

Modellierung mit partiellen Differentialgleichungen  
WS2012

Niklas Angleitner

4. März 2013

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorbemerkungen</b>	<b>3</b>
1.1	Methode der Charakteristiken . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Verkehrsflussmodelle - Hyperbolische Erhaltungsgesetze</b>	<b>4</b>
2.1	Modellieren . . . . .	4
2.2	Skalare, hyperbolische Erhaltungsgleichungen . . . . .	6
2.3	Das Ampelproblem . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Strömungsmechanische Modelle</b>	<b>11</b>
3.1	Notation . . . . .	11
3.2	Reynolds'sches Transporttheorem . . . . .	11
3.3	Erhaltungssätze . . . . .	13
3.4	Euler-Gleichungen und Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	16
3.5	Stokes-Strömungen . . . . .	18
3.6	Bemerkung zur Beobachterunabhängigkeit des Reibungsgesetzes . . . . .	20
3.7	A-priori-Abschätzungen für Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	20
3.8	Grenzschichten für Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Elastizitätstheorie</b>	<b>29</b>
4.1	Notation . . . . .	29
4.2	Hyperelastische Materialien . . . . .	29
4.3	Variationsformulierung . . . . .	30
4.4	Linearisierte Elastizitätstheorie . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Homogenisierung</b>	<b>33</b>
5.1	Modellproblem . . . . .	33
5.2	Das 1-dimensionale Modellproblem . . . . .	34
5.3	Das mehrdimensionale Modellproblem . . . . .	35
5.4	Der Konvergenzbeweis von Luc Tartar mit oszillierenden Testfunktionen . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Reaktions-Diffusions-Gleichungen und Musterbildung</b>	<b>41</b>
6.1	Reaktions-Diffusions-Gleichungen . . . . .	41
6.2	Turing-Instabilität . . . . .	41
6.3	Cahn-Hilliard-Gleichung . . . . .	44
<b>7</b>	<b>Das Stefan-Problem</b>	<b>49</b>
7.1	Notation . . . . .	49
7.2	Transporttheorem . . . . .	50
7.3	Stefan-Problem . . . . .	51
7.4	Existenztheorie für das Ein-Phasen-Stefan-Problem . . . . .	52

# 1 Vorbemerkungen

## 1.1 Methode der Charakteristiken

Die *Methode der Charakteristiken* eignet sich dazu, partielle, quasilineare Differentialgleichungen 1. Ordnung zu lösen:

### 1.1.1 Gleichung. (Partiell, quasilinear, 1. Ordnung)

Gleichung für  $u = u(x, t)$  auf  $\Omega := \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ .

$$\sum_i P_i(x, t, u) \cdot \partial_{x_i} u + Q(x, t, u) \cdot \partial_t u = R(x, t, u) \quad \text{in } \Omega,$$
$$u = u_0 \quad \text{bei } t = 0.$$

Die Idee der Methode besteht nun darin, einen möglichst großen Teil (wenn möglich ganz)  $\Omega$  mit parametrisierten Linien (den sog. *Charakteristiken*) zu überdecken, entlang denen sich die Differentialgleichung vereinfacht. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

- $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$ : Startpunkt einer Charakteristik.
- $s \mapsto (x(s), t(s)) \in \Omega$ : Charakteristik mit  $(x(0), t(0)) = (x_0, 0)$ .
- $\tilde{u}(s) := u(x(s), t(s))$ : Funktion entlang der Charakteristik.

Für die Ableitung von  $\tilde{u}$  erhält man

$$\tilde{u}'(s) = \sum_i (\partial_{x_i} u) \cdot x_i'(s) + (\partial_t u) \cdot t'(s).$$

Ein „Koeffizientenvergleich“ mit der Differentialgleichung legt es nahe,  $x(s), t(s)$  und  $\tilde{u}(s)$  als Lösung des folgenden Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu suchen:

### 1.1.2 Gleichung. (ODE-System für Charakteristiken)

$$\forall i : \begin{aligned} x_i'(s) &= P_i(x(s), t(s), \tilde{u}(s)), & x_i(0) &= (x_0)_i, \\ t'(s) &= Q(x(s), t(s), \tilde{u}(s)), & t(0) &= 0, \\ \tilde{u}'(s) &= R(x(s), t(s), \tilde{u}(s)), & \tilde{u}(0) &= u_0(x_0). \end{aligned}$$

Kann man dieses System lösen, so lässt sich daraus die Lösung der ursprünglichen Gleichung berechnen. Möchte man etwa den Wert von  $u$  an einer Stelle  $(x, t)$  wissen, so muss man nur eine Charakteristik finden, die zum Zeitpunkt  $t$  den Punkt  $x$  durchläuft. Anschließend berechnet man jenes  $s$ , für das  $(x(s), t(s)) = (x, t)$  gilt. Der gesuchte Wert der Lösung  $u$  ergibt sich dann durch

$$u(x, t) = \tilde{u}(s).$$

### 1.1.3 Bemerkung.

Ist die ursprüngliche Gleichung homogen, i.e.  $R \equiv 0$ , so gilt  $\tilde{u} \equiv \text{const}$ . In diesem Fall wird die Anfangsverteilung  $u_0$  also nur entlang der Charakteristiken verschoben.

## 2 Verkehrsflussmodelle - Hyperbolische Erhaltungsgesetze

### 2.1 Modellieren

Wir betrachten eine Ampel-geregelte Straße, auf der sich Autos bewegen. Wir stellen uns die Frage, wie lange die beiden Ampelphasen „rot“ und „grün“ jeweils sein dürfen, damit sich der bei „rot“ aufbauende Stau bei „grün“ wieder vollständig auflösen kann. Um ein sinnvolles mathematisches Modell zu konstruieren, müssen wir bestimmte *Modellannahmen* machen:

- Die Straße ist eine unendlich lange, einspurige Einbahn, auf der nicht überholt werden kann und die keine Zu- und Abfahrten besitzt. Wir modellieren sie durch die reelle Achse  $\mathbb{R}$ . Die Autos fahren von links nach rechts.
- Es befinden sich sehr viele Autos auf der Straße. Die Verwendung einer *Fahrzeugdichte* ist also gerechtfertigt.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

- $\rho(x, t)$ : Fahrzeugdichte (Anzahl Fahrzeuge pro Länge) an der Stelle  $x \in \mathbb{R}$  zum Zeitpunkt  $t > 0$ .
- $v(x, t)$ : Geschwindigkeit der Fahrzeuge beim Passieren der Stelle  $x \in \mathbb{R}$  zum Zeitpunkt  $t > 0$ .

Unser erstes Ziel wird nun sein, eine Differentialgleichung für  $\rho$  und  $v$  aufzustellen, die „die Realität“ beschreibt. Wir betrachten dazu ein festes Intervall  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  in der Zeitspanne  $[t, t + \Delta t]$  und erhalten die folgende *Bilanzgleichung*:

$$\underbrace{\int_a^b \rho(x, t + \Delta t) dx}_{\text{Anzahl der Autos im Intervall zum Zeitpunkt } t + \Delta t} - \underbrace{\int_a^b \rho(x, t) dx}_{\text{Anzahl der Autos im Intervall zum Zeitpunkt } t} = \underbrace{\rho(a, t) \cdot v(a, t) \cdot \Delta t}_{\text{Anzahl der Autos, die über } a \text{ ins Intervall einfahren}} - \underbrace{\rho(b, t) \cdot v(b, t) \cdot \Delta t}_{\text{Anzahl der Autos, die über } b \text{ aus dem Intervall hinausfahren}}.$$

Division durch  $\Delta t$  und anschließender Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  liefern

$$\int_a^b \partial_t \rho(x, t) dx = \int_a^b -\partial_x(\rho(x, t) \cdot v(x, t)) dx.$$

Da das Intervall beliebig war, sind schon die beiden Integranden gleich. Wir erhalten die sog. *Kontinuitätsgleichung*:

#### 2.1.1 Gleichung. (Kontinuität)

Gleichung für  $\rho = \rho(x, t)$  und  $v = v(x, t)$  auf  $\Omega := \mathbb{R} \times [0, \infty)$ .

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho \cdot v) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \rho &= \rho_0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die Kontinuitätsgleichung drückt eine Erhaltung aus: Die Gesamtanzahl der Fahrzeuge auf  $\mathbb{R}$  bleibt gleich, es gehen keine Autos verloren und es kommen auch keine neuen hinzu. Gleichungen dieser Art nennt man *Erhaltungsgleichungen*.

Wir nehmen nun an, dass die Geschwindigkeit  $v$  von der Fahrzeugdichte  $\rho$  abhängt, also dass es einen funktionalen Zusammenhang  $\rho \mapsto v(\rho)$  gibt. Für diese Funktion  $v$  machen wir folgende Annahmen:

- $\rho \mapsto v(\rho)$  ist monoton fallend (wenn viele Autos da sind, kann man nur langsam fahren).
- $v(\rho_{\max}) = 0$ . Bei maximaler Fahrzeugdichte müssen die Autos stehen.
- $v(0) = v_{\max}$ . Sogar bei freier Fahrbahn gibt es ein Tempolimit.

