0. \quad (4.2)$$

Die Laplace-Transformierte (siehe Definition A.4) $\hat{u} := \mathcal{L}u$ von u ist durch

$$\hat{u}(s) = \frac{C_1}{s - i\kappa} + \frac{C_2}{s + i\kappa}, \quad \Re(s) > |\Im(\kappa)|, \quad (4.3)$$

gegeben und hat eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\kappa\}$. Mit Hilfe der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung (3.2)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (u'(r) - i\kappa u(r)) = C_2 \lim_{r \rightarrow \infty} (-2i\kappa e^{-i\kappa r}) \stackrel{!}{=} 0$$

4. Eine transparente Randbedingung basierend auf der Polbedingung

ist u für $\kappa > 0$ ausstrahlend, wenn $C_2 = 0$ gilt und somit \hat{u} keinen Pol bei $-i\kappa$, d.h. keinen Pol mit negativem Imaginärteil besitzt. Diese Bedingung an die Pole der Laplace-Transformierten ist im eindimensionalen Beispielproblem und für $\kappa > 0$ eine zu (3.2) äquivalente Ausstrahlungsbedingung, die auch für $\Im(\kappa) \neq 0$ die Eindeutigkeit der Lösung garantiert.

In [HSZ03a] werden auf Basis dieser Idee eine Ausstrahlungsbedingung für $\kappa > 0$ in höheren Dimensionen definiert und die theoretischen Grundlagen zur Lösungs- und Konvergenztheorie numerischer Verfahren gelegt. In den nächsten Unterabschnitten werden diese kurz zusammengefasst und in den Kontext von Hardy-Räumen gestellt.

4.1.1. Polbedingung

Dem eindimensionalen Beispielproblem folgend definieren wir folgende Ausstrahlungsbedingung.

Definition 4.1 (Polbedingung, 1.Version). *Eine stetige Funktion $f : \Omega_{\text{ext}} \rightarrow \mathbb{C}$ erfüllt die Polbedingung, wenn die Laplace-Transformierte in radialer Richtung $\hat{f}(\bullet, \hat{\mathbf{x}}) := \mathcal{L}\{f(\bullet, \hat{\mathbf{x}})\}$ eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}^- := \{s \in \mathbb{C} \mid \Im(s) < 0\}$ für alle $\hat{\mathbf{x}} \in \Gamma_a$ besitzt und die Funktion $s \mapsto \int_{\Gamma_a} \left| \frac{\partial \hat{f}}{\partial s}(s, \hat{\mathbf{x}}) \right|^2 d\hat{\mathbf{x}}$ stetig auf kompakten Teilmengen des \mathbb{C}^- ist.*

Diese Definition entspricht dem Vorgehen bei der Definition der bisher vorgestellten Ausstrahlungsbedingungen (3.2) und (3.37), da das Verhalten der Lösung in radialer Richtung beschrieben wird. Die Polbedingung ist nach [HSZ03a, Theorem 9.4] für $\kappa > 0$ äquivalent zu (3.2), sofern die Funktion selber Lösung der Helmholtz-Gleichung (3.1a) mit $\Omega = \Omega_{\text{ext}}$ ist.

Der Nachweis dieser Äquivalenz erfolgt im Wesentlichen mit der bereits in Abschnitt 3.1.2 benutzten Zerlegung einer Lösung u von (3.1a) in die Fourier-Komponenten bezüglich Φ_n . Für

$$u_{\text{ext}}(r, \hat{\mathbf{x}}) := (r+1)^{\frac{d-1}{2}} u((r+1)\bullet), \quad r > 0, \quad \hat{\mathbf{x}} \in \Gamma_a \quad \text{und} \quad (4.4)$$

$$u_n(r) := (u_{\text{ext}}(r, \bullet), \Phi_n)_{L^2(\Gamma_a)} \quad (4.5)$$

erhalten wir

$$-u_n''(r) - \left((a\kappa)^2 + \frac{C_d + a^2 \lambda_n}{(r+1)^2} \right) u_n(r) = 0, \quad r > 0 \quad (4.6)$$

mit $C_d := \frac{(d-1)(3-d)}{4}$. Die Skalierung in (4.4) ist nicht notwendig. Sie vereinfacht lediglich die kommenden Rechnungen.

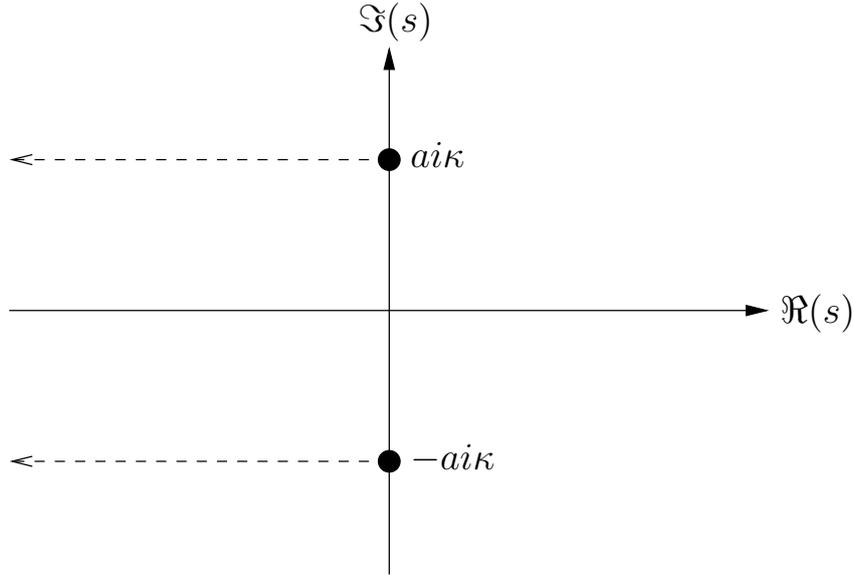


Abbildung 4.1.: Holomorphie-Gebiet

Bemerkung 4.2. In [HSZ03a] wird mit Ausnahme der ersten Abschnitte nur der Fall $\kappa = 1$ behandelt. Die dargestellte Theorie lässt sich jedoch zum Teil auf $\Re(\kappa) > 0$ verallgemeinern. Des Weiteren werden dort die herkömmliche Polarkoordinatendarstellung und die Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami-Operators auf der Einheitssphäre verwendet. Deshalb ergeben sich im Folgenden geringe Modifizierungen zu den Ergebnissen aus [HSZ03a].

Mit Hilfe von Satz A.6 wird Gleichung (4.6) Laplace-transformiert, und wir erhalten

$$(s^2 + a^2\kappa^2)\hat{u}_n(s) + (C_d + a^2\lambda_n) \left(\widehat{\mathcal{J}}^2 \hat{u}_n \right) (s) = su_n(0) + u'_n(0) \quad (4.7)$$

mit

$$\left(\widehat{\mathcal{J}} f \right) (s) := \int_s^\infty e^{s-\sigma} f(\sigma) d\sigma. \quad (4.8)$$

Die Laplace-Transformierte $\hat{u}_n := \mathcal{L}u_n$ existiert für $\Re(s) > |\Im(\kappa)|$ mit Hilfe der asymptotischen Formel (3.15c) und

$$u_n(r) = (r+1)^{\frac{d-1}{2}} \left(c_n^{(1)} \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)}(a\kappa(r+1)) + c_n^{(2)} \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(2)}(a\kappa(r+1)) \right). \quad (4.9)$$

In [HSZ03a, sec. 5] wird gezeigt, dass für gegebene $u_n(0)$ und $u'_n(0)$ Gleichung (4.7) eine eindeutige Lösung \hat{u}_n existiert, welche eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm ai\kappa - t \mid t \geq 0\}$ (siehe Abbildung 4.1) besitzt. Im Gegensatz zum eindimensionalen Fall ist \hat{u}_n also keine meromorphe Funktion, und die Bezeichnung Polbedingung ist etwas irreführend. Die Schnitte $\{\pm ai\kappa - t \mid t \geq 0\}$, über die \hat{u}_n nicht holomorph fortgesetzt werden kann, müssen nicht parallel zur reellen Achse gewählt werden. In der Tat werden wir später andere Schnitte betrachten.

Weiterhin wird in diesem Abschnitt gezeigt, dass \hat{u}_n in seinem Holomorphie-Gebiet ein Abfallverhalten der Form $\mathcal{O}(|s|^{-1})$ für $|s| \rightarrow \infty$ besitzt. Im Wesentlichen basiert

4. Eine transparente Randbedingung basierend auf der Polbedingung

der Beweis auf Gleichung (4.7) und $|(\widehat{\mathcal{J}}^2 \hat{u}_n)(s)| \leq C \|\hat{u}_n\|$ mit einer geeigneten Norm $\|\bullet\|$. Dies ist nicht unbedingt überraschend, da mit Hilfe der Stetigkeit von u_n in 0 und dem Grenzwertsatz der Laplace-Transformation A.5 ein solches Verhalten zumindest in einem Bereich um die positive reelle Achse zu erwarten ist.

In Abschnitt 6 werden Sprungfunktionen der Art

$$\Psi_{n,\pm}(t) := c_n \lim_{\epsilon \searrow 0} (\hat{u}_n(\pm a i \kappa - t - i\epsilon) - \hat{u}_n(\pm a i \kappa - t + i\epsilon)), \quad t > 0 \quad (4.10)$$

betrachtet. Sie sind unendlich oft differenzierbar (Lemma 6.2) und besitzen ein exponentielles Abfallverhalten (Lemma 6.3). Gegen Ende des Abschnittes wird in Korollar 6.5 die Existenz einer eindeutigen, im Sinne der Polbedingung ausstrahlenden Lösung von (4.7) bei gegebenem $u_n(0)$ oder $u'_n(0)$ gezeigt. Weiterhin gilt (Proposition 6.6):

$$\hat{u}_n(s) = -\frac{c_n}{a i \kappa - s} - \int_0^\infty \frac{c_n \Psi_{n,+}}{a i \kappa - t - s} dt, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{a i \kappa - t \mid t \geq 0\}. \quad (4.11)$$

Im Abschnitt [HSZ03a, sec.7] wird implizit in Korollar 7.2 die Äquivalenz zwischen der Polbedingung 4.1 und der Ausstrahlungsbedingung (3.37) auch für $\Im(\kappa) \neq 0$ gezeigt, indem die Darstellung von u_n in (4.9) mit $c_n^{(2)} = 0$ nachgewiesen wird.

Die letzten beiden Abschnitte von [HSZ03a] gelten dann nur noch für $\kappa > 0$ und beweisen die oben bereits angegebene Äquivalenz zwischen der Polbedingung und der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung (3.2). Dafür werden die Einzelergebnisse für die Fourier-Koeffizienten u_n wieder zusammengesetzt und der daraus resultierende DtN-Operator untersucht.

Ein weiteres wichtiges Resultat ist im Theorem 9.3 zusammengefasst. Mit festen Konstanten c_n sind für hinreichend große a die sogenannte Fernfeldfunktion $u_\infty := \sum_{n=0}^\infty c_n \Phi_n$ und die exponentiell abfallende Sprungfunktion $\Psi := \sum_{n=0}^\infty c_n \Psi_{n,+} + \Phi_n$ sinnvoll definiert. Weiter gilt analog zu (4.11) für $\hat{u}_{\text{ext}}(s, \hat{\mathbf{x}}) := \mathcal{L}\{u_{\text{ext}}(\bullet, \hat{\mathbf{x}})\}(s)$

$$\hat{u}_{\text{ext}}(s, \hat{\mathbf{x}}) = -e^{-a i \kappa} \left(\frac{u_\infty(\hat{\mathbf{x}})}{a i \kappa - s} + \int_0^\infty \frac{\Psi(t, \hat{\mathbf{x}})}{a i \kappa - t - s} dt \right) \quad (4.12)$$

und für u_{ext}

$$u_{\text{ext}}(r, \hat{\mathbf{x}}) = e^{a i \kappa(1+r)} \left(u_\infty(\hat{\mathbf{x}}) + \int_0^\infty e^{-tr} \Psi(t, \hat{\mathbf{x}}) dt \right), \quad r \geq 0, \quad (4.13)$$

wobei die letzte Gleichung beliebig oft nach r und $\hat{\mathbf{x}}$ differenziert werden darf. Mit Hilfe einer weiteren u_∞ und Ψ enthaltenen Gleichung ergibt sich die Möglichkeit, u_∞ und Ψ direkt zu berechnen. Insbesondere der Berechnung der Fernfeldfunktion kommt dabei besondere Bedeutung zu, da die in [HSZ03a] zugelassenen Inhomogenitäten in Ω_{ext} einfache Standardmethoden zur Berechnung der Fernfeldfunktion ausschließen. Zur numerischen Umsetzung dieser Methode siehe [HSZ02].

4.1.2. Hardy-Räume

Die nach Godfrey Harold Hardy [Har15] benannten Hardy-Räume ermöglichen den Zugang zu den später vorgestellten numerischen Verfahren.

Definition 4.3 (Hardy-Raum).

1. Der Hardy-Raum $H^\pm(S^1)$ ist die Menge aller auf dem Einheitskreis S^1 quadratintegrierbaren Funktionen F , für die Funktionen G mit den folgenden Eigenschaften existieren:
 - G ist holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z^\pm| < 1\}$,
 - gleichmäßig beschränkt im Sinne von $\int_{S^1} |G(r^\pm z)|^2 |dz| \leq C < \infty$ mit C unabhängig von $r < 1$,
 - und F ist L^2 -Randwert von G , d.h. $\int_{S^1} |G(r^\pm z) - F(z)|^2 |dz| \xrightarrow{r \nearrow 1} 0$.
2. Analog sind in den Hardy-Räumen $H^\pm(\mathbb{R})$ genau diejenigen $L^2(\mathbb{R})$ -Funktionen f enthalten, für die Funktionen g existieren mit
 - g ist holomorph auf $\mathbb{C}^\pm := \{s \in \mathbb{C} \mid \Im(\pm s) > 0\}$,
 - gleichmäßig beschränkt im Sinne von $\int_{\mathbb{R}} |g(s \pm \epsilon i)|^2 ds \leq C < \infty$ mit C unabhängig von $\epsilon > 0$,
 - und f ist L^2 -Randwert von g : $\int_{\mathbb{R}} |g(s \pm \epsilon i) - f(s)|^2 ds \xrightarrow{\epsilon \searrow 0} 0$.
3. Sei $\kappa_0 \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\kappa_0) > 0$. Dann definiert $H^\pm(\kappa_0\mathbb{R}) := \{f \mid f(\kappa_0 \bullet) \in H^\pm(\mathbb{R})\}$ Hardy-Räume von auf $\kappa_0\mathbb{R} := \{\kappa_0 s \mid s \in \mathbb{R}\}$ quadratintegrierbaren Funktionen, die L^2 -Randwerte von Funktionen sind, die auf den durch $\kappa_0\mathbb{R}$ begrenzten Halbräumen \tilde{C}^\pm holomorph und in obigem Sinne gleichmäßig beschränkt sind.

Obige Definitionen sind eigentlich eher die Folgerungen aus der in [Dur70] dargestellten Theorie der Hardy-Räume. So wird dort zunächst ein Funktionenraum von auf der komplexen Einheitscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ holomorphen Funktionen G definiert, für die die Integrale $\int_0^{2\pi} |G(re^{i\theta})|^2 d\theta$ für $0 < r < 1$ existieren und gleichmäßig beschränkt bleiben. In [Dur70, Theorem 2.6] wird nachgewiesen, dass für solche Funktionen eindeutige L^2 -Randwerte existieren. Im Unterschied zur Definition 4.3 liegen bei diesem Vorgehen die Funktionen G definiert auf der Einheitscheibe und nicht die Randfunktionen F im Hardy-Raum.

Lemma 4.4.

(i) Die Räume $H^\pm(S^1)$ sind versehen mit dem $L^2(S^1)$ -Skalarprodukt

$$(F, G)_{L^2(S^1)} := \int_{S^1} F(z) \overline{G(z)} |dz| = \int_0^{2\pi} F(e^{i\theta}) \overline{G(e^{i\theta})} d\theta, \quad F, G \in H^\pm(S^1) \quad (4.14)$$

Hilbert-Räume.

- (ii) Die trigonometrischen Monome $z^{\pm j}$, $j = 0, 1, \dots$, bilden eine Orthogonalbasis des $H^\pm(S^1)$.
- (iii) Sei $F \in H^\pm(S^1)$. Dann ist die Funktion G aus Definition 4.3 eindeutig bestimmt durch $G(z) := \sum_{j=0}^{\infty} (f, z^{\pm j})_{L^2(S^1)} z^{\pm j}$.
- (iv) $F \in L^2(S^1)$ ist genau dann in $H^\pm(S^1)$, wenn die zugehörigen Fourier-Koeffizienten $(f, z^{\mp j})_{L^2(S^1)}$ für $j \in \mathbb{N}$ verschwinden.

4. Eine transparente Randbedingung basierend auf der Polbedingung

Beweis. Siehe [Dur70, Theorem 3.3 und 3.4] für $H^+(S^1)$. \square

Im Verlauf der Arbeit wird der Raum $H^+(S^1)$ eine herausragende Rolle spielen. Mit Hilfe des vorangegangenen Lemmas kann eine Funktion $F \in H^+(S^1)$ in der Form

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n, \quad z \in S^1,$$

mit der quadratisch summierbaren Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \ell_2$ dargestellt werden. Wird eine solche Funktion mit z multipliziert, so kann diese Multiplikation als Verschiebung in den Fourier-Koeffizienten (α_n) aufgefasst werden:

$$F(z) \mapsto zF(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n-1} z^n \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \mapsto (0, \alpha_0, \alpha_1, \dots). \quad (4.15)$$

Der zugeordnete Verschiebungsoperator $V_+ : H^+(S^1) \rightarrow H^+(S^1)$ ist nicht surjektiv und somit auf $H^+(S^1)$ nicht stetig invertierbar. Dies ist leicht daran zu erkennen, dass eine Multiplikation mit $\frac{1}{z}$

$$F(z) \mapsto z^{-1}F(z) = \alpha_0 z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} z^n \quad (4.16)$$

wegen des Terms $\alpha_0 z^{-1}$ aus dem Hardy-Raum $H^+(S^1)$ herausführt. Wir definieren deshalb den zu V_+ linksinversen Operator $V_- : H^+(S^1) \rightarrow H^+(S^1)$ mit Hilfe der orthogonalen Projektion $P : L^2(S^1) \rightarrow H^+(S^1)$ durch

$$V_- F := P((\bullet)^{-1} F) \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \dots). \quad (4.17)$$

Allgemeiner kann nach [BS06, Definition 2.6] für jedes $f \in L^\infty(S^1)$ ein sog. Toeplitz-Operator

$$T_f F := P(fF), \quad F \in H^+(S^1) \quad (4.18)$$

auf $H^+(S^1)$ definiert werden.

Bemerkung 4.5. Nach [BS06, Theorem 2.42] ist ein Toeplitz-Operator T_f mit Symbol f ein Fredholm-Operator, sofern f stetig ist und auf S^1 keine Nullstellen besitzt. Der Fredholm-Index ist gleich der negativen Windungszahl um 0 von f , und mit [BS06, Korollar 2.40] ist T_f injektiv und stetig invertierbar, falls der Fredholm-Index 0 ist.

Analog zu den Räumen $H^\pm(S^1)$ können die Hardy-Räume $H^\pm(\mathbb{R})$ zunächst als Räume holomorpher, quadratintegrierbarer Funktionen g definiert werden, für die die Integrale $\int_{\mathbb{R}} |g(s \pm \epsilon i)|^2 ds$ für alle $\epsilon > 0$ beschränkt bleiben. In [Dur70, Cor 1 zu Theorem 11.1 und Theorem 11.4] wird wiederum die Existenz einer L^2 -Randfunktion f nachgewiesen, und es gilt mit [Dur70, Theorem 11.8] die wichtige Beziehung

$$g(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma, \quad s \in \mathbb{C}^\pm. \quad (4.19)$$

Das Analogon zum letzten Punkt des Lemmas 4.4 ist [Dur70, Korollar zu Theorem 11.9]:

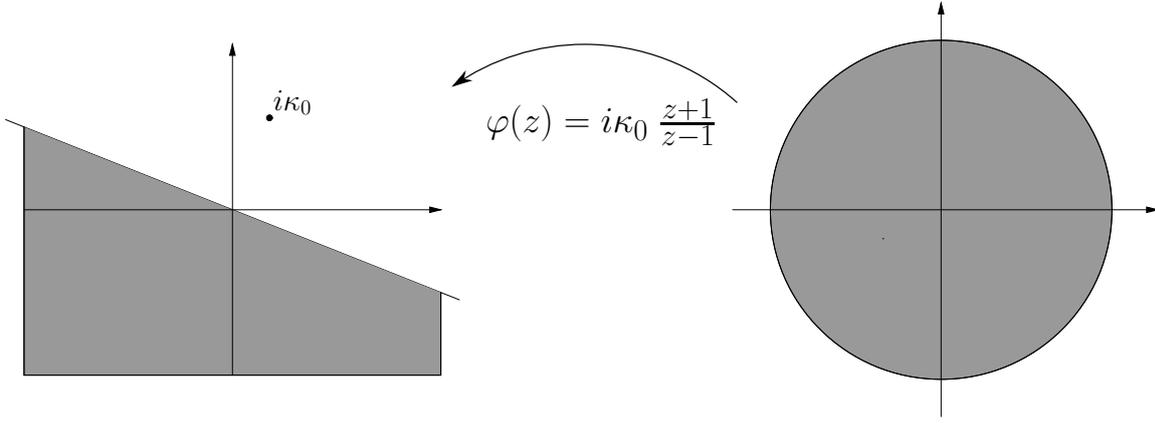


Abbildung 4.2.: Möbius-Transformation

Theorem 4.6 (Paley-Wiener). $f \in L^2(\mathbb{R})$ ist genau dann in $H^\pm(\mathbb{R})$, wenn $\mathcal{F}^{-1}f$ auf \mathbb{R}_\pm fast überall verschwindet.

$(H^\pm(\mathbb{R}), (\bullet, \bullet)_{L^2(\mathbb{R})})$ ist mit der nachfolgenden Beziehung zu $H^\pm(S^1)$ auch vollständig. Analog ergeben sich die Eigenschaften der Räume $H^\pm(\kappa_0\mathbb{R})$ mit $\Re(\kappa_0) > 0$. Dieses κ_0 ist ein wichtiger Parameter zur Feinabstimmung der später vorgestellten numerischen Verfahren.

Satz 4.7 (Möbius-Transformation). Seien $\Re(\kappa_0) > 0$ und

$$\varphi(z) := i\kappa_0 \frac{z+1}{z-1}, \quad z \in S^1 \quad (4.20)$$

eine Familie von Abbildungen von S^1 auf $\kappa_0\mathbb{R}$ (vergleiche Abbildung 4.2). Dann ist die Möbius-Transformation \mathcal{M} mit

$$(\mathcal{M}f)(z) := (f \circ \varphi)(z) \frac{1}{z-1}, \quad z \in S^1, \quad f \in H^-(\kappa_0\mathbb{R}) \quad (4.21)$$

eine Familie von bis auf den Faktor $\sqrt{2|\kappa_0|}$ unitären Abbildungen von $H^-(\kappa_0\mathbb{R})$ nach $H^+(S^1)$.

Beweis. Sei $f \in H^-(\kappa_0\mathbb{R})$. Dann gilt mit $\varphi'(z) = \frac{-2i\kappa_0}{(z-1)^2}$

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\kappa_0\mathbb{R})}^2 &= \int_{\kappa_0\mathbb{R}} |f(s)|^2 |ds| = \int_0^{2\pi} |(f \circ \varphi)(e^{i\theta})|^2 |\varphi'(e^{i\theta}) e^{i\theta} i| d\theta \\ &= 2|\kappa_0| \int_0^{2\pi} \left| (f \circ \varphi)(e^{i\theta}) \frac{1}{e^{i\theta} - 1} \right|^2 d\theta = 2|\kappa_0| \|\mathcal{M}f\|_{L^2(S^1)}^2. \end{aligned}$$

Mit [Dur70, §11] oder auch [Hof62, Chapt. 8] ist \mathcal{M} auch surjektiv und die Behauptung ist gezeigt. \square

4.1.3. Hardy-Raum Formulierung der Polbedingung

Mit den Ergebnissen aus dem letzten Unterabschnitt, insbesondere Gleichung (4.12), gilt folgendes Lemma.

Lemma 4.8. *Sei $u \in H_{\text{loc}}^2$ eine im Sinne von Definition 4.1 ausstrahlende Lösung von (3.1a), u_{ext} wie in (4.4) und $\hat{u}_{\text{ext}}(\bullet, \hat{\mathbf{x}}) := \mathcal{L}\{u_{\text{ext}}(\bullet, \hat{\mathbf{x}})\}|_{\kappa_0\mathbb{R}}$ für jedes $\hat{\mathbf{x}} \in \Gamma_a$ die Einschränkung auf $\kappa_0\mathbb{R}$ der holomorphen Fortsetzung der Laplace-Transformierten in radialer Richtung. Dann gilt für $\Re(\kappa_0) > 0$ und hinreichend großes a*

$$\hat{u}_{\text{ext}} \in H^-(\kappa_0\mathbb{R}) \otimes L^2(\Gamma_a). \quad (4.22)$$

Beweis. Mit (4.12) und den Eigenschaften [HSZ03a, Gleichung (9.9)] von u_∞ und Ψ liegt \hat{u}_{ext} im Raum $L^2(\kappa_0\mathbb{R}) \otimes L^2(\Gamma_a)$, sofern a hinreichend groß ist. Insbesondere überträgt sich die Holomorphie der Fourier-Koeffizienten \hat{u}_n auf $\mathbb{C} \setminus \{ai\kappa - \kappa_0t \mid t \geq 0\}$ auf die Funktion \hat{u}_{ext} . \square

Das letzte Lemma stellt die Beziehung zwischen den Hardy-Räumen und ausstrahlenden Lösungen der Helmholtz-Gleichung her.

Definition 4.9 (Polbedingung). *Eine auf Ω_{ext} definierte Funktion f erfüllt die Polbedingung, wenn die Einschränkung auf $\kappa_0\mathbb{R}$ der holomorphen Fortsetzung der Laplace-Transformierten in radialer Richtung $\hat{f} := \mathcal{L}\{f(\bullet\hat{\mathbf{x}})\}$ mit $\Re(\kappa_0) > 0$ im Hardy-Raum $H^-(\kappa_0\mathbb{R}) \otimes L^2(\Gamma_a)$ liegt, d.h.*

$$\hat{f}|_{\kappa_0\mathbb{R}} \in H^-(\kappa_0\mathbb{R}) \otimes L^2(\Gamma_a). \quad (4.23)$$

In Zukunft werden wir die etwas umständliche Formulierung „Einschränkung der holomorphen Fortsetzung der Laplace-Transformierten in radialer Richtung“ vermeiden und kurz von der Laplace-Transformierten sprechen.

Satz 4.10. *Für hinreichend großes a sind die beiden Versionen der Polbedingung 4.1 und 4.9 für Lösungen der Helmholtz-Gleichung zueinander und zur Ausstrahlungsbedingung (3.37) äquivalent.*

Beweis. Mit Lemma 4.8 erfüllt eine im Sinne von 4.1 ausstrahlende Lösung der Helmholtz-Gleichung die Polbedingung 4.9. Ist umgekehrt eine Funktion ausstrahlend im Sinne von Definition 4.9, so erfüllt sie auch 4.1. Die Stetigkeitsbedingung in 4.1 kann dabei mit Hilfe von (4.19) nachgewiesen werden.

Die Äquivalenz von 4.1 und (3.37) wird in [HSZ03a, Korollar 7.2] gezeigt. \square

Wir werden später in Korollar 5.24 zeigen, dass für allgemeines $a > 0$ jede nach Definition 4.9 ausstrahlende Lösung der Helmholtz-Gleichung auch die Bedingung (3.37) erfüllt.

4.2. Transformation der Helmholtz-Gleichung

Die Polbedingung aus Definition 4.9 charakterisiert ausstrahlende Lösungen der Helmholtz-Gleichung anhand deren Laplace-Transformierten in radialer Richtung. Um dies numerisch nutzen zu können, transformieren wir die radialen Anteile der Helmholtz-Gleichung (3.22a) in den Hardy-Raum $H^+(S^1)$.

Seien dafür u Lösung von (3.22) mit Randwerten $u_0 := u|_{\Gamma_a}$ und $u'_0 := (\partial_\nu u)|_{\Gamma_a}$ auf Γ_a , u_{ext} aus (4.4) die skalierte Lösung und \hat{u}_{ext} aus Lemma 4.8 die Laplace-Transformierte der skalierten Lösung. Dann löst diese die zu (4.7) analoge Gleichung

$$(s^2 + a^2 \kappa^2) \hat{u}_{\text{ext}}(s, \hat{\mathbf{x}}) + (C_d + a^2 \Delta_{\hat{\mathbf{x}}}) \hat{\mathcal{J}}^2 \hat{u}_{\text{ext}}(s, \hat{\mathbf{x}}) = \left(s + \frac{d-1}{2} \right) u_0(\hat{\mathbf{x}}) + a u'_0(\hat{\mathbf{x}}). \quad (4.24)$$

Man beachte, dass durch die Skalierung von u_{ext} und von $r = |x|/a$ gilt

$$(\partial_r u_{\text{ext}})|_{r=0} = \frac{d-1}{2} u_0 + a u'_0. \quad (4.25)$$

Zur eindeutigen Lösbarkeit von (3.22) ist nur eine der Randfunktionen u_0 oder u'_0 notwendig. Dieses Problem werden wir jedoch erst später angehen.

Die Polbedingung fordert $\hat{u}_{\text{ext}} \in H^-(\kappa_0 \mathbb{R}) \otimes L^2(\Gamma_a)$, sodass es wegen des Laplace-Beltrami-Operators sinnvoll erscheint, die Gleichung zunächst für $\hat{u}_{\text{ext}} \in H^-(\kappa_0 \mathbb{R}) \otimes H^2(\Gamma_a)$ zu untersuchen. Die Multiplikationen mit s führen aus dem Hardy-Raum hinaus, da $s \hat{u}_{\text{ext}}(s, \hat{\mathbf{x}})$ für jedes $\hat{\mathbf{x}}$ nicht mehr zu $L^2(\kappa_0 \mathbb{R})$ gehören muss. Gleiches gilt für die rechte Seite. Durch Multiplikation der Gleichung mit $\frac{1}{(s-i\kappa_0)^2}$ kann diese Schwierigkeit umgangen werden:

$$\frac{s^2 + a^2 \kappa^2}{(s - i\kappa_0)^2} \hat{u}_{\text{ext}}(s, \hat{\mathbf{x}}) + \frac{C_d + a^2 \Delta_{\hat{\mathbf{x}}}}{(s - i\kappa_0)^2} \hat{\mathcal{J}}^2 \hat{u}_{\text{ext}}(s, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{\left(s + \frac{d-1}{2} \right) u_0(\hat{\mathbf{x}}) + a u'_0(\hat{\mathbf{x}})}{(s - i\kappa_0)^2}. \quad (4.26)$$

Da die Terme $\frac{1}{s-i\kappa_0}$ auf $\tilde{\mathcal{C}}^-$ holomorph sind, liegen mit folgender Bemerkung alle Terme aus (4.26) in $H^-(\kappa_0 \mathbb{R}) \otimes L^2(\Gamma_a)$.

Bemerkung 4.11. $\hat{\mathcal{J}}$ aus (4.8) ist mit dem Plancherel-Theorem A.2 und A.3(iii) ein stetiger Operator von $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, da

$$(\hat{\mathcal{J}} f)(s) = (f * k)(s), \quad f \in H^-(\mathbb{R}), s \in \mathbb{R}, \quad k(s) = \begin{cases} 0, & s < 0 \\ e^s, & s \geq 0 \end{cases}$$

und somit

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathcal{J}} f\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|f * k\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathcal{F}(f * k)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathcal{F}f \mathcal{F}k\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathcal{F}k\|_\infty \|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Mit dem Paley-Wiener Theorem 4.6 bildet $\hat{\mathcal{J}}$ eine Funktion $f \in H^-(\mathbb{R})$ auf eine Funktion aus $H^-(\mathbb{R})$ ab, da mit A.3(iv)

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{\mathcal{J}} f\}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{f * k\}(t) = 2\pi (\mathcal{F}^{-1}f)(t) (\mathcal{F}^{-1}k)(t) = 0, \quad t < 0.$$

4. Eine transparente Randbedingung basierend auf der Polbedingung

Wir können \widehat{J} auch als Operator von $H^-(\kappa_0\mathbb{R}) \rightarrow H^-(\kappa_0\mathbb{R})$ auffassen: Wenn f, k auf $\kappa_0\mathbb{R}$ definiert sind, so verläuft die Integration in der Faltung $f * k$ auf $\kappa_0\mathbb{R}$ und wir definieren $\widehat{J} : H^-(\kappa_0\mathbb{R}) \rightarrow H^-(\kappa_0\mathbb{R})$ durch

$$(\widehat{J}f)(s) := \int_{\gamma} e^{s-\sigma} f(\sigma) d\sigma, \quad f \in H^-(\kappa_0\mathbb{R}), s \in \kappa_0\mathbb{R} \quad \text{und} \quad \gamma(t) = \kappa_0 t \quad \text{für} \quad t \in [\kappa_0^{-1}s, \infty).$$

Mangels einer geeigneten Basis in $H^-(\kappa_0\mathbb{R})$ transformieren wir die Gleichung mit der Möbius-Transformation (4.21) in den Raum $H^+(S^1) \otimes L^2(\Gamma_a)$, da mit 4.4(ii) in $H^+(S^1)$ eine einfache Basis durch die trigonometrischen Monome z^j mit $j \in \mathbb{N}_0$ gegeben ist. Nach Multiplikation mit $-\frac{1}{4\kappa_0^2}$ ergibt sich so

$$\begin{aligned} & (a^2\kappa^2(z-1)^2 - \kappa_0^2(z+1)^2) \widehat{U}(z, \widehat{\mathbf{x}}) + (z-1)^2 (C_d + a^2\Delta_{\widehat{\mathbf{x}}}) J^2 \widehat{U}(z, \widehat{\mathbf{x}}) \\ &= \left(i\kappa_0(z+1) + \frac{d-1}{2}(z-1) \right) u_0(\widehat{\mathbf{x}}) + a(z-1)u'_0(\widehat{\mathbf{x}}), \quad z \in S^1, \widehat{\mathbf{x}} \in \Gamma_a. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Dabei ist $\widehat{U}(z, \widehat{\mathbf{x}}) := \mathcal{M}\{\widehat{u}_{\text{ext}}(\bullet, \widehat{\mathbf{x}})\}(z)$ und $J := \mathcal{M}\widehat{J}\mathcal{M}^{-1}$.

