Mathematik 1 für BI, MB, WIMB, UI und VT

Open Book Prüfung am 25.6.2021

Prüfer: Gabriel Maresch

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus fünf Aufgaben I, II, III, IV und V, untergliedert jeweils in mehrere Teilaufgaben. Die Gewichtung jeder Aufgabe und jedes Unterpunktes ist jeweils am Beginn angegeben. Insgesamt können 100 Punkte erreicht werden, ab 50 Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn nicht anders angegeben, ist in allen Aufgaben Ihre Vorgehensweise zumindest kurz zu begründen. Es ist Ihre Bringschuld, dafür zu sorgen, dass Ihre Ausführungen nachvollziehbar sind. Nicht nachvollziehbare Ergebnisse, insbesondere Ergebnisse, die ohne angemessene Zwischenschritte „vom Himmel fallen" werden - unabhängig von ihrer Korrektheit - ausnahmslos nicht gewertet.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe	I	II	III	IV	V	Total
Punkte	17	22	21	20	20	100
erreicht						

Aufgabe I .... *17 Punkte*

$\boxed{2\text{ P.}}$ (Teil A) Wie ist die zur komplexen Zahl $z = a + ib$ konjugierte komplexe Zahl $\overline{z}$ definiert?

$\boxed{2\text{ P.}}$ (Teil B) Wie lauten Betrag und Polarwinkel der zu $r \cdot e^{i\phi}$ komplex konjugierten Zahl $\overline{r \cdot e^{i\phi}}$?

$\boxed{8\text{ P.}}$ (Teil C) Gegeben ist eine komplexe Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ eines Polynoms p mit *reellen* Koeffizienten, d.h.

$$p(z_0) = a_n z_0^n + \ldots + a_1 z_0 + a_0$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $p\big(\overline{z_0}\big)$ und geben Sie an, welche Eigenschaften der komplexen Konjugation Sie in jedem Zwischenschritt jeweils verwenden.

$\boxed{5\text{ P.}}$ (Teil D) Von einem Polynom $p(z) = a_5 z^5 + a_4 z^4 + \ldots + a_1 z + a_0$ sind folgende Dinge bekannt: (i) alle Koeffizienten $a_0, \ldots, a_5$ sind reell, (ii) $z^2 - 2z + 2$ ist ein Teiler von $p(z)$, (iii) $z_0 = -2i$ ist eine Nullstelle, (iv) $p(z)$ ist normiert und $a_0 = 0$. Wie lauten die restlichen Koeffizienten $a_1, \ldots, a_5$?

Aufgabe II .... *22 Punkte*

$\boxed{5\text{ P.}}$ (Teil A) Für festes $q \in \mathbb{R}$, ist die Folge $(b_n)_{n=0}^{\infty} = n \cdot q^n$ nicht notwendigerweise monoton. Für $q \geq 0$ gibt es aber immer einen Index $N = N_q \in \mathbb{N}$, sodass die Folge $(b_n)_{n=N}^{\infty}$ monton ist, d.h. dass die Monotonie zumindest ab diesem Index gilt. Bestimmen Sie für jedes $q \geq 0$ so einen Index $N = N_q$ und geben Sie an, welche Art der Monotonie (wachsend oder fallend, streng oder nicht) vorliegt.

$\boxed{12\text{ P.}}$ (Teil B) Bestimmen Sie mit einem oder mehreren Kriterien Ihrer Wahl, für welche $q \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot q^n$ absolut konvergiert, bedingt konvergiert bzw. divergiert.

$\boxed{5\text{ P.}}$ (Teil C) Analog zu Teil A kann man zeigen, dass z.B. auch die Folgen $(c_n)_{n=1}^{\infty} = \frac{\ln n}{n^\alpha}$ (mit $\alpha > 0$) alle ab einem bestimmten Index $N = N_\alpha$ monoton sind. Der Beweis dieser Aussage ist hier nicht notwendig, verwenden Sie aber das Verdichtungskriterium, um alle $\alpha > 0$ zu bestimmen, für die die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha}$ konvergiert.

Aufgabe III .... *21 Punkte*

$\boxed{6\text{ P.}}$ (Teil A) Entscheiden Sie, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2|x|}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = \frac{1}{2}$ an $x_0 = 0$ stetig ist oder nicht. Falls ja, geben Sie das in der ε-δ Charakterisierung der Stetigkeit geforderte $\delta(\varepsilon)$ an, falls nicht, geben Sie ein $\varepsilon > 0$ an, für das sich eben kein solches δ finden lässt. Fertigen Sie in jedem Fall eine Skizze an!