Der einfachste Ansatz für die Funktion  $v$  ist linear:

$$v(\rho) := v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right), \quad \rho \in [0, \rho_{\max}].$$

Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung liefert

$$0 = \partial_t \rho + (\partial_x \rho) \cdot v + \rho \cdot (\partial_x v) = \partial_t \rho + (\partial_x \rho) \cdot v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}}\right) + \rho \cdot \left(-\frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} \cdot \partial_x \rho\right) = \partial_t \rho + (\partial_x \rho) \cdot v_{\max} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \rho}{\rho_{\max}}\right).$$

Nun werden wir das Problem *entdimensionalisieren*. Wir betrachten also eine „typische“ Längenskala  $L$  (z.B. ein Meter) und eine „typische“ Zeitskala  $T$  (z.B. eine Sekunde). Wir setzen

$$\tilde{x} := \frac{x}{L}, \quad \tilde{t} := \frac{t}{T} \quad \text{und} \quad u(\tilde{x}, \tilde{t}) := 1 - \frac{2 \cdot \rho(\tilde{x} \cdot L, \tilde{t} \cdot T)}{\rho_{\max}}.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \frac{\rho_{\max}}{2} \cdot (1 - u(\tilde{x}, \tilde{t})), \\ (\partial_t \rho)(x, t) &= -\frac{\rho_{\max}}{2 \cdot T} \cdot (\partial_{\tilde{t}} u)(\tilde{x}, \tilde{t}), \\ (\partial_x \rho)(x, t) &= -\frac{\rho_{\max}}{2 \cdot L} \cdot (\partial_{\tilde{x}} u)(\tilde{x}, \tilde{t}). \end{aligned}$$

Wir setzen diese Ausdrücke in unsere Differentialgleichung ein und erhalten

$$0 = L \cdot (\partial_{\tilde{t}} u) + T \cdot (\partial_{\tilde{x}} u) \cdot v_{\max} \cdot u.$$

Wählt man  $L$  und  $T$  derart, dass  $\frac{L}{T} = v_{\max}$  gilt und schreibt man statt  $\tilde{x}, \tilde{t}$  nur  $x, t$ <sup>1</sup>, dann ergibt sich die sog. *Burgersgleichung*:

### 2.1.2 Gleichung. (Burgers)

Gleichung für  $u = u(x, t)$  auf  $\Omega := \mathbb{R} \times [0, \infty)$ .

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} \right) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

### 2.1.3 Bemerkung. (Interpretation von $u$ )

Die Variable  $u$  hängt wie folgt mit dem Verkehrsaufkommen zusammen:

- Leere Straße  $\Leftrightarrow \rho = 0 \Leftrightarrow v = v_{\max} \Leftrightarrow u = 1$ .
- Stau  $\Leftrightarrow \rho = \rho_{\max} \Leftrightarrow v = 0 \Leftrightarrow u = -1$ .

Die Burgersgleichung ist ein Spezialfall von sog. *hyperbolischen* Gleichungen:

### 2.1.4 Definition. (Hyperbolische Gleichung)

Gleichung für  $u = u(x, t)$  auf  $\Omega := \mathbb{R} \times [0, \infty)$ .

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x (f(u)) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

heißt *hyperbolisch*, falls die Ableitung  $df$  der Funktion  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  punktweise reell diagonalisierbar ist.

### 2.1.5 Bemerkung. (Existenz klassischer Lösungen)

Hyperbolische Gleichungen müssen nicht zwangsweise eine klassische Lösung besitzen, nicht einmal falls  $f$  und  $u_0$  glatt sind. Ein Gegenbeispiel ist die Burgersgleichung mit  $f(v) := \frac{v^2}{2}$  und

$$u_0(x) := \begin{cases} 1 & , x < 0, \\ 1 - x & , 0 \leq x < 1, \\ 0 & , 1 \leq x. \end{cases}$$

Mit der Methode der Charakteristiken lässt sich nämlich zeigen, dass für jedes  $t > 1$  die Funktion  $u(\cdot, t)$  eine Unstetigkeitsstelle aufweist.

<sup>1</sup>Bloß der Ästhetik wegen. Es ist nicht  $\tilde{x} = x$  und  $\tilde{t} = t$  gemeint.

## 2.2 Skalare, hyperbolische Erhaltungsgleichungen

In diesem Kapitel werden wir uns auf den skalaren Fall ( $m = 1$ ) von hyperbolischen Gleichungen mit der zusätzlichen Forderung, dass  $f$  konvex ( $f'' > 0$ ) ist, konzentrieren. Wie wir bereits gesehen haben, muss es nicht unbedingt klassische Lösungen geben. Daher führen wir im Folgenden den Begriff der *schwachen Lösung* ein.

Wir gehen davon aus, dass die hyperbolische Gleichung eine klassische Lösung  $u$  besitzt, multiplizieren die gesamte Gleichung mit einer *Testfunktion*  $\phi \in C_{00}^1(\mathbb{R}^2) := \{\phi \in C^1(\mathbb{R}^2) \mid \text{supp}(\phi) \text{ ist kompakt}\}$  und integrieren über  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} [\partial_t u + \partial_x(f(u))] \cdot \phi \, d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{\mathbb{R}^+} (\partial_t u) \cdot \phi \, dt \right] dx + \int_{\mathbb{R}^+} \left[ \int_{\mathbb{R}} \partial_x(f(u)) \cdot \phi \, dx \right] dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[ -u_0(x) \cdot \phi(x, 0) - \int_{\mathbb{R}^+} u \cdot (\partial_t \phi) \, dt \right] dx + \int_{\mathbb{R}^+} \left[ - \int_{\mathbb{R}} f(u) \cdot (\partial_x \phi) \, dx \right] dt \end{aligned}$$

Nun kommen keine Ableitungen von  $u$  mehr vor. Die Menge aller (nicht einmal als stetig geforderten) Funktionen  $u$ , die diese Integralgleichung erfüllen, ist also potentiell größer als die Menge der klassischen Lösungen. Das motiviert den Begriff der *schwachen Lösung*:

### 2.2.1 Definition. (Schwache Lösung der hyperbolischen Gleichung)

Eine Funktion  $u \in L_{loc}^{\infty}(\Omega)$  heißt *schwache Lösung der hyperbolischen Gleichung*, wenn für jede Testfunktion  $\phi \in C_{00}^1(\mathbb{R}^2)$  gilt, dass

$$\int_{\Omega} u \cdot (\partial_t \phi) + f(u) \cdot (\partial_x \phi) \, d\lambda + \int_{\mathbb{R}} u_0 \cdot \phi(\cdot, 0) \, dx = 0.$$

Wir geben uns nun eine konkrete Anfangsverteilung  $u_0$  vor und suchen nach solchen schwachen Lösungen.

### 2.2.2 Gleichung. (Riemannproblem)

Gleichung für  $u = u(x, t)$  auf  $\Omega := \mathbb{R} \times [0, \infty)$ .

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x(f(u)) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit der Anfangsverteilung

$$u_0(x) := \begin{cases} u_l & , x < 0, \\ u_r & , x > 0, \end{cases} \quad (u_l, u_r \in \mathbb{R} \text{ fest})$$

heißt *Riemannproblem*.

Die Methode der Charakteristiken, angewendet auf das Riemannproblem, liefert das folgende System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} x'(s) &= f'(\tilde{u}(s)), & x(0) &= x_0, \\ t'(s) &= 1, & t(0) &= 0, \\ \tilde{u}'(s) &= 0, & \tilde{u}(0) &= u_0(x_0). \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Systems lautet

$$x(s) = f'(u_0(x_0)) \cdot s + x_0, \quad t(s) = s, \quad \tilde{u}(s) = u_0(x_0).$$

Die Charakteristiken sind also Geraden mit Steigung  $f'(u_0(x_0))$  und Inhomogenität  $x_0$ .

Interessant ist nun, dass die Werte  $u_l$  und  $u_r$  Einfluss auf den Typ der Lösung haben. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- 1. Fall:  $u_l > u_r$ : Wegen  $f'' > 0$  ist  $f'$  streng monoton steigend und daher  $f'(u_l) > f'(u_r)$ . Die Charakteristiken durch Anfangswerte  $x_0 < 0$  haben als eine größere Steigung als jene durch Anfangswerte  $x_0 > 0$ . Das impliziert, dass sich die Charakteristiken mit negativen Anfangswerten mit den Charakteristiken mit positiven Anfangswerten in endlicher Zeit schneiden müssen. Das stellt ein Problem dar, da nun für alle  $(x, t)$ , die im Schnittbereich liegen, mehrere Kandidaten für  $u(x, t)$  in Frage kommen. Man kann nun beliebig viele, stückweise klassische Lösungen angeben, die die Anfangsbedingung erfüllen, z.B. alle Funktionen der Bauart

$$u(x, t) := \begin{cases} u_l & , x < \psi(t), \\ u_r & , x > \psi(t), \end{cases}$$

wobei  $t \mapsto \psi(t)$  eine Parametrisierung einer Unstetigkeitslinie im Schnittbereich der Charakteristiken ist. Interessanterweise ist nicht jede dieser stückweise konstanten Lösungen auch eine schwache Lösung. Durch Einsetzen in die Definition der schwachen Lösung sieht man nämlich, dass dafür noch zusätzlich die sog. *Rankine-Hugoniot-Bedingung* gefordert werden muss:

$$\psi'(t) = \frac{f(u_l(t)) - f(u_r(t))}{u_l(t) - u_r(t)}, \quad \text{wobei } u_{l/r}(t) := \lim_{\Delta x \searrow 0} u(\psi(t) \mp \Delta x, t).$$