Bemerkung 4.12. Wir werden später in Lemma 5.19 nachweisen, dass der Operator $(\bullet - 1)J$ kompakt ist. Somit kann (4.27) für jedes feste $\widehat{\mathbf{x}} \in \Gamma_a$ und unter Vernachlässigung des Laplace-Beltrami Operators $\Delta_{\widehat{\mathbf{x}}}$ als Operator-Gleichung auf $H^+(S^1)$ der Form

$$(T_m + K) \widehat{U}(z, \widehat{\mathbf{x}}) = \text{RHS}(u_0, u'_0) \tag{4.28}$$

mit einem kompakten Operator K und einem Toeplitz-Operator T_m mit Symbol

$$m(z) := a^2\kappa^2(z-1)^2 - \kappa_0^2(z+1)^2, \quad z \in S^1, \tag{4.29}$$

geschrieben werden. Für geeignete κ_0 ist $T_m + K$ ein Fredholm-Operator mit Index -1 .

Beweis. Mit Bemerkung 4.5 ist $T_m + K$ ein Fredholm-Operator und der Index $\text{ind } T_m$ ist durch die negative Windungszahl $w(m)$ um 0 von m gegeben, wenn m keine Nullstellen auf S^1 besitzt. Nach [BS06, §2.41] gilt weiter

$$w(m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{m'(z)}{m(z)} dz \tag{4.30}$$

und es folgt für $a\kappa = \pm\kappa_0$

$$w(m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{1}{z} dz = 1. \tag{4.31}$$

Für $a\kappa \neq \pm\kappa_0$ ist

$$m(z) = ((a\kappa)^2 - \kappa_0^2) \left(z^2 - 2 \frac{(a\kappa)^2 + \kappa_0^2}{(a\kappa)^2 - \kappa_0^2} z + 1 \right) = ((a\kappa)^2 - \kappa_0^2) (z - z_1)(z - z_2)$$

mit $|z_1 z_2| = 1$. Falls $|z_1| = |z_2| = 1$ besitzt m auf S^1 zwei Nullstellen und Bemerkung 4.5 ist nicht anwendbar. Andernfalls ist

$$w(m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \left(\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} \right) dz = 1, \quad (4.32)$$

da einer der Integranden eine Singularität in $\{z \mid |z| < 1\}$ und der andere eine außerhalb von $\{z \mid |z| \leq 1\}$ besitzt. \square

Kommen wir nun zu der bereits zu Anfang des Abschnitts aufgeworfenen Frage der Randwerte. Mit folgendem Lemma können wir eine der Randfunktionen u_0 bzw. u'_0 durch Funktionsauswertungen von \hat{U} bzw. \hat{U}' an der Stelle 1 ersetzen.

Lemma 4.13. *Sei f eine auf $[0, \infty)$ definierte und Laplace-transformierbare Funktion, die in 0 einseitig stetig differenzierbar ist. Weiter sei $\hat{F} := \mathcal{M}\mathcal{L}f \in H^+(S^1) \cap H^2(S^1)$. Dann gilt*

$$f(0) = 2i\kappa_0 \hat{F}(1) \quad \text{und} \quad f'(0) = -4\kappa_0^2 \hat{F}'(1) - 2\kappa_0^2 \hat{F}(1). \quad (4.33)$$

Beweis. Seien f und \hat{F} wie in der Behauptung und $\hat{f} := \mathcal{L}f$. Mit Hilfe des Grenzwertsatzes der Laplace-Transformation A.5 gilt

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{f}(s) = \lim_{z \rightarrow 1} i\kappa_0 \frac{z+1}{z-1} \hat{f} \circ \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow 1} i\kappa_0 (z+1) \hat{F}(z) = 2i\kappa_0 \hat{F}(1).$$

Dabei ist zu beachten, dass im Grenzwertsatz s nicht unbedingt reell sein muss, sondern lediglich $|\arg(s)| < \frac{\pi}{2}$ gefordert wird. Obige Grenzwertbildung kann folglich auf den Geraden $\kappa_0 \mathbb{R}$ erfolgen, welche durch φ auf S^1 abgebildet werden. Die Forderung $\hat{F} \in H^2(S^1)$ garantiert die stetige Differenzierbarkeit von \hat{F} auf S^1 und damit das letzte Gleichheitszeichen in obiger und in nachfolgender Rechnung.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(s^2 \hat{f}(s) - s f(0) \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\left(i\kappa_0 \frac{z+1}{z-1} \right)^2 \hat{f} \circ \varphi(z) - i\kappa_0 \frac{z+1}{z-1} f(0) \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} -\kappa_0^2 (z+1) \left(\frac{(z+1)\hat{F}(z) - 2\hat{F}(1)}{z-1} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} -\kappa_0^2 (z+1) \left(\hat{F}(z) + 2 \frac{\hat{F}(z) - \hat{F}(1)}{z-1} \right) = -2\kappa_0^2 \hat{F}(1) - 4\kappa_0^2 \hat{F}'(1). \end{aligned}$$

\square

Bemerkung 4.14. *Ein alternativer formaler Beweis für voriges Lemma erfolgt mit Hilfe der inversen Laplace-Transformation. Sei dafür $\hat{F}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^j$. Dann ist*

$$\hat{f}(s) = \frac{2i\kappa_0}{s - i\kappa_0} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \left(\frac{s + i\kappa_0}{s - i\kappa_0} \right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \left(\frac{2i\kappa_0}{s - i\kappa_0} \right)^{k+1}.$$

4. Eine transparente Randbedingung basierend auf der Polbedingung

Durch direkte Rechnung ergibt sich $\mathcal{L}^{-1}\{1/(\bullet - i\kappa_0)^{k+1}\}(r) = e^{i\kappa_0 r} r^k / k!$. Unter der Voraussetzung, dass Summation und inverse Laplace-Transformation vertauscht werden dürfen, erhalten wir

$$f(r) = 2i\kappa_0 e^{i\kappa_0 r} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{(2i\kappa_0 r)^k}{k!} \quad \text{und} \quad (4.34a)$$

$$f'(r) = i\kappa_0 f(r) - 4\kappa_0^2 e^{i\kappa_0 r} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \sum_{k=1}^j \binom{j}{k} k \frac{(2i\kappa_0 r)^{k-1}}{k!} \quad (4.34b)$$

und damit

$$f(0) = 2i\kappa_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \quad \text{und} \quad f'(0) = -2\kappa_0^2 \sum_{j=0}^{\infty} (1+2j) \alpha_j. \quad (4.35)$$

An dieser Stelle wird die Voraussetzung $\hat{F} \in H^2(S^1)$ anschaulich, da mit

$$\|\hat{F}\|_{H^2(S^1)}^2 \sim \sum_{j=0}^{\infty} (1+j)^4 |\alpha_j|^2 < \infty \quad (4.36)$$

die Konvergenz der Reihen in (4.35) sichergestellt ist.

Das Lemma 4.13 bzw. die expliziten Darstellungen (4.35) ermöglichen mit Hilfe von (4.25) die Eliminierung einer der Randwerte u_0 oder u'_0 in (4.27), sofern $\hat{U}(\bullet, \hat{\mathbf{x}})$ für alle $\hat{\mathbf{x}}$ zum Raum $H^+(S^1) \cap H^2(S^1)$ gehört. Dies ist mit Lemma 5.6 immer gegeben.

4.3. Linienmethode

Die in diesem Abschnitt vorgestellte Methode ist der direkteste Weg zur Nutzung der Polbedingung zur numerischen Lösung von Streu- und Resonanzproblemen. Der Name leitet sich von den numerischen Methoden zur Lösung von Evolutionsproblemen ab. Dort werden die zeitliche und die räumlichen Variablen getrennt voneinander in unterschiedlicher Art und Weise behandelt. In unserem Fall übernimmt die radiale Variable r die Rolle der Zeitvariablen und die winkelabhängige Variable $\hat{\mathbf{x}}$ die Rolle der Raumvariablen.

Wir verwenden die in Abschnitt 3.1.3 vorgestellte Zerlegung von $\Omega = \Omega_{\text{int}} \cup \Omega_{\text{ext}}$ und die Variationsformulierung (3.30) des Problems auf $H^1(\Omega_{\text{int}})$. Sie besteht aus dem bereits aus Kapitel 2 bekannten Variationsproblem eines Helmholtz-Problems auf beschränkten Gebieten und dem Randintegral

$$\int_{\Gamma_a} \text{DtN}(u_{\text{int}}|_{\Gamma_a}) \overline{v}|_{\Gamma_a} d\hat{\mathbf{x}} = \int_{\Gamma_a} u'_0 \overline{v}_0 d\hat{\mathbf{x}}, \quad v_0 := v|_{\Gamma_a}. \quad (4.37)$$

Das Variationsproblem auf Ω_{int} wird wie in Abschnitt 2.3 diskretisiert. Das Randintegral wird mit (4.25) umgeformt in

$$\int_{\Gamma_a} u'_0 \overline{v}_0 d\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{a} \int_{\Gamma_a} (\partial_r u_{\text{ext}})|_{r=0} \overline{v}_0 d\hat{\mathbf{x}} - \frac{d-1}{2a} \int_{\Gamma_a} u_0 \overline{v}_0 d\hat{\mathbf{x}}. \quad (4.38)$$

Das letzte Integral kann mit FEM behandelt werden. Dabei sollten die Basisfunktionen mit den Spuren der Basisfunktionen aus der FE-Diskretisierung des $H^1(\Omega_{\text{int}})$ übereinstimmen, um nach Lemma 2.14 die Stetigkeit der Lösung über Γ_a zu gewährleisten.

Für das erste Integral wird mit dem Ansatz

$$\hat{U}(z, \hat{\mathbf{x}}) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\hat{U}(\bullet, \hat{\mathbf{x}}), (\bullet)^j \right)_{L^2(S^1)} z^j \approx \sum_{j=0}^{N_r} \alpha_j(\hat{\mathbf{x}}) z^j \quad (4.39)$$

für jedes $\hat{\mathbf{x}} \in \Gamma_a$ der Hardy-Raum $H^+(S^1)$ auf die endlichdimensionalen Unterräume $\text{span}\{z^0, z^1, \dots, z^{N_r}\}$ projiziert. Da

$$\|\hat{U}(\bullet, \hat{\mathbf{x}})\|_{L^2(S^1)}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \left| \left(\hat{U}(\bullet, \hat{\mathbf{x}}), (\bullet)^j \right)_{L^2(S^1)} \right|^2, \quad \hat{\mathbf{x}} \in \Gamma_a, \quad (4.40)$$

gilt, bilden die Fourier-Koeffizienten $\left(\hat{U}(\bullet, \hat{\mathbf{x}}), z^j \right)_{L^2(S^1)}$ eine quadratsummierbare Folge und der Fehler durch den Ansatz (4.39) sollte gegen 0 gehen. Später werden wir in Lemma 5.17 nachweisen, dass die Fourier-Koeffizienten sogar super-algebraisch abfallen, sodass N_r sehr klein gewählt werden kann.

Auf diese Weise kann mit (4.35) das erste Integral approximiert werden durch

$$\int_{\Gamma_a} (\partial_r u_{\text{ext}})|_{r=0} \bar{v}_0 \, d\hat{\mathbf{x}} \approx -2\kappa_0^2 \sum_{j=0}^{N_r} (1+2j) \int_{\Gamma_a} \alpha_j(\hat{\mathbf{x}}) \overline{v_0(\hat{\mathbf{x}})} \, d\hat{\mathbf{x}}. \quad (4.41)$$

Es bleibt $\alpha := (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N_r})^\top \in (H^2(\Gamma_a))^{N_r+1}$ zu berechnen. Durch Einsetzen des Ansatzes (4.39) in (4.27), Eliminierung von u'_0 mit Hilfe von (4.35) und Koeffizientenvergleich bezüglich der Monome $\{z^0, z^1, \dots, z^{N_r}\}$ ergibt sich ein System partieller Differentialgleichungen auf Γ_a

$$M_1 \alpha(\hat{\mathbf{x}}) + M_2 (\Delta_{\hat{\mathbf{x}}} \otimes \text{id}) \alpha(\hat{\mathbf{x}}) = \text{RHS}(u_0(\hat{\mathbf{x}})), \quad \hat{\mathbf{x}} \in \Gamma_a. \quad (4.42)$$

Dabei sind $M_{1/2}, \text{id} \in \mathbb{C}^{(N_r+1) \times (N_r+1)}$ und $\text{RHS}(u_0(\hat{\mathbf{x}})) \in \mathbb{C}^{N_r+1}$.

Dieses Differentialgleichungssystem kann mit Standard-FEM für das beschränkte Gebiet Γ_a gelöst werden. Wir werden an dieser Stelle nicht weiter auf die Matrizen $M_{1/2}$ bzw. die rechte Seite eingehen, da sie denen der später vorgestellten Hardy-Raum Infinite Elemente Methode sehr ähnlich sind. Wir verweisen deshalb auf Abschnitt 5.2.4 und für die FEM bezüglich $(H^1(\Gamma_a))^{N_r+1}$ auf Abschnitt 2.3.

Zusammenfassend ergibt sich ein Gleichungssystem aus 3 Komponenten:

- Das Gleichungssystem (2.17) aus der Behandlung des Problems für $u_{\text{int}} \in H^1(\Omega_{\text{int}})$ inklusive der Behandlung des Randintegrals $\int_{\Gamma_a} u_0 \bar{v}_0 \, d\hat{\mathbf{x}}$,
- das Gleichungssystem (4.42) zur Bestimmung der Koeffizienten α aus dem Raum $(H^1(\Gamma_a))^{N_r+1}$ und
- der Kopplung (4.41) zwischen α und v_0 .

4. Eine transparente Randbedingung basierend auf der Polbedingung

Ein Vergleich mit Abschnitt 3.1.3 veranschaulicht noch einmal unser Vorgehen: Es werden die Probleme auf den Gebieten Ω_{int} und Ω_{ext} auf zwei unterschiedliche Arten diskretisiert. Gekoppelt sind diese Diskretisierungen über die Randfunktionen u_0 und u'_0 . Erstere taucht explizit sowohl in der Behandlung des Problems auf Ω_{int} als auch in der des Problems auf Ω_{ext} auf. Letztere sorgt durch (4.41) für die zweite Kopplung der Gebiete.

Bemerkung 4.15. *Die Hardy-Raum Linienmethode (HSLM) liefert, wie im Abschnitt 6.1 dargestellt ist, gute numerische Resultate. Theoretische Aussagen sind dagegen aufgrund der darin verwendeten unterschiedlichen Diskretisierungsmethoden sehr schwer zu erhalten. Zusätzliche Probleme bereitet die Tatsache, dass nach Bemerkung 4.12 der Fredholm-Index des Hauptteils der Linienmethode -1 ist.*

Im nächsten Kapitel wird deshalb eine weitere Methode vorgestellt, bei der diese Probleme nicht auftauchen.

5. Hardy-Raum Infinite Elemente Methode

Die in diesem Kapitel vorgestellte Infinite Elemente Methode basiert ebenfalls auf der Polbedingung 4.9 und wurde in [HN07] in stark geraffter Form veröffentlicht. Im Gegensatz zur Linienmethode orientiert sie sich mehr am üblichen Vorgehen für FEM: Multiplikation mit geeigneten Testfunktionen, Integration über das Grundgebiet, partielle Integration zur Reduzierung der Ableitungsordnung, Definition von Basisfunktionen und Implementierung der entstehenden Sesquilinear- bzw. Bilinearformen.

In unserem Fall werden wir im nächsten Abschnitt die nach der partiellen Integration entstehenden Bilinearformen zunächst in den Hardy-Raum $H^+(S^1)$ transformieren. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels diskretisieren wir das entstehende Variationsproblem mit einer Galerkin-Methode. Konvergenzaussagen zur Hardy-Raum Infinite Elemente Methode (HSIEM) sind im letzten Abschnitt zusammengefasst.

Bemerkung 5.1. *Alternativ zu der hier vorgestellten Herleitung kann die HSIEM auch über eine Art PML-Methode (siehe Abschnitt 3.2.3) abgeleitet werden. Bemerkung 5.25 am Schluss dieses Kapitels weist für den mehrdimensionalen Fall explizit nach, dass die HSIEM als eine PML-Methode aufgefasst werden kann. Dieser Zusammenhang zwischen Methoden, basierend auf der Polbedingung und der PML-Methode, wurde bereits in [HSZ03b] genauer untersucht.*

5.1. Variationsformulierung der Helmholtz-Gleichung

Zur Veranschaulichung des Vorgehens betrachten wir zunächst ein eindimensionales Modellproblem. Im zweiten Unterabschnitt werden wir die vorgestellten Techniken auf Probleme in höheren Dimensionen verallgemeinern.

5.1.1. Eindimensionaler Fall

Sei $u \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+)$ Lösung des Streuproblems

$$-u''(r) - \kappa^2 p(r)u(r) = 0, \quad r \geq 0, \quad (5.1a)$$

$$u'(0) = l, \quad (5.1b)$$

$$\mathcal{L}\{u(a\bullet)\} \in H^-(\kappa_0\mathbb{R}) \quad (5.1c)$$

mit $\Re(\kappa), \Re(\kappa_0) > 0$, $l \in \mathbb{C}$ und einer positiven Potentialfunktion $p \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ mit $p(r) = 1$ für $r \geq a > 0$. Wie bereits zu des 4. Kapitels gesehen, reduziert sich

die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (3.2) für $d = 1$ zu $u'(a) = i\kappa u(a)$ und bleibt auch für $\Im(\kappa) < 0$ gültig. Die Ausstrahlungsbedingung (5.1c) erscheint somit für $d = 1$ unnötig kompliziert. Zur Veranschaulichung ist es dennoch sinnvoll, auch das eindimensionale Problem mit Hilfe der Polbedingung zu behandeln. Zusätzlich wäre das zugehörige Resonanzproblem für das Eigenpaar (κ^2, u)

$$-u''(r) = \kappa^2 p(r)u(r), \quad r \geq 0, \quad (5.2a)$$

$$u'(0) = 0, \quad (5.2b)$$

$$\mathcal{L}\{u(a\bullet)\} \in H^-(\kappa_0\mathbb{R}) \quad (5.2c)$$

mit der Ausstrahlungsbedingung $u'(a) = i\kappa u(a)$ nichtlinear, während die nun vorgestellte Methode zu einem linearen Eigenwertproblem führt. Eine numerische Anwendung der Methode für $d = 1$ ist in [Sch07a] zu finden.

Betrachten wir zunächst die explizit bekannte Lösung $u_{\text{ext}}(r) := u(a(r+1))$ für $r > 0$ von (5.1) und die transformierten Funktionen $\hat{u}_{\text{ext}} := \mathcal{L}u_{\text{ext}}$ und $\hat{U} := \mathcal{M}\hat{u}_{\text{ext}}$. Mit $u_0 := u_{\text{ext}}(0) = u(a)$ gilt

$$u_{\text{ext}}(r) = u_0 e^{aikr} \xrightarrow{\mathcal{L}} \hat{u}_{\text{ext}}(s) = \frac{u_0}{s - aik} \xrightarrow{\mathcal{M}} \hat{U}(z) = \frac{u_0}{i\kappa_0(z+1) - aik(z-1)}. \quad (5.3)$$

Die Beziehung $u_0 = 2i\kappa_0\hat{U}(1)$ aus Lemma 4.13 ergibt sich im Eindimensionalen direkt aus der Darstellung von \hat{U} . Dies gilt jedoch nur, da u und u_{ext} Lösungen einer Helmholtz-Gleichung sind. Wie bereits in Lemma 4.13 gesehen, muss für allgemeine Funktionen $F \in H^+(S^1) \cap H^1(S^1)$ vorausgesetzt werden. Entsprechend wären dann auch Räume der Form $\mathcal{M}^{-1}(H^+(S^1) \cap H^1(S^1))$ notwendig. Zur Vermeidung dieser Räume zerlegen wir deshalb \hat{F} in das Paar $(f_0, F)^\top \in \mathbb{C} \times H^+(S^1)$ mit

$$f_0 := \frac{\hat{F}(1)}{2i\kappa_0} \quad \text{und} \quad F(z) := \frac{2i\kappa_0\hat{F}(z) - f_0}{z-1}. \quad (5.4)$$

Mit Hilfe der Abbildungen

$$\left(\mathcal{T}_\pm \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix} \right) (z) := \frac{1}{2} (f_0 + (z \pm 1)F(z)), \quad \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \times H^+(S^1) \quad (5.5)$$

ist diese Zerlegung gerechtfertigt, wenn $\hat{F} \in \mathcal{T}_-(\mathbb{C} \times H^+(S^1)) \subset H^+(S^1)$. Die transformierte Lösung der Helmholtz-Gleichung \hat{U} liegt in diesem Raum (siehe dazu Lemma 5.13), und es gilt

$$\hat{U} = \frac{1}{i\kappa_0} \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} u_0 \\ U \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U(z) = u_0 \frac{a\kappa - \kappa_0}{\kappa_0(z+1) - a\kappa(z-1)}. \quad (5.6)$$

Mit diesen Vorarbeiten können wir eine Variationsformulierung für $u_{\text{int}} := u|_{[0,a]}$ und U herleiten. Dazu multiplizieren wir die Helmholtz-Gleichung (5.1a) mit Testfunktionen v mit

$$v_{\text{int}} := v|_{[0,a]} \in H^1([0,a]) \quad \text{und} \quad v_{\text{ext}}(r) := v(a(r+1)) = v(a)e^{ikr}. \quad (5.7)$$

Dabei sei $k \in \mathbb{C}$ mit $\Re(k) > 0$ und $\Im(k) > -\Im(\kappa)$, sodass

$$|u_{\text{ext}}(r)v_{\text{ext}}(r)| = |u_0v(a)e^{i(\kappa+k)r}| \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

Auf diese Weise existieren die nachfolgenden Integrale, und es gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty (-u''(r) - \kappa^2 p(r)u(r)) v(r) dr = \int_0^a (u'_{\text{int}}(r)v'_{\text{int}}(r) - \kappa^2 p(r)u_{\text{int}}(r)v_{\text{int}}(r)) dr \\ &+ lv_{\text{int}}(0) + \int_0^\infty \left(\frac{1}{a} u'_{\text{ext}}(r)v'_{\text{ext}}(r) - a\kappa^2 u_{\text{ext}}(r)v_{\text{ext}}(r) \right) dr. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Bemerkung 5.2. *Im Gegensatz zu Kapitel 2 und dem bisherigen Vorgehen multiplizieren wir nicht mit \bar{v} , sondern mit v und erhalten so statt einer Sesquilinearform eine Bilinearform. Dies liegt vor allem an der speziellen Behandlung der Integrale über \mathbb{R}_+ . Wir werden in der Konvergenzanalyse in Abschnitt 5.3.1 dieses Problem beheben.*

Das folgende Lemma überführt das letzte Integral in den Hardy-Raum $H^+(S^1)$.

Lemma 5.3. *Seien $M \geq 0$, $\kappa_0 \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\kappa_0) > 0$ und $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Funktionen, deren Laplace-Transformierte $\hat{f} := \mathcal{L}f$ und $\hat{g} := \mathcal{L}g$ für $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq M\}$ bzw. $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq -M - \epsilon\}$ mit $\epsilon > 0$ existieren und eine holomorphe Fortsetzung in eine Umgebung um $E(M, \kappa_0) := \{s \in \mathbb{C} : \Re(is/\kappa_0) \geq 0 \vee \Re(s) \geq M\}$ besitzen. Weiter sei in dieser Umgebung $|\hat{f}(s)s|$ und $|\hat{g}(s)s|$ gleichmäßig beschränkt.*

Dann gilt

$$\int_0^\infty f(r)g(r)dr = -\frac{i}{2\pi} \int_{\kappa_0\mathbb{R}} \hat{f}(s)\hat{g}(-s)ds = \frac{-i\kappa_0}{\pi} \int_{S^1} \hat{F}(z)\hat{G}(\bar{z})|dz| \quad (5.9)$$

mit $\hat{F} := \mathcal{M}\hat{f}$ und $\hat{G} := \mathcal{M}\hat{g}$.

Beweis. Wir erweitern f, g durch 0 zu $f^*, g^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und betrachten

$$\int_0^\infty f(r)g(r)dr = \mathcal{F}\{f^*g^*\}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{F}\{f^*e^{-M\bullet}\}(t)\mathcal{F}\{g^*e^{M\bullet}\}(-t)dt.$$

Die Fourier-Transformierten

$$\mathcal{F}\{f^*(x)e^{-Mx}\}(t) = \hat{f}(it + M) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}\{g^*(x)e^{Mx}\}(-t) = \hat{g}(-(it + M))$$

existieren nach Voraussetzung. Weiterhin ist $\hat{f}(s)\hat{g}(-s)$ holomorph in dem grau hinterlegten Bereich aus Abbildung 5.1, da \hat{g} nur auf die schraffierte obere Ecke nicht holomorph fortsetzbar ist. Damit folgt die erste Gleichung in (5.9) mit Cauchys Integralsatz bezüglich des abgeschlossenen Weges $\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4$ aus Abbildung 5.1, wobei die Integrale über γ_2 und γ_4 für $R \rightarrow \infty$ wegen des Abfallverhaltens von \hat{f} und \hat{g} verschwinden:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(r)g(r)dr &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(it + M)\hat{g}(-(it + M))dt = -\frac{i}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} \hat{f}(s)\hat{g}(-s)ds \\ &= -\frac{i}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_3} \hat{f}(s)\hat{g}(-s)ds = -\frac{i}{2\pi} \int_{\kappa_0\mathbb{R}} \hat{f}(s)\hat{g}(-s)ds. \end{aligned}$$

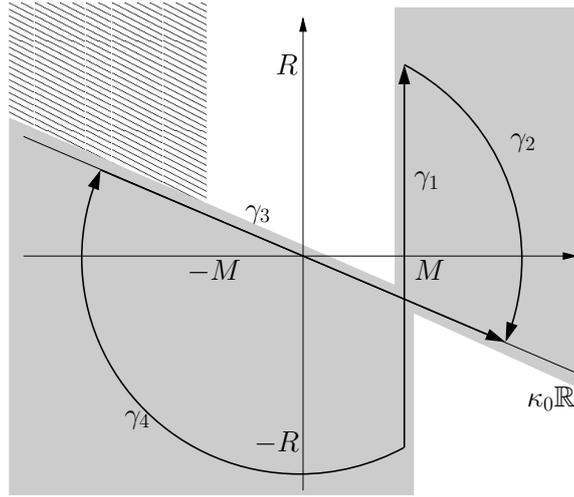


Abbildung 5.1.: Integrationswege im Beweis von Lemma 5.3

Für die zweite Gleichung nutzen wir die bereits von der Möbius-Transformation 4.7 bekannte Substitution $s = \varphi(z)$ mit $\varphi'(z) = (-2i\kappa_0)/(z-1)^2$ und $-\varphi(z) = \varphi(\bar{z})$ für $z \in S^1$:

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2\pi} \int_{\kappa_0\mathbb{R}} \hat{f}(s)\hat{g}(-s)ds &= -\frac{i\kappa_0}{2\pi|\kappa_0|} \int_{\kappa_0\mathbb{R}} \hat{f}(s)\hat{g}(-s)|ds| \\ &= -\frac{i\kappa_0}{2\pi|\kappa_0|} \int_{S^1} \hat{f}(\varphi(z))\hat{g}(\varphi(\bar{z})) \frac{2|\kappa_0|}{|z-1|^2} |dz| \\ &= -\frac{i\kappa_0}{\pi} \int_{S^1} (\mathcal{M}\hat{f})(z)(\mathcal{M}\hat{g})(\bar{z})|dz|. \end{aligned}$$

□

Das vorige Lemma kann sowohl auf u_{ext} und v_{ext} als auch auf u'_{ext} und v'_{ext} angewandt werden. Im zweiten Fall können wir den bereits definierten Operator \mathcal{T}_+ verwenden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\}(s) &= s(\mathcal{L}f)(s) - f_0 \quad \text{mit } f_0 := f(0), \\ (\mathcal{M}\mathcal{L}f')(z) &= i\kappa_0 \frac{z+1}{z-1} \hat{F}(z) - \frac{f_0}{z-1} \quad \text{mit } \hat{F} := \mathcal{M}\mathcal{L}f \\ &= i\kappa_0 \frac{z+1}{z-1} \left(\frac{f_0 + (z-1)F(z)}{2i\kappa_0} \right) - \frac{f_0}{z-1} \quad \text{mit } F(z) := \frac{2i\kappa_0 \hat{F}(z) - f_0}{z-1} \\ &= \frac{1}{2} (f_0 + (z+1)F(z)) = \left(\mathcal{T}_+ \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix} \right) (z). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Zur Vereinfachung definieren wir die Bilinearform aus Lemma 5.3 zu

$$Q(F, G) := \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} G(\bar{z})F(z)|dz| \tag{5.11}$$

und erhalten folgende Variationsformulierung.

Satz 5.4. Seien $\kappa, \kappa_0 \in \mathbb{C}$ mit positivem Realteil und $\Re(\kappa/\kappa_0) > 0$, $X := H^1([0, a]) \times H^+(S^1)$, $u \in H_{\text{loc}}^2([0, \infty))$ eine Lösung von (5.1) und wie bisher $u_{\text{int}} := u|_{[0, a]}$, $u_{\text{ext}} = u(a(\bullet + 1))$ und $u_0 = u(a)$. Dann löst $(u_{\text{int}}, U)^\top \in X$ mit U aus (5.6) das Variationsproblem

$$A \left(\begin{pmatrix} u_{\text{int}} \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{\text{int}} \\ V \end{pmatrix} \right) - \kappa^2 B \left(\begin{pmatrix} u_{\text{int}} \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{\text{int}} \\ V \end{pmatrix} \right) = -lv_{\text{int}}(0) \quad (5.12)$$

mit $(v_{\text{int}}, V)^\top \in X$ und den Bilinearformen

$$\begin{aligned} A \left(\begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ G \end{pmatrix} \right) &:= \int_0^a f'g'dr - \frac{2i\kappa_0}{a} \mathcal{Q} \left(\mathcal{T}_+ \begin{pmatrix} f(a) \\ F \end{pmatrix}, \mathcal{T}_+ \begin{pmatrix} g(a) \\ G \end{pmatrix} \right), \\ B \left(\begin{pmatrix} f \\ G \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ G \end{pmatrix} \right) &:= \int_0^a pfgdr + \frac{2ai}{\kappa_0} \mathcal{Q} \left(\mathcal{T}_- \begin{pmatrix} f(a) \\ F \end{pmatrix}, \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} g(a) \\ G \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

mit $(f, F)^\top, (g, G)^\top \in X$.

Ist umgekehrt $(u_{\text{int}}, U)^\top \in X$ eine Lösung von (5.12), so liegt $u_{\text{int}} \in H^2([0, a])$ und ist die Einschränkung einer Lösung von (5.1).

Beweis. Seien u eine Lösung von (5.1), v wie in (5.7), $v_0 = v(a)$ und V wie in (5.4) mit $k \in \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 0 \wedge \Im(s) > -\Im(\kappa)\}$. Dann ist analog zu (5.6)

$$V(z) = v_0 \frac{k - \kappa_0}{(\kappa_0 - k)z + (\kappa_0 + k)}. \quad (5.14)$$

Wir werden im Anschluss an diesen Satz in Lemma 5.5 nachweisen, dass diese Funktionen V dicht in $H^+(S^1)$ liegen. Es ist damit ausreichend, solche v als Testfunktionen zu wählen, und wir erhalten mit Gleichung (5.8), Lemma 5.3 und den Vorüberlegungen vor diesem Satz die Behauptung.

