Mathematik 1 für BI, MB, WIMB, UI und VT

Stoffsemester: 2023S   Prüfer: Gabriel Maresch

Prüfung am 29.6.2023

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus fünf Aufgaben I, II, III, IV und V, untergliedert jeweils in mehrere Teilaufgaben A, B, C, D ...
  Die Gewichtung jeder Aufgabe und jedes Unterpunktes ist jeweils am Beginn angegeben. Insgesamt können 100 Punkte erreicht werden, ab 50 Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- In den meisten Fällen sollte der freie Platz am Angabeblatt jeweils für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.
- Es werden nur die Lösungen auf dem jeweiligen Angabeblatt gewertet - d.h. verwenden Sie keine Extrablätter und schreiben Sie nicht z.B. die Lösung von Aufgabe 1 auf das Angabeblatt von Aufgabe 2! Die Rückseiten der Blätter können verwendet werden!

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Aufgabe	I	II	III	IV	V	Total
Punkte	20	20	20	20	20	100
erreicht						

Aufgabe I .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{8 P.}}$ (Teil A) Wie lauten die Nullstellen des Polynoms $p(x) = x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 18x^2 + 20x$ wenn bekannt ist, dass $3 + i$ eine Nullstelle ist?

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil B) Die Polynomdivision liefert zu gegebenen Polynomen $p(x)$ und $q(x)$, zwei weitere Polynome $f(x)$ und $r(x)$:

$$p(x) = q(x)f(x) + r(x).$$

Was läßt sich *allgemein* über die Grade der Polynome f und r sagen? Geben Sie entweder den genauen Grad bzw. eine obere Schranke an!

$\boxed{\text{3 P.}}$ (Teil C) Überprüfen Sie Ihre Aussage aus Teil B für das Polynom $p(x)$ aus Teil A und das Polynom $q(x) = x - 1$.

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil D) Es sei $s(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Es bezeichne $m_s \leq \text{grad}\, s$ die Zahl der echt komplexen Nullstellen, d.h. $m_s = |\{z \in \mathbb{C} : s(z) = 0 \text{ und } \operatorname{Im} z \neq 0\}|$. Was läßt sich über die Zahl m_s sagen?

Geben Sie ein Polynom t an, das nicht nur reelle Koeffizienten besitzt, sodass die von Ihnen vorher gefundene Aussage für m_t nun nicht mehr gilt.

Aufgabe II .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil A) Geben Sie eine konkrete Folge (a_n) an, sodass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *nicht* alternierend ist.

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil B) Geben Sie nun eine Bedingung an die Folge (a_n) an, sodass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ alternierend ist.

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil C) Formulieren Sie das Leibnizkriterium für alternierende Reihen.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Wie ist die Konvergenz einer unendlichen Reihe überhaupt definiert? Führen Sie den Konvergenzbegriff für unendliche Reihen mithilfe der Konvergenz unendlicher Folgen ein!

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil E) Wie ist die Konverenz einer unendlichen Folge definiert? Geben Sie eine exakte Definition (d.h. in Formelschreibweise und mit Quantoren)!

Aufgabe III .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil A) Wie lautet die ε-δ-Definition der Stetigkeit einer reellen Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in D$?

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Geben Sie ein Beispiel einer reellen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ welche an $x_0 = 0$ *nicht* stetig ist. Zeigen Sie explizit, dass Ihre Definition aus Teil A an $x_0 = 0$ nicht erfüllt ist.

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil C) Was versteht man unter einer Sprungstelle bzw. der Sprunghöhe einer reellen Funktion? Verwenden Sie zur Erklärung die Funktionsgrenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Geben Sie ein Beispiel einer reellen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ welche an $x_0 = 0$ *nicht* stetig ist, dort aber *keine* Sprungstelle besitzt. Zeigen Sie wieder explizit, dass Ihre Definition aus Teil A an $x_0 = 0$ nicht erfüllt ist.

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil E) Die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ist streng monoton steigend. Wie lautet die Umkehrfunktion $f^{(-1)}(x)$ und was läßt sich über deren Stetigkeit an der Stelle $x_0 = 0$ aussagen?

Aufgabe IV .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{8 P.}}$ (Teil A) Berechnen Sie für die reellen Funktionen

$$f : x \mapsto \sqrt{\ln(1+x^2)}$$
$$g : x \mapsto \ln(\sqrt{1+x^2})$$

jeweils die erste Ableitung und geben Sie an, für welche $x \in \mathbb{R}$ diese überhaupt existiert. Geben Sie die von Ihnen verwendeten Ableitungsregeln an!

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil B) Welche der Funktionen f bzw. g aus Teil A lässt sich um $x = 0$ in eine Taylorreihe entwickeln? Begründen Sie kurz warum bzw. warum nicht (die Taylorreihe selbst braucht nicht angegeben zu werden).

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil C) Geben Sie für jene Funktion(en) aus Teil A, für die das möglich ist, $T_{0;3}(x)$ an (Taylorpolynom 3. Grades um $x = 0$).

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil D) Verwenden Sie die Rechenregeln für den Logarithmus, um die folgende Gleichung für die beiden Funktionen aus Teil A zu vervollständigen: $f^m = \alpha \cdot g$ mit $m = \ldots\ldots$ und $\alpha = \ldots\ldots$ $(m, \alpha \in \mathbb{R})$.

Aufgabe V . . . . *20 Punkte*

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil A) Sei F eine Stammfunktion von f und ϕ eine differenzierbare Funktion. Geben Sie mit Hilfe von F eine Stammfunktion von $f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$ an und führen Sie die Probe durch Differenzieren aus!

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil B) Bestimmen Sie unter Verwendung von Teil A eine Stammfunktion von $x \mapsto \sin(2x)\cos^2(2x)$.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Geben Sie eine geometrische Interpretation des Integrals

$$\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\cos^2(2x)\,dx$$

an und berechnen Sie dessen Wert.

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil D) Berechnen Sie die Untersumme $U(f;\mathcal{Z})$ und die Obersumme $O(f;\mathcal{Z})$ für die Funktion $f(x) = \sin(2x)\cos^2(2x)$ und die Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{2\pi}{8} < \frac{3\pi}{8} < \frac{4\pi}{8}$ des Intervalls $[0, \frac{\pi}{2}]$