Mathematik 1 für BI, MB, WIMB, UI und VT

Prüfer: Gabriel Maresch

Prüfung am 24.11.2021

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus fünf Aufgaben I, II, III, IV und V, untergliedert jeweils in mehrere Teilaufgaben A, B, ... Die Gewichtung jeder Aufgabe und jedes Unterpunktes ist jeweils am Beginn angegeben. Insgesamt können ~~100~~ 98 Punkte erreicht werden, ab ~~50~~ 49 Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.
- Schriftliche Unterlagen sind erlaubt, alle anderen Hilfsmittel nicht (auch keine Tablets mit elektronischen Mitschriften etc.)
- Wenn nicht anders angegeben, ist in allen Aufgaben Ihre Vorgehensweise stets zu begründen. Es ist Ihre Bringschuld, dafur zu sorgen, dass Ihre Ausführungen nachvollziehbar sind. Nicht nachvollziehbare Ergebnisse, insbesondere Ergebnisse, die ohne angemessene Zwischenschritte „vom Himmel fallen“, werden - unabhängig von ihrer Korrektheit - ausnahmslos nicht gewertet.

Aufgabe I .... *18 Punkte*

$\boxed{3\text{ P.}}$ (Teil A) Gegeben sind die drei Punkte $A = (0, 0), B = (a, b)$ und $C = (c, 0)$ wobei $a, b, c > 0$. Berechnen Sie jenen Punkt, der durch die orthogonale Projektion von C auf die Gerade durch die Punkte A und B entsteht, einerseits (i) direkt geometrisch mit einer Skizze und (ii) über eine geeignete Formel aus der Vektorrechnung, welche das Skalarprodukt zweier geeigneter Vektoren beinhaltet.

$\boxed{3\text{ P.}}$ (Teil B) Gegeben ist das rechtwinkelige Dreieck mit Eckpunkten $A = (0, 0, 0), B = (a, b, 0)$ und $C = (c, 0, 0)$ wobei $a, b, c > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks einerseits (i) direkt über die elementargeometrische Flächenformel eines rechtwinkligen Dreiecks und andererseits (ii) über eine geeignete Formel aus der Vektorrechnung, welche das Kreuzprodukt zweier geeigneter Vektoren beinhaltet.

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil C) Für fest vorgegebenen Vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$, sind $U_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} \cdot \vec{n} = 0\}$ und $U_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} \times \vec{n} = \vec{o}\}$ zwei wohlbekannte geometrische Gebilde. Welche? Fertigen Sie eine Skizze an!

$\boxed{8\text{ P.}}$ (Teil D) Der Vektor $\vec{n}$ sein nun konkret $\vec{n} = (1, 1, 1)$. Geben Sie die Parameterform der der Mengen U_1, U_2 aus Teil (C) an und zerlegen Sie den Vektor $\vec{x} = (1, 0, 0)$ in eine Summe $\vec{x} = \vec{x}_\parallel + \vec{x}_\perp$ wobei $\vec{x}_\parallel$ aus einem der beiden Unterräume U_1, U_2 sein soll und $\vec{x}_\perp$ aus dem anderen.

Aufgabe II .... *20 Punkte*

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil A) Oft betrachtet man bei gegebener Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Teilfolgen der Glieder mit geradem und mit ungeradem Index. Geben Sie für die Folge $a_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ diese beiden Teilfolgen vollständig (d.h. *alle* Folgenglieder) und explizit (d.h. möglichst einfach und ohne den Ausdruck „sin" zu verwenden) an.

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil B) Angenommen, die Teilfolge der geraden Glieder einer Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist fest vorgegeben. Können Sie die Teilfolge der ungeraden Glieder stets so wählen, dass b_n konvergiert? Wenn ja, geben Sie die Teilfolge der ungeraden Glieder an. Wenn nein, geben Sie ein Beispiel an, wo das nicht möglich ist.

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil C) Angenommen, die Teilfolge der ungeraden Glieder einer Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist fest vorgegeben. Können Sie die Teilfolge der geraden Glieder stets so wählen, dass c_n divergiert? Wenn ja, geben Sie die Teilfolge der geraden Glieder an. Wenn nein, geben Sie ein Beispiel an, wo das nicht möglich ist.

$\boxed{8\text{ P.}}$ (Teil D) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $d_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ und stellen Sie sicher, dass die von Ihnen angegebenen Werte tatsächlich Häufungspunkte sind! Wie können Sie sicher sein, dass Sie keinen Häufungspunkt vergessen haben?