Wir erhalten also die unstetige, schwache Lösung

$$u(x, t) := \begin{cases} u_l & , x < \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} \cdot t, \\ u_r & \text{sonst.} \end{cases}$$

- **2. Fall:  $u_l < u_r$ :** Wieder wegen der Monotonie von  $f'$  erhalten wir  $f'(u_l) < f'(u_r)$ . In diesem Fall schneiden sich die Charakteristiken nicht, sie bilden sogar einen Kegel in der  $(x, t)$ -Ebene, in den gar keine Charakteristiken einlaufen. Es gibt innerhalb dieses Kegels also potentiell mehrere schwache Lösungen. Eine davon ist beispielsweise wieder die schwache Lösung aus dem 1. Fall. Anders als zuvor gibt es nun aber auch Charakteristiken, die aus der Unstetigkeitslinie *herauslaufen*. Eine weitere schwache Lösung erhält man durch einen sog. *Ähnlichkeitsansatz*: Man nimmt an, dass  $u$  im Kegel von der Form  $u(x, t) = \tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right)$  für eine noch zu bestimmende Funktion  $\tilde{u}$  ist. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert dann

$$0 = \partial_t(u(x, t)) + f'(u(x, t)) \cdot \partial_x(u(x, t)) = \tilde{u}'\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \left(-\frac{x}{t^2}\right) + f'\left(\tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right)\right) \cdot \tilde{u}'\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \frac{1}{t}.$$

Diese Gleichung lässt sich wegen der Konvexität von  $f$  nach  $\tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right)$  auflösen:

$$\tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right) = (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right).$$

Damit haben wir eine stetige, schwache Lösung gefunden. Sie trägt den Namen *Verdünnungsfächer*:

$$u(x, t) := \begin{cases} u_l & , x < f'(u_l) \cdot t, \\ u_r & , x > f'(u_r) \cdot t, \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da es also innerhalb des Kegels mehrere schwache Lösungen geben kann, benötigen wir ein Auswahlkriterium. Dafür gibt es unter anderem die folgenden drei Möglichkeiten:

- Entropiebedingung von Peter Lax: Für Lösungen mit einer Unstetigkeitslinie  $\psi$  (im Kegel) wird verlangt, dass Charakteristiken nur in die Linie einlaufen und nicht aus ihr austreten dürfen:

$$f'(u_l(t)) > \frac{f(u_l(t)) - f(u_r(t))}{u_l(t) - u_r(t)} > f'(u_r(t)).$$

Der erste Grund für diese Forderung lautet, dass z.B. die schwache Lösung<sup>2</sup>  $u$  der Burgersgleichung *austretende* Charakteristiken hat und instabil ist (kleine Änderung von  $u_0$  führt zu großer Änderung von  $u$ ). Der zweite Grund lautet, dass die Charakteristiken dann bis zum Ursprung auf der  $x$ -Achse zurückverfolgt werden können und die Lösung somit eindeutig von der Anfangsverteilung  $u_0$  abhängt.

- Entropiebedingung von Oleinik: Diese Bedingung stellt eine Verallgemeinerung der Lax-Bedingung auf nicht-konvexe  $f$  dar:

$$\forall v \in (u_l(t), u_r(t)) : \frac{f(u_l(t)) - f(v)}{u_l(t) - v} \geq \psi'(t) \geq \frac{f(u_r(t)) - f(v)}{u_r(t) - v}.$$

- Viskositäts-/Entropielösung: In manchen Fällen liegt es nahe, dass die hyperbolische Gleichung nur eine vereinfachte Form der folgenden Gleichung ist:

**2.2.3 Gleichung. (Verallgemeinerte hyperbolische Gleichung)**  
Gleichung für  $u^\epsilon = u^\epsilon(x, t)$  auf  $\Omega := \mathbb{R} \times [0, \infty)$ .

$$\begin{aligned} \partial_t u^\epsilon + \partial_x(f(u^\epsilon)) &= \epsilon \cdot \partial_{xx} u^\epsilon && \text{in } \Omega, \\ u^\epsilon &= u_0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Gemeint ist hier die stückweise konstante Lösung mit gerader Unstetigkeitslinie (Steigung 1/2) bezüglich der Anfangsverteilung  $u_0 := \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}$ .

Diese verallgemeinerte Gleichung besitzt für jedes  $\epsilon > 0$  eine eindeutige Lösung. Ist die Anfangsverteilung  $u_0$  stetig, konvergieren die Lösungen  $u^\epsilon$  punktweise f.ü. gegen eine Grenzfunktion  $u^0$  und sind die  $u^\epsilon$  auf kompakten Rechtecken gleichmäßig beschränkt, dann ist  $u^0$  eine schwache Lösung der hyperbolischen Gleichung. Sie wird *Viskositätslösung* genannt.

Um nun den Begriff der *Entropielösung* herzuleiten, benötigen wir sog. *Entropiepaare*:

**2.2.4 Definition. (Entropiepaar der hyperbolischen Gleichung)**

Eine konvexe Funktion  $\eta \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  heißt *Entropie*, wenn es einen sog. *Entropiefluss*  $\psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  gibt, sodass für alle klassischen Lösungen  $u$  der hyperbolischen Gleichung gilt:

$$\partial_t(\eta(u)) + \partial_x(\psi(u)) = 0.$$

In diesem Fall heißt  $(\eta, \psi)$  *Entropiepaar der hyperbolischen Gleichung*. Im skalaren Fall ist insbesondere jede Funktion  $\psi$  mit  $\psi'(v) = \eta'(v) \cdot f'(v), \forall v \in \mathbb{R}$ , eine gültige Wahl.

Sei  $u^\epsilon$  die eindeutige Lösung der verallgemeinerten hyperbolischen Gleichung und  $(\eta, \psi)$  ein Entropiepaar der hyperbolischen Gleichung. Dann gilt

$$\partial_t(\eta(u^\epsilon)) + \partial_x(\psi(u^\epsilon)) = \epsilon \cdot \eta'(u^\epsilon) \cdot (\partial_{xx} u^\epsilon) = \epsilon \cdot \partial_{xx}(\eta(u^\epsilon)) - \epsilon \cdot \eta''(u^\epsilon) \cdot (\partial_x u^\epsilon)^2 \leq \epsilon \cdot \partial_{xx}(\eta(u^\epsilon)).$$

Multipliziert man diese Ungleichung mit einer Testfunktion  $\phi \in C_{00}^2(\mathbb{R}^2)$  mit  $\phi \geq 0$  und integriert über  $\Omega$ , so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} [\epsilon \cdot \partial_{xx}(\eta(u^\epsilon)) - \partial_t(\eta(u^\epsilon)) - \partial_x(\psi(u^\epsilon))] \cdot \phi \, d\lambda \\ &= \int_{\Omega} \epsilon \cdot \eta(u^\epsilon) \cdot (\partial_{xx} \phi) + \eta(u^\epsilon) \cdot (\partial_t \phi) + \psi(u^\epsilon) \cdot (\partial_x \phi) \, d\lambda + \int_{\mathbb{R}} \eta(u^\epsilon(x, 0)) \cdot \phi(x, 0) \, dx. \end{aligned}$$

Mit der Grenzwertbildung  $\epsilon \rightarrow 0$  erhält man also eine Bedingung an die Viskositätslösung  $u^0$ . Das motiviert den Begriff der *Entropielösung*:

**2.2.5 Definition. (Entropielösung)**

Eine schwache Lösung  $u$  der hyperbolischen Gleichung heißt *Entropielösung*, falls für alle Entropiepaare  $(\eta, \psi)$  gilt:

$$\forall \phi \in C_{00}^1(\mathbb{R}^2) : \quad 0 \leq \int_{\Omega} \eta(u) \cdot (\partial_t \phi) + \psi(u) \cdot (\partial_x \phi) \, d\lambda + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \cdot \phi(x, 0) \, dx.$$

**2.2.6 Bemerkung.**

Es lässt sich zeigen, dass die eingangs erwähnt Schocklösung keine Entropielösung und der eingangs definierte Verdünnungsfächer sehrwohl eine Entropielösung ist.

Das Konzept der Entropielösungen liefert eine schöne Lösungstheorie:

**2.2.7 Satz. (Kruzkov)**

Für jede Anfangsverteilung  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  gibt es eine eindeutige Entropielösung der hyperbolischen Gleichung.

Hyperbolische Gleichungen haben die Eigenschaft der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit:

**2.2.8 Satz. (Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit)**

Seien  $u_0, v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  und  $u, v$  die zugehörigen Entropielösungen der hyperbolischen Gleichung. Seien weiters

$$M := \sup \{ |f'(s)| \mid s \in [\inf(u_0, v_0), \sup(u_0, v_0)] \}$$

sowie  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $d > 0$  fest. Stimmen nun  $u_0$  und  $v_0$  auf dem Intervall  $(-d + x_0, x_0 + d)$  überein, so stimmen schon  $u$  und  $v$  auf dem Dreieck  $\{(x, t) \mid |x - x_0| + M \cdot t < d\}$  überein. Es beeinflussen also nur die Funktionswerte der Anfangsverteilung im Intervall  $(-d + x_0, x_0 + d)$  den Funktionswert der Lösung bei  $(x_0, \frac{d}{M})$ .



