

Mathematik 1 für BI, MB, WIMB, UI und VT

Prüfer: Gabriel Maresch

Prüfung am 28.6.2022

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus fünf Aufgaben I, II, III, IV und V, untergliedert jeweils in mehrere Teilaufgaben A, B, C, D . . .
Die Gewichtung jeder Aufgabe und jedes Unterpunktes ist jeweils am Beginn angegeben. Insgesamt können 100 Punkte erreicht werden, ab 50 Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- In den meisten Fällen sollte der freie Platz am Angabeblatt jeweils für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung.
Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe	I	II	III	IV	V	Total
Punkte	20	20	20	22	18	100
erreicht						

- 6 P. (Teil A) Ergänzen Sie in der Definition des Grades eines Polynoms $p(x) = \sum a_k x^k$ die fehlenden Symbole, Quantoren und Relationszeichen:

$$n = \text{grad } p \iff (\text{---} \neq 0) \wedge (\text{--- } k > n : a_k \text{--- } 0)$$

- 4 P. (Teil B) Die Polynomdivision liefert zu gegebenen Polynomen $p(x)$ und $q(x)$, zwei weitere Polynome $f(x)$ und $r(x)$:

$$p(x) = q(x)f(x) + r(x).$$

Was lässt sich über die Grade der Polynome f und r sagen?

- 6 P. (Teil C) Von besonderem Interesse sind auch die Polynome in zwei Unbekannten $p_n(x, y) = (x + y)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie einen allgemeinen Ausdruck für p_n an, in welchem nur mehr Konstanten und Binome der Form $x^i y^j$ vorkommen. Erklären Sie dabei alle von Ihnen verwendeten Symbole.

- 4 P. (Teil D) Verwenden Sie Ihre Formel aus (C), um die Potenz 101^6 explizit und ohne Taschenrechner zu berechnen!

8 P. (Teil A) In der Definition des Grenzwerts bzw. Häufungspunktes einer reellen Folge (a_n) spielt die Abstands-Ungleichung $|a_n - x| < \varepsilon$ eine wichtige Rolle. Betrachten Sie die Aussagen

- (i). $\exists \varepsilon > 0 \forall n \geq n_0(\varepsilon) : |a_n - x| < \varepsilon$ ① ② ③ ④ (v). $\exists \varepsilon > 0 \forall n \geq n_0(\varepsilon) : |a_n - x| \geq \varepsilon$ ① ② ③ ④
 (ii). $\forall \varepsilon > 0 \forall n \geq n_0(\varepsilon) : |a_n - x| < \varepsilon$ ① ② ③ ④ (vi). $\forall \varepsilon > 0 \forall n \geq n_0(\varepsilon) : |a_n - x| \geq \varepsilon$ ① ② ③ ④
 (iii). $\exists \varepsilon > 0 \exists n \geq n_0(\varepsilon) : |a_n - x| < \varepsilon$ ① ② ③ ④ (vii). $\exists \varepsilon > 0 \exists n \geq n_0(\varepsilon) : |a_n - x| \geq \varepsilon$ ① ② ③ ④
 (iv). $\forall \varepsilon > 0 \exists n \geq n_0(\varepsilon) : |a_n - x| < \varepsilon$ ① ② ③ ④ (viii). $\forall \varepsilon > 0 \exists n \geq n_0(\varepsilon) : |a_n - x| \geq \varepsilon$ ① ② ③ ④

Welche dieser Aussagen bedeuten, dass die Folge (a_n) die Zahl x als Grenzwert besitzt ①, welche dass die Folge (a_n) die Zahl als Häufungswert besitzt ②? Und welche dieser Aussagen bedeuten, dass die Folge (a_n) die Zahl x sicherlich nicht als Grenzwert besitzt ③ bzw. welche bedeutet, dass die Folge (a_n) die Zahl x sicherlich nicht als Häufungswert besitzt ④? Kreuzen Sie entsprechend an! (Die Rolle von $n_0(\varepsilon)$ ist

4 P. (Teil B) Geben Sie eine Folge (a_n) und eine Zahl x an, sodass x zwar Häufungswert, nicht aber Grenzwert von (a_n) ist.