Sei umgekehrt $(u_{\text{int}}, U)^\top \in X$ ein Lösung von (5.12). Mit $v_{\text{int}} \equiv 0$ folgt daraus nach Multiplikation mit $4\pi i \kappa_0 a$

$$\int_{S^1} V(\bar{z}) \left\{ \kappa_0^2 \overline{(z+1)} [u_0 + (z+1)U(z)] + a^2 \kappa^2 \overline{(z-1)} [u_0 + (z-1)U(z)] \right\} |dz| = 0 \quad (5.15)$$

für alle $V \in H^+(S^1)$. Sei P die orthogonale Projektion von $L^2(S^1)$ nach $H^+(S^1)$. Dann ergibt sich aus (5.15) die Operatorgleichung

$$P \{m U\} = P \left\{ (a^2 \kappa^2 - \kappa_0^2) - (a^2 \kappa^2 + \kappa_0^2) \bar{z} \right\} u_0 = (a^2 \kappa^2 - \kappa_0^2) u_0, \quad (5.16)$$

mit $m(z) := \kappa_0^2 |z+1|^2 + a^2 \kappa^2 |z-1|^2$, da $P\bar{z} = 0$.

Der Operator auf der linken Seite der Gleichung ist ein Toeplitz-Operator mit Symbol

$$m(z) = 2(a^2 \kappa^2 + \kappa_0^2) - 2(a^2 \kappa^2 - \kappa_0^2) \Re(z).$$

Da der Graph von m eine Gerade mit Endpunkten $4a^2 \kappa^2$ und $4\kappa_0^2$ ist und diese nur für $\kappa_0 = \pm iC\kappa$ mit $C > 0$ den Ursprung kreuzt, ist T_m nach Bemerkung 4.5 stetig

5. Hardy-Raum Infinite Elemente Methode

invertierbar. Die eindeutige Lösung von (5.16) muss nach Konstruktion folglich durch U aus (5.6) gegeben sein. Einsetzen in den externen Anteil von (5.12) liefert mit (5.16)

$$\begin{aligned} & v_0 u_0 \int_{S^1} \left(-\frac{i\kappa_0}{4\pi a} \left(1 + \frac{z+1}{\frac{a\kappa+\kappa_0}{a\kappa-\kappa_0} - z} \right) - \frac{ai\kappa^2}{4\pi\kappa_0} \left(1 + \frac{z-1}{\frac{a\kappa+\kappa_0}{a\kappa-\kappa_0} - z} \right) \right) |dz| \\ &= v_0 u_0 \frac{-i\kappa}{2\pi} \int_{S^1} \frac{\frac{a\kappa+\kappa_0}{a\kappa-\kappa_0}}{\frac{a\kappa+\kappa_0}{a\kappa-\kappa_0} - z} |dz| = v_0 u_0 \frac{-\kappa}{2\pi} \int_{S^1} \left(\frac{1}{\frac{a\kappa+\kappa_0}{a\kappa-\kappa_0} - z} + \frac{1}{z} \right) dz \\ &= -i\kappa u_0 v_0, \end{aligned} \quad (5.17)$$

da $\left| \frac{a\kappa+\kappa_0}{a\kappa-\kappa_0} \right| > 1$ für $\Re(\kappa/\kappa_0) > 0$ und somit der erste Integrand eine holomorphe Funktion auf einer $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ umfassenden Menge ist. Damit verschwindet das zugehörige Integral und das letzte Gleichheitszeichen folgt mit [Rem84, Kapitel 6.1.3]. Es ergibt sich schließlich die Variationsformulierung

$$\int_0^a (v'_{\text{int}} u'_{\text{int}} - \kappa^2 p v_{\text{int}} u_{\text{int}}) dr = i\kappa u_0 v_0 - v_{\text{int}}(0)l. \quad (5.18)$$

Mit dem Regularitätssatz 2.10 ist $u_{\text{int}} \in H^2([0, a])$ und löst das Randwertproblem

$$-u''_{\text{int}}(r) - p(r)\kappa^2 u_{\text{int}}(r) = 0, \quad r \in [0, a], \quad (5.19a)$$

$$u'_{\text{int}}(0) = l, \quad (5.19b)$$

$$u'_{\text{int}}(a) = i\kappa u_{\text{int}}(a). \quad (5.19c)$$

Damit ist u_{int} die Einschränkung einer Lösung von (5.1) und die Behauptung ist gezeigt. \square

Zur Vervollständigung des Beweises benötigen wir noch das folgende Lemma.

Lemma 5.5. *Seien $\kappa_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und E eine offene, nichtleere Teilmenge von $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s/\kappa_0) > 0\}$. Dann liegen die Funktionen $V_k(z) := \frac{k-\kappa_0}{(\kappa_0-k)z+(\kappa_0+k)}$ für $k \in E$ dicht in $H^+(S^1)$.*

Beweis. Es ist $(\mathcal{M}^{-1}V_k)(\kappa_0 s) = \frac{i(k-\kappa_0)}{\kappa_0} \frac{1}{s-ik/\kappa_0}$, und die Behauptung ist auf Grund der Eigenschaften der Möbius-Transformation aus Satz 4.7 gezeigt, wenn der Raum $Y := \text{span}\{1/(\bullet - ik/\kappa_0) : k \in E\}$ dicht in $H^-(\mathbb{R})$ liegt.

Sei dafür $f \in Y^\perp$, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} f(\sigma) \overline{\left(\frac{1}{\sigma - ik\kappa_0^{-1}} \right)} d\sigma = 0, \quad k \in E.$$

Dann verschwindet die auf \mathbb{C}^- holomorphe Funktion

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\sigma)}{\sigma - z} d\sigma, \quad z \in \mathbb{C}^-$$

auf der offenen Teilmenge $\{\overline{ik\kappa_0^{-1}} : k \in E\}$ von \mathbb{C}^- und somit auf ganz \mathbb{C}^- . Mit (4.19) ist f die Randfunktion von g auf \mathbb{R} , und folglich ist $f \equiv 0$. Damit ist $Y^\perp = \{0\}$, d.h. Y ist dicht in $H^-(\mathbb{R})$. \square

Die Variationsformulierung (5.12) ist linear in κ^2 , und die Ansatzfunktionen in X hängen im Gegensatz zu klassischen IEM (Abschnitt 3.2.2) nicht von κ ab. Damit ist eine Galerkin-Methode auf Basis dieser Variationsformulierung geeignet, sowohl das Streuproblem (5.1) als auch das zugehörige Resonanzproblem (5.2) zu behandeln. In Abschnitt 5.2.2 wird die Umsetzung dieser Methode dargestellt sowie die Konvergenz untersucht. Zunächst wollen wir jedoch eine ähnliche Variationsformulierung für höhere Dimensionen herleiten.

5.1.2. Mehrdimensionale Variationsformulierung

Sei u eine Lösung von (3.1) mit $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus K$ und $\Omega_{\text{int}}, \Omega_{\text{ext}}, u_{\text{int}}, u_{\text{ext}}$ (mit Skalierung (4.4)) und u_0 wie bisher. Nach Multiplikation mit einer geeigneten Testfunktion, partieller Integration und Substitution in Polarkoordinaten erhalten wir (vgl. (4.6) und (4.25))

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{\text{int}}} (\nabla u_{\text{int}} \cdot \nabla v_{\text{int}} - \kappa^2 u_{\text{int}} v_{\text{int}}) dx + \frac{d-1}{2a} \int_{\Gamma_a} u_0 v_0 d\hat{\mathbf{x}} + \frac{1}{a} \int_{\Gamma_a} \int_0^\infty \partial_r u_{\text{ext}} \partial_r v_{\text{ext}} dr d\hat{\mathbf{x}} \\ & + a \int_{\Gamma_a} \int_0^\infty \left(\frac{\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} u_{\text{ext}} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} v_{\text{ext}}}{(r+1)^2} - \kappa^2 u_{\text{ext}} v_{\text{ext}} - \frac{C_d}{a^2} \frac{u_{\text{ext}} v_{\text{ext}}}{(r+1)^2} \right) dr d\hat{\mathbf{x}} = - \int_{\partial K} f v_{\text{int}} ds. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Aufgrund der Skalierung von u_{ext} gilt mit (4.13) $u_{\text{ext}}(r, \hat{\mathbf{x}}) \approx e^{iakr}$ für $r \rightarrow \infty$. Testfunktionen $v \in H^2(\Omega)$ müssen folglich wie im eindimensionalen Fall hinreichend schnell abfallen, sodass die Integrale über $[0, \infty)$ existieren.

Ziel ist es, diese Integrale mit Lemma 5.3 in den Hardy-Raum $H^+(S^1)$ zu überführen. Dabei sind im Wesentlichen zwei Probleme zu lösen: Zum einen müssen die Voraussetzungen von Lemma 5.3 sowohl für u_{ext} als auch für $\partial_r u_{\text{ext}}$ und die Komponenten von $\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} u_{\text{ext}}$ sichergestellt werden. Dies ist mit Abschnitt 4.1.1 und dort insbesondere (4.12) und (4.13) zumindest für hinreichend großes a immer gewährleistet. Zum anderen haben wir im eindimensionalen Fall gesehen, dass es sinnvoll ist, $\hat{U}(\bullet, \hat{\mathbf{x}}) := \mathcal{ML}u_{\text{ext}}(\bullet, \hat{\mathbf{x}})$ zu zerlegen (siehe (5.4) und Lemma 4.13):

$$\hat{U}(\bullet, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{i\kappa_0} \mathcal{T}_- \left(\begin{array}{c} u_0(\hat{\mathbf{x}}) \\ U(\bullet, \hat{\mathbf{x}}) \end{array} \right) \quad \text{mit } U(z, \hat{\mathbf{x}}) := \frac{2i\kappa_0 \hat{U}(z, \hat{\mathbf{x}}) - u_0(\hat{\mathbf{x}})}{z-1}, \quad \hat{\mathbf{x}} \in \Gamma_a. \quad (5.21)$$

Lemma 5.6. *Seien U wie in (5.21) und a hinreichend groß. Dann ist $U(\bullet, \hat{\mathbf{x}}) \in H^+(S^1) \cap C^\infty(S^1)$ für alle $\hat{\mathbf{x}} \in \Gamma_a$.*

Beweis. Seien $\hat{\mathbf{x}} \in \Gamma_a$ und a hinreichend groß. $\hat{u}_{\text{ext}}(\bullet, \hat{\mathbf{x}}) = \mathcal{L}u_{\text{ext}}(\bullet, \hat{\mathbf{x}})$ besitzt mit den Ergebnissen aus Abschnitt 4.1.1 eine Singularität bei $ai\kappa$ und ist bis auf einen Schnitt $\{ai\kappa - \kappa_0 t \mid t \geq 0\}$ holomorph fortsetzbar. Da $\varphi(z) = i\kappa_0 \frac{z+1}{z-1}$ mit Ausnahme des Punktes 1 ebenfalls holomorph ist, sind sowohl $\hat{U}(\bullet, \hat{\mathbf{x}})$ als auch $U(\bullet, \hat{\mathbf{x}})$ auf $\mathbb{C} \setminus (\{1\} \cup \{\varphi^{-1}(ai\kappa - \kappa_0 t) \mid t \geq 0\})$ holomorph fortsetzbar. Es ist $ai\kappa \in \mathbb{C}^+$ und somit $|\varphi^{-1}(ai\kappa)| > 1$ und $\varphi^{-1}(\infty) = 1$. Folglich sind $\hat{U}(\bullet, \hat{\mathbf{x}}), U(\bullet, \hat{\mathbf{x}})$ auf eine den Punkt 1 nicht enthaltende Umgebung von $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ holomorph fortsetzbar, und die Behauptung ist gezeigt, wenn $U(\bullet, \hat{\mathbf{x}})$ auch im Punkt 1 beliebig oft differenzierbar ist.

5. Hardy-Raum Infinite Elemente Methode

Dafür untersuchen wir zunächst das asymptotische Verhalten von \hat{u}_{ext} für $s \rightarrow \infty$. Mit Hilfe der Darstellung (4.12) mit der exponentiell abfallenden Sprungfunktion Ψ , kann \hat{u}_{ext} in Potenzen von $(s - i\kappa_0)$ entwickelt werden:

$$\hat{u}_{\text{ext}}(s, \hat{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^J \frac{\alpha_j(\hat{\mathbf{x}})}{(s - i\kappa_0)^j} + \mathcal{O}\left(|s - i\kappa_0|^{-J}\right), \quad |s| \rightarrow \infty, \quad J \in \mathbb{N} \text{ beliebig.}$$

Mit $(\mathcal{M}\{(\bullet - i\kappa_0)^{-j}\})(z) = (z - 1)^{j-1}/(2i\kappa_0)^j$ folgt

$$\hat{U}(z, \hat{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^J \frac{\alpha_j(\hat{\mathbf{x}})}{(2i\kappa_0)^j} (z - 1)^{j-1} + \mathcal{O}\left(|z - 1|^{J-1}\right), \quad \text{für } |z - 1| \rightarrow 0.$$

Mit Lemma 4.13 gilt $\alpha_1 = u_0$, und es folgt

$$U(z, \hat{\mathbf{x}}) = \sum_{j=2}^J \frac{\alpha_j(\hat{\mathbf{x}})}{(2i\kappa_0)^{j-1}} (z - 1)^{j-2} + \mathcal{O}\left(|z - 1|^{J-2}\right), \quad \text{für } |z - 1| \rightarrow 0.$$

$U(\bullet, \hat{\mathbf{x}})$ wurde somit in ein Taylorpolynom der Ordnung $J-2$ um die Stelle 1 entwickelt und ist folglich auch an dieser Stelle beliebig oft differenzierbar, da J beliebig gewählt werden kann. \square

Obiger Ansatz für \hat{U} ist mit dem vorigen Lemma gerechtfertigt. Als Nachteil führt er zu Termen der Form

$$\mathcal{ML}\{\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} f(\bullet, \hat{\mathbf{x}})\}(z) = \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{F}(z, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{i\kappa_0} \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} (f_0(\hat{\mathbf{x}}) + (z - 1)F(z, \hat{\mathbf{x}})). \quad (5.22)$$

Für $u_{\text{ext}} \in H_{\text{loc}}^2(\Omega_{\text{ext}})$ ist dies kein Problem, da $u_0 \in H^{3/2}(\Gamma_a)$ und damit auch $U(z, \bullet) \in H^{3/2}(\Gamma_a)$ für $z \in S^1$ ist. Für Testfunktionen $v_{\text{ext}} \in H^1(\Omega_{\text{ext}})$ ist jedoch $v_0 := v|_{\Gamma_a} \in H^{1/2}(\Gamma_a)$, und obiger Term erscheint fraglich. Das nächste Lemma löst dieses Problem durch die Definition eines geeigneten Raumes X und Ansatzfunktionen v aus einer dichten Teilmenge von X .

Zur Vorbereitung erinnern wir an Definition und Satz 2.17. Dort wurden Tensorprodukte von linearen, beschränkten Abbildungen definiert. Die Operatoren \mathcal{T}_{\pm} sind solche Abbildungen von $\mathbb{C} \times H^+(S^1)$ in den Raum $H^+(S^1)$. Ebenso bildet der Oberflächengradient $\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}$ den Raum $H^1(\Gamma_a)$ stetig in den Raum der auf Γ_a tangentialen Vektorfelder $L_{\text{tan}}^2(\Gamma_a)$ ab. Somit ist

$$\mathcal{T}_- \otimes \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} : (\mathbb{C} \times H^+(S^1)) \otimes H^1(\Gamma_a) \rightarrow H^+(S^1) \otimes L_{\text{tan}}^2(\Gamma_a) \quad (5.23)$$

eine lineare, stetige Abbildung. Nach obiger Bemerkung ist der Raum

$$(\mathbb{C} \times H^+(S^1)) \otimes H^1(\Gamma_a) = H^1(\Gamma_a) \times H^+(S^1) \otimes H^1(\Gamma_a)$$

jedoch nicht als Ansatzraum geeignet.

Lemma 5.7. *Seien*

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ G \end{pmatrix} \right)_X &:= (f, g)_{H^1(\Omega_{\text{int}})} + (F, G)_{H^+(S^1) \otimes L^2(\Gamma_a)} \\ &\quad + \left((\mathcal{T}_- \otimes \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}) \begin{pmatrix} f|_{\Gamma_a} \\ F \end{pmatrix}, (\mathcal{T}_- \otimes \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}) \begin{pmatrix} g|_{\Gamma_a} \\ G \end{pmatrix} \right)_{H^+(S^1) \otimes L^2_{\text{tan}}(\Gamma_a)}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

$\|\bullet\|_X := \sqrt{(\bullet, \bullet)_X}$ und

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix} \in H^1(\Omega_{\text{int}}) \times (H^+(S^1) \otimes L^2(\Gamma_a)) \mid \left\| \begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix} \right\|_X < \infty \right\}. \quad (5.25)$$

Dann gilt für $\Re(\kappa), \Re(\kappa_0), \Re(\kappa/\kappa_0) > 0$

- (i) $(X, (\bullet, \bullet)_X)$ ist ein Hilbertraum.
- (ii) Für jedes $f \in H^1(\Omega_{\text{int}})$ existiert ein $F \in H^+(S^1) \otimes L^2(\Gamma_a)$, sodass $(f, F)^\top \in X$.
- (iii) Es existiert eine dichte Teilmenge $\tilde{X} \subset X$, sodass für alle $(f, F)^\top \in \tilde{X}$ f in $C^\infty(\overline{\Omega_{\text{ext}}})$ liegt, die Funktion

$$f_{\text{ext}}(\bullet, \hat{\mathbf{x}}) := \mathcal{L}^{-1} \left\{ (i\kappa_0)^{-1} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{T}_-(f|_{\Gamma_a}(\hat{\mathbf{x}}), F(\bullet, \hat{\mathbf{x}}))^\top \right\}$$

für alle $\hat{\mathbf{x}} \in S^1$ wohldefiniert ist und die Voraussetzungen von Lemma 5.3 sowohl von $f_{\text{ext}}(\bullet, \hat{\mathbf{x}})$ als auch von den Komponenten von $\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} f_{\text{ext}}(\bullet, \hat{\mathbf{x}})$ für alle $\hat{\mathbf{x}}$ erfüllt werden. Insbesondere fallen $f_{\text{ext}}(r, \hat{\mathbf{x}})$ und die Komponenten von $\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} f_{\text{ext}}(r, \hat{\mathbf{x}})$ exponentiell für $r \rightarrow \infty$ ab.

Beweis. 1. Der Operator $\mathcal{T}_- \otimes \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}$ ist mit Definition und Satz 2.17 auf dem Raum $(\mathbb{C} \times H^+(S^1)) \otimes H^1(\Gamma_a)$ definiert. Daher ist das Innenprodukt $(\bullet, \bullet)_X$ zunächst nur auf $\tilde{X} := H^1(\Omega_{\text{int}}) \times (H^+(S^1) \otimes H^1(\Gamma_a))$ sinnvoll definiert, und $(\tilde{X}, (\bullet, \bullet)_X)$ ist ein Prä-Hilbert-Raum. Nach [Heu75, Satz 66.5] existiert zu \tilde{X} ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmter Hilbert-Raum X , sodass \tilde{X} dicht liegender Unterraum in X ist.

Mit Hilfe der ersten beiden Terme in der Definition (5.24) von $(\bullet, \bullet)_X$ können die Elemente von X als Funktionen $(f, F)^\top \in H^1(\Omega_{\text{int}}) \times (H^+(S^1) \otimes L^2(\Gamma_a))$ aufgefasst werden, für die wegen des dritten Terms in (5.24) $(\mathcal{T}_- \otimes \nabla_{\hat{\mathbf{x}}})(f|_{\Gamma_a}, F)^\top$ definiert ist und mit einer Funktion aus $H^+(S^1) \otimes L^2_{\text{tan}}(\Gamma_a)$ identifiziert werden kann. Da $H^1(\Gamma_a)$ dicht in $L^2(\Gamma_a)$ liegt, ist die einfachere Darstellung von X aus (5.25) gerechtfertigt.

- 2. Sei $f \in H^1(\Omega_{\text{int}})$. Dann ist $f_0 := f|_{\Gamma_a} \in H^{1/2}(\Gamma_a)$, d.h. mit Blick auf (3.24)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \nu(n)) |f_{0,n}|^2 < \infty, \quad f_{0,n} := (f_0, \Phi_n)_{L^2(\Gamma_a)}. \quad (5.26)$$

Sei nun $F(z, \hat{\mathbf{x}}) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z) \Phi_n(\hat{\mathbf{x}})$ mit noch zu bestimmenden Fourier-Koeff-

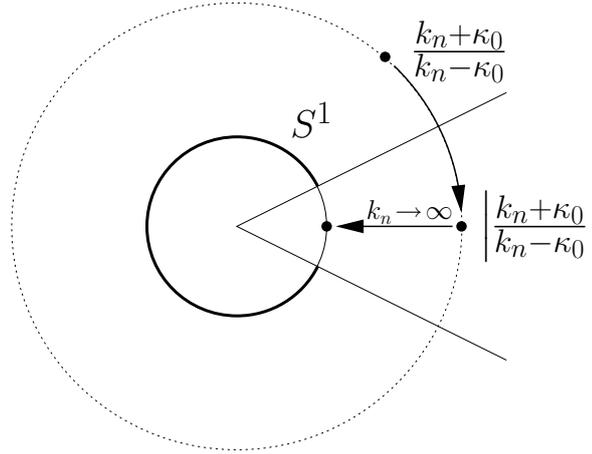


Abbildung 5.2.: Skizze zum Beweis von Lemma 5.7

fizienten F_n . Dann ist $(f, F)^\top \in X$ und die Behauptung ist gezeigt, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|F_n\|_{L^2(S^1)}^2 < \infty \quad \text{und} \quad (5.27)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \nu(n)^2 \left\| \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} f_{0,n} \\ F_n \end{pmatrix} \right\|_{L^2(S^1)}^2 < \infty,$$

da $\int_{\Gamma_a} \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \Phi_n \cdot \overline{\nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \Phi_n} d\hat{\mathbf{x}} = - \int_{\Gamma_a} (\Delta_{\hat{\mathbf{x}}} \Phi_n) \Phi_n d\hat{\mathbf{x}} = -\lambda_n = \mathcal{O}(\nu(n)^2)$.

Da wir in (iii) eine dichte Teilmenge von X konstruieren wollen und in Lemma 5.5 bereits eine dichte Teilmenge von $H^+(S^1)$ vorgestellt wird, machen wir den Ansatz

$$F_n(z) = f_{0,n} V_{k_n}(z)$$

mit den Funktionen $V_{k_n} = \left(\frac{k_n + \kappa_0}{k_n - \kappa_0} - z \right)^{-1}$ aus Lemma 5.5 und einer zunächst unbestimmten Folge k_n . Es gilt

$$\begin{aligned} \|V_{k_n}\|_{L^2(S^1)}^2 &= \int_{S^1} \left| \frac{k_n + \kappa_0}{k_n - \kappa_0} - z \right|^{-2} |dz| = \int_{S^1} \left| \frac{k_n + \kappa_0}{k_n - \kappa_0} - z e^{i\theta} \right|^{-2} |dz| \\ &= \int_{S^1} \left| \frac{k_n + \kappa_0}{k_n - \kappa_0} e^{-i\theta} - z \right|^{-2} |dz| = \int_{S^1} \left| \left| \frac{k_n + \kappa_0}{k_n - \kappa_0} \right| - z \right|^{-2} |dz| \end{aligned} \quad (5.28)$$

mit $\theta = \arg\left(\frac{k_n + \kappa_0}{k_n - \kappa_0}\right)$. Siehe dazu auch Abbildung 5.2. Falls $k_n \rightarrow \infty$, so konvergiert die Singularität von V_{k_n} zum Punkt $1 \in S^1$. Im Grenzfall wird voriges Integral damit nicht existieren. Wir spalten es deshalb in ein konvergentes Teilintegral $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{11}{6}\pi} \left| \frac{1}{1 - e^{i\theta}} \right|^2 d\theta$ und das divergente Restintegral auf:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{|1 + t - e^{i\theta}|^2} \leq \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\theta}{t^2 + \frac{\theta^2}{4}} = 4 \frac{\arctan\left(\frac{\pi}{12}t\right)}{t} \leq \frac{2\pi}{t}, \quad t := \left| \frac{k_n/\kappa_0 + 1}{k_n/\kappa_0 - 1} \right| - 1. \quad (5.29)$$

Es gilt somit

$$\|V_{k_n}\|_{L^2(S^1)}^2 \leq C|k_n| \quad \text{für } |k_n| \rightarrow \infty. \quad (5.30)$$

Mit

$$\mathcal{T}_- \begin{pmatrix} 1 \\ V_{k_n} \end{pmatrix} = \frac{\kappa_0}{k_n - \kappa_0} V_{k_n} \quad (5.31)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} N &:= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\|F_n\|_{L^2(S^1)}^2 + \nu(n)^2 \left\| \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} f_{0,n} \\ F_n \end{pmatrix} \right\|_{L^2(S^1)}^2 \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |f_{0,n}|^2 \|V_{k_n}\|_{L^2(S^1)}^2 \left(1 + \nu(n)^2 \left| \frac{\kappa_0}{k_n - \kappa_0} \right|^2 \right) \\ &\leq C \sum_{n=0}^{\infty} |f_{0,n}|^2 |k_n| \left(1 + \left| \frac{\nu(n)}{k_n - \kappa_0} \right|^2 \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Sei nun k_0 so gewählt, dass $\Re(k_0), \Re(k_0/\kappa_0) > 0$ und $k_n := k_0 + \nu(n)$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ $\left| \frac{\nu(n)}{k_n - \kappa_0} \right| \leq C$, und es gilt mit (5.26)

$$N \leq C \sum_{n=0}^{\infty} |f_{0,n}|^2 (|k_0| + \nu(n)) < \infty. \quad (5.33)$$

3. Für das eben konstruierte F ist mit (5.3) und (5.6)

$$f_{\text{ext}}(r, \hat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{0,n} e^{ik_n r} \Phi_n(\hat{x}).$$

Da $C^\infty(\overline{\Omega_{\text{int}}})$ dicht in $H^1(\overline{\Omega_{\text{int}}})$ liegt, wählen wir $f \in C^\infty(\overline{\Omega_{\text{int}}})$, und die Fourier-Koeffizienten $f_{0,n}$ fallen im Betrag super-algebraisch in n . Somit konvergiert obige Reihe ebenso wie die Komponenten von $\nabla_{\hat{x}} f$ auf kompakten Teilmengen des $[0, \infty) \times \Gamma_a$ und $r \mapsto e^{aik_r} f_{\text{ext}}(r, \hat{x})$ bzw. die Komponenten von $r \mapsto e^{aik_r} \nabla_{\hat{x}} f_{\text{ext}}(r, \hat{x})$ fallen exponentiell ab, wenn nur $\Im(k_n + \kappa) = \Im(k_0 + \kappa) > 0$. Dies ist mit der Wahl des k_0 immer sicherzustellen und die Voraussetzungen für Lemma 5.3 sind sowohl für f_{ext} als auch für die Komponenten von $\nabla_{\hat{x}} f_{\text{ext}}$ erfüllt.

Bleibt nur noch zu zeigen, dass die Funktionen F mit geeigneten \tilde{k}_n dicht in $H^+(S^1)$ liegen. Da die bisherigen Aussagen auch für \tilde{k}_n in einer offenen Umgebung um k_n gültig bleiben, folgt dies mit Lemma 5.5. □

Damit ist die unscharfe Aussage „geeignete Testfunktionen“ vom Beginn des Abschnittes präzisiert, und (5.20) kann in den Hardy-Raum transformiert werden. Analog zum eindimensionalen Fall definieren wir

$$\begin{aligned} Q^\#(F, G) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_a} \int_{S^1} G(\bar{z}, \hat{x}) F(z, \hat{x}) |dz| d\hat{x}, \quad F, G \in H^+(S^1) \otimes L^2(\Gamma_a), \\ Q_{\text{tan}}^\#(F, G) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_a} \int_{S^1} G(\bar{z}, \hat{x}) \cdot F(z, \hat{x}) |dz| d\hat{x}, \quad F, G \in H^+(S^1) \otimes L_{\text{tan}}^2(\Gamma_a). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Satz 5.8. Sei $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$ eine Lösung von (3.1) mit $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus K$ und $u_{\text{int}}, u_{\text{ext}}$ und u_0 wie bisher und a hinreichend groß. Dann liegt $(u_{\text{int}}, U)^\top$ mit U aus (5.21) in X und löst das Variationsproblem

$$A \left(\begin{pmatrix} u_{\text{int}} \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{\text{int}} \\ V \end{pmatrix} \right) - \kappa^2 B \left(\begin{pmatrix} u_{\text{int}} \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{\text{int}} \\ V \end{pmatrix} \right) = - \int_{\partial K} l v_{\text{int}} ds \quad (5.35)$$

mit $(v_{\text{int}}, V)^\top \in X$ und den Bilinearformen

$$\begin{aligned} A \left(\begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ G \end{pmatrix} \right) &:= \int_{\Omega_{\text{int}}} \nabla f \cdot \nabla g dx + \frac{d-1}{2a} \int_{\Gamma_a} f|_{\Gamma_a} g|_{\Gamma_a} d\hat{\mathbf{x}} \\ &\quad - \frac{2i\kappa_0}{a} Q^\# \left((\mathcal{T}_+ \otimes \text{id}) \begin{pmatrix} f|_{\Gamma_a} \\ F \end{pmatrix}, (\mathcal{T}_+ \otimes \text{id}) \begin{pmatrix} g|_{\Gamma_a} \\ G \end{pmatrix} \right) \\ &\quad - \frac{2iC_d}{a\kappa_0} Q^\# \left((\mathcal{J}\mathcal{T}_- \otimes \text{id}) \begin{pmatrix} f|_{\Gamma_a} \\ F \end{pmatrix}, (\mathcal{J}\mathcal{T}_- \otimes \text{id}) \begin{pmatrix} g|_{\Gamma_a} \\ G \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + \frac{2ai}{\kappa_0} Q_{\text{tan}}^\# \left((\mathcal{J}\mathcal{T}_- \otimes \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}) \begin{pmatrix} f|_{\Gamma_a} \\ F \end{pmatrix}, (\mathcal{J}\mathcal{T}_- \otimes \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}) \begin{pmatrix} g|_{\Gamma_a} \\ G \end{pmatrix} \right), \\ B \left(\begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ G \end{pmatrix} \right) &:= \int_{\Omega_{\text{int}}} f g dx \\ &\quad + \frac{2ai}{\kappa_0} Q^\# \left((\mathcal{T}_- \otimes \text{id}) \begin{pmatrix} f|_{\Gamma_a} \\ F \end{pmatrix}, (\mathcal{T}_- \otimes \text{id}) \begin{pmatrix} g|_{\Gamma_a} \\ G \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

mit $(f, F)^\top, (g, G)^\top \in X$.

Beweis. $(u_{\text{int}}, U)^\top$ liegt mit Hilfe von Lemma 5.6 in $H^1(\Omega_{\text{int}}) \times H^+(S^1) \otimes L^2(\Gamma_a)$. Da (4.13) nach $\hat{\mathbf{x}}$ differenziert werden darf und dabei die Voraussetzungen für Lemma 5.6 erhalten bleiben, gilt auch $(u_{\text{int}}, U)^\top \in X$. Die einzelnen Terme in (5.35) ergeben sich aus (5.20) mit Lemma 5.3, der Definition von U in (5.21), (5.10) für die Transformation der radialen Ableitung und Bemerkung 4.11 für die Terme $1/(r+1)$. \square

Offen bleibt zunächst die Umkehrung des Satzes. Diese werden wir später in Korollar 5.24 nachholen.

5.2. Galerkin-Diskretisierung

Auf Grundlage der symmetrischen Variationsformulierungen (5.12) für das eindimensionale Problem und (5.35) für das mehrdimensionale Problem im jeweiligen Raum X (siehe Satz 5.4 und Lemma 5.7) kann ein Galerkin-Verfahren verwendet werden.

Für den mehrdimensionalen Fall werden wir in Unterabschnitt 5.2.4 das Variationsproblem verallgemeinern, indem wir Ω nicht mehr, wie in Abschnitt 3.1.3 dargestellt, durch Γ_a in Ω_{int} und Ω_{ext} zerlegen, sondern allgemeinere Kopplungsränder Γ zulassen.

5.2.1. Allgemeines Vorgehen

Das Vorgehen bei der Galerkin-Diskretisierung entspricht im Wesentlichen dem der klassischen Infinite Elemente Methoden 3.2.2: Die Räume $H^1([0, a])$ und $H^1(\Omega_{\text{int}})$ werden, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, durch endlich-dimensionale Unterräume $X_{\text{int}}^{(h)}$, die von den Basisfunktionen $\{b_i, i = 1, \dots, N_{\text{int}}\}$ aufgespannt werden, ersetzt. Die Spuren der an der Stelle a bzw. auf Γ_a nicht verschwindenden Basisfunktionen bezeichnen wir mit $\{b_n^{(\tilde{x})}, n = 1, \dots, N_{\tilde{x}}\}$.

