Mathematik 1 für BI, MB, UI, WIMB und VT

Prüfung am 14.7.2020
Gabriel Maresch

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus fünf Aufgaben I, II, III, IV und V, untergliedert jeweils in mehrere Teilaufgaben A, B, C, ... Die Gewichtung jeder Aufgabe und jedes Unterpunktes ist jeweils am Beginn angegeben. Insgesamt können 100 Punkte erreicht werden, ab 50 Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, werden zu jeder Teilaufgabe die Punkte ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe).

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die Blätter am Ende dieses Heftes zur Verfügung. **Was immer Sie auf diesen Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.**
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe	I	II	III	IV	V	Total
Punkte	20	20	20	20	20	100
erreicht						

Aufgabe I. . . . . *20 Punkte*

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil A) Wir betrachten zwei endliche Mengen A und B mit $|A| = 4$ und $|B| = 2$. Eine Relation zwischen A und B ist bekanntlich eine Teilmenge von $A \times B$. Wieviele Relationen gibt es hier?

Antwort: Es gibt . . . . . . Relationen zwischen A und B.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Jede Funktion $f : A \to B$ lässt sich als Relation zwischen A und B schreiben, aber nicht jede Relation entspricht auch einer Funktion. Welche Eigenschaft muss eine Relation $R \subseteq A \times B$ besitzen, damit R einer Funktion entspricht?

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil C) Zwei wichtige Eigenschaften von Funktionen $f : A \to B$ sind Injektivität und Surjektivität. Schreiben Sie *in Formelschreibweise* an, wann eine Funktion $f : A \to B$ injektiv bzw. surjektiv ist!

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil D) Wieviele injektive Funktionen $f : A \to B$ gibt es, wenn wieder $|A| = 4$ und $|B| = 2$?

Antwort: Es gibt . . . . . . injektive Funktionen zwischen A und B.

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil E) Wieviele surjektive Funktionen $f : A \to B$ gibt es, wenn wieder $|A| = 4$ und $|B| = 2$?

Antwort: Es gibt . . . . . . surjektive Funktionen zwischen A und B.

Aufgabe II .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil A) Periodizität ist eine mögliche Eigenschaft einer unendlichen Folge (a_n). Definieren Sie *in Formelschreibweise* was eine „Periode" von (a_n) ist.

Für den Rest dieser Aufgabe betrachten wir die Folge $a_n = \cos \frac{\pi n}{M}$ mit Parameter $M \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Betrachten Sie die Folge a_n: was ist die kleinste Periode dieser Folge? Ihre Antwort sollte von $M \in \mathbb{N}$ abhängen.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Bestimmen Sie, ob die Folgen $\frac{1}{n} \cdot a_n$ divergieren oder konvergieren. Ihre Antwort kann, aber muss nicht, von $M \in \mathbb{N}$ abhängen.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Wir setzen nun $M = 1$. Es gibt eine Zahl $\kappa_0 \in \mathbb{R}$ sodass die Folgen $\frac{1}{n^\kappa} \cdot a_n$ für alle $\kappa > \kappa_0$ konvergieren und für alle $\kappa \leq \kappa_0$ divergieren. Bestimmen Sie κ_0:

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil E) Wir setzen wieder $M = 1$. Es gibt eine Zahl $\mu_0 \in \mathbb{R}$ sodass die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\mu} \cdot |a_n|$ für alle $\mu > \mu_0$ konvergieren und für alle $\mu \leq \mu_0$ divergieren. Bestimmen Sie μ_0:

Aufgabe III .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil A) Entscheiden Sie, ob die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x+x^2}{|x|}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ an $x_0 = 0$ stetig ist oder nicht. Falls ja, geben Sie das in der ε-δ Charakterisierung der Stetigkeit geforderte $\delta(\varepsilon)$ an, falls nicht, geben Sie ein $\varepsilon > 0$ an, für das sich eben kein solches δ finden lässt. Fertigen Sie in jedem Fall eine Skizze an!

$\boxed{\text{5 P.}}$ (Teil B) Wie lautet der Satz vom Maximum für stetige reelle Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$?

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil C) Zeigen Sie mit einem Beispiel[1], dass der Satz vom Maximum für stetige reelle Funktionen und offene Intervalle $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *nicht* zu gelten braucht.

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil D) Zeigen Sie mit einem Beispiel[1], dass der Satz vom Maximum für unstetige reelle Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *nicht* zu gelten braucht.

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil E) Zeigen Sie mit einem Beispiel[1], dass der Satz vom Maximum für unstetige reelle Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dennoch gelten *kann*.

[1] Sie müssen $f(x)$ nicht unbedingt explizit angeben. Eine aussagekräftige und *saubere* Skizze kann auch ausreichend sein.

Aufgabe IV .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil A) Gegeben ist eine Funktion $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$ mit zumindest auf dem Intervall (a, b) konvergenter Potenzreihendarstellung. Sie können dabei $x_0 \in (a, b)$ annehmen. Wie lauten die Werte $f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0), \ldots,$?

Anwort: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $f^{(n)}(x_0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil B) Gegeben ist wieder $f(x) = \sum a_n(x - x_0)^n$ mit zumindest auf dem Intervall (a, b) konvergenter Potenzreihendarstellung. Nun ist aber ungeschickterweise $x_0 < a$. Geben Sie ein möglichst großes Intervall $(A, B) \supset (a, b)$ an, auf dem die Potenzreihe notwendigerweise dann auch konvergieren muss! Hinweis: Skizzieren Sie x_0, a, b am Zahlenstrahl und verwenden Sie, dass Konvergenzbereiche von Potenzreihen eine spezielle Form haben.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Wie berechnet man ganz allgemein den Konvergenzbereich einer Potenzreihe $\sum a_n(x - x_0)^n$?

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil D) Wie lautet konkret der Konvergenzbereich der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n n^2 (x - 1)^n$? Untersuchen Sie insbesondere den Rand!

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil E) Die durch $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^n n^2 (x - 1)^n$ definierte Funktion ist in einer Umgebung von $x_0 = 1$ umkehrbar. Wie lautet die erste Ableitung der Umkehrfunktion an $y_0 = 0$?

Aufgabe V . . . . *20 Punkte*

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil A) Finden Sie alle Stammfunktionen der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln |x|$.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Finden Sie eine Stammfunktion von $g(x) = \sin 2x$, indem Sie $y = 2x$ substituieren.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Finden Sie eine andere Stammfunktion von $g(x) = \sin 2x$ indem Sie die Identität $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ verwenden.

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil D) Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt insbesondere, dass sich die Stammfunktionen aus Teil B und Teil C nur um eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ unterscheiden. Wie lautet hier der eindeutige Zahlenwert dieser Konstante (auf eine Nachkommastellen genau)?

Antwort: $c =$ . . . .

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil E) Wie lautet überhaupt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.