Aufgabe III .... *20 Punkte*

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil A) Besonders einfache (aber auch wichtige) **stetige** Funktionen sind die affinen Funktionen

$$\boxed{f_{k,d} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \; f_{k,d}(x) = kx + d,}$$

wobei $k, d \in \mathbb{R}$ die bekannten Parameter für Steigung und Verschiebungskonstante sind. Affine Funktionen sind nicht nur stetig, sondern es gilt sogar

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) \;\;\; \forall x \in \mathbb{R} : \quad |x - y| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f_{k,d}(x) - f_{k,d}(y)| < \varepsilon \tag{$\star$}$$

Wie nennt man die Eigenschaft $(\star)$ und inwiefern ist diese stärker als „normale" Stetigkeit?

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil B) Angenommen es ist bekannt, dass die affine Funktion $f_{k,d} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 ein Maximum M annimmt. Was kann man daraus für die Parameter k, d schließen?

$k =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $d =$

$\boxed{4\text{ P.}}$ (Teil C) Die Hintereinander-Ausführung zweier affiner Funktionen ist wieder affin. Berechnen Sie Steigung und Verschiebungskonstante von $f_{k_1,d_1} \circ f_{k_2,d_2}$.

$\boxed{8\text{ P.}}$ (Teil D) Für $k \neq 0$ ist die affine Funktion $f_{k,d}$ bijektiv und die Umkehrfunktion ist ebenfalls affin. Bestimmen Sie Steigung und Verschiebungskonstante dieser Umkehrfunktion. Skizzieren Sie $f_{k,d}$ und $f_{k,d}^{(-1)}$ so, dass man aus Ihrer Skizze klar erkennt, dass es sich um Umkehrfunktionen handelt. Vermerken Sie in Ihrer Skizze auch, welche Rolle die Parameter k, d spielen.

Aufgabe IV .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil A) Um zu entscheiden, ob es eine *stetige* Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{e^{4x}-1}{x}$ für $x \neq 0$ gibt, ist es naheliegend, die Regel von de L'Hospital zu verwenden. Beantworten Sie folgende Fragen:

(i). Warum sind hier die Vorausstetzungen für die Anwendung der Regel von de L'Hospital erfüllt?

(ii). Welcher Grenzwert ist zu berechnen?

(iii). Gibt es nun eine solche stetige Funktion f? Wenn ja, wie muss man sie definieren? Wenn nein, warum nicht?

$\boxed{\text{6 P.}}$ (Teil B) Ermitteln Sie die Koeffizienten a_n der Potenzreihendarstellung der Funktion f aus Teil (A) um $x_0 = 0$. Unterscheiden Sie dabei a_0 und a_n für $n \geq 1$.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Gibt es sogar eine *differenzierbare* Funktion wie in Teil (A)? Falls ja, wie lautet $f'(0)$; wenn nein, warum nicht?

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Mithilfe der Potenzreihendarstellung aus Teil (B), läßt sich das Monotonieverhalten der Funktion f aus Teil (A), zumindest für $x > 0$, sehr direkt bestimmen. Tun Sie dies!

Aufgabe V .... *20 Punkte*

$\boxed{\text{2 P.}}$ (Teil A) Der *Funktionsgraph* einer reellen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kann besonders einfach parametrisiert werden. Geben Sie eine solche Parametrisierung mit Parameter $t \in [a, b]$ an:

$x(t) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $y(t) =$

$\boxed{\text{10 P.}}$ (Teil B) Die Bogenlänge einer Kurve ist definiert als das Supremum aller eingeschriebenen Streckenzüge (d.h. Anfangs- und Endpunkt jeder Strecke liegt am Funktionsgraph). Geben Sie für die Funktion $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ und die Zerlegungen $\mathcal{Z}_1 = \{-1, 0, 1\}$ (zwei Strecken) und $\mathcal{Z}_2 = \{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$ (drei Strecken) diese Streckenzüge an. Machen Sie eine Skizze und berechnen Sie elementar die Länge Ihrer beiden Streckenzüge (dabei auftretende Wurzelausdrücke brauchen nicht weiter numerisch bestimmt werden).

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil C) Für differenzierbares $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ läßt sich die Bogenlänge des Funktionsgraphen von f als Integral darstellen. Geben Sie dieses Integral inkl. Integrationsgrenzen für die Kurve aus Teil (C) an. Der Integrand soll dabei so weit vereinfacht werden wie möglich, die Integration selbst braucht aber nicht durchgeführt zu werden.

$\boxed{\text{4 P.}}$ (Teil D) Verwenden Sie die Tatsache, dass die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus *beschränkt* sind, um den Integranden aus Teil (C) möglichst gut nach oben abzuschätzen. Welche obere Schranke ergibt sich damit für die Länge der Kurve?