Als Diskretisierung des Hardy-Raumes $H^+(S^1)$ verwenden wir die endlichdimensionalen Unterräume $\Pi_{N_r} := \text{span}\{z^0, \dots, z^{N_r}\} \subset H^+(S^1)$ und bezeichnen die orthogonalen Projektionen auf Π_{N_r} mit $P_{N_r} : H^+(S^1) \rightarrow \Pi_{N_r}$. Dies entspricht dem Vorgehen aus (4.39) bei der Linienmethode. Zusammen ergeben sich folgende Ansatzräume:

$$X_N := X_{\text{int}}^{(h)} \times \Pi_{N_r} \text{ für } d = 1 \quad \text{und} \quad X_N := X_{\text{int}}^{(h)} \times \left(\Pi_{N_r} \otimes X_{\text{int}}^{(h)} \Big|_{\Gamma_a} \right) \text{ für } d = 2, 3 \quad (5.37)$$

und die diskreten Variationsprobleme

$$A \left(\begin{pmatrix} u_{\text{int}}^{(h)} \\ U^{(N_r)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{\text{int}} \\ V \end{pmatrix} \right) - \kappa^2 B \left(\begin{pmatrix} u_{\text{int}}^{(h)} \\ U^{(N_r)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{\text{int}} \\ V \end{pmatrix} \right) = -lv_{\text{int}}(0) \quad (5.38)$$

für $d = 1$, $\left(u_{\text{int}}^{(h)}, U^{(N_r)} \right)^\top, (v_{\text{int}}, V)^\top \in X_N$ und A, B aus (5.13) sowie

$$A \left(\begin{pmatrix} u_{\text{int}}^{(h)} \\ U^{(N_r, h)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{\text{int}} \\ V \end{pmatrix} \right) - \kappa^2 B \left(\begin{pmatrix} u_{\text{int}}^{(h)} \\ U^{(N_r, h)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{\text{int}} \\ V \end{pmatrix} \right) = - \int_{\partial K} lv_{\text{int}} ds \quad (5.39)$$

für $d = 2, 3$, $\left(u_{\text{int}}^{(h)}, U^{(N_r, h)} \right)^\top, (v_{\text{int}}, V)^\top \in X_N$ und den Bilinearformen A, B aus (5.36).

In den folgenden Unterabschnitten werden wir die Assemblierung des zugehörigen Gleichungssystems

$$(A_h - \kappa^2 B_h) \alpha_h = l_h \quad (5.40)$$

genauer erläutern. Da die zu Ω_{int} gehörenden Anteile bereits in Abschnitt 2.3 besprochen wurden, werden wir uns dabei auf die externen Anteile beschränken. Im eindimensionalen Fall sind dies

$$\begin{aligned} A_{\text{ext}} \left(\begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right) &:= - \frac{2i\kappa_0}{a} \mathcal{Q} \left(\mathcal{T}_+ \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \mathcal{T}_+ \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \\ B_{\text{ext}} \left(\begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right) &:= \frac{2ai}{\kappa_0} \mathcal{Q} \left(\mathcal{T}_- \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

mit $f_0 = f(a)$ und $g_0 = g(a)$ und $(f_0, F)^\top, (g_0, G)^\top \in \mathbb{C} \times H^+(S^1)$. Der interne Anteil für $f, g \in H^1([0, a])$ besteht aus den Bilinearformen

$$A_{\text{int}}(f, g) := \int_0^a f' g' dr \quad \text{und} \quad B_{\text{int}}(f, g) := \int_0^a p f g dr. \quad (5.42)$$

Die Randwerte f_0, g_0 sind in beiden Anteilen enthalten und koppeln die Bilinearformen aneinander.

Letzteres bleibt auch in höheren Dimensionen mit

$$\begin{aligned}
 A_{\text{ext}} \left(\begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right) &:= -\frac{2i\kappa_0}{a} Q^\# \left((\mathcal{T}_+ \otimes \text{id}) \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, (\mathcal{T}_+ \otimes \text{id}) \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right) \\
 &\quad - \frac{2iC_d}{a\kappa_0} Q^\# \left((J\mathcal{T}_- \otimes \text{id}) \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, (J\mathcal{T}_- \otimes \text{id}) \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right) + \frac{d-1}{2a} \int_{\Gamma_a} f_0 g_0 d\hat{\mathbf{x}} \\
 &\quad + \frac{2ai}{\kappa_0} Q_{\text{tan}}^\# \left((J\mathcal{T}_- \otimes \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}) \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, (J\mathcal{T}_- \otimes \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}) \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right), \\
 B_{\text{ext}} \left(\begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right) &:= \frac{2ai}{\kappa_0} Q^\# \left((\mathcal{T}_- \otimes \text{id}) \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, (\mathcal{T}_- \otimes \text{id}) \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right).
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

und

$$A_{\text{int}}(f, g) := \int_{\Omega_{\text{int}}} \nabla f \cdot \nabla g \, dx \quad \text{und} \quad B_{\text{int}}(f, g) := \int_{\Omega_{\text{int}}} fg \, dx \tag{5.44}$$

gültig. Im Unterschied zum eindimensionalen Fall ist $f_0 \in H^{(1/2)}(\Gamma_a)$ eine Funktion und F, G aus dem durch X aus Lemma 5.7 definierten Unterraum von $H^+(S^1) \otimes L^2(\Gamma_a)$. Mit Blick auf Lemma 2.14 ist es ratsam, den Raum $L^2(\Gamma_a)$ durch die Spuren $X_{\text{int}}^{(h)}|_{\Gamma_a}$ von $X_{\text{int}}^{(h)}$ zu diskretisieren, da $X_{\text{int}}^{(h)}|_{\Gamma_a}$ bereits als Diskretisierung von $H^{(1/2)}(\Gamma_a)$ vorgegeben ist. Somit ist der Ansatz für X_N aus (5.37) gerechtfertigt.

5.2.2. Eindimensionaler Fall

Obwohl A_{ext} und B_{ext} und die zugehörigen Basisfunktionen aus $H^+(S^1)$ eher unüblich sind, erhalten wir ein einfaches Finites Element (vergleiche Definition 2.13):

1. $T := \mathbb{C} \times S^1$,
2. $P_T := \mathbb{C} \times \Pi_{N_r}$ mit $\dim P_T = N_r + 2$
3. und den nodalen Basisfunktionen

$$b_{-1}^{(N_r)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_j^{(N_r)} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\bullet)^j \end{pmatrix}, \quad j = 0, \dots, N_r, \tag{5.45}$$

mit den zugehörigen Freiheitsgraden $\{u_0^{(h)}, \alpha_0^+, \dots, \alpha_{N_r}^+\}$.

Die Elementmatrizen

$$A^{(N_r)} := \left(A_{\text{ext}} \left(b_j^{(N_r)}, b_k^{(N_r)} \right) \right)_{j,k=-1}^{N_r} \quad \text{und} \quad B^{(N_r)} := \left(B_{\text{ext}} \left(b_j^{(N_r)}, b_k^{(N_r)} \right) \right)_{j,k=-1}^{N_r} \tag{5.46}$$

werden durch den Randfreiheitsgrad $u_0^{(h)}$ an das bestehende Gleichungssystem gekoppelt, in dem die zu $u_0^{(h)}$ gehörenden Einträge von $A^{(N_r)}$ und $B^{(N_r)}$ zu den zu $u_0^{(h)}$ gehörenden Einträgen in A_h und B_h addiert werden.

Es bleibt die Elementmatrizen zu berechnen. Die Operatoren $\mathcal{T}_{\pm}^{(N_r)}$ sind in dieser Basis gegeben durch

$$\mathcal{T}_{\pm}^{(N_r)} := \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 & & & \\ & 1 & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \pm 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_r+1) \times (N_r+2)}. \quad (5.47)$$

Die erste Spalte wirkt dabei auf $u_0^{(h)}$, die restlichen auf die Freiheitsgrade α_j^+ . Da $Q(z^j, z^k) = \delta_{j,k}$, ergeben sich die Elementmatrizen zu

$$A^{(N_r)} = \frac{-2i\kappa_0}{a} \mathcal{T}_+^{(N_r)\top} \mathcal{T}_+^{(N_r)} \quad \text{und} \quad B^{(N_r)} = \frac{2ai}{\kappa_0} \mathcal{T}_-^{(N_r)\top} \mathcal{T}_-^{(N_r)}. \quad (5.48)$$

Bemerkung 5.9. Für die Laplace- und Möbius-transformierte Funktion \hat{U} ergibt sich der Ansatz

$$\hat{U}^{(N_r)}(z) = \frac{1}{i\kappa_0} \mathcal{T}_- \left(\sum_{j=0}^{N_r} \frac{u_0^{(h)}}{\alpha_j^+} (\bullet)^j \right) (z) = \frac{1}{2i\kappa_0} \left(u_0^{(h)} + (z-1) \sum_{j=0}^{N_r} \alpha_j^+ z^j \right).$$

Mit Hilfe der inversen Möbius-Transformation erhalten wir für $\hat{u}_{\text{ext}} = \mathcal{M}^{-1} \hat{U}$ mit $z = (s + i\kappa_0)/(s - i\kappa_0)$ und $z - 1 = (2i\kappa_0)/(s - i\kappa_0)$

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\text{ext}}^{(N_r)}(s) &= \frac{1}{2i\kappa_0} \left(u_0^{(h)} + \frac{2i\kappa_0}{s - i\kappa_0} \sum_{j=0}^{N_r} \alpha_j^+ \left(\frac{s + i\kappa_0}{s - i\kappa_0} \right)^j \right) \frac{2i\kappa_0}{s - i\kappa_0} \\ &= \frac{u_0^{(h)}}{s - i\kappa_0} + \sum_{j=0}^{N_r} \alpha_j^+ \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{(2i\kappa_0)^{k+1}}{(s - i\kappa_0)^{k+2}}. \end{aligned}$$

Analog zu Bemerkung 4.14 ergibt sich

$$u_{\text{ext}}^{(N_r)}(r) = e^{i\kappa_0 r} \left(u_0^{(h)} + \sum_{j=0}^{N_r} \alpha_j^+ \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{(2i\kappa_0 r)^{k+1}}{(k+1)!} \right)$$

und somit $u_{\text{ext}}^{(N_r)}(0) = u_0^{(h)}$.

Wie im Innenraum ist $u_0^{(h)}$ also alleiniger Randfreiheitsgrad; alle Basisfunktionen zu den Freiheitsgraden α_j^+ verschwinden auf dem Rand.

5.2.3. Sphärischer Kopplungsrand

In diesem Abschnitt erläutern wir die Implementierung der **HSIEM** für $d = 2, 3$. Sei dazu eine Zerlegung von Γ_a wie in Abbildung 5.3 gegeben.

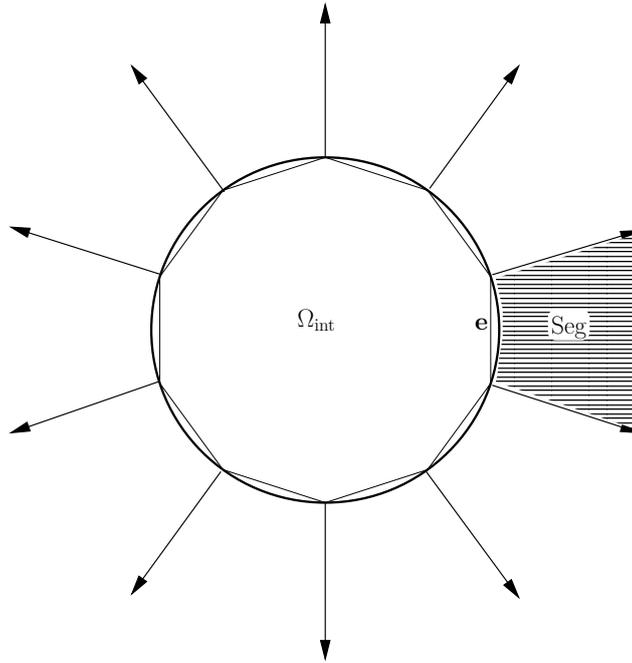


Abbildung 5.3.: Zerlegung des Außenraumes

Bemerkung 5.10. Bei einer Triangulierung von Ω_{int} durch polygonal berandete Gebiete entsteht ein Fehler, da Punkt (2) aus Definition 2.12 nicht erfüllt ist, d.h. der Rand des triangulierten Gebietes nicht gleich dem Rand von Ω_{int} ist. In [Hac96, §8.6] wird auf diese Probleme eingegangen. Für den Innenraum Ω_{int} kann mit dem 2.Lemma von Strang nachgewiesen werden, dass der Fehler die Konvergenzordnung des Verfahrens bei der Benutzung von sogenannten isoparametrischen Elementen nicht beeinträchtigt.

Wir vernachlässigen diesen Fehler im Innen- und im Außenraum und sprechen weiterhin von den zu Beginn des Kapitels definierten Spuren $b_n^{(\tilde{x})}$ der Basisfunktionen von $X_{\text{int}}^{(h)}$ als Funktionen auf Γ_a .

Wir betrachten das schraffierte Infinite Element in Abbildung 5.3 und bezeichnen die auf der Randkante \mathbf{e} nicht verschwindenden Basisfunktionen $b_n^{(\tilde{x})}$ mit $b_n^{(\mathbf{e})}$, $n = 1, \dots, N_{\mathbf{e}}$. Dann ist das Finite Element nach Definition 2.13 gegeben durch

1. $T := \mathbf{e} \times S^1$,
2. $P_T := (\mathbb{C} \times \Pi_{N_r}) \otimes X_{\text{int}}^{(h)}|_{\mathbf{e}}$ mit $\dim P_T = (N_r + 2)N_{\mathbf{e}}$
3. und den nodalen Basisfunktionen

$$b_{j,n}^{(\text{Seg})} := b_j^{(N_r)} \otimes b_n^{(\mathbf{e})}, \quad j = -1, \dots, N_r, \quad n = 1, \dots, N_{\mathbf{e}}, \quad (5.49)$$

mit $b_j^{(N_r)}$ aus (5.45).

Die Elementmatrizen $A^{(\text{Seg})}$ bzw. $B^{(\text{Seg})}$ ergeben sich mit der Definition (5.43) bzw.

(5.34) der Bilinearformen $A_{\text{ext}}, B_{\text{ext}}$ bzw. $Q^\#, Q_{\text{tan}}^\#$ als Tensorprodukte der Matrizen

$$M_{\hat{\mathbf{x}}}^{(\text{Seg})} := \left(\int_{\mathbf{e}} b_n^{(\mathbf{e})} b_m^{(\mathbf{e})} d\hat{\mathbf{x}} \right)_{m,n=1}^{N_e} \quad \text{und} \quad S_{\hat{\mathbf{x}}}^{(\text{Seg})} := \left(\int_{\mathbf{e}} \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} b_n^{(\mathbf{e})} \cdot \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} b_m^{(\mathbf{e})} d\hat{\mathbf{x}} \right)_{m,n=1}^{N_e} \quad (5.50)$$

und den Matrizen in radialer Richtung

$$\begin{aligned} L_1 &:= \frac{d-1}{2a} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix} - \frac{2i\kappa_0}{a} \mathcal{T}_+^{(N_r)\top} \mathcal{T}_+^{(N_r)} - \frac{2C_{ai}}{\kappa_0 a} \mathcal{T}_-^{(N_r)\top} \mathbf{J}_{N_r}^\top \mathbf{J}_{N_r} \mathcal{T}_-^{(N_r)}, \\ L_2 &:= \frac{2ai}{\kappa_0} \mathcal{T}_-^{(N_r)\top} \mathbf{J}_{N_r}^\top \mathbf{J}_{N_r} \mathcal{T}_-^{(N_r)} \quad \text{und} \quad L_3 := \frac{2ai}{\kappa_0} \mathcal{T}_-^{(N_r)\top} \mathcal{T}_-^{(N_r)} \end{aligned} \quad (5.51)$$

zu

$$A^{(\text{Seg})} = L_1 \otimes M_{\hat{\mathbf{x}}}^{(\text{Seg})} + L_2 \otimes S_{\hat{\mathbf{x}}}^{(\text{Seg})} \quad \text{und} \quad B^{(\text{Seg})} = L_3 \otimes M_{\hat{\mathbf{x}}}^{(\text{Seg})}. \quad (5.52)$$

Diese Matrizen verhalten sich wie „normale“ Elementmatrizen: Sie koppeln an den gemeinsamen Rändern mit benachbarten Hardy-Raum Infiniten Elementen und an den Randkanten \mathbf{e} von Γ_a über u_0 mit den FE aus dem Innenraum.

Offen ist noch die Implementierung der Matrizen \mathbf{J}_{N_r} . Wir wollen auf die explizite Darstellung des Operators $\mathbf{J} = \mathcal{M} \hat{\mathbf{J}} \mathcal{M}^{-1}$ verzichten, da diese relativ unhandlich ist. Der Definition von $\hat{\mathbf{J}}$ (4.8) kann aber bereits entnommen werden, dass es sich um einen Integraloperator handelt und somit eigentlich eine numerische Integration notwendig wäre. Zur Vermeidung einer solchen Integration, die relativ aufwendig wäre, verwenden wir den zugehörigen inversen Operator. Dazu nutzen wir Satz A.6(iv) bzw. A.6(iii) und definieren für $c > 0$

$$(\hat{\mathbf{J}}_c \mathcal{L}f)(s) := \int_s^\infty e^{c(s-\sigma)} (\mathcal{L}f)(\sigma) d\sigma = \mathcal{L} \left\{ \frac{f}{\bullet + c} \right\} (s) \quad \text{und} \quad (5.53a)$$

$$(\hat{\mathbf{D}}_c \mathcal{L}f)(s) := (-\partial_s + c)(\mathcal{L}f)(s) = \mathcal{L} \{ (\bullet + c)f \} (s). \quad (5.53b)$$

Im hier benötigten Fall $c = 1$ verzichten wir auf den Index. Der Differentialoperator $\hat{\mathbf{D}}_c$ ist offensichtlich der zu $\hat{\mathbf{J}}_c$ inverse Operator. Weiterhin lässt sich für $\mathbf{D}_c = \mathcal{M} \hat{\mathbf{D}}_c \mathcal{M}^{-1}$ direkt nachrechnen

$$(\mathbf{D}_c F)(z) = \frac{(z-1)^2}{2i\kappa_0} F'(z) + \left(\frac{z-1}{2i\kappa_0} + c \right) F(z), \quad F \in H^+(S^1) \quad (5.54)$$

und der diskrete Operator ergibt sich zu

$$\mathbf{D}_c^{(N_r)} := c \text{id}_{(N_r+1) \times (N_r+1)} + \frac{1}{2i\kappa_0} \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ 1 & -3 & 2 & & \\ & 2 & -5 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & N_r \\ & & & N_r & -2N_r - 1 \end{pmatrix}. \quad (5.55)$$

Diese Matrix ist symmetrisch und wir nutzen die numerische Inverse zur Berechnung von

$$\mathbf{J}_{N_r}^\top \mathbf{J}_{N_r} = \left(\mathbf{D}^{(N_r)} \right)^{-2}.$$

Bemerkung 5.11. Da die Matrizen L_1 , L_2 und L_3 unabhängig vom jeweiligen Segment sind, können die externen Matrizen auch direkt mit

$$A_{\text{ext}} = L_1 \otimes M_{\hat{x}} + L_2 \otimes S_{\hat{x}} \quad \text{und} \quad B_{\text{ext}} = L_3 \otimes M_{\hat{x}} \quad (5.56)$$

berechnet werden. $M_{\hat{x}}$ und $S_{\hat{x}}$ sind die Masse- bzw. Steigigkeitsmatrizen auf Γ_a :

$$M_{\hat{x}} := \left(\int_{\Gamma_a} b_n^{(\hat{x})} b_m^{(\hat{x})} d\hat{x} \right)_{m,n=1}^{N_{\hat{x}}} \quad \text{und} \quad S_{\hat{x}} := \left(\int_{\Gamma_a} \nabla_{\hat{x}} b_n^{(\hat{x})} \cdot \nabla_{\hat{x}} b_m^{(\hat{x})} d\hat{x} \right)_{m,n=1}^{N_{\hat{x}}}. \quad (5.57)$$

5.2.4. Allgemeine Kopplungsränder

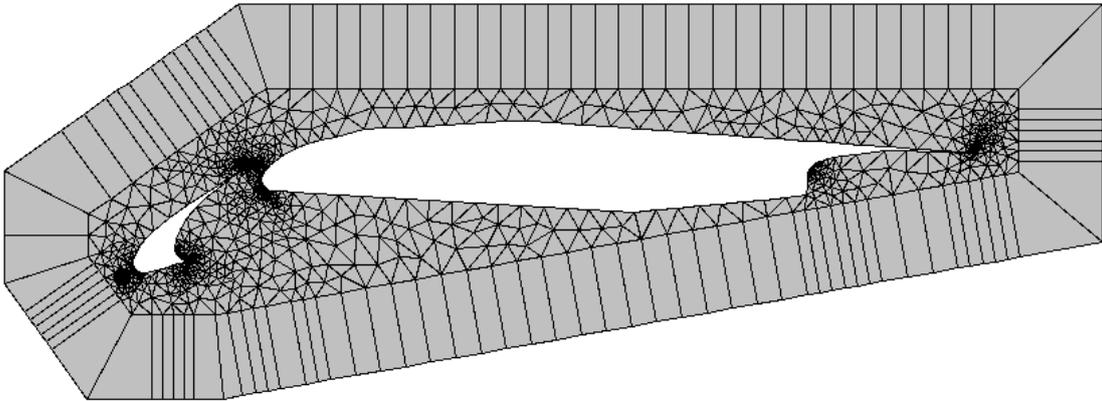


Abbildung 5.4.: Triangulierung eines Flügelprofils aus [HHKS07] mit JCMGeo aus [JCM08]

Im letzten Unterabschnitt haben wir in Abbildung 5.3 gesehen, dass eine Triangulierung des Innenraumes Ω_{int} üblicherweise einer Triangulierung eines polygonal berandeten Gebietes entspricht. Es liegt somit nahe, statt B_a ein konvexes, polygonales Gebiet P_Γ mit Rand Γ in der Definition von $\Omega_{\text{int}} = P_\Gamma \setminus K$ und $\Omega_{\text{ext}} = \mathbb{R}^d \setminus P_\Gamma$ zu verwenden. Auf diese Weise kann für längliche Gebiete, wie das Profil eines Flugzeugflügels inklusive Vorflügel aus Abbildung 5.4, das Rechengebiet Ω_{int} und damit der numerische Aufwand relativ klein gehalten werden. Wir werden uns hier auf die Darstellung des zweidimensionalen Falles beschränken. Eine Verallgemeinerung für $d = 3$ ist aus theoretischer Sicht ohne weiteres möglich; die Generierung eines geeigneten Gitters und die Assemblierung des Gleichungssystems ist jedoch deutlich aufwendiger.

Für den allgemeineren Kopplungsrand Γ und das zugehörige Gebiet Ω_{ext} müssen wir analog zu Abschnitt 5.1.2 eine geeignete Variationsformulierung herleiten. In Abschnitt 5.1.2 gelang dies durch Transformation von $\mathbb{R}^d \setminus B_a$ auf Polarkoordinaten, indem die eindimensionale Variationsformulierung aus Abschnitt 5.1.1 auf die radialen Anteile angewendet wurde. Wir werden deshalb auch hier Ω_{ext} in eine radiale und eine winkelartige Variable zerlegen.

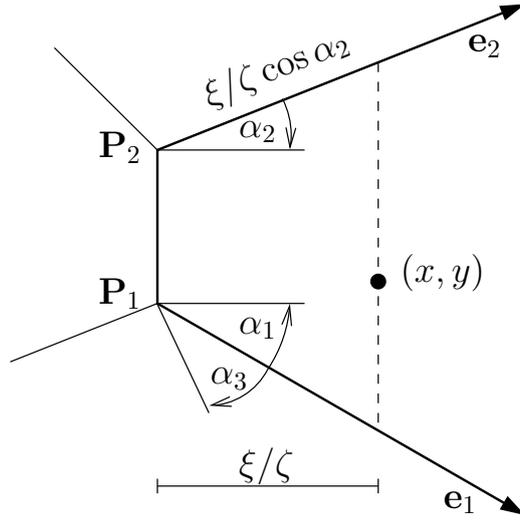


Abbildung 5.5.: Segment

Zunächst definieren wir einen Referenzstreifen durch $S_0 := [0, \infty) \times [0, 1]$. Die Variable $\xi \in [0, \infty)$ wird der radialen Variable entsprechen, $\eta \in [0, 1]$ der winkelartigen.

Ω_{ext} wird, wie in Abbildung 5.4 bereits geschehen, in einzelne Segmente (siehe Abbildung 5.5) aufgeteilt, welche sich analog zu Beispiel 2.18 durch eine bilineare Abbildung von S_0 darstellen lassen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{g} \left(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) = (1-\eta) \left(\mathbf{P}_1 + \frac{\xi}{\zeta \cos \alpha_1} \mathbf{e}_1 \right) + \eta \left(\mathbf{P}_2 + \frac{\xi}{\zeta \cos \alpha_2} \mathbf{e}_2 \right), \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in S_0. \quad (5.58)$$

\mathbf{g} ergibt sich direkt aus Abbildung 5.5 mit den dortigen Bezeichnungen und den normierten Richtungsvektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 sowie $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \frac{\pi}{2})$ und wurde so gewählt, dass ξ/ζ dem Abstand des Punktes (x, y) zur Strecke $\overline{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}$ entspricht.

Wenn nun Basisfunktionen eines solchen Segmentes S durch Konjunktion von Basisfunktionen auf S_0 mit der Abbildung \mathbf{g}^{-1} definiert werden, so müssen wir nach Lemma 2.14 darauf achten, dass die entstehenden Funktionen auf den Randstrahlen stetig sind. Dies ist gewährleistet, wenn für Punkte auf den Randstrahlen ξ unabhängig vom jeweiligen Segment ist. Aus diesem Grunde wird die vom Segment abhängige Konstante ζ eingeführt. Anhand der Winkel bei \mathbf{P}_1 ist leicht zu erkennen, dass

$$\frac{\xi}{\zeta_1} \cos \alpha_1 = \frac{\xi}{\zeta_2} \cos \alpha_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_3} \quad (5.59)$$

gelten muss. In [Sch02, Cor. 5.3.6] wird nachgewiesen, dass für so erzeugte Abbildungen \mathbf{g} die zu den Randstrahlen gehörenden Basisfunktionen stetig zusammengesetzt werden können. Dort werden auch Konstruktionsmethoden für die Richtungen der Strahlen vorgestellt, sodass für N_{Seg} Segmente auch eine Menge $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{N_{\text{Seg}}}\}$ von Konstanten existiert, die den Bedingungen (5.59) genügen. Eine genauere Untersuchung, für welche Gebiete solche Strahlen konstruiert werden können und wie diese dann optimiert werden können, findet sich in [Ket07].

| | |
|---------------------------------|--|
| $\int_0^\infty f(r)g(r)dr$ | $-2i\kappa_0\mathcal{Q}((\mathcal{ML})(f), (\mathcal{ML})(g))$ |
| f | $(\mathcal{ML})(f) = \frac{1}{i\kappa_0} \mathcal{T}_-(f_0, F)$ |
| f' | $(\mathcal{ML})(f') = \mathcal{T}_+(f_0, F)$ |
| $(\bullet + c)f$ | $(\mathcal{ML})\{(\bullet + c)f\} = D_c\{(\mathcal{ML})(f)\}$ |
| $\frac{1}{\bullet + c}f, c > 0$ | $(\mathcal{ML})\left\{\frac{f}{\bullet + c}\right\} = D_c^{-1}\{(\mathcal{ML})(f)\}$ |

Tabelle 5.1.: Transformationen der **HSIEM**, siehe Lemma 5.3, (5.6), (5.10) und (5.53b) bzw. den diskretisierten Operatoren (5.47) und (5.55)

Da die Helmholtz-Gleichung translations- und rotationsinvariant ist, reicht es zur Berechnung von Elementmatrizen $A^{(\text{Seg})}$ und $B^{(\text{Seg})}$ aus, ein Element mit $\mathbf{P}_1 = (0, 0)$ und $\mathbf{P}_2 = (0, h)$ mit $h > 0$ zu betrachten. Dann gelten $\mathbf{e}_1 = (\cos \alpha_1, -\sin \alpha_1)$ und $\mathbf{e}_2 = (\cos \alpha_2, \sin \alpha_2)$ und mit den Abkürzungen $a_1 = \tan \alpha_1$ und $a_2 = \tan \alpha_2$ folgt für die Jacobi-Matrix \mathbf{g}' (siehe [ZKSS06, eq. (25)])

$$\mathbf{g}'(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\zeta} & 0 \\ \frac{\eta-1}{\zeta}a_1 + \frac{\eta}{\zeta}a_2 & 1 + \frac{\xi}{h\zeta}(a_1 + a_2) \end{pmatrix},$$

$$|\mathbf{g}'(\xi, \eta)| := \det \mathbf{g}'(\xi, \eta) = \frac{h\zeta + \xi(a_1 + a_2)}{\zeta^2} \quad \text{und}$$

$$G(\xi, \eta) := |\mathbf{g}'(\xi, \eta)| \mathbf{g}'(\xi, \eta)^{-T} \mathbf{g}'(\xi, \eta)^{-1} = \begin{pmatrix} h\zeta + \xi(a_1 + a_2) & a_1 - \eta(a_1 + a_2) \\ a_1 - \eta(a_1 + a_2) & \frac{(a_1 - \eta(a_1 + a_2))^2 + 1}{h\zeta + \xi(a_1 + a_2)} \end{pmatrix}.$$

Formal folgt aus der Substitutionsregel

$$\int_{\text{Seg}} \nabla_{xy} f_1 \cdot \nabla_{xy} f_2 \, d(x, y) = \int_{S_0} \mathbf{g}'^{-1}(\nabla_{\xi\eta} f_1 \circ \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}'^{-1}(\nabla_{\xi\eta} f_2 \circ \mathbf{g}) |\mathbf{g}'| \, d(\xi, \eta),$$

$$\int_{\text{Seg}} f_1 f_2 \, d(x, y) = \int_{S_0} f_1 \circ \mathbf{g} \, f_2 \circ \mathbf{g} |\mathbf{g}'| \, d(\xi, \eta)$$

die Darstellung der Integrale über das Segment Seg in Abhängigkeit von (ξ, η)

$$\int_{\text{Seg}} \nabla_{xy} f_1 \cdot \nabla_{xy} f_2 \, d(x, y) = \int_0^\infty \int_0^1 (G(\xi, \eta) \nabla_{\xi\eta} f_1(\mathbf{g}(\xi, \eta))) \cdot \nabla_{\xi\eta} f_2(\mathbf{g}(\xi, \eta)) \, d\eta d\xi,$$

$$\int_{\text{Seg}} f_1 f_2 \, d(x, y) = \int_0^\infty \int_0^1 \frac{h\zeta + \xi(a_1 + a_2)}{\zeta^2} f_1(\mathbf{g}(\xi, \eta)) \, f_2(\mathbf{g}(\xi, \eta)) \, d\eta d\xi. \quad (5.60)$$

Die auftretenden unendlichen Integrale in radialer Richtung können mit Tabelle 5.1 in den Hardy-Raum $H^+(S^1)$ transformiert werden. Hierbei ist zu beachten, dass ähnlich

wie in Abschnitt 5.1 geeignete Testfunktionen verwendet werden müssen, damit die Integrale überhaupt existieren. Mit Hilfe des Dichtheitslemmas 5.5 liegen die Bilder dieser Testfunktionen im Hardy-Raum $H^+(S^1)$ dicht und wir erhalten ein Finites Element der Form:

1. $T := \overline{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2} \times S^1$,
2. $P_T := (\mathbb{C} \times \Pi_{N_r}) \otimes X_{\text{int}}^{(h)}|_{\overline{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}}$ mit $\dim P_T = (N_r + 2)N_{\overline{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}}$
3. und den nodalen Basisfunktionen

$$b_{j,n}^{(\text{Seg})} := b_j^{(N_r)} \otimes b_n^{(\overline{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2})}, \quad j = -1, \dots, N_r, \quad n = 1, \dots, N_{\overline{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}}, \quad (5.61)$$

mit $b_j^{(N_r)}$ aus (5.45) und den Einschränkungen $b_n^{(\overline{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2})}$ der auf $\overline{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}$ nicht verschwindenden Basisfunktionen aus $X_{\text{int}}^{(h)}$.

Die Elementmatrizen ergeben sich nun als Tensorprodukte aus den Elementmatrizen bezüglich η und denen bezüglich ξ . Erstere können direkt auf dem Intervall $[0, 1]$ berechnet werden und sind für lineare FE in [ZKSS06] angegeben. Letztere können mit der Tabelle 5.1 im Hardy-Raum $H^+(S^1)$ assembliert werden.

Bemerkung 5.12. Sowohl das eindimensionale Hardy-Raum Infinite Element (5.48) als auch das eben dargestellte mehrdimensionale Hardy-Raum Infinite Element und das sphärische aus (5.52) sind linear in κ^2 und lassen sich deshalb sowohl für Streuprobleme als auch für das Resonanzproblem (3.49) verwenden.

5.3. Konvergenz der HSIEM

Im diesem Abschnitt werden die bisher vorhandenen Konvergenzaussagen zur HSIEM zusammengestellt. Im eindimensionalen Fall kann eine exponentielle Konvergenz bezüglich der Anzahl der Freiheitsgrade im Hardy-Raum für das Streuproblem (5.1) nachgewiesen werden. In höheren Dimensionen ist eine super-algebraische Konvergenz des Streuproblems (3.1) zu erwarten, wie eine Konvergenzanalyse des separierten Problems zeigt.

Offen bleibt die Frage der Konvergenz des Resonanzproblems (3.49). Die Methoden aus Abschnitt 2.5, insbesondere Satz 2.33, sind nicht anwendbar. Zum einen verwenden wir im Gegensatz zu Satz 2.33 Bilinearformen (vergleiche Bemerkung 5.2). Diesen kann zwar eine Sesquilinearform zugeordnet werden (siehe (5.67) für den eindimensionalen Fall), die zugeordnete Sesquilinearform ist jedoch nicht hermitesch und Satz 2.33 ist nach Bemerkung 2.34 nicht mehr anwendbar.