## 2.3 Das Ampelproblem

Wir nehmen nun an, dass sich an der Stelle  $x = 0$  unserer Straße eine Ampel befindet, die im Zeitintervall  $[0, \omega)$  auf „Rot“ steht, zum Zeitpunkt  $\omega$  auf „Grün“ schaltet und dann im Intervall  $[\omega, 2\omega)$  auf „Grün“ bleibt. Nun stellt sich die Frage, wie  $\omega$  gewählt werden muss, damit sich der bei „Rot“ aufbauende Stau in der „Grün“-Phase wieder vollständig auflösen kann. Wir gehen also von der folgenden Gleichung aus:

### 2.3.1 Gleichung. (Ampelproblem)

Gleichung für  $u = u(x, t)$  auf  $\Omega := \mathbb{R} \times [0, \infty)$ .

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x \left( \frac{u^2}{2} \right) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit der Anfangsverteilung

$$u_0(x) := \begin{cases} u_l & , x < 0, \\ -1 & , x > 0. \end{cases} \quad (u_l \in (-1, 1] \text{ fest.})$$

Für  $t \in [0, \omega)$  erhalten wir die Schocklösung aus dem ersten Fall des Riemannproblems:

$$u(x, t) := \begin{cases} u_l & , x < \frac{1}{2} \cdot (u_l - 1) \cdot t, \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun schaltet die Ampel auf „Grün“, das entspricht freier Fahrt für  $x > 0$ . Um das Verhalten für die Zeit  $t > \omega$  zu simulieren, betrachten wir also eine weitere „Anfangs“-Verteilung

$$u_1(x) := \begin{cases} u_l & , x < \frac{1}{2} \cdot (u_l - 1) \cdot \omega, \\ -1 & , \frac{1}{2} \cdot (u_l - 1) \cdot \omega < x < 0, \\ 1 & , x > 0. \end{cases}$$

Wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit beeinflussen sich die beiden Unstetigkeiten in  $u_1$  bis zu einem gewissen Zeitpunkt  $t_B$  nicht. Die Lösung setzt sich also im Zeitintervall  $[\omega, t_B)$  durch eine Schockwelle und einen Verdünnungsfächer zusammen:

$$u(x, t) := \begin{cases} u_l & , x < \frac{1}{2} \cdot (u_l - 1) \cdot t, \\ -1 & , \frac{1}{2} \cdot (u_l - 1) \cdot t < x < -(t - \omega), \\ \frac{x}{t - \omega} & , -(t - \omega) < x < t - \omega, \\ 1 & , (t - \omega) < x. \end{cases}$$

Der Zeitpunkt  $t_B$  der ersten Interaktion zwischen Schockwelle und Verdünnungsfächer ist gegeben durch  $\frac{1}{2}(u_l - 1)t_B = -(t_B - \omega)$  und berechnet sich zu  $t_B = \frac{2\omega}{u_l + 1}$ . Zu diesem Zeitpunkt sieht die Lösung gerade so aus:

$$u(x, t_B) := \begin{cases} u_l & , x < \frac{1}{2} \cdot (u_l - 1) \cdot t_B, \\ \frac{x}{t_B - \omega} & , -(t_B - \omega) < x < t_B - \omega, \\ 1 & , (t_B - \omega) < x. \end{cases}$$

Da die Lösung zu diesem Zeitpunkt genau eine Unstetigkeitsstelle hat und der Funktionswert an dieser Stelle von  $u_l$  auf  $-1$  fällt, erwarten wir, dass sich die Unstetigkeit für  $t > t_B$  entlang einer Schockkurve  $t \mapsto \psi(t)$  ausbreitet. Die Rankine-Hugoniot-Bedingung liefert eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $\psi$ :

$$\psi'(t) = \frac{\frac{1}{2} \cdot u_l(t)^2 - \frac{1}{2} \cdot u_r(t)^2}{u_l(t) - u_r(t)} = \frac{1}{2} \cdot (u_l(t) + u_r(t)) = \frac{1}{2} \cdot \left( u_l + \frac{\psi(t)}{t - \omega} \right), \quad \psi(t_B) = \frac{1}{2} \cdot t_B \cdot (u_l - 1).$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$\psi(t) = u_l \cdot (t - \omega) - \sqrt{t - \omega} \cdot \sqrt{\omega \cdot (1 - u_l^2)}.$$

Daraus lässt sich nun ablesen, unter welchen Bedingungen an  $u_l$  sich der Stau innerhalb der Grünphase abbauen kann.

- 1. Fall:  $u_l < 0$ : In diesem Fall gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = -\infty$ . Der Schock breitet sich also nach links aus. Das entspricht einer Stauwelle, die nach links wandert und für alle Zeiten existiert.

- 2. Fall:  $u_l > 0$ : In diesem Fall gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = +\infty$ . Es gibt also einen Zeitpunkt  $t_A$ , ab dem  $\psi(t) > 0$  gilt und die Autos links von der Ampel nichts von einem Stau erkennen können. Wir berechnen nun  $t_A$ :

$$0 = \psi(t_A) = u_l \cdot (t_A - \omega) - \sqrt{t_A - \omega} \cdot \sqrt{\omega \cdot (1 - u_l^2)} \quad \Rightarrow \quad t_A = \frac{\omega}{u_l^2}.$$

Der Stau kann sich also genau dann auflösen, wenn  $t_A < 2 \cdot \omega$  ist. Das entspricht  $\rho_l < 0.14 \cdot \rho_{\max}$ .

### 3 Strömungsmechanische Modelle

#### 3.1 Notation

Das Ziel dieses Kapitels ist es, Fluide und verformbare Körper zu beschreiben. Dazu führen wir folgende Notation ein:

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ : Jenes Gebiet, das vom Fluid zum Zeitpunkt  $t_0$  ausgefüllt wird. Wir bezeichnen es als *Referenzkonfiguration*.
- $X \in \Omega$ : Ein *Materiepunkt*.
- $t \mapsto x(t, X)$ : Die Bewegung des Materiepunktes  $X$ .
- $\Omega(t) := x(t, \Omega)$ : Jenes Gebiet, das vom Fluid zum Zeitpunkt  $t$  ausgefüllt wird. Wir bezeichnen es als *Momentan-konfiguration*.

Wir machen nun einige Annahmen:

- $\forall X \in \Omega : x(t_0, X) = X$ .
- $(t, X) \mapsto x(t, X) \in C^2((t_0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$ .
- Für jedes  $t \geq t_0$  ist  $X \mapsto x(t, X)$  eine Bijektion zwischen  $\Omega$  und  $\Omega(t)$ .
- Für alle  $t \geq t_0$  und alle  $X \in \Omega$  erfüllt die Jacobi-Determinante  $J(t, X) := \det \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j}(t, X) \right)_{i,j=1}^d$  die Bedingung  $J(t, X) > 0$ .

Großbuchstaben (z.B.  $X$ ) gehören zu den sog. *Lagrange*-Koordinaten. Es wird ein fester Materiepunkt  $X$  betrachtet und seine Bewegung verfolgt. Kleinbuchstaben (z.B.  $x$ ) gehören zu den sog. *Euler*-Koordinaten. Es wird ein fester Raumpunkt betrachtet, durch den verschiedene Materiepunkte hindurchfließen. Dementsprechend kann auch eine physikalische Größe (z.B. Temperatur) auf zwei Arten beschrieben werden:

- $\Phi(t, X)$ : Wert der physikalischen Größe des Materiepunktes  $X$  zum Zeitpunkt  $t$ .
- $\phi(t, x)$ : Wert der physikalischen Größe im Ortspunkt  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ .

Die beiden Funktionen hängen auf folgende Art zusammen:

$$\phi(t, x(t, X)) = \Phi(t, X).$$

Wir setzen weiters:

- $V(t, X) := \partial_t(x(t, X)), \forall t \geq t_0, X \in \Omega$ : Geschwindigkeit des Materiepunktes  $X$  zum Zeitpunkt  $t$ .
- $v(t, x) := V(t, (x(t, \cdot))^{-1}(x)), \forall t \geq t_0, x \in \Omega(t)$ : Geschwindigkeit jenes Materiepunktes, der sich zum Zeitpunkt  $t$  an der Stelle  $x$  befindet.