4 P. (Teil C) Rechnen Sie für Ihre Folge aus (B) und ein $\varepsilon > 0$ Ihrer Wahl explizit nach, dass die entsprechenden beiden Eigenschaften aus (A) erfüllt sind (nämlich Häufungswert zu sein und nicht Grenzwert zu sein).

4 P. (Teil D) Wie lautet der Zusammenhang zwischen Häufungswerten und Teilfolgen. Formulieren Sie kurz, aber exakt!

Aufgabe III 20 Punkte

- 4 P. (Teil A) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow W$ mit $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$. Wie muss man W wählen, damit f surjektiv ist?
- 4 P. (Teil B) Ist $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow W$ aus Teil (A) umkehrbar? Wenn ja, geben Sie die Umkehrfunktion (inkl. deren Definitionsbereich und Wertebereich) an; wenn nein, argumentieren Sie, warum eine Umkehrfunktion nicht existiert
- 4 P. (Teil C) Was bedeutet es für eine reelle Funktion „monoton“ zu sein? Geben Sie eine exakte Definition.
- 4 P. (Teil D) Ist gemäß Ihrer Definition aus Teil (C) die Funktion f aus Teil (A) monoton? Wenn ja, geben Sie an, ob f monoton fallend oder steigend ist und rechnen Sie nach, dass die Definition auch tatsächlich erfüllt ist, wenn nein, bringen Sie ein explizites Gegenbeispiel.
- 2 P. (Teil E) Die Funktion f aus Teil (A) ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig. Wieso?
- 2 P. (Teil F) Die Funktion f aus Teil (A) besitzt weder Minimum, noch Maximum. Wieso ist das kein Widerspruch zum Satz vom Maximum für stetige Funktionen?

- 8 P. (Teil A) Um zu entscheiden, ob es eine *stetige* Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{e^{-2x}-1}{x}$ für $x \neq 0$ gibt, ist es naheliegend, die Regel von de L'Hospital zu verwenden. Beantworten Sie folgende Fragen:
- (i). Welche Voraussetzungen sind für die Regel von de L'Hospital notwendig?
 - (ii). Warum sind diese hier erfüllt?
 - (iii). Welcher Grenzwert ist hier zu berechnen?
 - (iv). Gibt es nun eine solche stetige Funktion f oder nicht? Falls ja: wie lautet $f(0)$?
- 6 P. (Teil B) Geben Sie die Koeffizienten a_n der Potenzreihendarstellung der Funktion f aus Teil (A) um $x_0 = 0$. Unterscheiden Sie dabei a_0 und a_n für $n \geq 1$.
- 4 P. (Teil C) Gibt es sogar eine *differenzierbare* Funktion wie in Teil (A)? Falls ja, wie lautet $f'(0)$; wenn nein, warum nicht?
- 4 P. (Teil D) Wie lautet ganz allgemein der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der Potenzreihendarstellung einer Funktion g um x_0 und den Ableitungen $g^{(n)}(x_0)$?

4 P. (Teil A) Sei F eine Stammfunktion von f und g eine differenzierbare Funktion. Geben Sie eine Stammfunktion von $x \mapsto f(x)g(x)$ an und führen Sie die Probe durch Differenzieren aus!

6 P. (Teil B) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $p(x) = e^{-2x}x$.

4 P. (Teil C) Wie ist das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} x \, dx$$

definiert? Konvergiert es gegen einen endlichen Wert? Wenn ja, geben Sie diesen an; wenn nein, begründen Sie, warum es keinen gibt.

4 P. (Teil D) Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, \mathcal{Z}_1 eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und \mathcal{Z}_2 eine Verfeinerung von \mathcal{Z}_1 . Welche Ordnungsbeziehung gilt zwischen den vier Unter- und Obersummen $U(f; \mathcal{Z}_1), O(f; \mathcal{Z}_1), U(f; \mathcal{Z}_2)$ und $O(f; \mathcal{Z}_2)$?

$$\leq \qquad \qquad \qquad \leq \qquad \qquad \qquad \leq$$

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.