5.3.1. Eindimensionales Problem

In diesem Unterabschnitt soll die Konvergenz der Galerkin-Methode zur Lösung des Streuproblems (5.1) untersucht werden. Betrachten wir dazu zunächst die im eindimensionalen Fall bekannte Lösung u_{ext} des Streuproblems (5.1) bzw. die transformierten Funktionen $\hat{U}, U \in H^+(S^1)$ aus (5.3) und (5.6).

5. Hardy-Raum Infinite Elemente Methode

Lemma 5.13. Sei $\Re\left(\frac{\kappa}{\kappa_0}\right) > 0$. Dann sind die Fourier-Koeffizienten von \hat{U} bzw. U aus (5.3) bzw. (5.6) gegeben durch

$$(\hat{U}, z^j)_{L^2(S^1)} = \frac{u_0}{i(a\kappa + \kappa_0)} \left(\frac{a\kappa - \kappa_0}{a\kappa + \kappa_0}\right)^j \quad \text{bzw.} \quad (U, z^j)_{L^2(S^1)} = u_0 \left(\frac{a\kappa - \kappa_0}{a\kappa + \kappa_0}\right)^{j+1} \quad (5.62)$$

und konvergieren exponentiell in j gegen 0. Seien weiter $P_{N_r} : H^+(S^1) \rightarrow \Pi_{N_r}$ die orthogonalen Projektionen auf die ersten $N_r + 1$ Fourier-Koeffizienten. Dann gilt für den Approximationsfehler

$$\inf_{V \in \Pi_{N_r}} \|V - U\|_{L^2(S^1)} \leq C_1 e^{-C_2 N_r}, \quad C_1, C_2 > 0. \quad (5.63)$$

Beweis. Eine Reihenentwicklung von \hat{U} ergibt

$$\hat{U}(z) = \frac{u_0}{i(a\kappa + \kappa_0)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a\kappa - \kappa_0}{a\kappa + \kappa_0}\right)^j z^j, \quad |z| \leq 1, \quad (5.64)$$

sofern $|a\kappa + \kappa_0| > |a\kappa - \kappa_0|$ oder äquivalent $\Re\left(\frac{\kappa}{\kappa_0}\right) > 0$. Der Fall $a\kappa = -\kappa_0$ kann wegen $\Re(\kappa), \Re(\kappa_0) > 0$ und $a > 0$ ausgeschlossen werden. Damit ist der erste Teil des Lemmas für \hat{U} und analog für U bewiesen. Für den zweiten Teil gilt mit $d = \frac{a\kappa - \kappa_0}{a\kappa + \kappa_0}$

$$\inf_{V \in \Pi_{N_r}} \|V - U\|_{L^2(S^1)}^2 = \|P_{N_r} U - U\|_{L^2(S^1)}^2 = |u_0|^2 \sum_{j=N_r+1}^{\infty} |d|^{2j} = |u_0|^2 \frac{|d|^{2(N_r+1)}}{1 - |d|^2},$$

und die Behauptung ist gezeigt. \square

Damit konvergiert die Hardy-Raum Infinite Elemente Methode exponentiell, wenn nur die Voraussetzungen aus dem Céa Lemma 2.22 erfüllt sind, d.h. wenn die Bilinearform $A - \kappa^2 B$ aus (5.12) X -koerzitiv und die Konstante in der Babuška-Brezzi Bedingung (2.27) positiv ist. Die Definition der X -Koerzitivität 2.6 und auch das Céa Lemma beziehen sich jedoch auf Sesquilinearformen (vergleiche Bemerkung 5.2).

Der interne Anteil $A_{\text{int}} - \kappa^2 B_{\text{int}}$ von $A - \kappa^2 B$ mit $A_{\text{int}}, B_{\text{int}}$ aus (5.42) ist nach Bemerkung 2.9 $H^1([0, a])$ -koerzitiv, wenn nur g durch \bar{g} ersetzt wird. Dies ist auch ohne Weiteres möglich, da mit g auch \bar{g} in $H^1([0, a])$ liegt. Beim externen Anteil müssen wir zunächst eine geeignete Konjugation definieren, da für $G \in H^+(S^1)$ die üblicherweise verwendete konjugierte Funktion \overline{G} in $H^-(S^1)$ liegt.

Eine geeignete Konjugation $\mathcal{C} : H^+(S^1) \rightarrow H^+(S^1)$ ist, wie sich leicht mit Lemma 4.4(iv) nachrechnen lässt, durch

$$(\mathcal{C}F)(z) := \overline{F(\bar{z})}, \quad F \in H^+(S^1) \quad (5.65)$$

gegeben, und es gilt

$$\mathbb{Q}(F, \mathcal{C}G) = \frac{1}{2\pi} (F, G)_{L^2(S^1)}, \quad F, G \in H^+(S^1).$$

Sei weiter auf X durch

$$\left(\begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ G \end{pmatrix} \right)_X := (f, g)_{H^1([0,a])} + (F, G)_{L^2(S^1)}, \quad \begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ G \end{pmatrix} \in X, \quad (5.66)$$

ein Skalarprodukt mit zugehöriger Norm $\|\bullet\|_X := \sqrt{(\bullet, \bullet)_X}$ definiert.

Satz 5.14. *Seien $\Re\left(\frac{\kappa^2}{\kappa_0}\right)$ und $\Re(\kappa_0)$ positiv. Dann ist die Sesquilinearform*

$$S\left(\begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ G \end{pmatrix}\right) := A\left(\begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \mathcal{C}G \end{pmatrix}\right) - \kappa^2 B\left(\begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{g} \\ \mathcal{C}G \end{pmatrix}\right) \quad (5.67)$$

X -koerzitiv, d.h. sie ist stetig auf $X \times X$ und es existieren Konstanten $\alpha, \beta > 0$ und $\gamma \geq 0$, sodass

$$\Re\left\{(i + \beta)S\left(\begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}\right)\right\} + \gamma\|f\|_{L^2([0,a])}^2 \geq \alpha\left\|\begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}\right\|_X^2. \quad (5.68)$$

Beweis. Mit der Definition (5.13) der Bilinearformen A und B gilt

$$\begin{aligned} S\left(\begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}\right) &= \|f\|_{H^1([0,a])}^2 - \int_0^a (1 + \kappa^2 p)|f|^2 dr \\ &\quad - \frac{i\kappa_0}{4\pi a}\|f(a) + (\bullet + 1)F\|_{L^2(S^1)}^2 - \kappa^2 \frac{ai}{4\pi\kappa_0}\|f(a) + (\bullet - 1)F\|_{L^2(S^1)}^2. \end{aligned}$$

Sei nun $\beta > 0$ so gewählt, dass sowohl $\Re\{(1 - \beta i)\kappa_0\}$ als auch $\Re\{(1 - \beta i)\kappa^2/\kappa_0\} > 0$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} \Re\left\{(i + \beta)S\left(\begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}\right)\right\} &\geq \beta\|f\|_{H^1([0,a])}^2 - \gamma\|f\|_{L^2([0,a])}^2 \\ + \Re\left\{\frac{(1 - \beta i)\kappa_0}{4\pi a}\right\}\|f(a) + (\bullet + 1)F\|_{L^2(S^1)}^2 &+ \Re\left\{\frac{a(1 - \beta i)\kappa^2}{4\pi\kappa_0}\right\}\|f(a) + (\bullet - 1)F\|_{L^2(S^1)}^2 \end{aligned}$$

mit $\gamma := \min\{0, \Re\{(i + \beta)(1 + \kappa^2\|p\|_{L^\infty([0,a])})\}\}$. Mit der Ungleichung $\|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \frac{1}{2}\|x - y\|^2$ für $x := f(a) + (\bullet + 1)F$ und $y := f(a) + (\bullet - 1)F$ folgt dann die Behauptung mit

$$\alpha := \min\left\{\beta, \Re\left\{\frac{(1 - \beta i)\kappa_0}{2\pi a}\right\}, \Re\left\{\frac{a(1 - \beta i)\kappa^2}{2\pi\kappa_0}\right\}\right\} > 0.$$

□

Im Falle $\gamma = 0$ ist S sogar X -elliptisch, und die Voraussetzungen für das Céa Lemma 2.22 sind erfüllt. Falls $\gamma > 0$ sind die Voraussetzungen mit Satz 2.19 und dem Äquivalenzsatz 5.4 genau dann erfüllt, wenn das Problem (5.1) für alle $l \in \mathbb{C}$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Bemerkung 5.15. In Korollar 3.23(i) wurde für $d = 2, 3$ nachgewiesen, dass das Streuproblem (3.1) genau dann eindeutig lösbar ist, wenn κ keine Resonanz des zugehörigen Eigenwertproblems (3.49) ist. Diese Aussage bleibt auch für den hier betrachteten eindimensionalen Fall bezüglich des Streuproblems (5.1) und des Eigenwertproblems (5.2) bestehen. Dazu muss lediglich das in der Definition (3.50) des Operators S auftauchende Integral

$$\int_{\Gamma_a} \text{Dt}N_\kappa (f|_{\Gamma_a}) \overline{g|_{\Gamma_a}} d\hat{\mathbf{x}}$$

durch den Term $i\kappa f(a)\overline{g(a)}$ ersetzt werden. Die nachfolgende Theorie bleibt gültig, wobei auf die Sonderbehandlung der Nullstellen der Hankel-Funktionen verzichtet werden kann.

Mit der letzten Bemerkung, Lemma 5.13 und Satz 5.14 folgt die Konvergenz der HSIEM für das Streuproblem (5.1).

Satz 5.16. Seien $\Re(\kappa)$, $\Re(\kappa_0)$, $\Re\left(\frac{\kappa}{\kappa_0}\right)$ und $\Re\left(\frac{\kappa^2}{\kappa_0}\right)$ positiv, κ keine Resonanz von (5.2), u die eindeutige Lösung von (5.1) und $u_{\text{int}} := u|_{[0,a]}$. Dann existieren h_0 und $N_{r,0}$, sodass das diskrete Variationsproblem (5.38) für alle $h \leq h_0$ und $N_r \geq N_{r,0}$ eine eindeutige Lösung $(u_{\text{int}}^{(h)}, U^{(N_r)})^\top$ aus X_N besitzt.

Zudem existieren unter den Voraussetzungen von Satz 2.23 Konstanten $C_1, C_2, C_3 > 0$ mit

$$\left\| u_{\text{int}}^{(h)} - u_{\text{int}} \right\|_{H^1([0,a])} \leq C_1 h^k \|u_{\text{int}}\|_{H^{k+1}([0,a])} + C_2 e^{-C_3 N_r} |u_{\text{int}}(a)|. \quad (5.69)$$

5.3.2. Separiertes Problem

Im letzten Abschnitt sicherte die Gårding-Ungleichung aus Satz 5.14 die Stabilität der Galerkin-Methode und das exponentielle Abfallverhalten der Fourier-Koeffizienten von U aus Lemma 5.13 garantierte die exponentielle Konvergenz in Bezug auf die Anzahl der Freiheitsgrade $N_r + 1$ in $H^+(S^1)$. Zumindest letzteres können wir mit kleinen Abstrichen für $d = 2, 3$ hinüberretten.

Lemma 5.17. Seien U wie in (5.21), $\hat{\mathbf{x}} \in \Gamma_a$ und a hinreichend groß. Dann konvergieren die Fourier-Koeffizienten $(U(\bullet, \hat{\mathbf{x}}), (\bullet)^j)_{L^2(S^1)}$, $j \in \mathbb{N}_0$, super-algebraisch gegen 0, d.h. für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $C_k > 0$ mit

$$\left| (U(\bullet, \hat{\mathbf{x}}), (\bullet)^j)_{L^2(S^1)} \right| \leq C_k \left(\frac{1}{1+j} \right)^k. \quad (5.70)$$

Beweis. Aus Lemma 5.6 folgt $U(\bullet, \hat{\mathbf{x}}) \in C^\infty(S^1) \subset H^k(S^1)$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Analog zu (3.24) gilt

$$\|U(\bullet, \hat{\mathbf{x}})\|_{H^k(S^1)}^2 \sim \sum_{j=0}^{\infty} (1+j)^{2k} \left| (U(\bullet, \hat{\mathbf{x}}), (\bullet)^j)_{L^2(S^1)} \right|^2 < \infty. \quad (5.71)$$

Folglich kann $(1+j)^{2k} \left| (U(\bullet, \hat{\mathbf{x}}), (\bullet)^j)_{L^2(S^1)} \right|^2$ durch eine Konstante C_k^2 beschränkt werden, und die Behauptung ist gezeigt. \square

Dieses Lemma ist ein erster Schritt zur Konvergenzanalyse der in Abschnitt 5.2.3 beschriebenen Galerkin-Methode zur Lösung des Variationsproblems (5.35) auf dem Raum X aus Lemma 5.7. Eine vollständige Abschätzung des Approximationsfehlers in X sowie eine Art Gårding-Ungleichung konnte bisher nicht nachgewiesen werden.

Als Indiz für eine super-algebraische Konvergenz des Verfahrens dient die in diesem Abschnitt vorgestellte Konvergenztheorie bezüglich der bereits in den Abschnitten 3.1.2 und 4.1.1 verwendeten separierten Probleme. Sei dazu u eine Lösung von (3.1) mit $K = B_a$ und U die zugehörige transformierte Funktion aus (5.21). Wir zerlegen U in seine Fourier-Koeffizienten

$$U(z, \hat{\mathbf{x}}) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(z) \Phi_n(\hat{\mathbf{x}}) \quad (5.72)$$

mit den paarweise orthogonalen Eigenfunktionen Φ_n des Laplace-Beltrami-Operators $\Delta_{\hat{\mathbf{x}}}$ aus Lemma 3.4. Ebenso kann die Randfunktion $u_0 := u|_{\Gamma_a}$ und die Neumannsche Randfunktion l auf Γ_a zerlegt werden in

$$u_0(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{0,n} \Phi_n(\hat{\mathbf{x}}) \quad \text{und} \quad l(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n \Phi_n(\hat{\mathbf{x}}), \quad (5.73)$$

und das Variationsproblem

$$A_{\text{ext}} \left(\begin{pmatrix} u_0 \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ V \end{pmatrix} \right) - \kappa^2 B_{\text{ext}} \left(\begin{pmatrix} u_0 \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ V \end{pmatrix} \right) = - \int_{\Gamma_a} l v_0 ds \quad (5.74)$$

mit $A_{\text{ext}}, B_{\text{ext}}$ aus (5.43) zerfällt in die eindimensionalen, separierten Probleme

$$A_1 \left(\begin{pmatrix} u_{0,n} \\ U_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{0,n} \\ V_n \end{pmatrix} \right) + \frac{C_d + a^2 \lambda_n}{\kappa_0^2 a} A_2 \left(\begin{pmatrix} u_{0,n} \\ U_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{0,n} \\ V_n \end{pmatrix} \right) = -l_n v_{0,n} \quad (5.75)$$

mit $(u_{0,n}, U_n)^\top, (v_{0,n}, V_n)^\top \in X := \mathbb{C} \times H^+(S^1)$ und

$$\begin{aligned} A_1 \left(\begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right) &:= \frac{d-1}{2a} f_0 g_0 - \frac{2i\kappa_0}{a} \mathcal{Q} \left(\mathcal{T}_+ \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \mathcal{T}_+ \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right) \\ &\quad - \frac{2ai\kappa^2}{\kappa_0} \mathcal{Q} \left(\mathcal{T}_- \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right), \\ A_2 \left(\begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right) &:= -2i\kappa_0 \mathcal{Q} \left(\mathcal{J} \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \mathcal{J} \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right), \quad \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \in X. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Mit dem üblichen Innenprodukt

$$\left(\begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right)_X := f_0 \overline{g_0} + (F, G)_{L^2(S^1)}$$

5. Hardy-Raum Infinite Elemente Methode

und der Konjugation \mathcal{C} aus (5.65) definieren wir die den Bilinearformen A_1, A_2 zugeordneten Operatoren implizit durch

$$\left(K_j \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right)_X = A_j \left(\begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{g_0} \\ \mathcal{C}G \end{pmatrix} \right), \quad j = 1, 2, \quad (5.77)$$

und erhalten die zu (5.75) äquivalenten Operatorgleichungen

$$K_1 \begin{pmatrix} u_{0,n} \\ U_n \end{pmatrix} + \frac{C_d + a^2 \lambda_n}{\kappa_0^2 a} K_2 \begin{pmatrix} u_{0,n} \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.78)$$

Bemerkung 5.18. Die Bilinearform A_1 ist bis auf den Term $\frac{d-1}{2a} f_0 g_0$ identisch mit der Bilinearform $A_{\text{ext}} - \kappa^2 B_{\text{ext}}$ aus (5.41), und aus dem Beweis von Satz 5.14 folgt, dass $(i + \beta)A_1$ X -elliptisch ist. Somit ist K_1 auf X stetig und stetig invertierbar.

Lemma 5.19. Der Operator K_2 ist auf X kompakt.

Beweis. $K_2 : X \rightarrow X$ ist mit

$$K_2 = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots \\ k_{21} & & K_3 \\ \vdots & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots \\ k_{21} & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ 0 & & K_3 \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

kompakt, wenn der implizit durch

$$(K_3 F, G)_{H^+(S^1)} = -\frac{i\kappa_0}{4\pi} \int_{S^1} (\bar{z} - 1) J^2(z - 1) F(z) \overline{G(z)} |dz|$$

definierte Operator $K_3 : H^+(S^1) \rightarrow H^+(S^1)$ kompakt ist, da der erste Operator Rang 2 hat und somit kompakt ist. Die Darstellung von K_3 folgt aus der am Ende des Abschnittes 5.2.3 gezeigten Symmetrie von J . Da $F \mapsto J((\bullet - 1)F)$ mit Bemerkung 4.11 und die orthogonale Projektion $P : L^2(S^1) \rightarrow H^+(S^1)$ stetig sind, reicht es, die Kompaktheit von $\tilde{K}_4 : H^+(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$ mit $(\tilde{K}_4 F)(z) := (\bar{z} - 1)(JF)(z)$ zu zeigen. Mit Hilfe der Möbius-Transformation ist diese äquivalent zu der Kompaktheit von $\check{K}_4 : H^-(\kappa_0 \mathbb{R}) \rightarrow L^2(\kappa_0 \mathbb{R})$ mit $(\check{K}_4 f)(s) := \frac{2i\kappa_0}{s+i\kappa_0} (\hat{J} f)(s)$.

Wenn analog zu (5.53a) für $f \in H^-(\kappa_0 \mathbb{R})$ und $\tilde{f} := f(\kappa_0 \bullet) \in H^-(\mathbb{R})$ der Operator $\hat{J}_{\kappa_0} : H^-(\mathbb{R}) \rightarrow H^-(\mathbb{R})$ durch

$$\left(\hat{J}_{\kappa_0} \tilde{f} \right) (s) := \frac{1}{\kappa_0} \left(\hat{J} f \right) (\kappa_0 s) = \int_s^\infty e^{\kappa_0(s-\sigma)} \tilde{f}(\sigma) d\sigma, \quad s, \sigma \in \mathbb{R}, \quad (5.79)$$

definiert wird, ist \check{K}_4 genau dann kompakt, wenn $K_4 : H^-(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ mit

$$(K_4 \tilde{f})(s) := (\check{K}_4 f)(\kappa_0 s) = \frac{2i\kappa_0}{s+i} \left(\hat{J}_{\kappa_0} \tilde{f} \right) (s) \quad (5.80)$$

kompakt ist.

Dazu zeigen wir zunächst die folgenden Ungleichungen mit $f \in H^-(\mathbb{R})$, $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ und Konstanten $C > 0$ unabhängig von f, s, s_1, s_2 :

$$\|\widehat{J}_{\kappa_0} f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (5.81a)$$

$$|(K_4 f)(s)| \leq \frac{C}{|s+i|} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (5.81b)$$

$$|(K_4 f)(s_1) - (K_4 f)(s_2)| \leq C \sqrt{|s_1 - s_2|} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (5.81c)$$

Die erste Ungleichung folgt analog zu Bemerkung 4.11. Für die dritte Ungleichung sei o.B.d.A. $s_2 > s_1$, und es gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{(\widehat{J}_{\kappa_0} f)(s_1)}{s_1+i} - \frac{(\widehat{J}_{\kappa_0} f)(s_2)}{s_2+i} \right| &\leq \left| \int_{s_1}^{s_2} \frac{e^{\kappa_0(s_1-\sigma)}}{s_1+i} f(\sigma) d\sigma \right| \\ &\quad + \left| \int_{s_2}^{\infty} \left(\frac{e^{\kappa_0(s_1-\sigma)}}{s_1+i} - \frac{e^{\kappa_0(s_2-\sigma)}}{s_2+i} \right) f(\sigma) d\sigma \right|. \end{aligned}$$

Das erste Integral wird mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung abgeschätzt:

$$|I_1| \leq \sqrt{s_2 - s_1} \sup_{\xi \in [s_1, s_2]} \left| \frac{e^{\kappa_0(s_1-\xi)}}{s_1+i} \right| \left(\int_{s_1}^{s_2} |f(\sigma)|^2 d\sigma \right)^{1/2} \leq C \sqrt{|s_1 - s_2|} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Die Konstante ist unabhängig von s_1 , da $s_1 - \xi \leq 0$, $\Re(\kappa_0) > 0$ und $|s_1 + i| \geq \epsilon > 0$ gilt. Für das zweite Integral definieren wir

$$g(s, \sigma) := \frac{e^{\kappa_0(s-\sigma)}}{s+i} \quad \text{mit} \quad g_s(s, \sigma) := \partial_s g(s, \sigma) = e^{\kappa_0(s-\sigma)} \left(\frac{\kappa_0}{s+i} - \frac{1}{(s+i)^2} \right), \quad (5.82)$$

und es gilt mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$|I_2| \leq \left(\int_{s_2}^{\infty} |g(s_1, \sigma) - g(s_2, \sigma)|^2 d\sigma \right)^{1/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (5.83)$$

Mit dem Mittelwertsatz kann der Integrand abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} \frac{|g(s_1, \sigma) - g(s_2, \sigma)|}{|s_2 - s_1|} &\leq C \sup_{t \in (0,1)} |e^{\kappa_0(s_1+t(s_2-s_1)-\sigma)}| = C \sup_{t \in (0,1)} |e^{\kappa_0(t-1)(s_2-s_1)}| |e^{\kappa_0(s_2-\sigma)}| \\ &\leq C |e^{\kappa_0(s_2-\sigma)}| \end{aligned}$$

und (5.81c) folgt mit

$$\int_{s_2}^{\infty} |e^{\kappa_0(s_2-\sigma)}|^2 d\sigma = \int_0^{\infty} |e^{-\kappa_0 t}|^2 dt < \infty.$$

(5.81b) kann analog bewiesen werden.

Mit diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage, die Kompaktheit von K_4 mit Hilfe des Satzes von Arzela-Ascoli (siehe [Kre99, Theorem 1.18]) zu zeigen. Sei dafür $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $H^-(\mathbb{R})$ mit $\|g_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_n := K_4 g_n$

5. Hardy-Raum Infinite Elemente Methode

die Bildfolge. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli existiert eine Teilfolge von (f_n) , die in der Supremumsnorm auf einer kompakten Teilmenge I von \mathbb{R} konvergiert, da (f_n) auf I gleichgradig stetig und beschränkt ist nach (5.81b) und (5.81c).

Seien $I_j := [-j, j] \subset \mathbb{R}$, $f_{n_0(l)} := f_l$ und für alle $j \in \mathbb{N}$ $(f_{n_j(l)})$ eine Teilfolge von $(f_{n_{j-1}(l)})$, die in der Supremumsnorm von I_j konvergiert. Dann konvergiert die Diagonalfolge $f_{n(l)} := f_{n_l(l)}$ punktweise in \mathbb{R} und gleichmäßig auf I_j gegen eine Funktion F . Bleibt für $\epsilon > 0$ zu zeigen, dass eine Konstante $l_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|f_{n(l)} - f\|_{L^2(\mathbb{R})} < \epsilon, \quad l \geq l_0.$$

Dies ist eine Konsequenz von (5.81b), da ein $j_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\int_{\mathbb{R} \setminus I_{j_0}} |f_{n(l)}(s) - f(s)|^2 ds \leq 2C \int_{\mathbb{R} \setminus I_{j_0}} \frac{1}{|s+i|^2} ds \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Da $(f_{n(l)})$ auf I_{j_0} gleichmäßig konvergiert, existiert eine in $L^2(\mathbb{R})$ konvergente Teilfolge $(f_{n(l)})$ der Bildfolge $f_n = K_4 g_n$. Daher ist K_4 kompakt. \square

Damit ist die Riesz-Fredholm Theorie auf $K_1 + \frac{C_d + a^2 \lambda_n}{\kappa_0^2 a} K_2$ anwendbar. Wenn wir die Eindeutigkeit einer Lösung von (5.78) nachweisen können, folgt somit Existenz und Stabilität dieser Lösung.

Motiviert durch das Paley-Wiener Theorem 4.6 sei dazu

$$\left(\mathcal{W} \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix} \right) (t) := \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} \left(\mathcal{M}^{-1} \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix} \right) (\kappa_0 s) ds, \quad t \geq 0, \quad (5.84)$$

eine Abbildung von X nach $L^2(\mathbb{R}_+)$, die sich aus $\mathcal{T}_- : \mathbb{C} \times H^+(S^1) \rightarrow H^+(S^1)$, der inversen Möbius-Transformation $\mathcal{M}^{-1} : H^+(S^1) \rightarrow H^-(\kappa_0 \mathbb{R})$ und der inversen Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{-1} : H^-(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ zusammensetzt.

Lemma 5.20. \mathcal{W} ist ein Normisomorphismus von X nach $H^1(\mathbb{R}_+)$, und für $f := \mathcal{W}(f_0, F)^\top$ gilt $f(0) = f_0$ und

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} \left(\mathcal{M}^{-1} \mathcal{T}_+ \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix} \right) (\kappa_0 s) ds, \quad t \geq 0. \quad (5.85)$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass der Bildbereich $\mathcal{W}(X)$ in $H^1(\mathbb{R}_+)$ enthalten ist. Mit dem Paley-Wiener Theorem 4.6 gilt $f(t) = 0$ für $t < 0$, wenn wir obige Definition von \mathcal{W} auch für $t < 0$ verwenden. Dann ist $f \in H^1(\mathbb{R}^+)$, falls $w(t) := f(t) + f(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, in $H^1(\mathbb{R})$ liegt.

Sei dazu $\tilde{f} := (i\kappa_0)^{-1} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{T}_-(f_0, F)^\top$. Es gilt

$$\tilde{f}(\kappa_0 s) = (-i\kappa_0)^{-1} (\mathcal{F}f)(s) \quad (5.86)$$

und $-i\kappa_0 (\mathcal{F}w)(s) = \tilde{f}(\kappa_0 s) + \tilde{f}(-\kappa_0 s)$. Mit (5.10) und der Definition (5.5) von \mathcal{T}_+ liegt $\bullet \tilde{f} - f_0 = \mathcal{M}^{-1} \mathcal{T}_+(f_0, F)^\top$ in $H^-(\kappa_0 \mathbb{R})$, und die Funktion

$$-i\kappa_0^2 s (\mathcal{F}w)(s) = \left(\kappa_0 s \tilde{f}(\kappa_0 s) - f_0 \right) - \left(-\kappa_0 s \tilde{f}(-\kappa_0 s) - f_0 \right), \quad s \in \mathbb{R},$$

liegt in $L^2(\mathbb{R})$. Somit ist $\int_{-\infty}^{\infty} (1+s^2)|(\mathcal{F}w)(s)|^2 ds < \infty$, und $w \in H^1(\mathbb{R})$ folgt mit [McL00, Theorem 3.16].

Zum Beweis des letzten Teiles der Satzes stellen wir zunächst fest, dass mit dem Plancherel-Theorem A.2 die Funktion

$$\int_0^{\infty} e^{-ist} f'(t) dt = -f(0) + is \int_0^{\infty} e^{-ist} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (5.87)$$

zu $L^2(\mathbb{R})$ gehört, da wie bereits gesehen $f' \in L^2(\mathbb{R}_+)$ gilt. Da

$$\bullet \tilde{f} - f_0 = \mathcal{M}^{-1} \mathcal{T}_+(f_0, F)^\top \in L^2(\kappa_0 \mathbb{R}),$$

folgt mit (5.86), dass die konstante Funktion $f(0) - f_0$ ebenfalls in $L^2(\mathbb{R})$ liegt und somit 0 ist, und (5.85) ergibt sich direkt aus (5.87).

\mathcal{W} ist als Komposition von injektiven, stetigen Operatoren injektiv und stetig und es bleibt nur noch, die Surjektivität zu zeigen. Sei dafür $g \in H^1(\mathbb{R}^+)$ beliebig und $g(-t) = 0$ für $t > 0$. Dann ist mit Theorem 4.6 $\mathcal{F}g \in H^-(\mathbb{R})$ und

$$\widehat{G} := (-i\kappa_0)^{-1} \mathcal{M}(\mathcal{F}g)(\kappa_0^{-1} \bullet) \in H^+(S^1).$$

Ebenfalls zu $H^+(S^1)$ gehört

$$\{\mathcal{M}(\mathcal{F}g')(\kappa_0^{-1} \bullet)\}(z) = i\kappa_0 \widehat{G}(z) + \frac{2i\kappa_0 \widehat{G}(z) - g_0}{z-1}$$

mit $g_0 := g(0)$ und somit auch $G(z) := \frac{2i\kappa_0 \widehat{G}(z) - g_0}{z-1}$. Damit ist $\mathcal{W}(g_0, G)^\top = g$ und die Behauptung ist gezeigt. \square

Satz 5.21. *Seien $\Re(\kappa/\kappa_0) > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Wenn $\mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)'}(a\kappa) \neq 0$ gilt, dann besitzt (5.78) eine eindeutige Lösung $(u_{0,n}, U_n)^\top \in X$ und*

$$u_{0,n} = \frac{\mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)}(\kappa a)}{\kappa \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)'}(\kappa a)} l_n. \quad (5.88)$$

Wenn $\mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)'}(a\kappa) = 0$ gilt, so besitzt (5.78) genau dann eine Lösung, wenn $l_n = 0$ ist.