#### 3.2 Reynolds'sches Transporttheorem

Wir werden später das folgende Lemma brauchen:

##### 3.2.1 Lemma.

Für beliebige Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$  gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \cdot \left[ \det(A + \epsilon \cdot B \cdot A) - \det(A) \right] = \text{spur}(B) \cdot \det(A).$$

**Beweis.**

Die Behauptung folgt unmittelbar aus

$$\begin{aligned}
\det(A + \epsilon \cdot B \cdot A) - \det(A) &= [\det(I + \epsilon \cdot B) - 1] \cdot \det(A) \\
&= \left[ \left( \prod_{i=1}^d (1 + \epsilon \cdot b_{ii}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) - 1 \right] \cdot \det(A) \\
&= \left[ \left( 1 + \epsilon \cdot \sum_{i=1}^d b_{ii} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) - 1 \right] \cdot \det(A) \\
&= [\epsilon \cdot \text{spur}(B) + \mathcal{O}(\epsilon^2)] \cdot \det(A).
\end{aligned}$$

■

Als Korollar erhalten wir:

**3.2.2 Korollar.**

Sei  $t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  stetig differenzierbar und es existiere  $A(t_0)^{-1}$ . Dann gilt:

$$\frac{d}{dt}(\det \circ A)(t_0) = \text{spur}(A(t_0)^{-1} \cdot A'(t_0)) \cdot \det(A(t_0)).$$

Mit diesem Lemma lässt sich der folgende Satz beweisen:

**3.2.3 Satz. (Euler)**

Unter den eingang gemachten Voraussetzungen berechnet sich die partielle Zeitableitung der Jacobi-Determinante zu

$$\partial_t J(t, X) = (\text{div}_x v)(t, x(t, X)) \cdot J(t, X).$$

**Beweis.**

Definiert man  $A(t) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  durch  $A_{ij}(t) := \partial_{X_j}(x_i(t, X))$ , dann gilt:

$$\frac{d}{dt} A_{ij}(t) = \partial_t \left[ \frac{d}{dX_j} \left[ x_i(t, X) \right] \right] = \frac{d}{dX_j} \left[ V_i(t, X) \right] = \frac{d}{dX_j} \left[ v_i(t, x(t, X)) \right] = \sum_{k=1}^d (\partial_{x_k} v_i)(t, x(t, X)) \cdot A_{kj}(t).$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned}
\text{spur} \left( A(t)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} A(t) \right) &= \sum_{i,j=1}^d (A(t)^{-1})_{ij} \cdot \left( \frac{d}{dt} A(t) \right)_{ji} \\
&= \sum_{i,j,k=1}^d (A(t)^{-1})_{ij} \cdot (\partial_{x_k} v_j)(t, x(t, X)) \cdot A_{ki}(t) \\
&= \sum_{j,k=1}^d \left[ (\partial_{x_k} v_j)(t, x(t, X)) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^d (A(t)^{-1})_{ij} \cdot A_{ki}(t)}_{=\delta_{kj}} \right] \\
&= \sum_{k=1}^d (\partial_{x_k} v_k)(t, x(t, X)) \\
&= (\text{div}_x v)(t, x(t, X)).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und dem vorangegangenen Korollar sieht man die Behauptung:

$$\partial_t J(t, X) = \frac{d}{dt} \det(A(t)) = \text{spur}(A(t)^{-1} \cdot A'(t)) \cdot \det(A(t)) = (\text{div}_x v)(t, x(t, X)) \cdot J(t, X).$$

■

Nun können wir das *Reynolds'sche Transporttheorem* formulieren und beweisen:

### 3.2.4 Satz. (Reynolds'sches Transporttheorem)

Unter den eingangs gemachten Voraussetzungen gilt für eine skalarwertige, physikalische Größe  $(t, x) \mapsto \phi(t, x)$  stets

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \phi(t, x) \, dx = \int_{\Omega(t)} (\partial_t \phi)(t, x) + \operatorname{div}_x(\phi \cdot v)(t, x) \, dx.$$

Dabei bezeichnet  $v(t, x)$  die Fluidgeschwindigkeit am Ortspunkt  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ .

#### Beweis.

Der Transformationssatz für Integrale und der Satz von Euler liefern

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \phi(t, x) \, dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi(t, x(t, X)) \cdot J(t, X) \, dX \\ &= \int_{\Omega} (\partial_t \phi)(t, x(t, X)) \cdot J(t, X) + \sum_{i=1}^d (\partial_{x_i} \phi)(t, x(t, X)) \cdot V_i(t, X) \cdot J(t, X) \\ &\quad + \phi(t, x(t, X)) \cdot (\operatorname{div}_x v)(t, x(t, X)) \cdot J(t, X) \, dX \\ &= \int_{\Omega(t)} (\partial_t \phi)(t, x) + \sum_{i=1}^d (\partial_{x_i} \phi)(t, x) \cdot v_i(t, x) + \phi(t, x) \cdot (\operatorname{div}_x v)(t, x) \, dx \\ &= \int_{\Omega(t)} (\partial_t \phi)(t, x) + \operatorname{div}_x(\phi \cdot v)(t, x) \, dx. \end{aligned}$$

■

Das Reynolds'sche Transporttheorem gilt auch für vektorwertige Funktionen:

### 3.2.5 Korollar. (Reynolds'sches Transporttheorem für vektorwertige Funktionen)

Unter den eingangs gemachten Voraussetzungen gilt für eine vektorwertige, physikalische Größe  $(t, x) \mapsto \phi(t, x)$  stets

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \phi(t, x) \, dx = \int_{\Omega(t)} (\partial_t \phi)(t, x) + \operatorname{Div}_x(\phi \cdot v^T)(t, x) \, dx.$$

Dabei bezeichnet  $\operatorname{Div}_x$  den zeilenweise agierenden *Matrixdivergenzoperator*, definiert durch  $[\operatorname{Div}_x M(x)]_i := \sum_j \partial_{x_j} M_{ij}(x)$ .

#### Beweis.

Die Behauptung folgt aus dem Reynolds'schen Transporttheorem und der Tatsache, dass für Vektoren  $a = (a_i)_i, b = (b_j)_j \in \mathbb{R}^d$  und die Matrix  $a \cdot b^T = (a_i \cdot b_j)_{ij} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  gilt:

$$[\operatorname{Div}_x(a \cdot b^T)]_k = \sum_j \partial_{x_j} (a_k \cdot b_j) = \operatorname{div}_x(a_k \cdot b).$$

■

## 3.3 Erhaltungssätze

Die folgende Gleichung gilt immer dann, wenn die Masse eines Fluids erhalten bleibt:

### 3.3.1 Gleichung. (Massenerhaltung/Kontinuitätsgleichung)

Sei  $\Omega(t) \subseteq \mathbb{R}^d$  jenes Gebiet, das von einem Fluid zum Zeitpunkt  $t$  ausgefüllt wird und beschreibe mit  $\rho(t, x)$  und  $v(t, x)$  die Dichte und die Geschwindigkeit des Fluids am Ortspunkt  $x$  zum Zeitpunkt  $t$  in Euler-Koordinaten. Gehorcht das Fluid der *Massenerhaltung*, d.h. für jedes Gebiet  $\omega \subseteq \Omega$  gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(t, x) \, dx = 0,$$

dann gilt auch die sog. *Kontinuitätsgleichung*:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho \cdot v) = 0.$$

**Beweis.**

Aus dem Reynolds'schen Transporttheorem folgt für jedes Gebiet  $\omega \subseteq \Omega$

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(t, x) \, dx = \int_{\omega(t)} (\partial_t \rho)(t, x) + \operatorname{div}_x(\rho \cdot v)(t, x) \, dx.$$

Durch Variation von  $\omega(t)$  erhält man nun eine punktweise Aussage, nämlich genau die Behauptung:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho \cdot v) = 0.$$

■

Für den nächsten Erhaltungssatz benötigen wir das Konzept von Kräften:

- $f(t, x) \in \mathbb{R}^d$ : Massebezogene<sup>3</sup> Kraftdichte am Ortspunkt  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ . Beispielsweise  $f = -g \cdot e_z$  mit der Erdbeschleunigung  $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ .
- $b(t, x) \in \mathbb{R}^d$ : Flächenbezogene<sup>4</sup> Kraftdichte am Ortspunkt  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ .

Mit Hilfe dieser Notation für Kräfte können wir nun den sog. *Spannungstensor* definieren. Dazu gehen wir von einem Gebiet  $\Omega(t)$  aus und zerteilen es in zwei Teilgebiete  $\Omega_1(t)$  und  $\Omega_2(t)$  derart, dass  $\Omega_1$  vollständig im Inneren von  $\Omega_2$  liegt. Diese beiden Teilgebiete können Kräfte nur über die gemeinsame Schnittfläche  $\Gamma$  austauschen. Jene Kraft, die von  $\Omega_1(t)$  auf  $\Omega_2(t)$  ausgeübt wird, ist gegeben durch

$$F_{\Omega_1(t) \rightarrow \Omega_2(t)} = \int_{\Gamma} b_{\Gamma}(t, x) \, d\mu.$$

Der Index von  $b$  ist notwendig, da die im Material übertragene Kraft noch von der Schnittfläche abhängt.<sup>5</sup> Wir fordern nun, dass die Abhängigkeit von  $\Gamma$  tatsächlich nur eine Abhängigkeit von der normierten Normalenrichtung  $n(t, x)$  auf  $\Gamma$  ist<sup>6</sup>:

$$F_{\Omega_1(t) \rightarrow \Omega_2(t)} = \int_{\Gamma} b(t, x, n(t, x)) \, d\mu.$$

Das *Cauchy'sche Axiom* fordert nun, dass es eine hinreichend glatte Funktion  $b$  gibt, sodass diese Gleichung für alle hinreichend glatten Schnittflächen  $\Gamma$  gilt.

Das nächste Lemma zeigt, dass  $b$  linear von  $n$  abhängt:

**3.3.2 Lemma. (Existenz des Spannungstensors)**

Seien die soeben eingeführten Funktionen  $\rho, v, f, b$  hinreichend glatt. Dann existiert eine Abbildung  $(t, x) \mapsto \sigma(t, x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ , sodass

$$b(t, x, n(t, x)) = \sigma(t, x) \cdot n(t, x).$$

In diesem Fall nennen wir  $\sigma$  den *Spannungstensor*.