$\boxed{7\text{ P.}}$ (Teil B) Berechnen Sie die Grenzfunktion der Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-nx}}$ und entscheiden Sie, ob die Konvergenz gleichmäßig ist.

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil C) Zeigen Sie mit einem Beispiel[1], dass der Zwischenwertsatz für unstetige reelle Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *nicht* zu gelten braucht.

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil D) Zeigen Sie mit einem Beispiel[1], dass der Zwischenwertsatz für unstetige reelle Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dennoch gelten *kann*.

Aufgaben IV und V sind auf der nächsten Seite

[1] Sie müssen $f(x)$ nicht unbedingt explizit angeben. Eine aussagekräftige und *saubere* Skizze kann auch ausreichend sein.

Aufgabe IV .... *20 Punkte*

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil A) Die „Ableitungsregel" $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$ ist falsch. Zeigen Sie das anhand eines konkreten Beispiels.

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil B) Wie lautet die korrekte Version der Ableitungsregel aus Teil A? Überprüfen Sie die Richtigkeit mit Hilfe Ihres Gegenbeispiels aus Teil A.

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil C) Angenommen eine (mindestens dreimal) differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt

(i). an der Stelle x_0 die Ableitungen $f'(x_0) = 1; f''(x_0) = 0; f'''(x_0) = 0$,

(ii). an der Stelle x_1 die Ableitungen $f'(x_1) = 0; f''(x_1) = -1; f'''(x_1) = 0$,

(iii). an der Stelle x_2 die Ableitungen $f'(x_2) = 0; f''(x_2) = 1; f'''(x_2) = 0$,

(iv). an der Stelle x_3 die Ableitungen $f'(x_3) = 0; f''(x_3) = 0; f'''(x_3) = 1$,

Was können Sie jeweils für die Stellen x_0, x_1, x_2 und x_3 daraus schließen?

$\boxed{2\text{ P.}}$ (Teil D) Wenn für eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktionalgleichung $f(x) + f(-x) = 0$ gilt, was können Sie daraus für die Parität der Ableitung f' schließen? Geben Sie, wenn möglich, eine analoge Funktionalgleichung für f' an.

$\boxed{3\text{ P.}}$ (Teil E) Angenommen die Funktion $f(x) = \sum a_n x^n$ erfüllt die Funktionalgleichung $f(x) + f(-x) = 0$, was können Sie daraus für die Koeffizienten a_n mit geradem Index bzw. ungeradem Index schließen?

$\boxed{3\text{ P.}}$ (Teil F) Angenommen die Funktion $f(x) = \sum a_n x^n$ erfüllt die Funktionalgleichung $f(x) + f(-x) = 0$ und ist nicht die Nullfunktion. Was können Sie daraus für die Existenz der Umkehrfunktion $f^{(-1)}$ bzw. deren Wert an der Stelle $f(0)$ schließen?

Aufgabe V .... *20 Punkte*

$\boxed{6\text{ P.}}$ (Teil A) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \sin 4x + 2\sin 2x$ direkt, indem Sie den Ansatz $F_1(x) = A\cos 4x + B\cos 2x$ mit $A, B \in \mathbb{R}$ verwenden und anschließend die Probe machen!

$\boxed{6\text{ P.}}$ (Teil B) Verwenden Sie jetzt die Identität $\sin 4x + 2\sin 2x = 8\cos^3 x \sin x$ und eine geeignete Substitution, um eine <u>andere</u> Stammfunktion F_2 von $f(x) = \sin 4x + 2\sin 2x$ zu finden.

$\boxed{2\text{ P.}}$ (Teil C) Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt insbesondere, dass sich die Stammfunktionen aus Teil A und Teil B nur um eine Konstante unterscheiden können. Wie lautet hier der eindeutige Zahlenwert dieser Konstante?

$\boxed{6\text{ P.}}$ (Teil D) Berechnen Sie für $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ die Funktion $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$. Den Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ können Sie dabei frei wählen. Gilt dann $F'(0) = f(0)$? Wenn ja, rechnen Sie diese Gleichung bitte explizit nach. Wenn nein, erklären Sie, wieso das nicht dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung widerspricht.