Beweis. Wir untersuchen zunächst alle Terme der Bilinearformen A_1 und A_2 aus (5.76) einzeln und transformieren diese mit Lemma 5.3 in den Hardy-Raum $H^-(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} -\frac{2ai\kappa^2}{\kappa_0} \mathcal{Q} \left(\mathcal{T}_- \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right) &= \frac{-ai\kappa^2}{\pi\kappa_0} \int_{S^1} \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix} (z) \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} (\bar{z}) |dz| \\ &= \frac{-ai\kappa^2}{\pi\kappa_0} \frac{1}{2\kappa_0} \int_{\kappa_0 \mathbb{R}} \left(\mathcal{M}^{-1} \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix} \right) (s) \left(\mathcal{M}^{-1} \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right) (-s) ds \\ &= \frac{-ai\kappa^2}{2\pi\kappa_0} \int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{M}^{-1} \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix} \right) (\kappa_0 s) \left(\mathcal{M}^{-1} \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right) (-\kappa_0 s) ds. \end{aligned}$$

5. Hardy-Raum Infinite Elemente Methode

In der Notation von Lemma 5.20 ist

$$\tilde{f}(\kappa_0 s) = \frac{1}{i\kappa_0} \left(\mathcal{M}^{-1} \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix} \right) (\kappa_0 s) \quad \text{und} \quad \tilde{g}(\kappa_0 s) = \frac{1}{i\kappa_0} \left(\mathcal{M}^{-1} \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right) (\kappa_0 s).$$

Die Funktionen

$$f := \mathcal{W} \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g := \mathcal{W} \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix}$$

sind nach Lemma 5.20 in $H^1(\mathbb{R}_+)$, und A.3(iv) angewendet auf

$$\int_0^\infty f(r)g(r)dr = \mathcal{F}\{fg\}(0) = \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}\{f\} * \mathcal{F}\{g\})(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\{f\}(s)\mathcal{F}\{g\}(-s)ds$$

liefert mit (5.86)

$$-\frac{2ai\kappa^2}{\kappa_0} \mathcal{Q} \left(\mathcal{T}_- \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right) = -\frac{ai\kappa^2}{\kappa_0} \int_0^\infty f(r)g(r)dr.$$

Mit (5.85) ergibt sich vollständig analog

$$-\frac{2i\kappa_0}{a} \mathcal{Q} \left(\mathcal{T}_+ \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \mathcal{T}_+ \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right) = -\frac{i\kappa_0}{a} \int_0^\infty f'(r)g'(r)dr.$$

Bleibt noch der letzte Term in (5.76), wobei der dort auftauchende Integraloperator \mathcal{J} etwas mehr Mühe bereitet. Mit dem Operator $\hat{\mathcal{J}}_{\kappa_0}$ aus (5.79),

$$(\mathcal{F}^{-1}k)(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{-1}{\frac{ir}{\kappa_0} + 1} \quad \text{für} \quad k(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \kappa_0 e^{\kappa_0 t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

und A.3(iv) folgt

$$\mathcal{F}^{-1}\{(i\kappa_0)\tilde{f}(\kappa_0 \bullet) * k\}(r) = \frac{f(r)}{\frac{ir}{\kappa_0} + 1}, \quad \mathcal{F}^{-1}\{(i\kappa_0)\tilde{g}(\kappa_0 \bullet) * k\}(r) = \frac{g(r)}{\frac{ir}{\kappa_0} + 1}$$

und schließlich

$$-2i\kappa_0 \mathcal{Q} \left(\mathcal{J} \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \mathcal{J} \mathcal{T}_- \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right) = -i\kappa_0 \int_0^\infty \left(\frac{1}{\frac{ir}{\kappa_0} + 1} \right)^2 f(r)g(r)dr.$$

Zusammen löst $u_n := \mathcal{W}(u_{0,n}, U_n)^\top$ das Variationsproblem

$$\begin{aligned} & \frac{i}{a\kappa_0} \int_0^\infty \left(-\kappa_0^2 u_n'(r)v_n'(r) - (\kappa a)^2 u_n(r)v_n(r) - \frac{C_d + a^2 \lambda_n}{\left(\frac{ir}{\kappa_0} + 1\right)^2} u_n(r)v_n(r) \right) dr \\ & + \frac{d-1}{2a} u_n(0)v_n(0) = -l_n v_n(0), \quad v_n := \mathcal{W} \begin{pmatrix} v_{0,n} \\ V_n \end{pmatrix} \in H^1(\mathbb{R}^+). \end{aligned}$$

Zu beachten ist hierbei, dass nach Lemma 5.20 $u_n(0) = u_0$ und $v_n(0) = v_{0,n}$ gilt. Mit dem Regularitätssatz 2.10 folgt $u_n \in H^2(\mathbb{R}_+)$ und somit für v_n mit kompakten Träger

$$\int_0^\infty -u_n'(r)v_n'(r) = u_n'(0)v_n(0) + \int_0^\infty u_n''(r)v_n(r)dr.$$

Folglich ist u_n Lösung von

$$-\left(\frac{\kappa_0}{i}\right)^2 u_n''(t) - \left((a\kappa)^2 + \frac{C_d + a^2 \lambda_n}{\left(\frac{it}{\kappa_0} + 1\right)^2} \right) u_n(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad \hat{\mathbf{x}} \in \Gamma_a, \quad (5.89a)$$

$$u_n'(0) = \frac{i}{\kappa_0} \left(a l_n + \frac{d-1}{2} u_n(0) \right), \quad (5.89b)$$

$$u_n \in L^2(\mathbb{R}^+). \quad (5.89c)$$

Eine allgemeine Lösung von (5.89a) ist durch

$$u_n(r) = \left(\frac{ir}{\kappa_0} + 1 \right)^{(d-1)/2} \left(c_n^{(1)} \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)} \left(\kappa a \left(\frac{ir}{\kappa_0} + 1 \right) \right) + c_n^{(2)} \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(2)} \left(\kappa a \left(\frac{ir}{\kappa_0} + 1 \right) \right) \right) \quad (5.90)$$

gegeben. Mit Hilfe des asymptotischen Verhaltens der (sphärischen) Hankel-Funktionen (3.15c) folgt für $\Re(\kappa/\kappa_0) > 0$ aus (5.89c) $c_n^{(2)} = 0$. Falls $\mathcal{H}_n^{(1)'}(\kappa a) \neq 0$, so bestimmt die Randbedingung (5.89b) die Koeffizienten $c_n^{(1)}$ zu

$$c_n^{(1)} = \frac{l_n}{\kappa \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)'}(\kappa a)}$$

und die Behauptung ist mit $u_{0,n} = u_n(0)$ gezeigt. Andernfalls kann (5.89b) nur für $l_n = 0$ erfüllt werden. \square

Mit Hilfe dieser Eindeutigkeit erhalten wir die super-algebraische Konvergenz der HSIEM.

Satz 5.22. Seien $\Re(\kappa)$, $\Re(\kappa_0)$, $\Re\left(\frac{\kappa}{\kappa_0}\right)$ und $\Re\left(\frac{\kappa^2}{\kappa_0}\right)$ positiv und $\mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)'}(\kappa a) \neq 0$, d.h. κ ist nach Beispiel 3.24 keine Resonanz von (3.49) mit $K = B_a$. Sei weiter $(u_{0,n}, U_n)^\top \in X$ die eindeutige Lösung von (5.75). Dann existiert eine Konstante $N_{r,0}$, sodass das diskrete Variationsproblem

$$A_1 \left(\begin{pmatrix} u_{0,n}^{(N_r)} \\ U_n^{(N_r)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{0,n} \\ V_n \end{pmatrix} \right) + \frac{C_d + a^2 \lambda_n}{\kappa_0^2 a} A_2 \left(\begin{pmatrix} u_{0,n}^{(N_r)} \\ U_n^{(N_r)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{0,n} \\ V_n \end{pmatrix} \right) = -l_n v_{0,n} \quad (5.91)$$

mit $(v_{0,n}, V_n)^\top \in \mathbb{C} \times \Pi_{N_r}$ und A_1, A_2 aus (5.76) für alle $N_r \geq N_{r,0}$ eine eindeutige Lösung $(u_{0,n}^{(N_r)}, U_n^{(N_r)})^\top$ aus $\mathbb{C} \times \Pi_{N_r}$ besitzt.

Zudem existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C_k(n, \kappa) > 0$ mit

$$\left\| \begin{pmatrix} u_{0,n}^{(N_r)} \\ U_n^{(N_r)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{0,n} \\ U_n \end{pmatrix} \right\|_X \leq C_k \left(\frac{1}{N_r} \right)^k. \quad (5.92)$$

Beweis. Bemerkung 5.18 stellt die Konvergenz der Methode für die Bilinearform A_1 sicher. Da mit Satz 5.21 die Gleichung (5.75) eindeutig lösbar und die Bilinearform A_2 mit Hilfe von Lemma 5.19 eine kompakte Störung von A_1 ist, folgt die Stabilität

und Konvergenz von (5.91) aus [Kre99, Theorem 13.7]. Im Wesentlichen werden dafür die Inversen der Operatoren auf den Unterräumen $\mathbb{C} \times \Pi_{N_r}$ aus (5.91) gleichmäßig in N_r durch die nach der Riesz-Fredholm Theorie existierende stetigen Inverse des Operators aus (5.75) abgeschätzt. Mit Lemma 5.17 folgt dann die super-algebraische Konvergenz. Dabei kann auf die Voraussetzung a hinreichend groß verzichtet werden, weil Lemma 5.6 bezüglich der Fourier-Koeffizienten U_n für beliebige $a > 0$ gilt. \square

Bemerkung 5.23. Die Konstanten $C_k(n, \kappa)$ sind abhängig von $\lambda_n = \mathcal{O}(n^2)$. Wenn man (5.91) auf diese Abhängigkeit hin untersucht, lässt sich erahnen, dass die Konstanten nicht gleichmäßig in n beschränkt werden können, da der Operator $K_1 + \frac{C_d + a^2 \lambda_n}{\kappa_0^2 a} K_2$ für $n \rightarrow \infty$ gegen den kompakten, nicht stetig invertierbaren Operator K_2 konvergiert.

Eine weitere wichtige Folgerung des Satzes 5.21 ist die Umkehrung des Satzes 5.8. Mit dieser folgt, dass jede bezüglich der Polbedingung 4.9 ausstrahlende Lösung der Helmholtz-Gleichung auch die Ausstrahlungsbedingung (3.37) erfüllt (siehe auch die Bemerkung am Ende des Abschnittes 4.1.2).

Korollar 5.24. Seien $(u_{\text{int}}, U)^\top \in X$ mit X aus Lemma 5.7 eine Lösung von (5.35) und $\mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)'}(a\kappa)$ sowie $\mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)}(a\kappa)$ nicht 0. Dann ist $u_{\text{int}} \in H^2(\Omega_{\text{int}})$ die Einschränkung einer Lösung $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega_{\text{ext}})$ von (3.1).

Beweis. Die Bilinearform $A - \kappa^2 B$ aus (5.36) wird in die externen Bestandteile $A_{\text{ext}} - \kappa^2 B_{\text{ext}}$ aus (5.43) und die entsprechenden internen Bilinearformen

$$A_{\text{int}}(f, g) = \int_{\Omega_{\text{int}}} \nabla f \cdot \nabla g dx \quad \text{und} \quad B_{\text{int}}(f, g) = \int_{\Omega_{\text{int}}} f g dx$$

zerlegt. Für die externen Bilinearformen wurde in Satz 5.21 gezeigt, dass unter den gegebenen Voraussetzungen

$$u'_{0,n} = \frac{\kappa \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)'}(\kappa a)}{\mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)}(\kappa a)} u_{0,n}$$

mit $u'_{0,n} = l_n$ gilt. Da die separierten Probleme (5.75) äquivalent zum Problem (5.74) sind, folgt durch Summation mit der Definition (3.23) des DtN-Operators

$$\begin{aligned} & A_{\text{ext}} \left(\begin{pmatrix} u_0 \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ V \end{pmatrix} \right) - \kappa^2 B_{\text{ext}} \left(\begin{pmatrix} u_0 \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ V \end{pmatrix} \right) \\ &= - \int_{\Gamma_a} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)'}(\kappa a)}{\mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)}(\kappa a)} u_{0,n} \Phi_n(\hat{\mathbf{x}}) \right) v_0 ds = - \int_{\Gamma_a} \text{DtN}(u_{\text{int}}|_{\Gamma_a}) v_{\text{int}}|_{\Gamma_a}. \end{aligned}$$

Wenn nun v_{int} durch $\overline{v_{\text{int}}}$ ersetzt wird, ergibt sich das Variationsproblem (3.30), und die Behauptung folgt mit Satz 3.12 bzw. Korollar 3.23(i), wobei die dort gezeigte Eindeutigkeit verloren geht, wenn κ eine Resonanz von (3.49) ist. \square

Bemerkung 5.25. Die Funktionen u_n aus dem Beweis des Satzes 5.21 sind nicht die Fourier-Koeffizienten einer Lösung u_{ext} von (3.22). Dazu hätten wir an Stelle der Fourier-Transformation in \mathcal{W} die Laplace-Transformation verwenden müssen. Für eine solche Abbildung wäre ein Lemma wie 5.20 sehr schwierig, da zum einen die Abbildungseigenschaften der Laplace-Transformation kompliziert sind und zum anderen das Paley-Wiener Theorem eine zentrale Rolle im Beweis gespielt hat.

So erhalten wir, wie (5.90) zu entnehmen ist, eine Lösung

$$u_n(r) = \frac{l_n}{\kappa \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)'}(\kappa a)} \left(\frac{ir}{\kappa_0} + 1 \right)^{(d-1)/2} \mathcal{H}_{\nu(n)}^{(1)} \left(\kappa a \left(\frac{ir}{\kappa_0} + 1 \right) \right). \quad (5.93)$$

Dies ist eine holomorph ins Komplexe fortgesetzte Lösung von (3.22). Die HSIEM kann somit auch als eine Art PML Methode (siehe Abschnitt 3.2.3) aufgefasst werden.

6. Numerische Beispiele

Im letzten Kapitel wurden zwar einige Schritte in Richtung eines Konvergenzbeweises der HSIEM zur numerischen Lösung von Streuproblemen gemacht, der Beweis ist jedoch nicht vollständig. Offen ist ebenso die Frage der Konvergenz der Linienmethode (HSLM) und die Konvergenz beider Verfahren bei der Lösung von Resonanzproblemen.

In diesem Kapitel werden deshalb einige numerische Beispielrechnungen vorgestellt. Im ersten Abschnitt wird dazu mit Hilfe von in Matlab [The71] programmierten Testprogrammen die Konvergenz der Hardy-Raum Methoden (HSM) für ein einfaches Streuproblem untersucht. Ebenfalls dort enthalten sind zwei Abbildungen über die Kondition der entstehenden Matrizen.

Im zweiten Abschnitt wird die HSIEM aus Abschnitt 5.2.3 getestet. Diese Formulierung kann relativ einfach in bestehende Finite Elemente Programme integriert werden, da sie lediglich auf dem Schnitttrand Γ_a die Implementierung der speziellen Hardy-Raum Infinite Elemente benötigt.

Für die Verallgemeinerung der HSIEM aus Unterabschnitt 5.2.4 dagegen ist zusätzlich eine Unterteilung des Außenraumes in geeignete Segmente nötig. Dann ist die HSIEM auch für inhomogene Außenräume wie in Abbildung 1.1 anwendbar. Der letzte Abschnitt des Kapitels beinhaltet einige Konvergenzstudien für das zu Abbildung 1.1 gehörende Resonanzproblem. Insbesondere wird dort der numerische Aufwand der HSIEM und der PML Methode verglichen.

Bemerkung 6.1 (Wahl des Parameters κ_0). In Bemerkung 5.9 wurde für den eindimensionalen Fall nachgewiesen, dass durch die Diskretisierung des Hardy-Raums $H^+(S^1)$ die exakte Lösung u_{ext} durch

$$u_{\text{ext}}^{(N_r)}(r) = e^{i\kappa_0 r} \left(u_0^{(h)} + \sum_{j=0}^{N_r} \alpha_j^+ \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \frac{(2i\kappa_0 r)^{k+1}}{(k+1)!} \right) \quad (6.1)$$

angenähert wird. Da die eindimensionale Lösung durch $u_{\text{ext}} = u_0 e^{i\kappa r}$ gegeben ist, wäre für Streuprobleme $\kappa_0 = a\kappa$ eine optimale Wahl und ohne jegliche Freiheitsgrade in $H^+(S^1)$ würde gelten $u_{\text{ext}}^{(N_r)} = u_{\text{ext}}$.

Auch in höheren Dimensionen erscheint es wegen (4.13) sinnvoll, für Streuprobleme mit gegebenem κ den Parameter κ_0 an $a\kappa$ auszurichten. Für Resonanzprobleme wird man analog κ_0 in den Bereich legen, in dem die Resonanzen des Problems zu erwarten sind.

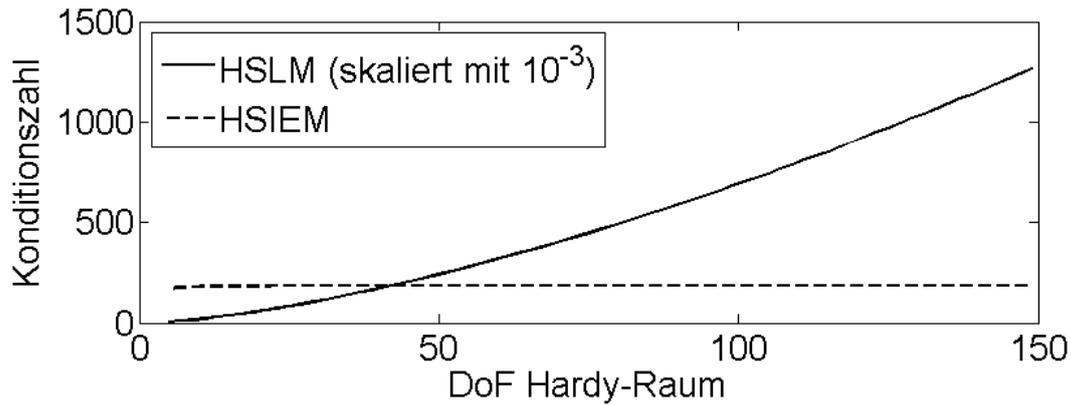


Abbildung 6.1.: Kondition des Hauptteils der HSM in Abhängigkeit der Anzahl der Freiheitsgrade im Hardy-Raum

6.1. Kondition und Konvergenz

Betrachten wir zunächst die Konditionszahlen der bei den HSM entstehenden Matrizen. Mit Hilfe von Lemma 5.19 können die Operatoren in den Gleichungen (4.28) bzw. (5.78) als kompakte Störung eines Hauptteils aufgefasst werden, der nach Bemerkung 4.12 für die HSLM bzw. Bemerkung 5.18 für die HSIEM einen Fredholm-Index -1 bzw. 0 besitzt.

In Abbildung 6.1 spiegelt sich dieser Unterschied wider. Dort ist die Kondition des Hauptteils der Methoden in Abhängigkeit von den Freiheitsgraden $N_r + 1$ im Hardy-Raum $H^+(S^1)$ dargestellt. Die Konditionen der Matrizen bei der HSIEM bleibt konstant, was mit Hilfe von [Kre99, Theorem 13.7] und dem Beweis von Satz 5.22 auch zu vermuten war, da die inversen Matrizen gleichmäßig durch die existierende, stetige Inverse des kontinuierlichen Operators abgeschätzt werden können.

Bei der HSLM existiert keine stetige Inverse, sodass die Konditionen der Matrizen für $N_r \rightarrow \infty$ gegen unendlich divergieren müssen, wenn die diskreten Operatoren gegen

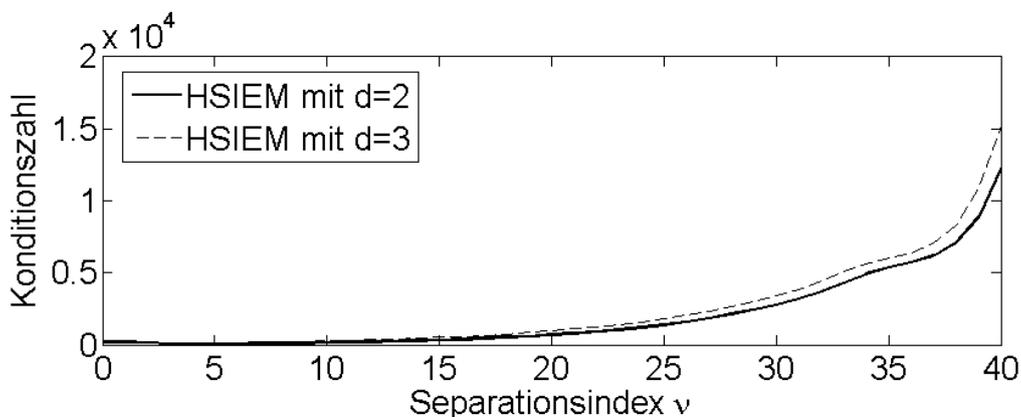


Abbildung 6.2.: Kondition der HSIEM in Abhängigkeit vom Separationsindex ν

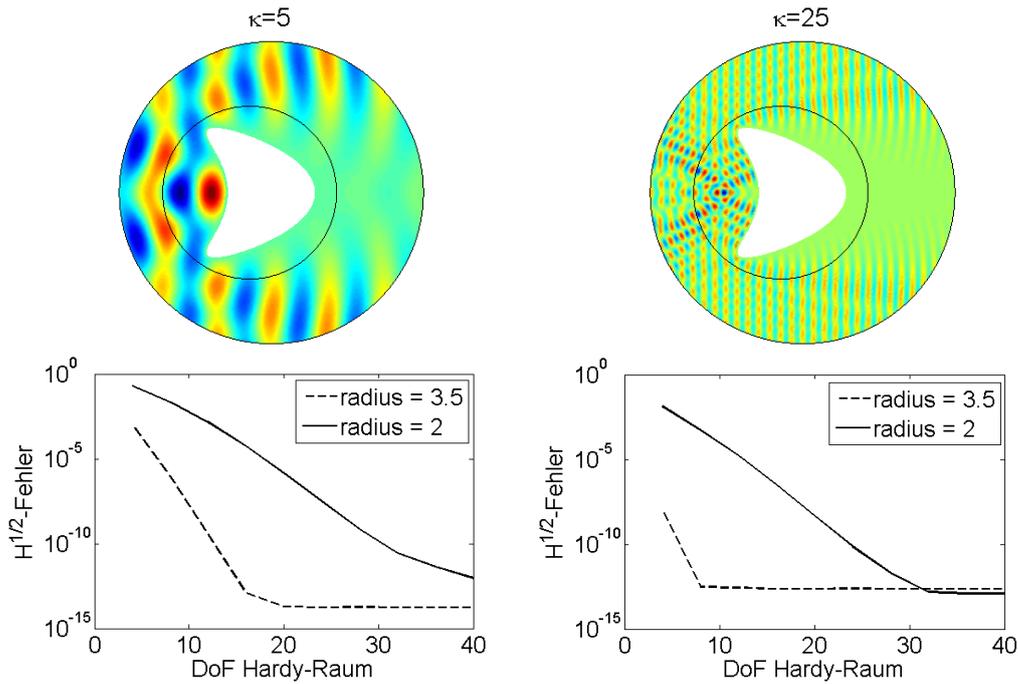


Abbildung 6.3.: $H^{1/2}(\Gamma_a)$ -Fehler in den Dirichlet-Daten für unterschiedliche Wellenzahlen κ und Radien a in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade im Hardy-Raum $H^+(S^1)$

den kontinuierlichen konvergieren. Zusätzlich sind hier die Konditionen um einen Faktor 10^3 größer als bei der HSIEM.

Nach Lemma 3.4 sind die Eigenwerte λ_n des Laplace-Beltrami Operators $\Delta_{\hat{x}}$ auf der Einheitsphäre durch $-\nu(n)^2$ für $d = 2$ und $-\nu(n)(\nu(n)+1)$ gegeben. Somit hängen die Operatoren im separierten, diskreten Variationsproblem der HSIEM (5.91) von ν ab. Nach Bemerkung 5.23 müssen die Konditionen der diskreten Matrizen für $\nu \rightarrow \infty$ gegen unendlich divergieren. Abbildung 6.2 bestätigt diese Vermutung sowohl für $d = 2$ als auch für $d = 3$.

Für die Abbildungen 6.1 und 6.2 zu den Konditionszahlen wurde $\kappa = 2$, $\kappa_0 = 7 - 2i$ und $a = 0.5$ verwendet. In Abbildung 6.5 findet sich eine Übersicht über die Kondition der durch die HSIEM entstehenden Gleichungssysteme, wenn das Variationsproblem (5.74) nicht in die separierten, eindimensionalen Probleme (5.75) zerlegt wird. Auch wenn die Kondition in diesem Fall etwas größer ist, so bleiben die Gleichungssysteme numerisch gut lösbar.

Die Konvergenz der HSM wurde anhand des Streuproblems in Abbildung 6.3 getestet. Dazu wurden die negativen Dirichlet-Daten einer einfallenden ebenen Welle auf dem Rand des lügel förmigen Gebietes im Inneren der Abbildungen als Dirichletsche Randwerte für die gestreute Lösung verwendet. Mit Hilfe einer Nyström-Integralgleichungsmethode aus [CK98, §3.5] kann dieses Streuproblem sehr effizient gelöst werden.

6. Numerische Beispiele

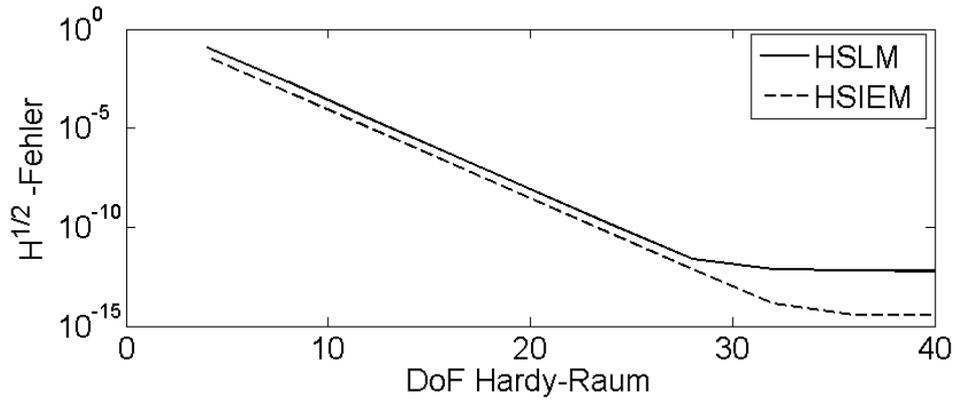


Abbildung 6.4.: $H^{1/2}(\Gamma_a)$ -Fehler für der **HSM** $\kappa = 1$ in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade im Hardy-Raum $H^+(S^1)$

Wir interessieren uns ausschließlich für den Fehler der **HSM** durch die Diskretisierung des Hardy-Raumes $H^+(S^1)$. Von daher setzen wir in (5.37) $X_{\text{int}}^{(h)} = \emptyset$ und nutzen die Neumann-Daten der Referenzlösung auf Γ_a als Randwerte der **HSM**. Der Rand Γ_a wird mit Hilfe der Finiten Elemente Methode aus Beispiel 2.16 so fein diskretisiert, dass der Fehler durch die Diskretisierung des Randes vernachlässigbar ist.

Die Dirichlet-Daten auf Γ_a der Lösung aus der Integralgleichungsmethode dienen als Referenzlösung für die mit den **HSM** berechneten Dirichlet-Daten. Der $H^{1/2}(\Gamma_a)$ -Fehler kann mit (3.24) und der schnellen Fourier-Transformation (FFT) sehr einfach berechnet werden. In Abbildung 6.3 sind für unterschiedliche Radien und unterschiedliche Wellenzahlen die Fehler der **HSIEM** in Abhängigkeit der Freiheitsgrade im Hardy-Raum $H^+(S^1)$ dargestellt.

In Abbildung 6.4 wird für $\kappa = 1$ und $a = 3.5$ der $H^{1/2}(\Gamma_a)$ -Fehler in Abhängigkeit der Freiheitsgrade im Hardy-Raum $H^+(S^1)$ der **HSLM** und der **HSIEM** verglichen. Eine Übersicht über den Fehler der **HSIEM** und die Kondition der zugehörigen Matrizen in

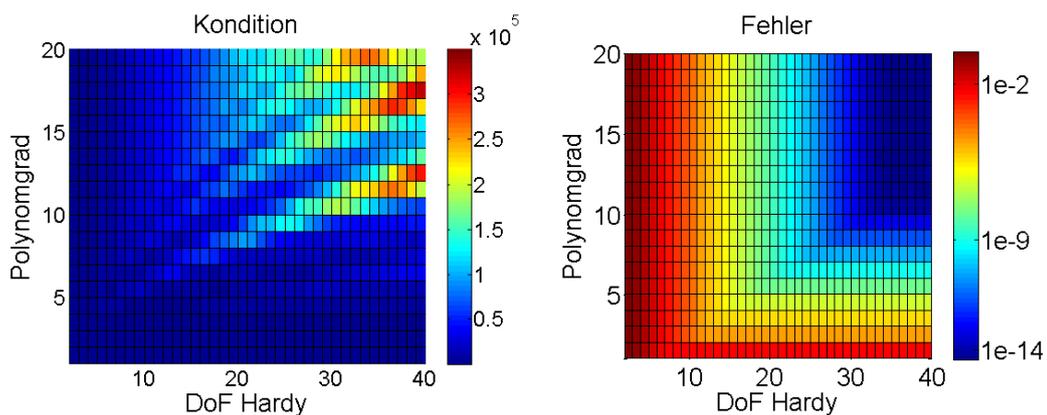


Abbildung 6.5.: Kondition des Gleichungssystems der **HSIEM** und der $H^{1/2}(\Gamma_a)$ -Fehler der zugehörigen Lösungen in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade im Hardy-Raum $H^+(S^1)$ und der Diskretisierung von Γ_a

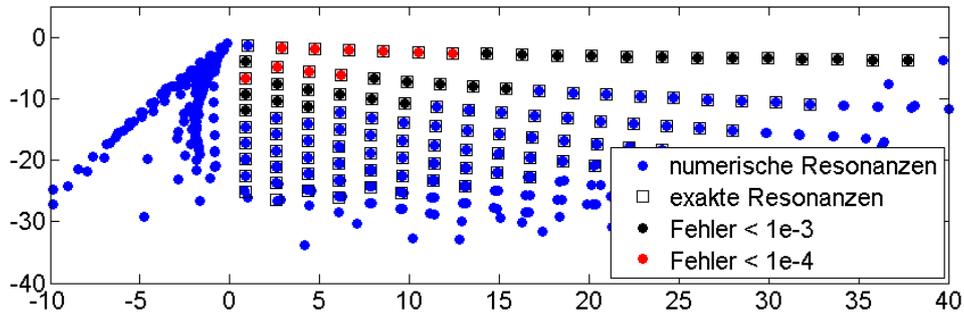


Abbildung 6.6.: Resonanzen eines Kreises mit Radius 0.5

Abhängigkeit der Freiheitsgrade im Hardy-Raum und der Freiheitsgrade auf Γ_a ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Dazu wurde Γ_a in 50 Finite Elemente unterteilt und der Polynomgrad variiert.

Alle Konvergenzabbildungen zeigen die super-algebraische Konvergenz, die nach Lemma 5.17 zu erwarten war. Mit diesen Abbildungen lässt sich sogar eine exponentielle Konvergenz vermuten.

6.2. Beispiele mit sphärischem Kopplungsrand

Für die Resonanzprobleme aus diesem Abschnitt wurde die HSIEM aus Abschnitt 5.2.3 in NGSolve ([Sch07b]), einem Finite Elemente Programm basierend auf dem Gittergenerator netgen ([Sch97]), implementiert.

In Abbildung 6.6 sind die Resonanzen des Kreises aus Beispiel 3.24 mit Radius $\tilde{a} = 0.5$ zu sehen. Für dieses spezielle Beispiel können die Resonanzen als Nullstellen der Funktion $\mathcal{H}_\nu^{(1)}(\tilde{a}\bullet)$ sehr genau bestimmt werden. Für die Berechnung über die HSIEM wurden 30 Freiheitsgrade als Diskretisierung des Hardy-Raums $H^+(S^1)$, $\kappa_0 = 22 - 12i$ und als Schnitttrand ein Kreis mit Radius $a = 0.6$ verwendet. Auf diese Weise wird der Fehler durch die Diskretisierung des Innenraumes X_{int} klein gehalten.

Zusätzlich wurde in der Arnoldi-Methode zur numerischen Lösung des Matrix-Eigenwertproblems aus [LSY98] ein Näherungswert von $s = (12 - 10i)^2$ verwendet. Hierbei ist zu beachten, dass die Resonanzen die Wurzeln der Eigenwerte des Matrix-Eigenwertproblems sind.

In Abbildung 6.6 ist ein Vergleich der numerischen Werte mit den Nullstellen der Hankel-Funktionen zu sehen. Die numerischen Resonanzen stimmen sehr gut mit den exakten überein; es existieren jedoch auch sehr viele künstliche Resonanzen. Dieses Phänomen tritt auch bei der numerischen Lösung von Resonanzproblemen mit Hilfe der PML Methode auf und kann zum Teil mit dem Begriff des Pseudo-Spektrums [Tre97] erklärt werden.

Das Pseudo-Spektrum eines Operators A kann über die Resolvente des Operators definiert werden. So liegt ein Punkt $\lambda \in \mathbb{C}$ im Pseudo-Spektrum von A , wenn die Norm

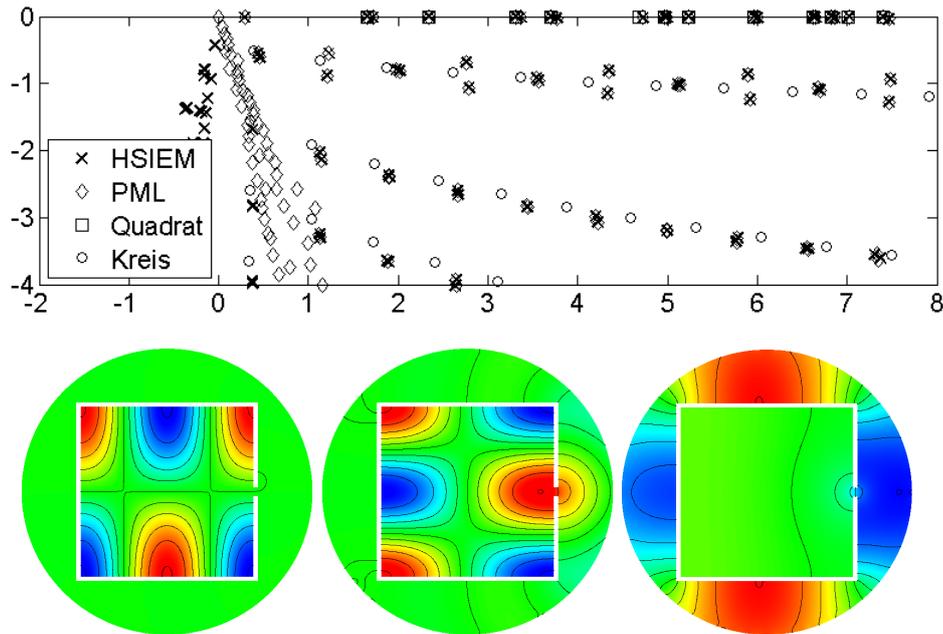


Abbildung 6.7.: Resonanzen eines Quadrates mit einem kleinen Spalt und drei Resonanzfunktionen zu den Resonanzen $\kappa = 3.6979 - 1.8629 \cdot 10^{-7}i$, $3.7665 - 1.8872 \cdot 10^{-2}i$ und $1.2292 - 0.5486i$

der Resolvente $\|(A - \lambda \text{id})^{-1}\|$ sehr groß wird. In diesen Bereichen treten durch die Diskretisierung typischerweise künstliche Resonanzen auf. Auch wenn wir diese Artefakte nicht vermeiden können, so sind sie bei der HSIEM gut von den physikalischen Resonanzen zu unterscheiden.