**Beweis.**

Der klassische *Impulserhaltungssatz* aus der Mechanik besagt, dass die Änderung des Impulses eines Körpers gleich der Summe der am Körper angreifenden Kräfte ist:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(t, x) \cdot v(t, x) \, dx = \int_{\Omega(t)} \rho(t, x) \cdot f(t, x) \, dx + \int_{\partial\Omega(t)} b(t, x, n(t, x)) \, d\mu.$$

Wenden man darauf das Reynolds'sche Transporttheorem für vektorwertige Funktionen an, so erhält man

$$\int_{\Omega(t)} \partial_t(\rho \cdot v)(t, x) + \operatorname{Div}_x(\rho \cdot v \cdot v^T)(t, x) \, dx = \int_{\Omega(t)} \rho(t, x) \cdot f(t, x) \, dx + \int_{\partial\Omega(t)} b(t, x, n(t, x)) \, d\mu.$$

Wir wenden diese Gleichung jetzt auf ein Tetraeder  $T$  an, dessen eine Ecke im Koordinatenursprung und dessen andere drei Ecken irgendwo auf den Koordinatenachsen im Abstand  $\mathcal{O}(\epsilon)$  zum Ursprung liegen.<sup>7</sup> Bezeichnet man die

<sup>3</sup>Wird  $f$  also mit einer Masse multipliziert, so ergibt das eine Kraft.

<sup>4</sup>Wird  $b$  also mit einer Fläche multipliziert, so ergibt das eine Kraft.

<sup>5</sup>Dass die am Punkt  $x$  von  $\Omega_1(t)$  auf  $\Omega_2(t)$  übertragene Kraft tatsächlich von  $\Gamma$  abhängt, zeigt das folgende Beispiel: Betrachte das Rechteck  $\Omega(t) := [0, 2] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$  und zerschneide es bei  $x = 1$  vertikal in zwei Quadrate. Wird nun das linke Quadrat horizontal auf das rechte gepresst, so treten an der Schnittfläche nur Druckkräfte in  $x$ -Richtung auf. Zerschneidet man das Rechteck  $\Omega(t)$  hingegen diagonal vom Punkt  $(\frac{1}{2}, 0)$  bis zum Punkt  $(\frac{3}{2}, 1)$  und presst man wieder das linke Stück parallel zur  $x$ -Achse auf das rechte, so haben die Kräfte an der Schnittfläche diesmal auch einen Anteil in  $y$ -Richtung.

<sup>6</sup>Konvention:  $n$  zeigt von  $\Omega_1(t)$  nach  $\Omega_2(t)$ .

<sup>7</sup>Genau gesehen muss man sich den Tetraeder nicht an den Koordinatenursprung, sondern an die Schnittfläche  $\Gamma$  angeheftet denken. Der Normalvektor  $n$  zeigt dann genau in die Normalenrichtung von  $\Gamma$  an dieser Stelle.

Seitenflächen mit  $S_x, S_y, S_z, S_n$  und den Normalvektor auf die einzige schräge Fläche mit  $n$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \int_T \partial_t(\rho \cdot v) + \text{Div}_x(\rho \cdot v \cdot v^T) - \rho \cdot f \, dx &= \int_{\partial T} b(t, x, n(t, x)) \, d\mu \\ &= \sum_{k \in \{x, y, z\}} \int_{S_k} b(t, x, -e_k) \, d\mu + \int_{S_n} b(t, x, n) \, d\mu \end{aligned}$$

Nun lässt man das Tetraeder auf den Ursprung zusammenschrumpfen. Da das linke Integral mit Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon^3)$  gegen 0 konvergiert, die beiden rechten es jedoch nur mit Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  tun, erhalten wir

$$0 = \sum_k |S_k| \cdot b(t, x, -e_k) + |S_n| \cdot b(t, x, n).$$

Setzt man dann den Zusammenhang  $|S_k| = \langle n, e_k \rangle \cdot |S_n|$  ein, so ergibt sich genau die Linearität von  $b$ :

$$b\left(t, x, \sum_k \langle n, -e_k \rangle \cdot (-e_k)\right) = \sum_k \langle n, -e_k \rangle \cdot b(t, x, -e_k).$$

Als lineare Abbildung hat  $b$  eine darstellende Matrix. Diese bezeichnen wir mit  $\sigma$ . ■

### 3.3.3 Lemma. (Symmetrie des Spannungstensors)

Der Spannungstensor ist symmetrisch, d.h.

$$\sigma = \sigma^T.$$

#### Beweis.

Die Symmetrie von  $\sigma$  kann aus dem klassischen *Drehimpulserhaltungssatz* aus der Mechanik abgeleitet werden:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(t, x) \cdot [x \times v(t, x)] \, dx = \int_{\Omega(t)} \rho(t, x) \cdot [x \times f(t, x)] \, dx + \int_{\partial\Omega(t)} x \times b(t, x, n(t, x)) \, d\mu.$$

Mit Darstellung von  $b$  über  $\sigma$  und dem Integralsatz von Gauß für vektorwertige Funktionen können wir die von  $\Omega_1(t)$  auf  $\Omega_2(t)$  ausgeübte Kraft vereinfachen zu

$$F_{\Omega_1(t) \rightarrow \Omega_2(t)} = \int_{\Gamma} b(t, x, n(t, x)) \, d\mu = \int_{\Gamma} \sigma(t, x) \cdot n(t, x) \, d\mu = \int_{\Omega_1(t)} \text{Div}_x \sigma(t, x) \, dx.$$

Diesen Ausdruck setzen wir nun in den modifizierten Impulserhaltungssatz aus dem Beweis des vorigen Lemmas ein:

$$\int_{\Omega_1(t)} \partial_t(\rho \cdot v) + \text{Div}_x(\rho \cdot v \cdot v^T) - \rho \cdot f \, dx = F_{\Omega_1(t) \rightarrow \Omega_2(t)} = \int_{\Omega_1(t)} \text{Div}_x \sigma \, dx.$$

Variiert man wieder  $\Omega_1(t)$  über ganz  $\Omega$ , so erhält man die sog. *Impulserhaltungsgleichung*:

### 3.3.4 Gleichung. (Impulserhaltung/Impulserhaltungsgleichung)

Sei  $\Omega(t) \subseteq \mathbb{R}^d$  jenes Gebiet, das von einem Fluid zum Zeitpunkt  $t$  ausgefüllt wird und beschreibe mit  $\rho(t, x), v(t, x), f(t, x), \sigma(t, x)$  die Dichte, die Geschwindigkeit, die von außen einwirkende Kraft(dichte) und den daraus resultierenden Spannungstensor des Fluids am Ortspunkt  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ . Gehorcht das Fluid der *Impulserhaltung*, d.h. für jedes Gebiet  $\omega \subseteq \Omega$  und die aus  $f$  resultierende Oberflächenkraftdichte  $b$  gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho(t, x) \cdot v(t, x) \, dx = \int_{\omega(t)} \rho(t, x) \cdot f(t, x) \, dx + \int_{\partial\omega(t)} b(t, x, n(t, x)) \, d\mu,$$

dann gilt auch die sog. *Impulserhaltungsgleichung*:

$$\partial_t(\rho \cdot v) + \text{Div}_x(\rho \cdot v \cdot v^T) = \rho \cdot f + \text{Div}_x \sigma.$$

Als letzte Erhaltungsgleichung haben wir noch die *Energieerhaltung*:

### 3.3.5 Gleichung. (Energieerhaltung/Energieerhaltungsgleichung)

Sei  $\Omega(t) \subseteq \mathbb{R}^d$  jenes Gebiet, das von einem Fluid zum Zeitpunkt  $t$  ausgefüllt wird und beschreibe mit  $\rho(t, x), v(t, x), f(t, x), \sigma(t, x)$  die Dichte, die Geschwindigkeit, die von außen einwirkende Kraft(dichte) und den daraus resultierenden Spannungstensor des Fluids am Ortspunkt  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ . Gehorcht das Fluid der *Energieerhaltung*, d.h. für jedes Gebiet  $\omega \subseteq \Omega$  und die aus  $f$  resultierende Oberflächenkraftdichte  $b$  gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \|v\|^2}_{\text{kin. Energie}} + \underbrace{\rho \cdot e}_{\text{Wärme}} \, dx = \int_{\omega(t)} \underbrace{\rho \cdot \langle f, v \rangle}_{\text{Leistung von } f} + \underbrace{\rho \cdot g}_{\text{Wärmeprod. in } \omega(t)} \, dx + \int_{\partial\omega(t)} \underbrace{\langle b, v \rangle}_{\text{Leistung von } b} - \underbrace{\langle q, n \rangle}_{\text{Wärmefluss über } \partial\omega(t)} \, d\mu,$$

dann gilt auch die sog. *Energieerhaltungsgleichung*:

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \|v\|^2 + \rho \cdot e \right) + \operatorname{div}_x \left( \left( \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \|v\|^2 + \rho \cdot e \right) \cdot v \right) + \operatorname{div}_x(q) = \rho \cdot \langle f, v \rangle + \operatorname{div}_x(\sigma^T \cdot v) + \rho \cdot g.$$

Zu den drei Erhaltungsgleichungen kommen nun noch Annahmen über die Form von  $q$  und  $\sigma$ :

- *Fourier'sches Gesetz*:  $q = -k \cdot \nabla_x T$ , wobei  $T \in \mathbb{R}$  die Temperatur und  $k \in \mathbb{R}$  die Wärmeleitfähigkeit des Fluids beschreibt.
- *Reibungsfreies Fluid*:  $\sigma = -p \cdot I$ , wobei  $p \in \mathbb{R}$  den Druck des Fluids beschreibt.
- *Reibungsbehaftetes (viskoses) Fluid*:  $\sigma = \sigma_S - p \cdot I$ , wobei  $\sigma_S$  nun zusätzlich die sog. *Scherspannung* des Fluids beschreibt.