Das zweite Beispiel dieses Abschnittes erinnert an Beispiel 2.32. Dort wurden die positiven, reellen Eigenwerte des Laplace-Operators auf einem Rechteck berechnet. Wie in Abbildung 6.7 zu sehen, wurde durch einen schmalen Spalt das Innere eines Quadrates mit dem Äußeren verbunden. Dadurch werden die ehemals reellen Eigenwerte zu komplexen Resonanzen.

In Abbildung 6.7 werden die mit der HSIEM berechneten Resonanzen mit denen einer Diskretisierung mittels der PML Methode verglichen. Zusätzlich sind die reellen Eigenwerte des abgeschlossenen Quadrates und die exakten Resonanzen eines Kreises, der den gleichen Umfang wie das Quadrat besitzt, eingezeichnet. Letzteres ist durch das in [SZ99] untersuchte asymptotische Verhalten der Resonanzen motiviert. Ähnlich wie bei den Ergebnissen aus [HHKS07] zeigt sich, dass die Resonanzen des Außenraumes im Wesentlichen vom Umfang des Objektes abhängen.

Physikalisch interessanter sind die Resonanzen mit kleinem Imaginärteil, da der sogenannte Qualitätsfaktor $Q(\kappa) = \left| \frac{\Re(\kappa)}{\Im(\kappa)} \right|$ ein Maß für die Reaktion des Systems ist. Bei den drei Resonanzen der Resonanzfunktionen aus Abbildung 6.7 ist der Qualitätsfaktor der ersten Resonanz mit $1.99 \cdot 10^7$ am größten. Dies erklärt sich aus der Tatsache, dass die Resonanzfunktion in vertikaler Richtung schwingt und das Quadrat so gut wie nicht verlässt. Einmal in dieser Resonanzfrequenz angeregt, verbleibt

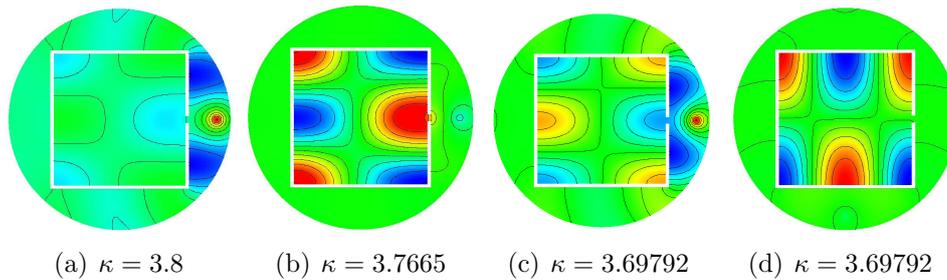


Abbildung 6.8.: Streuung einer Punktquelle rechts vom Quadrat (a-c) bzw. unter dem Quadrat (d) bei unterschiedlichen Frequenzen

die Energie der Anregung lange im Quadrat.

Somit erklärt sich der mit $2.00 \cdot 10^2$ zwar immer noch hohe, jedoch geringere Qualitätsfaktor der zweiten Resonanz. Es ist deutlich zu erkennen, dass durch die horizontale Schwingung die Resonanzfunktion das Quadrat verlässt. Der Qualitätsfaktor der dritten Resonanz ist physikalisch mit 2.24 irrelevant. Die Energie einer potentiellen Anregung kann sich in diesem Fall nicht richtig fangen, und die Reaktion des Systems auf eine Anregung in dieser Resonanzfrequenz ist eher schwach.

In Abbildung 6.8 wird das System mit einer Punktquelle angeregt. Obwohl sich die Frequenzen der ersten beiden Bilder nur sehr wenig unterscheiden, ist die Reaktion des Systems sehr unterschiedlich, da die zweite Frequenz genau der horizontalen Resonanz aus Abbildung 6.7 entspricht.

Die dritte bzw. vierte Frequenz entspricht der vertikalen Resonanz. An dieser Stelle werden die Grenzen der Charakterisierung eines Systems mittels der Resonanzen deutlich: In 6.8(c) ist die Punktquelle direkt vor dem Spalt platziert. Durch diese Punktquelle wird die Resonanzfrequenz jedoch nicht angeregt, sodass das System nicht in der erwarteten Art reagiert. In 6.8(d) befindet sich die Punktquelle in der Mitte unter dem Quadrat und die Resonanzfrequenz wird angeregt.

Mit Hilfe von Resonanzen lassen sich folglich nur potentiell kritische Frequenzen und über den Qualitätsfaktor die Stärke einer Reaktion des Systems berechnen, wenn diese Resonanzfrequenz angeregt wird. In der Praxis muss dann überprüft werden, ob und wie stark das System überhaupt in dieser Frequenz angeregt werden kann (siehe dazu [Sch07a, LVLH92]).

6.3. Beispiele mit allgemeineren Außenräumen

Die Ergebnisse aus diesem Abschnitt entstanden in Zusammenarbeit mit dem Zuse Institut Berlin und basieren auf dem dort entwickelten Programmpaket JCMWave [JCM08]. Darin enthalten ist ein Programm zur Unterteilung eines polygonal-berandeten Außenraums in einzelne Segmente. Diese Segmentierung kann sowohl für die PML Methode [ZKSS06] als auch für die HSIEM verwendet werden.

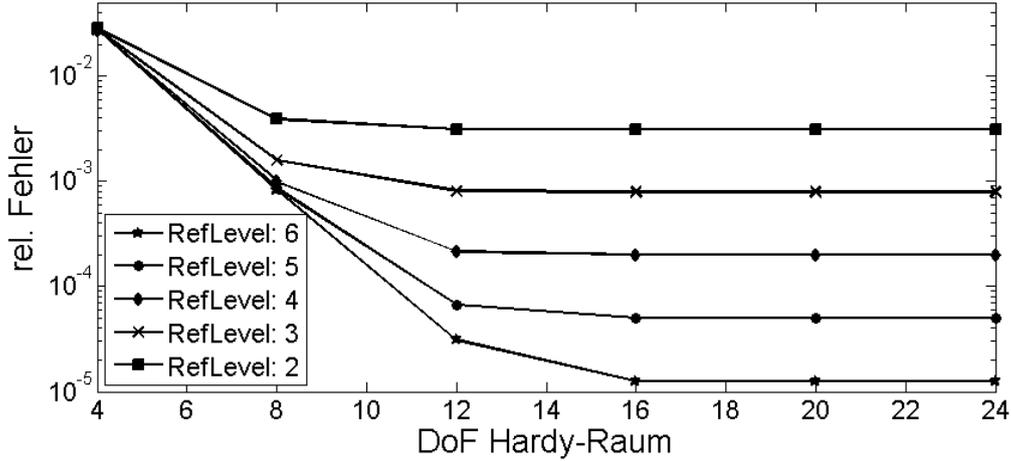


Abbildung 6.9.: relativer Fehler einer mit der HSIEM berechneten Resonanz des Einheitskreises in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade im Hardy-Raum $H^+(S^1)$ und der Diskretisierung des Innenraums

Zur Überprüfung der Konvergenz des Verfahrens verwenden wir das bereits bekannte Resonanzproblem eines Kreises mit Radius 1 und einer Dirichletschen Randbedingung auf Γ_1 aus Beispiel 3.24. Die Hankel-Funktion $\mathcal{H}_2^{(1)}$ besitzt genau eine Nullstelle $\kappa \approx 0.4292 - 1.2814i$ mit positivem Realteil. In Abbildung 6.9 ist der relative Fehler der mit der HSIEM numerisch berechneten Resonanz gegenüber der Nullstelle κ von $\mathcal{H}_2^{(1)}$ in Abhängigkeit von den Freiheitsgraden im Hardy-Raum $H^+(S^1)$ aufgetragen. Der Innenraum Ω_{int} besteht aus einem schmalen Ring, der unterschiedlich fein diskretisiert wird.

Wie Abbildung 6.9 zu entnehmen ist, dominiert der Finite Elemente Fehler durch die Diskretisierung von Ω_{int} bei einem Verfeinerungsgrad von 2 offensichtlich schon bei 8 Freiheitsgraden im Hardy-Raum den Fehler aus der Diskretisierung des Außenraums. Selbst bei der feinsten Triangulierung des Innenraums reichen 16 Freiheitsgrade im Hardy-Raum $H^+(S^1)$ aus, damit der Fehler aus der Außenraumdiskretisierung vernachlässigbar ist.

Physikalisch interessanter ist das Beispiel eines Mikro-Einschluss-Resonators (*micro cavity resonator*, MCR) aus der Einleitung (Abbildung 1.1). Bei diesem Beispiel ist der Außenraum durch die zwei Wellenleiter inhomogen. Wenn die Segmentierung des Außenraumes diesen Inhomogenitäten so angepasst wird, dass die einzelnen Segmente in sich homogen sind, kann die HSIEM aus Abschnitt 5.2.4 verwendet werden.

Wesentlich schwieriger gestaltet sich in diesem Fall die Wahl der Parameters κ_0 , da es im Außenraum nun unterschiedliche Wellenzahlen in den Wellenleitern und dem Hintergrundmedium gibt. In Abbildung 6.10 wird deshalb der Fehler in der angegebenen MCR-Resonanz in Abhängigkeit vom Parameter κ_0 bei 40 Freiheitsgraden im Hardy-Raum $H^+(S^1)$ untersucht. Als Referenzwert dient dabei eine Näherung an die exakte Resonanz, welche mit einer adaptiven PML Methode [ZBK⁺05] errechnet wurde. Die Unterschiede des Fehlers im Real- bzw. Imaginärteil sind durch die unterschiedlichen

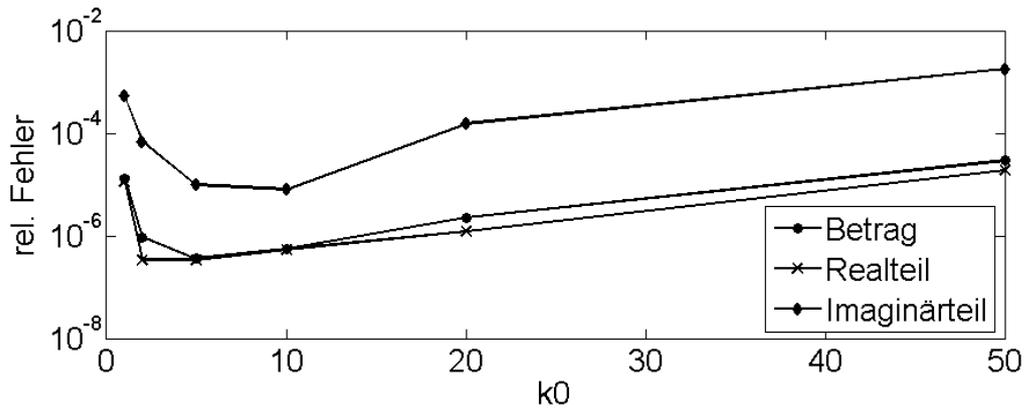


Abbildung 6.10.: relativer Fehler für die Resonanz $\kappa = 1.11 \cdot 10^{15} + 1.48 \cdot 10^{17}i$ des Wellenleiters mit Einschluss aus Abbildung 1.1 in Abhängigkeit vom Parameter κ_0

Größenordnungen der Resonanz im Real- bzw. Imaginärteil zu erklären.

In Abbildung 6.11 ist für drei unterschiedliche Parameter κ_0 der relative Fehler im Betrag der Resonanz in Abhängigkeit der Freiheitsgrade im Hardy-Raum $H^+(S^1)$ aufgetragen. Auch in diesem Fall zeigt sich die super-algebraische Konvergenz der HSIEM.

Den Schluss dieses Kapitels bilden zwei Grafiken (Abb. 6.12 und Abb. 6.13) über den numerischen Aufwand der HSIEM mit 40 Freiheitsgraden im Hardy-Raum $H^+(S^1)$ im Vergleich zur adaptiven PML Methode [ZBK+05]. Dabei ist zu beachten, dass der Referenzwert mit der adaptiven PML Methode und einer sehr feinen Diskretisierung berechnet wurde. Aus diesem Grund ist die Stagnation des Fehlers bei der HSIEM bei

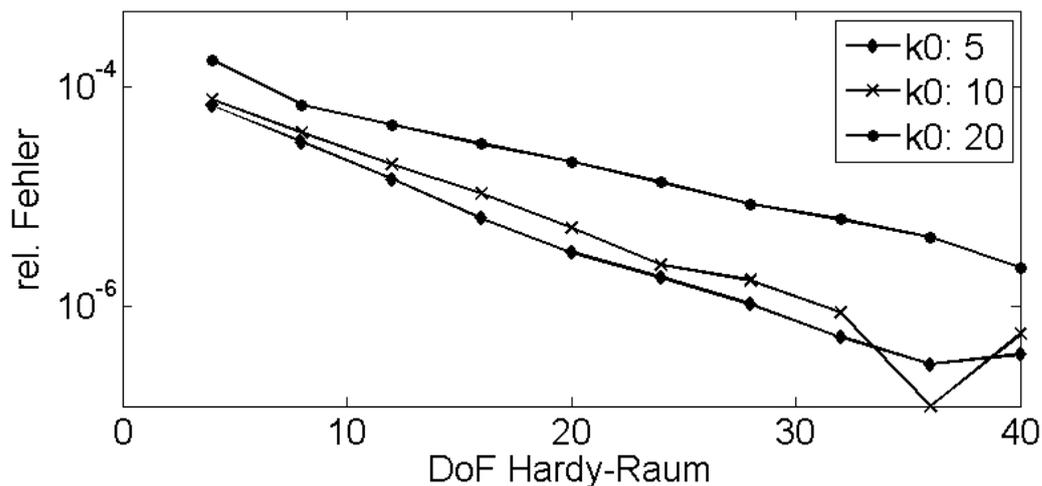


Abbildung 6.11.: relativer Fehler für die MCR-Resonanz $\kappa = 1.11 \cdot 10^{15} + 1.48 \cdot 10^{17}i$ in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade im Hardy-Raum $H^+(S^1)$

einer feinen Diskretisierung des Innenraums nicht besonders aussagekräftig, da diese auch von dem Fehler im Referenzwert herrühren kann.

Eine weitere Besonderheit entsteht durch die Benutzung einer adaptiven PML Methode, die anhand einer Fehlerschätzung im Innenraum feststellt, wie fein der Außenraum diskretisiert werden muss, damit der Außenraumfehler die gleiche Größenordnung wie der Innenraumfehler besitzt. Ein Vergleich mit Abbildung 6.9 lässt erahnen, dass auch bei der HSIEM ein solches Vorgehen sinnvoll wäre. Für diese Rechnungen wurde jedoch die Anzahl der Freiheitsgrade im Hardy-Raum $H^+(S^1)$ konstant gehalten.

Unter diesem Gesichtspunkt sind die Ergebnisse aus Abbildung 6.12 der HSIEM und der adaptiven PML Methode in etwa gleich gut. Bei den Laufzeiten der Programme aus Abbildung 6.13 spielt neben der Anzahl der Unbekannten auch die Besetzungsstruktur der Matrizen eine Rolle. Bei der HSIEM entstehen durch die Tensorprodukte und die große Anzahl an Freiheitsgraden im Hardy-Raum $H^+(S^1)$ relativ große vollbesetzte Blöcke, während bei der PML Methode die üblichen Blöcke aus der Finiten Elemente Diskretisierung verwendet werden. Es ist somit auch deshalb sinnvoll, die Anzahl der Freiheitsgrade im Hardy-Raum sehr sorgfältig zu wählen.

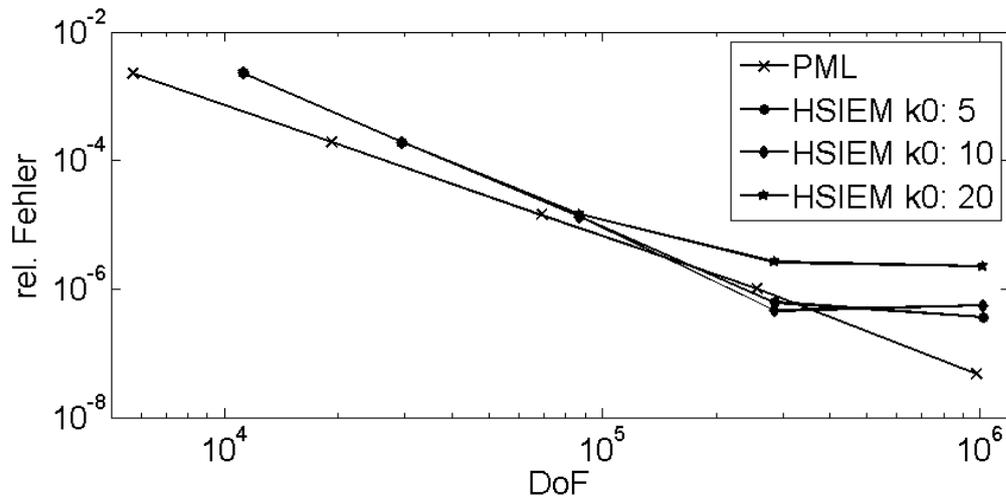


Abbildung 6.12.: Vergleich des relativen Fehlers der MCR-Resonanz in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade der gesamten Diskretisierung

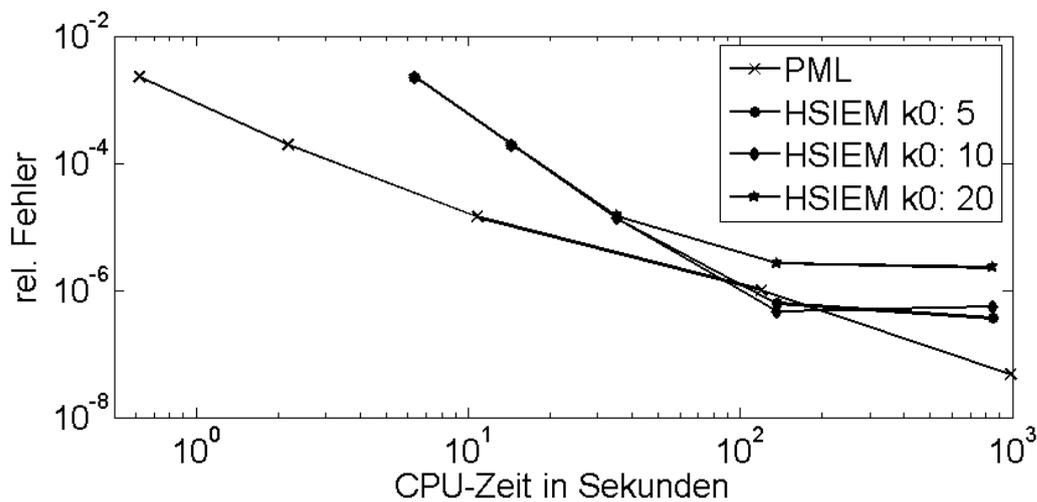


Abbildung 6.13.: Vergleich des relativen Fehlers der MCR-Resonanz in Abhängigkeit der CPU-Zeit auf einer Sun Galaxy 4600 mit 8 dual core AMD Opteron Prozessoren mit 64GB Arbeitsspeicher

6. Numerische Beispiele

7. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde eine neue Klasse von Methoden zur numerischen Berechnung von Resonanz- und Streuproblemen auf unbeschränkten Gebieten vorgestellt. Die Basis der Methoden bildet die Polbedingung (Definition 4.9), welche ausstrahlende Lösungen der Helmholtz-Gleichung anhand ihrer Laplace-Transformierten in radialer Richtung charakterisiert. Im Gegensatz zu der häufig bei Streuproblemen verwendeten Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung (3.2) bleibt die Polbedingung auch für Wellenzahlen mit negativem Imaginärteil gültig. Da die in Abschnitt 3.3 definierten Resonanzen negativen Imaginärteil besitzen, kommt dieser Eigenschaft große Bedeutung zu.

Methoden, wie die in Abschnitt 3.2.1 vorgestellten lokalen absorbierenden Randbedingungen, die auf der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung fußen, sind somit zur numerischen Behandlung von Resonanzproblemen nicht geeignet. Andere Methoden wie die klassische Infinite Elemente Methode (Abschnitt 3.2.2) führen bei der Anwendung auf Resonanzprobleme zu nichtlinearen Eigenwertproblemen.

Zusammenfassung

Die Hardy-Raum Linienmethode (HSLM - Abschnitt 4.3) und die Hardy-Raum Infinite Elemente Methode (HSIEM - Kapitel 5) dagegen erhalten die lineare Eigenwertstruktur des Resonanzproblems (3.49) und sind daher besonders gut zur numerischen Lösung von Resonanzproblemen geeignet.

Bei der HSLM wird dazu die Helmholtz-Gleichung auf dem Gebiet $\Omega_{\text{ext}} = \mathbb{R}^d \setminus B_a$ in den Raum $H^+(S^1) \otimes H^1(\Gamma_a)$ transformiert (Abschnitt 4.2). Für die Diskretisierung von Funktionen aus diesem Raum bietet es sich an, die Räume $H^+(S^1)$ und $H^1(\Gamma_a)$ getrennt voneinander zu diskretisieren und das Tensorprodukt der diskreten Unterräume als Diskretisierung von $H^+(S^1) \otimes H^1(\Gamma_a)$ zu verwenden.

In $H^+(S^1)$ ist eine Orthogonalbasis durch die trigonometrischen Polynome gegeben (Lemma 4.4). Da der radiale Anteil der transformierten Lösung der Helmholtz-Gleichung in $H^+(S^1) \cap C^\infty(S^1)$ liegt (Lemma 5.6), konvergieren die zugehörigen Fourier-Koeffizienten nach Lemma 5.17 super-algebraisch gegen 0. Bereits durch wenige Basisfunktionen $\{z^0, \dots, z^{N_r}\}$ kann somit eine solche Lösung gut approximiert werden.

Der Raum $H^1(\Gamma_a)$ wird mit den üblichen Finite Elemente Methoden (Abschnitt 2.3) diskretisiert. Allgemeinere Gebiete als Ω_{ext} können mittels der in Abschnitt 3.1.3 dargestellten Zerlegung in ein beschränktes Innengebiet Ω_{int} und das Außengebiet Ω_{ext} behandelt werden. Besondere Bedeutung kommt dabei der Kopplung der Gebiete über

die Dirichletschen und Neumannschen Randwerte der Lösung auf dem Schnitttrand Γ_a zu. In Lemma 4.13 wird dazu der Zusammenhang zwischen diesen Randwerten und der transformierten Lösung der Helmholtz-Gleichung hergestellt.

Die HSIEM unterscheidet sich letztlich nur im Ausgangspunkt von der HSLM: An Stelle der Helmholtz-Gleichung wird mit Hilfe von Lemma 5.3 eine variationelle Formulierung der Gleichung ((5.8) für $d = 1$; (5.20) für $d = 2, 3$) transformiert. Dadurch entsteht das Variationsproblem (5.35) auf einem Teilraum X (Lemma 5.7) des Raumes $H^1(\Omega_{\text{int}}) \times H^+(S^1) \otimes L^2(\Gamma_a)$.

Die Schwierigkeiten bei der Definition dieses Raumes liegen in der etwas unüblichen Zerlegung (5.21) einer Funktion $\hat{U} \in H^+(S^1) \otimes H^1(\Gamma_a)$ in die Randfunktion u_0 auf Γ_a einer $H^1(\Omega_{\text{int}})$ -Funktion u_{int} und einer Funktion $U \in H^+(S^1) \otimes L^2(\Gamma_a)$ begründet:

$$\hat{U}(z, \hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{i\kappa_0} (u_0(\hat{\mathbf{x}}) + (z - 1)U(z, \hat{\mathbf{x}})), \quad \hat{\mathbf{x}} \in Ga, \quad z \in S^1.$$

Diese Zerlegung hat jedoch drei Vorteile: Werden obige Ansatzfunktion im Raum $H^+(S^1)$ für \hat{U} verwendet, so ist die Randfunktion u_0 wegen Bemerkung 4.14 von allen Fourier-Koeffizienten von \hat{U} abhängig. Mit der Zerlegung haben nach Bemerkung 5.9 die Fourier-Koeffizienten von U keine Auswirkung auf u_0 und die zugehörigen Freiheitsgrade können als innere Freiheitsgrade des Infiniten Elementes aufgefasst werden.

Zum Zweiten wird die Einführung von Unterräumen der Form $H^+(S^1) \cap H^1(S^1)$, die in Lemma 4.13 notwendig sind, vermieden, da die Zerlegung mit der Forderung $U(\bullet, \hat{\mathbf{x}}) \in H^+(S^1)$ implizit einen geeigneten Unterraum definiert. In Lemma 5.20 wird für eindimensionale Probleme nachgewiesen, dass der Raum $\mathbb{C} \times H^+(S^1)$ in natürlicher Weise normisomorph zu $H^1(\mathbb{R}_+)$ ist.

Ein letzter, eher praktischer Vorteil ist die einfache Darstellung des transformierten Ableitungsoperators in (5.10). In diesem Operator ist durch die Eigenschaften der Laplace-Transformation (Satz A.6(ii)) die Randfunktion u_0 auch ohne die Zerlegung enthalten. Mit ihrer Hilfe ist der Operator sowohl vom theoretischen Standpunkt als auch vom praktischen Standpunkt der Implementierung her wesentlich einfacher zu behandeln.

Auch wenn die Herleitung des Variationsproblems der HSIEM eher umständlich ist, so ist die HSIEM eine „normale“ Galerkin-Methode, basierend auf diesem Variationsproblem, und die zugehörigen Finiten Elemente (Abschnitt 5.2) entsprechen in ihrer Struktur der Definition eines Finiten Elementes von Ciarlet (Definition 2.13). In Tabelle 5.1 sind die für die Implementierung der Elementmatrizen notwendigen Transformationen zusammengefasst. Die Matrizen der diskretisierten Operatoren sind explizit bekannt und bestehen aus Bi- und Tridiagonalmatrizen bzw. aus den Inversen solcher Matrizen.

Die numerischen Ergebnisse aus Kapitel 6 lassen vermuten, dass beide vorgestellten Hardy-Raum Methoden super-algebraisch in Abhängigkeit der Anzahl der Freiheitsgrade in $H^+(S^1)$ konvergieren. In den Sätzen 5.16 und 5.22 konnte als ein erster Schritt die Konvergenz der HSIEM für eindimensionale und für separierte Probleme nachgewiesen werden. Ein vollständiger Konvergenzbeweis steht jedoch noch aus.

Vor- und Nachteile

Ein Vorteil der Hardy-Raum Methoden ist die super-algebraische Konvergenz in radialer Richtung, sodass nur wenige Freiheitsgrade zur Diskretisierung des Außenraums nötig sind. Zusätzlich können die Methoden mit beliebigen Diskretisierungen des Randes und des Innenraums kombiniert werden, und zumindest die HSIEM ist leicht in bestehende Finite Elemente Programme zu integrieren. Benötigt wird dazu ein spezielles (In)Finites Element.

Im Gegensatz zu den meisten anderen transparenten Randbedingungen sind die HSM linear in κ^2 , wobei κ die Wellenzahl des Problems ist. Deshalb können sie besonders gut zur numerischen Lösung von Resonanzproblemen eingesetzt werden und sind eine gute Alternative zu der PML Methode.

Die PML Methode erhält ebenfalls die lineare Eigenwertstruktur des Resonanzproblems und kommt ohne eine Implementierung eines speziellen Finiten Elementes aus. Sie konvergiert aber auch nur in der Ordnung der verwendeten Finiten Elemente. Eine Schwierigkeit beider Methoden ist die Wahl geeigneter Parameter. Bei der PML Methode sind dies der Dämpfungstensor und der künstliche Gebietsrand, bei den HSM der Parameter κ_0 .

Die numerischen Ergebnisse und insbesondere der Vergleich der Resultate der HSIEM und der PML Methode lassen vermuten, dass die Methoden ähnlich gut konvergieren. Sie können beide für Probleme mit inhomogenen Außenräumen verwendet werden und ermöglichen somit die numerische Lösung einer Vielzahl unterschiedlicher Probleme.

Ausblick

Bei den meisten numerischen Verfahren stellt die Wahl der Parameter für konkrete Anwendungen ein großes Problem dar. Eine Methode wird vor allem dann in der Praxis häufig eingesetzt werden, wenn sie einfach zu benutzen ist, d.h. möglichst wenig Parameter durch den Nutzer eingestellt werden müssen. Bei der PML Methode wurde durch die Arbeitsgruppe am Zuse-Institut Berlin ein Schritt in dieser Richtung unternommen, indem die Dämpfungsparameter durch einen speziellen Algorithmus automatisch an das Problem angepasst werden.

Bemerkung 6.1 ermöglicht ein ähnliches Vorgehen für den Parameter κ_0 der HSM. Es wäre jedoch wünschenswert, wenn der Parameter nicht global festgelegt wäre, sondern in den einzelnen Segmenten des Außenraumes an die jeweilige Wellenzahl angepasst werden könnte. Insbesondere bei inhomogenen Außenräumen könnte auf diese Weise die Methode verbessert werden.

Zudem wäre es sinnvoll, die Anzahl der Freiheitsgrade im Außenraum an einen geschätzten Innenraumfehler anzupassen. Dazu müssten Fehlerschätzer für die HSM entwickelt werden, wie sie bereits bei der PML Methode angewendet werden. Zusammen mit einer adaptiven Wahl des Parameters κ_0 wäre dann für die HSM eine Interaktion des Nutzer nicht mehr notwendig.

7. Zusammenfassung und Ausblick

Unabhängig von den Parametern bietet es sich an, die Methoden von skalaren Helmholtz Problemen auf zeitharmonische elektromagnetische oder elastische Probleme zu erweitern. Für elektromagnetische Probleme wurden bereits einige Vorarbeiten unternommen. Offen ist bisher die Frage, wie ein de Rham Diagramm in den Tensorprodukträumen der **HSIEM** auszusehen hat. Insbesondere für elektromagnetische Resonanzprobleme ist es von großer Bedeutung, dass die verwendete Methode ein solches Diagramm erfüllt, um künstliche Resonanzen so weit es geht zu vermeiden.

A. Laplace- und Fourier-Transformation

Die Basis der Hardy-Raum Methoden bildet die Polbedingung und damit die Charakterisierung von Funktionen mittels deren Laplace-Transformierten. Aus diesem Grunde sind hier einige Grundlagen der Laplace- sowie der Fourier-Transformation zum großen Teil ohne Beweise zusammengestellt. Die entsprechenden Beweise sind z.B. in [Doe58], [RS75, Chapt IX] und [Wei76, §10.1] zu finden.

Definition A.1 (Fourier-Transformation). *Die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}f$ der Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ ist definiert durch*

$$(\mathcal{F}f)(s) := \text{l.i.m.}_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-its} f(t) dt. \quad (\text{A.1})$$

Der Grenzwert „limit in mean“ ist dabei im L^2 Sinne zu verstehen, d.h. $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\|\mathcal{F}f - \int_{-R}^R e^{-it\bullet} f(t) dt\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$. Die inverse Fourier-Transformation ist für $f \in L^2(\mathbb{R})$ definiert durch

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(s) := \frac{1}{2\pi} \text{l.i.m.}_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{its} f(t) dt. \quad (\text{A.2})$$

In [RS75] wird die Fourier-Transformation zunächst auf dem Schwartz-Raum der beliebig oft differenzierbaren, schnell abfallenden Funktionen (siehe [RS80, §V.3]) mit Hilfe der Integraldarstellung in (A.1) definiert und dann auf den topologischen Dual dieses Raumes erweitert. Daraus folgt zunächst die Existenz der Fortsetzung der Fourier-Transformation auf den topologischen Dual und dessen Teilräumen, zu denen auch die Räume $L^p(\mathbb{R})$ mit $p \geq 1$ gehören. Die Darstellung dieser Fortsetzung in obiger Definition als Grenzwert von Integralen ist somit eher eine Folgerung aus der ursprünglichen Definition auf dem Schwartz-Raum.

Theorem A.2 (Plancherel Theorem). *Die Fourier-Transformation \mathcal{F} ist eine bijektive, lineare Abbildung von $L^2(\mathbb{R})$ nach $L^2(\mathbb{R})$ mit*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (\text{A.3})$$

Die inverse Abbildung ist durch die inverse Fourier-Transformation \mathcal{F}^{-1} gegeben.

Der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ entsteht im Gegensatz zu [RS75, Theo IX.6] durch die unterschiedliche Wahl der Vorfaktoren in den Definitionen der Fourier- und der inversen Fourier-Transformation.

A. Laplace- und Fourier-Transformation

Eine der wichtigsten Eigenschaften ist die Wirkung der Fourier-Transformation auf die Faltung $f * g$ zweier auf \mathbb{R} definierten Funktionen f, g :

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (\text{A.4})$$

Sind f, g Funktionen aus $L^1(\mathbb{R})$ oder $L^2(\mathbb{R})$, so existiert das Integral und die Faltung ist wohldefiniert.

Satz A.3 (Eigenschaften der Fourier-Transformation). *Seien f, g zwei auf \mathbb{R} definierte Funktionen, für die nachfolgende Ausdrücke existieren. Dann gilt*

- (i) $\mathcal{F}\{f^{(n)}\}(s) = (is)^n(\mathcal{F}f)(s)$,
- (ii) $\mathcal{F}\{(-it)^n f(t)\} = (\mathcal{F}f)^{(n)}$,
- (iii) $\mathcal{F}\{f * g\} = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$,
- (iv) $\mathcal{F}\{f g\} = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g)$.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch direktes nachrechnen. So gilt z.B.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f g\}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t} (\mathcal{F}f)(\tau) d\tau \right) g(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(s-\tau)t} g(t) dt \right) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\tau) (\mathcal{F}g)(s - \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} ((\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}g))(s). \end{aligned}$$

Die Vertauschung der Integrationsgrenzen ist erlaubt, sofern $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. \square

Die Laplace-Transformation hat im Gegensatz zur Fourier-Transformation einen stark abklingenden Integralkern.