## 3.4 Euler-Gleichungen und Navier-Stokes-Gleichungen

Die *Euler-Gleichungen* sind genau die Erhaltungsgleichungen für reibungsfreie Fluide, die dem Fourier'schen Gesetz gehorchen. Es ergibt sich:

### 3.4.1 Gleichung. (Euler-Gleichungen)

Seien  $v, \rho, p, T, f, g, e, k$  die Geschwindigkeit, die Dichte, der Druck, die Temperatur, die von außen einwirkende, massenspezifische Kraft(dichte), die massenspezifische Wärmeproduktion, die Wärme(energie) und die Wärmeleitfähigkeit eines reibungsfreien Fluids, das dem Fourier'schen Gesetz gehorcht. Dann gelten die sog. *Euler-Gleichungen*:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho \cdot v) &= 0, \\ \rho \cdot (\partial_t v) + \rho \cdot (d_x v) \cdot v + \nabla_x p &= \rho \cdot f, \\ \rho \cdot (\partial_t e) + \rho \cdot \langle \nabla_x e, v \rangle + p \cdot \operatorname{div}_x(v) &= \rho \cdot g + \operatorname{div}_x(k \cdot \nabla_x T). \end{aligned}$$

#### Beweis.

Aus der Reibungsfreiheit  $\sigma = -p \cdot I$  folgt unmittelbar  $\operatorname{Div}_x \sigma = -\nabla_x p$ . Setzt man dies und das Fourier'sche Gesetz  $q = -k \cdot \nabla_x T$  in die Erhaltungsgleichungen ein, so erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho \cdot v) &= 0, \\ \partial_t(\rho \cdot v) + \operatorname{Div}_x(\rho \cdot v \cdot v^T) + \nabla_x p &= \rho \cdot f, \\ \partial_t \left( \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \|v\|^2 + \rho \cdot e \right) + \operatorname{div}_x \left( \left( \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \|v\|^2 + \rho \cdot e \right) \cdot v \right) + \operatorname{div}_x(p \cdot v) &= \rho \cdot \langle f, v \rangle + \rho \cdot g + \operatorname{div}_x(k \cdot \nabla_x T). \end{aligned}$$

Ausdifferenzieren der ersten Gleichung liefert

$$\partial_t \rho + \langle \nabla_x \rho, v \rangle + \rho \cdot (\operatorname{div}_x v) = 0.$$

Ausdifferenzieren der zweiten Gleichung und Verwendung der Identitäten

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}_x(c \cdot A) &= A \cdot (\nabla_x c) + c \cdot (\operatorname{Div}_x A), & (c \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{d \times d}) \\ \operatorname{Div}_x(a \cdot b^T) &= (d_x a) \cdot b + a \cdot (\operatorname{div}_x b) & (a, b \in \mathbb{R}^d) \end{aligned}$$



zeigt

$$\begin{aligned}
 \rho \cdot f &= (\partial_t \rho) \cdot v + \rho \cdot (\partial_t v) + v \cdot v^T \cdot (\nabla_x \rho) + \rho \cdot (d_x v) \cdot v + \rho \cdot v \cdot (\operatorname{div}_x v) + \nabla_x p \\
 &= \underbrace{\left[ \partial_t \rho + \langle \nabla_x \rho, v \rangle + \rho \cdot (\operatorname{div}_x v) \right]}_{=0} v + \rho \cdot (\partial_t v) + \rho \cdot (d_x v) \cdot v + \nabla_x p \\
 &= \rho \cdot (\partial_t v) + \rho \cdot (d_x v) \cdot v + \nabla_x p.
 \end{aligned}$$

Zuletzt differenzieren wir auch noch die dritte Gleichung aus:

$$\begin{aligned}
 \langle \rho \cdot f, v \rangle + \rho \cdot g + \operatorname{div}_x (k \cdot \nabla_x T) &= \frac{1}{2} \cdot \|v\|^2 \cdot \underbrace{[\partial_t \rho + \langle \nabla_x \rho, v \rangle + \rho \cdot (\operatorname{div}_x v)]}_{=0} \\
 &\quad + \underbrace{\langle \rho \cdot (\partial_t v) + \rho \cdot (d_x v) \cdot v + \nabla_x p, v \rangle}_{=\langle \rho f, v \rangle} + \partial_t (\rho \cdot e) + \operatorname{div}_x (\rho \cdot e \cdot v) + p \cdot (\operatorname{div}_x v) \\
 &= \langle \rho \cdot f, v \rangle + e \cdot \underbrace{[\partial_t \rho + \operatorname{div}_x (\rho \cdot v)]}_{=0} + \rho \cdot (\partial_t e) + \rho \cdot \langle \nabla_x e, v \rangle + p \cdot (\operatorname{div}_x v).
 \end{aligned}$$

Damit sind die drei Gleichungen bewiesen. ■

### 3.4.2 Bemerkung. (Divergenzfreiheit inkompressibler Fluide)

Ist ein Fluid *inkompressibel*, d.h. für alle Startvolumina  $\omega \subseteq \Omega$  und alle Zeiten  $t \geq t_0$  gilt  $\lambda(\omega(t)) = \lambda(\omega)$ , dann folgt aus dem Reynolds'schen Transporttheorem die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsvektorfeldes:

$$\operatorname{div}_x(v) = 0.$$

Die Annahme der Inkompressibilität ist insbesondere bei „kleinen“ Strömungsgeschwindigkeiten zulässig.

Für die Herleitung der Navier-Stokes-Gleichungen werden wir später das folgende Resultat benötigen:

### 3.4.3 Satz. (Rivlin-Ericksen)

Eine Funktion

$$\hat{\sigma} : \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A = A^T, \det(A) > 0\} \longrightarrow \{B \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid B = B^T\}$$

besitzt genau dann die Eigenschaft

$$\forall U \in O(3) : \hat{\sigma}(U \cdot A \cdot U^{-1}) = U \cdot \hat{\sigma}(A) \cdot U^{-1},$$

wenn  $\hat{\sigma}$  die Form

$$\hat{\sigma}(A) = a_0 \cdot I + a_1 \cdot A + a_2 \cdot A^2$$

hat. Dabei hängen die Koeffizientenfunktionen  $a_k$  nur von den Grundinvarianten  $i_1(A), i_2(A), i_3(A)$  von  $A$  ab, den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = \lambda^3 - i_1 \cdot \lambda^2 + i_2 \cdot \lambda - i_3.$$

Die *Navier-Stokes-Gleichungen* sind genau die Kontinuitätsgleichung und die Impulserhaltungsgleichung für reibungsbehaftete Fluide. Wir stellen nun Annahmen an die bereits erwähnte Scherviskosität  $\sigma_S = \sigma + p \cdot I$ :

- Die Fluidteilchen diffundieren zwischen Strömungsbereichen mit hoher und Bereichen mit niedriger Strömungsgeschwindigkeit hin- und her. Deswegen hängt die Scherspannung nur von  $d_x v$  ab:

$$\sigma_S = \sigma_S(d_x v).$$

- Newton'sches Fluid:  $\sigma_S$  hängt sogar nur *linear* von  $d_x v$  ab.
- Das Fluid ist *isotrop*, d.h.  $\sigma_S$  ist invariant unter Starrkörperdrehungen:

$$\forall U \in O(3) : \sigma_S(U \cdot A \cdot U^{-1}) = U \cdot \sigma_S(A) \cdot U^{-1}.$$

Diese Eigenschaft impliziert insbesondere, dass  $\sigma_S$  nur vom symmetrischen Anteil

$$\epsilon(v) := \frac{1}{2} \cdot (d_x v + (d_x v)^T)$$

von  $d_x v$  abhängt:

$$\sigma_S = \sigma_S(\epsilon(v)).$$

Die Matrix  $\epsilon(v)$  heißt *linearisierter Verzerrungstensor*.

Da  $\sigma_S$  die Voraussetzungen des Satzes von Rivlin-Ericksen erfüllt und linear sein soll, erhalten wir

$$\sigma = \sigma_S(\epsilon(v)) - p \cdot I = 2 \cdot \mu \cdot \epsilon(v) + \lambda \cdot \text{spur}(\epsilon(v)) \cdot I - p \cdot I = 2 \cdot \mu \cdot \epsilon(v) + (\lambda \cdot (\text{div}_x v) - p) \cdot I.$$

Dabei bezeichnen die Konstanten  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$  die *Scherviskosität* und die *Volumenviskosität* des Fluids.