Definition A.4 (Laplace-Transformation). *Sei die Funktion f auf dem Intervall $[0, \infty)$ definiert und $|f(t)| \leq Ce^{Mt}$ mit beliebigen $C, M > 0$. Dann ist für $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > M$ die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}f$ definiert durch*

$$(\mathcal{L}f)(s) := \int_0^{\infty} e^{-ts} f(t) dt. \quad (\text{A.5})$$

Die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}f$ einer Funktion f ist im Inneren ihrer Konvergenzhalbebene, d.h. für $\Re(s) > M$, holomorph ([Doe58, §6]). Ist eine Funktion \hat{f} als Laplace-Transformierte einer Funktion f darstellbar und ist f in einer Umgebung von $t > 0$ von beschränkter Variation, so gilt nach [Doe58, Satz 17.3]

$$\frac{f(t+0) - f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{M-i\infty}^{M+i\infty} e^{ts} \hat{f}(s) ds. \quad (\text{A.6})$$

Die Konvergenz dieses Bromwich-Integrales ist im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen. Die Integration kann innerhalb des Holomorphie-Gebietes auf beliebigen Wegen erfolgen. Einige Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion \hat{f} als Laplace-Transformierte einer Funktion f sind in [Doe58, §21] gegeben.

Satz A.5 (Grenzwertsatz der Laplace-Transformation). *Sei f eine Funktion mit zugehöriger Laplace-Transformierten $\hat{f} := \mathcal{L}f$. Dann gilt*

1. *Wenn der Grenzwert $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(\epsilon)$ existiert, so gilt*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(\epsilon) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{f}(s). \quad (\text{A.7})$$

Ist insbesondere f im Ursprung stetig, so bestimmt der Funktionswert $f(0)$ das Verhalten der Bildfunktion \hat{f} im Unendlichen.

2. *Besitzt $f(t)$ für $t \rightarrow 0$ eine asymptotische Entwicklung der Form*

$$f(t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{\lambda_n}, \quad -1 < \Re(\lambda_0) < \Re(\lambda_1) < \dots,$$

so gilt für $s \rightarrow \infty$

$$\hat{f}(s) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(\lambda_n + 1)}{s^{\lambda_n + 1}}.$$

Der Grenzwert $s \rightarrow \infty$ ist in beiden Fällen ein zweidimensionaler Grenzwert mit $|\arg(s)| < \frac{\pi}{2}$.

Beweis. Siehe [Doe58, Satz 24.5 und 24.7]. □

Analog zu den Eigenschaften der Fourier-Transformation A.3 folgen einige Eigenschaften der Laplace-Transformation. Die Funktionen f, g sind in diesem Fall nur auf \mathbb{R}_+ definiert, wohingegen die Integration in der Definition der Faltung (A.4) über ganz \mathbb{R} erfolgt. Aus diesem Grunde werden die Funktionen durch 0 fortgesetzt und es ergibt sich

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

Satz A.6 (Eigenschaften der Laplace-Transformation). *Es seien f, g auf $[0, \infty)$ definierte Funktionen, die auf $(-\infty, 0)$ durch 0 fortgesetzt werden und für die folgende Ausdrücke existieren. Dann gilt*

- (i) \mathcal{L} ist eine lineare Abbildung,
- (ii) $\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=1}^n s^{k-1}f^{(n-k)}(0)$,
- (iii) $\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\} = (\mathcal{L}f)^{(n)}$,
- (iv) $\mathcal{L}\{(t+c)^{-n} f(t)\}(s) = \int_s^\infty e^{-c(\sigma-s)} \frac{(\sigma-s)^{n-1}}{(n-1)!} (\mathcal{L}f)(\sigma) d\sigma, \quad c > 0$,
- (v) $\mathcal{L}\{f * g\} = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g)$.

Die im Gegensatz zur Fourier-Transformation (siehe A.3) auftauchenden Randterme $s^{k-1}f^{(n-k)}(0)$ entstehen durch Randterme bei der partiellen Integration. Die etwas unbekanntere Eigenschaft (iv) ergibt sich als Spezialfall aus [HSZ03a, Lemma 4.1].

A. Laplace- und Fourier-Transformation

Darüber hinaus ist die Laplace-Transformierte des Produktes zweier Funktionen deutlich schwieriger zu berechnen als bei der Fourier-Transformation. Unter bestimmten Voraussetzungen wurde jedoch in [Doe58, Satz 23.14] ein ähnliches Resultat gezeigt:

$$\mathcal{L}\{f \cdot g\}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} f(\sigma)g(s-\sigma)d\sigma. \quad (\text{A.8})$$

Index

| | | |
|---|----------|--------|
| A | | |
| Affin äquivalent | 16 | |
| Ausstrahlungsbedingung | | |
| Hankel-Funktionen | 37 | |
| Polbedingung | 46, 52 | |
| Sommerfeldsche A. | 28 | |
| B | | |
| Babuška-Brezzi Bedingung | 19 | |
| Besselsche Differentialgleichung | 30 | |
| C | | |
| Céa Lemma | 20 | |
| D | | |
| Dirichlet-to-Neumann-Operator | 34 | |
| E | | |
| Eigenfunktion | 21 | |
| Eigenraum | 21 | |
| Eigenwert | 21 | |
| Elementmatrix | 15 | |
| F | | |
| Fernfeldfunktion | 48 | |
| Finites Element | 14 | |
| Fourier-Transformation | 109 | |
| G | | |
| Gårding Ungleichung | 13 | |
| Galerkin-Methode | 59 | |
| Greensche Formel | 11 | |
| H | | |
| Hankel-Funktionen | 30 | |
| Hardy-Raum | 49 | |
| Hardy-Raum Methoden | | |
| Infinite Elemente Methode (HSIEM) | 59 | |
| Linienmethode (HSLM) | 56 | |
| Helmholtz-Gleichung | 1, 9, 27 | |
| Homogene Polynome | 29 | |
| I | | |
| inf-sup Bedingung | | 19 |
| Infinite Elemente Methoden | | |
| Hardy-Raum | | 59 |
| klassische | | 38 |
| Innerer Freiheitsgrad | | 16 |
| K | | |
| Kugelflächenfunktionen | | 29 |
| L | | |
| Lösung | | |
| klassisch | | 9 |
| schwach | | 12 |
| stark | | 10 |
| Laplace-Beltrami-Operator | | 28 |
| Laplace-Transformation | | 110 |
| Lax-Milgram Lemma | | 12 |
| Legendre Polynome | | 16 |
| Lipschitz-Gebiet | | 9 |
| Lokale absorbierende Randbedingungen | | |
| | | 37 |
| M | | |
| Möbius-Transformation | | 51 |
| Massematrix | | 14 |
| N | | |
| Neumann-to-Dirichlet-Operator | | 34 |
| O | | |
| Oberflächengradient | | 29 |
| P | | |
| Paley-Wiener Theorem | | 51 |
| Perfectly Matched Layer (PML) | | 40 |
| Plancherel Theorem | | 109 |
| Polbedingung | | 46, 52 |
| R | | |
| Randfreiheitsgrad | | 16 |
| Rayleigh-Ritz Methode | | 25 |
| Rayleighscher Quotient | | 25 |

Index

| | |
|---------------------------------------|----|
| Resolventenmenge | 21 |
| Resonanz | 41 |
| Resonanzfrequenz | 1 |
| Riesz-Schauder Theorie | 22 |
| Rieszscher Darstellungssatz | 12 |
| S | |
| Schwache Ableitung | 10 |
| Sesquilinearform | |
| X -Elliptizität | 12 |
| X -Koerzivität | 12 |
| Definition | 12 |
| hermitesch | 24 |
| Sobolev-Raum | 10 |
| Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung | |
| | 28 |
| Spektrum | 21 |
| Sprungfunktion | 48 |
| Steifigkeitsmatrix | 14 |
| T | |
| Tensorprodukt | 17 |
| Toeplitz-Operator | 50 |
| Träger | 14 |
| Transparente Randbedingungen | 36 |
| Triangulierung | 14 |
| V | |
| Vielfachheit eines Eigenwertes | 21 |

Symbolverzeichnis

- $(\bullet, \bullet)_k$ Innenprodukt des Sobolev-Raumes H^k , 10
- $*$ Faltung, 110
- $Q^\#$ Bilinearform aus (5.34) in $H^+(S^1)$, 70
- Q Bilinearform aus (5.11) in $H^+(S^1)$, 62
- $Q_{\tan}^\#$ Bilinearform aus (5.34) in $H^+(S^1)$, 70
- \mathcal{F} Fourier-Transformation, 109
- $\mathcal{H}_n^{(1/2)}$ $d = 2$: Hankel-Funktionen erster und zweiter Ordnung
 $d = 3$: sphärische Hankel-Funktionen erster und zweiter Ordnung, 31
- \mathcal{L} Laplace-Transformation, 110
- \mathcal{T} Triangulierung eines Gebietes, 14
- Δ Laplace-Operator, 9
- D_c Differentialoperator, 75
- DtN Dirichlet-to-Neumann-Operator, 34
- ℓ_2 Raum der quadratisch summierbaren Folgen, 50
- Γ_a Rand eines Balles mit Radius a : $\Gamma_a := \partial B_a$ mit $a > 0$, 28
- $\hat{\mathbf{x}}$ $\hat{\mathbf{x}} := ax/|x| \in \Gamma_a$ mit $a > 0$, 28
- id Identität, 21
- \hat{J} Integraloperator, 47
- J_c Integraloperator, 75
- κ Wellenzahl, 9
- $\kappa_0\mathbb{R}$ $\{\kappa_0 s \mid s \in \mathbb{R}\}$ mit $\Re(\kappa_0) > 0$, 49
- κ_0 Parameter in der Möbius-Transformation mit $\Re(\kappa_0) > 0$, 51
- $\ker(A)$ Kern der linearen Abbildung A , 21

- $\Delta_{\tilde{x}}$ Laplace-Beltrami-Operator, 28
- $\lceil \bullet \rceil$ Aufrundungsfunktion $\lceil s \rceil := \min_{z \in \mathbb{Z}, z \geq s} z$, $s \in \mathbb{R}$, 29
- $\text{span}V$ Menge aller Linearkombinationen der diskreten Menge V , 17
- $\|\bullet\|_k$ Norm des Sobolev-Raumes H^k , 10
- $\nabla_{\tilde{x}}$ Oberflächengradient, 29
- NtD Neumann-to-Dirichlet-Operator, 34
- ν Äußerer Normalenvektor, 9
- Ω_{ext} Unbeschränktes externes Grundgebiet der Form $\mathbb{R}^d \setminus B_a$, 33
- Ω_{int} Beschränktes internes Grundgebiet der Form $B_a \setminus K$, 33
- Π_N Unterraum $\text{span}\{z^0, \dots, z^N\} \subset H^+(S^1)$, der von den $N + 1$ ersten Monomen aufgespannt wird, 71
- $\text{im}(A)$ Bild der linearen Abbildung A , 21
- $\rho(A)$ Resolventenmenge der linearen Abbildung A , 21
- \mathbb{C} Menge der komplexen Zahlen, 9
- \mathbb{C}^\pm $\{s \in \mathbb{C} \mid \Im(\pm s) > 0\}$, 46
- \mathbb{N} Menge der natürlichen Zahlen, 10
- \mathbb{N}_0 Menge der natürlichen Zahlen inklusive 0, 10
- \mathbb{R}^d d -faches, kartesisches Produkt der Menge der reellen Zahlen, 9
- $\sigma(A)$ Spektrum der linearen Abbildung A , 21
- $\sigma_d(A)$ Diskretes Spektrum der linearen Abbildung A , 21
- $\sigma_e(A)$ Wesentliches Spektrum der linearen Abbildung A , 21
- $\sigma_p(A)$ Punktspektrum der linearen Abbildung A , 21
- $\text{supp}(f)$ Träger der Funktion f , 14
- u_{ext} Einschränkung der Funktion u auf Ω_{ext} , z.T. skaliert und verschoben, 33
- u_{int} Einschränkung der Funktion u auf Ω_{int} , 33
- B_a Ball mit Radius a : $B_a := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq a\}$, 28
- $C^k(G)$ Raum der auf G k -mal stetig differenzierbaren Funktionen, 9

- $C_0^k(G)$ Menge der auf G k -mal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in G , **10**
- C_d $C_d := \frac{(d-1)(3-d)}{4}$, **46**
- d Dimension des Raumes \mathbb{R}^d , **9**
- G Offene, beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^d , **9**
- H^\pm Hardy-Raum, **49**
- $H^k(G)$ Sobolev-Raum auf G , **10**
- $H_{\text{loc}}^s(\Omega)$ Lokaler Sobolev-Raum auf Ω , **28**
- $H_\nu^{(1/2)}$ Hankel-Funktionen erster und zweiter Ordnung, **30**
- $h_\nu^{(1/2)}$ sphärische Hankel-Funktionen erster und zweiter Ordnung, **31**
- $L^2(G)$ Menge der auf G quadratintegrierbaren Funktionen, **10**
- $L_{\text{tan}}^2(\Gamma_a)$ Raum der tangentialen Vektorfelder $F \in L_{\text{tan}}^2(\Gamma_a)$ auf Γ_a , für die das Integral $\int_{\Gamma_a} |F(\hat{\mathbf{x}})|^2 d\hat{\mathbf{x}}$ beschränkt bleibt, **66**
- $P_k(\bullet)$ Polynomraum, der Polynome p höchstens k -en Grades, **15**
- r $r := |x|/a$ mit $x \in \mathbb{R}^d$ und $a > 0$, **28**
- S^1 Komplexer Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, **49**
- X Ansatzraum, abhängig von der jeweiligen Problemstellung, **11**
- X' Raum der linearen, stetigen Funktionale auf X , **12**

Literaturverzeichnis

- [Ada75] ADAMS, Robert A.: *Sobolev spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. – xviii+268 S. – Pure and Applied Mathematics, Vol. 65
- [Alt99] ALT, Hans W.: *Lineare Funktionalanalysis: eine anwendungsorientierte Einführung*. Third. Berlin : Springer-Verlag, 1999
- [Arf66] ARFKEN, George: *Mathematical methods for physicists*. New York : Academic Press, 1966. – xvi+654 S.
- [AS64] ABRAMOWITZ, Milton ; STEGUN, Irene A.: *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*. Bd. 55: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. For sale by the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964. – xiv+1046 S.
- [Ber94] BERENGER, Jean-Pierre: A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. In: *J. Comput. Phys.* 114 (1994), Nr. 2, S. 185–200
- [BGT82] BAYLISS, Alvin ; GUNZBURGER, Max ; TURKEL, Eli: Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions. In: *SIAM J. Appl. Math.* 42 (1982), Nr. 2, S. 430–451
- [BHNPR06] BERMÚDEZ, Alfredo ; HERVELLA-NIETO, Luis ; PRIETO, Andrés ; RODRÍGUEZ, Rodolfo: Numerical simulation of time-harmonic scattering problems with an optimal PML. In: *Sci. Ser. A Math. Sci. (N.S.)* 13 (2006), S. 58–71
- [BKSZ03] BURGER, Sven ; KLOSE, Roland ; SCHÄDLE, Achim ; ZSCHIEDRICH, Lin: HelmPole - A finite element solver for scattering problems on unbounded domains: Implementation based on PML / Zuse Institut Berlin. 2003 (38). – User manual
- [BP07] BRAMBLE, James H. ; PASCIAK, Joseph E.: Analysis of a finite PML approximation for the three dimensional time-harmonic Maxwell and acoustic scattering problems. In: *Math. Comp.* 76 (2007), Nr. 258, S. 597–614 (electronic)
- [BS91] BILLAH, Yusuf K. ; SCANLAN, Robert H.: Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks. In: *American Journal of Physics* 59 (1991), Nr. 2, S. 118–124
- [BS02] BRENNER, Susanne C. ; SCOTT, L. R.: *Texts in Applied Mathematics*.

- Bd. 15: *The mathematical theory of finite element methods*. Second. New York : Springer-Verlag, 2002. – xvi+361 S.
- [BS06] BÖTTCHER, Albrecht ; SILBERMANN, Bernd: *Analysis of Toeplitz operators*. Second. Berlin : Springer-Verlag, 2006 (Springer Monographs in Mathematics). – xiv+665 S. – Prepared jointly with Alexei Karlovich
- [Cia78] CIARLET, Philippe G.: *The finite element method for elliptic problems*. Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1978. – xix+530 S. – Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4
- [CK98] COLTON, David ; KRESS, Rainer: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 93: *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*. Second. Berlin : Springer-Verlag, 1998. – xii+334 S.
- [CL05] CHEN, Zhiming ; LIU, Xueze: Adaptive computation with PML for time-harmonic scattering problems. In: *Recent advances in adaptive computation* Bd. 383. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2005, S. 35–46
- [CM98] COLLINO, Francis ; MONK, Peter: The perfectly matched layer in curvilinear coordinates. In: *SIAM J. Sci. Comput.* 19 (1998), Nr. 6, S. 2061–2090 (electronic)
- [Dem07] DEMKOWICZ, Leszek: *Computing with hp-adaptive finite elements*. Vol. 1. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007 (Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science Series). – xxvi+398 S. – One and two dimensional elliptic and Maxwell problems, With 1 CD-ROM (UNIX)
- [DG98] DEMKOWICZ, Leszek ; GERDES, Klaus: Convergence of the infinite element methods for the Helmholtz equation in separable domains. In: *Numer. Math.* 79 (1998), Nr. 1, S. 11–42
- [DI01] DEMKOWICZ, Leszek ; IHLENBURG, Frank: Analysis of a coupled finite-infinite element method for exterior Helmholtz problems. In: *Numer. Math.* 88 (2001), Nr. 1, S. 43–73
- [DL90] DAUTRAY, Robert ; LIONS, Jacques-Louis: *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*. Vol. 3. Berlin : Springer-Verlag, 1990. – x+515 S. – Spectral theory and applications, With the collaboration of Michel Artola and Michel Cessenat, Translated from the French by John C. Amson
- [Doe58] DOETSCH, Gustav: *Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. Ein Lehrbuch für Studierende der Mathematik, Physik und Ingenieurwissenschaft. Basel : Birkhäuser Verlag, 1958 (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe Bd. 24). – 301 S.
- [Dur70] DUREN, Peter L.: *Theory of H^p spaces*. New York : Academic Press, 1970 (Pure and Applied Mathematics, Vol. 38). – xii+258 S.
- [Ede06] EDELSBRUNNER, Herbert: *Cambridge Monographs on Applied and Com-*

- putational Mathematics*. Bd. 7: *Geometry and topology for mesh generation*. Cambridge : Cambridge University Press, 2006. – xii+177 S. – Reprint of the 2001 original
- [EM77] ENQUIST, Bjorn ; MAJDA, Andrew: Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. In: *Math. Comp.* 31 (1977), Nr. 139, S. 629–651
- [FGS98] FREEDEN, Willi ; GERVENS, Theo ; SCHREINER, Michael: *Constructive approximation on the sphere*. New York : The Clarendon Press Oxford University Press, 1998 (Numerical Mathematics and Scientific Computation). – xvi+427 S. – With applications to geomathematics
- [Föl92] FÖLLINGER, Otto: *Regelungstechnik. Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. 7. Heidelberg : Hüthig Buch Verlag, 1992. – 633 S. – Unter Mitwirkung von Frank Dörrscheidt und Manfred Klittich
- [Giv91] GIVOLI, Dan: Nonreflecting boundary conditions. In: *J. Comput. Phys.* 94 (1991), Nr. 1, S. 1–29
- [GK95] GROTE, Marcus J. ; KELLER, Joseph B.: On nonreflecting boundary conditions. In: *J. Comput. Phys.* 122 (1995), Nr. 2, S. 231–243
- [GKW03] GAUL, Lothar ; KÖGL, Martin ; WAGNER, Marcus: *Boundary element methods for engineers and scientists*. Berlin : Springer-Verlag, 2003. – xvi+488 S. – An introductory course with advanced topics
- [GR94] GROSSMANN, Christian ; ROOS, Hans-Görg: *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Second. Stuttgart : B. G. Teubner, 1994 (Teubner Studienbücher Mathematik. [Teubner Mathematical Textbooks]). – 477 S.
- [Hac96] HACKBUSCH, Wolfgang: *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Second. Stuttgart : B. G. Teubner, 1996 (Teubner Studienbücher Mathematik. [Teubner Mathematical Textbooks]). – ii+278 S.
- [Ham02] HAMMER, Manfred: Resonant coupling of dielectric optical waveguides via rectangular microcavities: the coupled guided mode perspective. In: *Optics Communications* 214 (2002), Nr. 1-6, S. 155–170
- [Ham07] HAMMER, Manfred: Modeling of tuning of microresonator filters by perturbational evaluation of cavity mode phase shifts. In: *Journal of Lightwave Technology* 25 (2007), Nr. 12, S. 3760–3765
- [Har15] HARDY, Godfrey H.: The mean value of the modulus of an analytic function. In: *Proc. London Math. Soc.* 2 (1915), Nr. 14, S. 269–277
- [Heu75] HEUSER, Harro: *Funktionalanalysis*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1975. – 416 S. – Mathematische Leitfäden
- [HHKS07] HEIN, Stefan ; HOHAGE, Thorsten ; KOCH, Werner ; SCHÖBERL, Joachim: Acoustic resonances in a high-lift configuration. In: *J. Fluid Mech.* 582 (2007), S. 179–202

- [HN07] HOHAGE, Thorsten ; NANNEN, Lothar: Hardy space infinite elements for scattering and resonance problems / Institut für Num. und Ang. Mathematik der Universität Göttingen. 2007 (17). – Preprint
- [Hof62] HOFFMAN, Kenneth: *Banach spaces of analytic functions*. Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall Inc., 1962 (Prentice-Hall Series in Modern Analysis). – xiii+217 S.
- [HS96] HISLOP, Peter D. ; SIGAL, Israel M.: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 113: *Introduction to spectral theory*. New York : Springer-Verlag, 1996. – x+337 S. – With applications to Schrödinger operators
- [HSS⁺04] HEBERMEHL, Georg ; SCHEFTER, Juergen ; SCHLUNDT, Rainer ; TISCHLER, Thorsten ; ZSCHEILE, Horst ; HEINRICH, Wolfgang: Simulation of microwave and semiconductor laser structures including PML: Computation of the eigen mode problem, the boundary value problem, and the scattering matrix. In: *Proc. 5th International Workshop Scientific Computing in Electrical Engineering (SCEE), Capo D'Orlando, Italy*, Springer-Verlag, 2004 (Scientific Computing in Electrical Engineering), S. 203–214
- [HSZ02] HOHAGE, Thorsten ; SCHMIDT, Frank ; ZSCHIEDRICH, Lin: A new method for the solution of scattering problems. In: MICHELSEN, Bas (Hrsg.) ; DECAVÈLE, Francine (Hrsg.) ; ONERA (Veranst.): *Proceedings of the JEE'02 Symposium*. Toulouse, 2002, S. 251–256
- [HSZ03a] HOHAGE, Thorsten ; SCHMIDT, Frank ; ZSCHIEDRICH, Lin: Solving time-harmonic scattering problems based on the pole condition. I. Theory. In: *SIAM J. Math. Anal.* 35 (2003), Nr. 1, S. 183–210 (electronic)
- [HSZ03b] HOHAGE, Thorsten ; SCHMIDT, Frank ; ZSCHIEDRICH, Lin: Solving time-harmonic scattering problems based on the pole condition. II. Convergence of the PML method. In: *SIAM J. Math. Anal.* 35 (2003), Nr. 3, S. 547–560 (electronic)
- [Ihl98] IHLENBURG, Frank: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 132: *Finite element analysis of acoustic scattering*. New York : Springer-Verlag, 1998. – xiv+224 S.
- [JCM08] JCMWAVE GMBH: *JCMsuite*. <http://www.jcmwave.com/>. Version: 2008
- [Jon86] JONES, Douglas S.: *Acoustic and electromagnetic waves*. New York : The Clarendon Press Oxford University Press, 1986 (Oxford Science Publications). – xx+745 S.
- [KA00] KNABNER, Peter ; ANGERMANN, Lutz: *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 2000
- [Kat95] KATO, Tosio: *Perturbation theory for linear operators*. Berlin : Springer-Verlag, 1995 (Classics in Mathematics). – xxii+619 S. – Reprint of the 1980 edition

- [Ket07] KETTNER, Benjamin: *Ein Algorithmus zur prismatoidalen Diskretisierung von unbeschränkten Außenräumen in 2D und 3D*, Freie Universität Berlin, Diplomarbeit, 2007
- [Kre99] KRESS, Rainer: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 82: *Linear integral equations*. Second. New York : Springer-Verlag, 1999. – xiv+365 S.
- [Lar00] LARSEN, Allan: Aerodynamics of the Tacoma Narrows Bridge - 60 Years Later. In: *Structural Engineering International* 10 (2000), Nr. 4, S. 243–248
- [LP67] LAX, Peter D. ; PHILLIPS, Ralph S.: *Scattering theory*. New York : Academic Press, 1967 (Pure and Applied Mathematics, Vol. 26). – xii+276 pp. (1 plate) S.
- [LSY98] LEHOUCQ, Richard B. ; SORENSEN, Danny C. ; YANG, Chao: *Software, Environments, and Tools*. Bd. 6: *ARPACK users' guide*. Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1998. – xvi+142 S. – Solution of large-scale eigenvalue problems with implicitly restarted Arnoldi methods
- [LVLH92] LENOIR, Marc ; VULLIERME-LEDARD, Martine ; HAZARD, Christophe: Variational formulations for the determination of resonant states in scattering problems. In: *SIAM J. Math. Anal.* 23 (1992), Nr. 3, S. 579–608
- [McL00] MCLEAN, William: *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*. Cambridge : Cambridge University Press, 2000
- [Mer91] MERTINS, Ulrich: Zur Konvergenz des Rayleigh-Ritz-Verfahrens bei Eigenwertaufgaben. In: *Numer. Math.* 59 (1991), Nr. 7, S. 667–682
- [Mer96] MERTINS, Ulrich: On the convergence of the Goerisch method for self-adjoint eigenvalue problems with arbitrary spectrum. In: *Z. Anal. Anwendungen* 15 (1996), Nr. 3, S. 661–686
- [Moi98] MOISEYEV, Nimrod: Quantum theory of resonances: calculating energies, widths and cross-sections by complex scaling. In: *Physics Reports* 302 (1998), Nr. 5-6, S. 212–293
- [Mur90] MURPHY, Gerard J.: *C*-algebras and operator theory*. Boston, MA : Academic Press Inc., 1990. – x+286 S.
- [Néd01] NÉDÉLEC, Jean-Claude: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 144: *Acoustic and electromagnetic equations*. New York : Springer-Verlag, 2001. – x+316 S. – Integral representations for harmonic problems
- [PPAGD03] POTT-POLLENSKE, Michael ; ALVAREZ-GONZALES, Juan ; DOBRZYNSKI, Werner: Effect of Slat Gap on Farfield Radiated Noise and Correlation with Local Flow Characteristics. In: *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Hilton Head (USA), 12.-14.05.2003*, 2003
- [Rem84] REMMERT, Reinhold: *Grundwissen Mathematik [Basic Knowledge in Mathematics]*. Bd. 4: *Funktionentheorie. I*. Berlin : Springer-Verlag, 1984. – xiii+324 S.

- [RR93] RENARDY, Michael ; ROGERS, Robert C.: *Texts in Applied Mathematics*. Bd. 13: *An introduction to partial differential equations*. New York : Springer-Verlag, 1993. – xiv+428 S.
- [RS75] REED, Michael ; SIMON, Barry: *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*. New York : Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1975. – xv+361 S.
- [RS80] REED, Michael ; SIMON, Barry: *Methods of modern mathematical physics. I*. Second. New York : Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1980. – xv+400 S. – Functional analysis
- [RSSZ07] RUPRECHT, Daniel ; SCHÄDLE, Achim ; SCHMIDT, Frank ; ZSCHIEDRICH, Lin: Transparent boundary conditions for time-dependent problems / Zuse Institut Berlin. 2007 (12). – Preprint
- [Sch97] SCHÖBERL, Joachim: NETGEN - An Advancing Front 2D/3D-Mesh Generator Based On Abstract Rules. In: *Comput. Visual.Sci* 1 (1997), S. 41–52
- [Sch98] SCHWAB, Christoph: *p- and hp-finite element methods*. New York : The Clarendon Press Oxford University Press, 1998 (Numerical Mathematics and Scientific Computation). – xii+374 S. – Theory and applications in solid and fluid mechanics
- [Sch02] SCHMIDT, Frank: A New Approach to Coupled Interior-Exterior Helmholtz-Type Problems: Theory and Algorithms / Freie Universität Berlin. 2002. – Habilitation
- [Sch07a] SCHENK, Felix: *Asymptotische Entwicklungen von Streulösungen um Resonanzen am Beispiel von Röntgen-Mehrschicht-Resonatoren*, Georg-August-Universität Göttingen, Diplomarbeit, 2007
- [Sch07b] SCHÖBERL, Joachim: *NGSolve*. <http://www.hpfem.jku.at/ngsolve/>. Version: 2007
- [SD95] SCHMIDT, Frank ; DEUFLEHARD, Peter: Discrete Transparent Boundary Conditions for the Numerical Solution of Fresnel’s Equation. In: *Computers Math. Applic.* 29 (1995), Nr. 9, S. 53–76
- [SHK⁺07] SCHMIDT, Frank ; HOHAGE, Thorsten ; KLOSE, Roland ; SCHÄDLE, Achim ; ZSCHIEDRICH, Lin: Pole condition: A numerical method for Helmholtz-type scattering problems with inhomogeneous exterior domain. In: *J. Comput. Appl. Math.* (2007). – online
- [SS04] SAUTER, Stefan ; SCHWAB, Christoph: *Randelementmethoden : Analyse, Numerik und Implementierung schneller Algorithmen*. Stuttgart : B. G. Teubner, 2004. – XVI+382 S.
- [SZ99] SJÖSTRAND, Johannes ; ZWORSKI, Maciej: Asymptotic distribution of resonances for convex obstacles. In: *Acta Math.* 183 (1999), Nr. 2, S. 191–253
- [Tay96] TAYLOR, Michael E.: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 116: *Partial*

- differential equations. II.* New York : Springer-Verlag, 1996. – xxii+528 S. – Qualitative studies of linear equations
- [The71] THE MATHWORKS, INC.: *Matlab*. <http://www.mathworks.de/>. Version: 7.1
- [Tre97] TREFETHEN, Lloyd N.: Pseudospectra of linear operators. In: *SIAM Rev.* 39 (1997), Nr. 3, S. 383–406
- [Wat95] WATSON, G. N.: *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge : Cambridge University Press, 1995 (Cambridge Mathematical Library). – viii+804 S. – Reprint of the second (1944) edition
- [Wei76] WEIDMANN, Joachim: *Lineare Operatoren in Hilberträumen*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1976. – 368 S. – Mathematische Leitfäden
- [WS72] WEINSTEIN, Alexander ; STENGER, William: *Methods of intermediate problems for eigenvalues*. New York : Academic Press, 1972. – xi+235 S. – Theory and ramifications, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 89
- [ZBK⁺05] ZSCHIEDRICH, Lin W. ; BURGER, Sven ; KLOSE, Roland ; SCHÄDLE, Achim ; SCHMIDT, Frank: JCMmode: an adaptive finite element solver for the computation of leaky modes, *SPIE*, 2005, 192-202
- [ZBKS06] ZSCHIEDRICH, Lin ; BURGER, Sven ; KETTNER, Benjamin ; SCHMIDT, Frank: Advanced finite element method for nano-resonators, *SPIE*, 2006, 611515
- [ZKSS06] ZSCHIEDRICH, Lin ; KLOSE, Roland ; SCHÄDLE, Achim ; SCHMIDT, Frank: A new finite element realization of the perfectly matched layer method for Helmholtz scattering problems on polygonal domains in two dimensions. In: *J. Comput. Appl. Math.* 188 (2006), Nr. 1, S. 12–32

Curriculum Vitae - Lebenslauf

Name: Lothar Nannen
Geburtsdatum: 12.03.1979
Geburtsort: Oldenburg (Oldb)
Nationalität: deutsch
Familienstand: ledig
Eltern: Margrit Nannen geb. Jung und Volker Nannen

Schulbildung:

1985 - 1989 Grundschole Friedrichsfehn
1989 - 1991 Orientierungsschole Friedrichsfehn
1991 - 1998 Gymnasium Eversten Oldenburg
23.06.1998 Abitur am Gymnasium Eversten Oldenburg

Wissenschaftlicher Bildungsgang:

Okt. 1999 - Feb. 2005 Studium der Technomathematik an der Technischen Universität Clausthal
01.08.2001 Vordiplom an der TU Clausthal
25.02.2005 Diplom an der TU Clausthal
seit April 2005 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Georg-August-Universität Göttingen
Okt. 2005 - März 2008 Promotionsstudium an der mathematischen Fakultät der Georg-August-Universität Göttingen