Nun können wir die Navier-Stokes-Gleichungen angeben:

### 3.4.4 Gleichung. (Navier-Stokes-Gleichungen)

Seien  $v, \rho, p, f$  die Geschwindigkeit, die Dichte, der Druck und die von außen einwirkende, massenspezifische Kraft(dichte) eines reibungsbehafteten Fluids. Dann gelten die sog. *Navier-Stokes-Gleichungen*:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \text{div}_x(\rho \cdot v) &= 0, \\ \rho \cdot (\partial_t v) + \rho \cdot (d_x v) \cdot v + \nabla_x p &= \rho \cdot f + \mu \cdot (\Delta_x v) + (\mu + \lambda) \cdot \nabla_x(\text{div}_x v). \end{aligned}$$

#### Beweis.

Wir berechnen zuerst die Matrixdivergenz von  $\sigma = 2 \cdot \mu \cdot \epsilon(v) + (\lambda \cdot (\text{div}_x v) - p) \cdot I$ :

$$[\text{Div}_x \sigma]_i = \sum_j \partial_j (\sigma_{ij}) = \mu \cdot \sum_j \partial_j [(\partial_j v_i) + (\partial_i v_j)] + \lambda \cdot \partial_i (\text{div}_x v) - \partial_i p = \mu \cdot (\Delta_x v_i) + (\mu + \lambda) \cdot \partial_i (\text{div}_x v) - \partial_i p.$$

Fügt man die Zeilen wieder zu einem Vektor zusammen und interpretiert man den Laplace-Operator  $\Delta_x$  komponentenweise, so ergibt sich

$$\text{Div}_x \sigma = \mu \cdot (\Delta_x v) + (\mu + \lambda) \cdot \nabla_x(\text{div}_x v) - \nabla_x p.$$

Die Navier-Stokes-Gleichungen ergeben sich dann analog zu den ersten beiden Euler-Gleichungen aus der Kontinuitätsgleichung und der Impulserhaltungsgleichung. ■

### 3.4.5 Bemerkung. (Lösungstheorie für Navier-Stokes-Gleichungen)

In zwei Raumdimensionen ( $d = 2$ ) existieren eindeutige Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen für alle Zeiten  $t \geq t_0$ . In drei Raumdimensionen ( $d = 3$ ) ist der Nachweis der Existenz eindeutiger Lösungen bisher nur für kleine Zeiten oder kleine Daten gelungen.

## 3.5 Stokes-Strömungen

### 3.5.1 Gleichung. (Stokes-Strömung)

Unter einer *Stokes-Strömung* verstehen wir eine stationäre, inkompressible, homogene Strömung, d.h.:

$$\partial_t \rho = \partial_t v = 0, \quad \text{div}_x(v) = 0, \quad \rho = \text{const.}$$

Unter Vernachlässigung des Termes  $\rho \cdot (d_x v) \cdot v$  vereinfachen sich die Navier-Stokes-Gleichungen in diesem Fall zu

$$\begin{aligned} \text{div}_x(v) &= 0, \\ \nabla_x p &= \rho \cdot f + \mu \cdot (\Delta_x v). \end{aligned}$$

Wir möchten nun plausibel machen, dass wir den Term  $\rho \cdot (d_x v) \cdot v$  unter gewissen Voraussetzungen in der Tat gegenüber  $\mu \cdot (\Delta_x v)$  vernachlässigen können: Sei dazu  $\bar{v}$  die „typische“ Größe der Geschwindigkeit und  $L$  die „typische“ Längenskala. Definiere

$$\tilde{x} := \frac{x}{L} \quad \text{und} \quad \tilde{v}(\tilde{x}) := \frac{1}{\bar{v}} \cdot v(\tilde{x} \cdot L).$$

Dann gilt

$$(d_x v)(x) \cdot v(x) = \frac{\bar{v}^2}{L} \cdot (d_{\tilde{x}} \tilde{v})(\tilde{x}) \cdot \tilde{v}(\tilde{x}) \quad \text{und} \quad (\Delta_x v)(x) = \frac{\bar{v}}{L^2} \cdot (\Delta_{\tilde{x}} \tilde{v})(\tilde{x}).$$

Vernachlässigung des Termes  $\rho \cdot (d_x v) \cdot v$  gegenüber dem Term  $\mu \cdot (\Delta_x v)$  ist also gerechtfertigt, falls

$$\rho \cdot \frac{\bar{v}^2}{L} \ll \mu \cdot \frac{\bar{v}}{L^2} \quad \text{bzw.} \quad \text{Re} := \frac{\rho \cdot \bar{v} \cdot L}{\mu} \ll 1.$$

Die Größe  $\text{Re}$  heißt *Reynolds-Zahl*.

Wir möchten nun zwei konkrete Stokes-Strömungen angeben und die zugehörigen Gleichungen explizit lösen.

- Couette-Strömung: Unter einer *Couette-Strömung* verstehen wir eine Stokes-Strömung zwischen zwei unendlich ausgedehnten, horizontalen Platten in fixem Abstand, von denen eine fest ist und die andere sich mit konstanter Geschwindigkeit horizontal bewegt. Wir gehen von  $f = 0$  aus und vernachlässigen den Term  $\rho \cdot (d_x v) \cdot v$  nicht:

$$\begin{aligned} \text{div}_x(v) &= 0, \\ \rho \cdot (d_x v) \cdot v + \nabla_x p &= \mu \cdot (\Delta_x v). \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass die beiden Platten parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene liegen, dass die stehende Platte durch den Koordinatenursprung geht und dass die sich bewegende Platte durch den Punkt  $(0, 0, a)^T$  verläuft. Die Geschwindigkeit der Platte betrage  $(v_P, 0, 0)^T$ , also eine Verschiebung in  $x$ -Richtung.

Die Translationsinvarianz des Problems suggeriert den Ansatz

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_1(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(x, y, z) = p_1(z).$$

Die erste Gleichung liefert durch Einsetzen keine neue Erkenntnis. Die zweite Gleichung sehrwohl:

$$\rho \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_1'(z) \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} v_1''(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben also  $p_1'(z) = v_1''(z) = 0$ . Mit den Randbedingungen  $(v_1(0), 0, 0)^T = v(x, y, 0) = (0, 0, 0)^T$  und  $(v_1(a), 0, 0)^T = v(x, y, a) = (v_P, 0, 0)^T$  erhalten wir die Lösung

$$v_1(z) = \frac{v_P}{a} \cdot z, \quad p_1(z) = \text{const.}$$

- Poiseuille-Strömung: Unter einer *Poiseuille-Strömung* verstehen wir eine Stokes-Strömung zwischen zwei unendlich ausgedehnten, horizontalen, unbeweglichen Platten in fixem Abstand. Wir gehen wieder von  $f = 0$  aus und vernachlässigen den Term  $\rho \cdot (d_x v) \cdot v$  nicht:

$$\begin{aligned} \text{div}_x(v) &= 0, \\ \rho \cdot (d_x v) \cdot v + \nabla_x p &= \mu \cdot (\Delta_x v). \end{aligned}$$

Wir nehmen wieder an, dass die beiden Platten parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene liegen, dass die untere Platte durch den Koordinatenursprung und die obere Platte durch den Punkt  $(0, 0, a)^T$  verläuft. Die Bewegung der Flüssigkeit entsteht nun durch einen Druckunterschied:

$$\forall y, z: \quad p(0, y, z) = p_1, \quad p(L, y, z) = p_2.$$

Diesmal machen wir nur für  $v$  einen Ansatz:

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_1(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$\rho \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_x p(x, y, z) \\ \partial_y p(x, y, z) \\ \partial_z p(x, y, z) \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} v_1''(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die beiden letzten Zeilen zeigen, dass  $p$  nur von  $x$  abhängt:

$$p(x, y, z) = p_1(x).$$

Da die erste Zeile für alle  $x$  und  $z$  gilt, muss es ein  $c \in \mathbb{R}$  geben mit

$$p_1'(x) = c = \mu \cdot v_1''(z).$$

Also ist  $p_1$  linear und  $v_1$  quadratisch. Die Randbedingungen liefern die Polynom-Koeffizienten:

$$v_1(z) = z \cdot (a - z) \cdot \frac{p_2 - p_1}{-2 \cdot \mu \cdot L}, \quad p_1(x) = \frac{p_2 - p_1}{L} \cdot x + p_1.$$

### 3.6 Bemerkung zur Beobachterunabhängigkeit des Reibungsgesetzes

Wir hatten vom Spannungstensor  $\sigma$  gefordert, dass

$$\forall U \in O(3) : \quad \sigma(U \cdot A \cdot U^{-1}) = U \cdot \sigma(A) \cdot U^{-1}.$$

Wir möchten diese Forderung nun ein wenig abschwächen.

Seien dazu  $x$  und  $\hat{x}$  zwei Koordinatensysteme mit

$$\hat{x} = a(t) + Q(t) \cdot x,$$

wobei  $Q(t) \in SO(3)$ . Dann gelten die folgenden Zusammenhänge:

- $x = Q(t)^T \cdot (\hat{x} - a(t))$ .
- Für einen Materiepunkt  $X$  mit Bahn  $t \mapsto x(t, X)$  gilt

$$\begin{aligned} \hat{x}(t, \hat{X}) &= a(t) + Q(t) \cdot x(t, X), \\ \hat{v}(t, \hat{X}) &= a'(t) + Q'(t) \cdot Q(t)^T \cdot (\hat{x}(t, \hat{X}) - a(t)) + Q(t) \cdot v(t, X), \\ (d_{\hat{x}}\hat{v})(t, \hat{X}) &= Q'(t) \cdot Q(t)^T + Q(t) \cdot (d_x v)(t, X) \cdot Q(t)^T. \end{aligned}$$

- Transformation von Vektoren:  $\hat{n} = Q(t) \cdot n$ .
- Transformation von Matrizen:  $\hat{\sigma} = Q(t) \cdot \sigma \cdot Q(t)^T$ .

Wir hatten für das Materialgesetz für die Reibung die Strukturannahme  $\sigma = \sigma(d_x v)$  gemacht. Die Beobachterunabhängigkeit („ $\sigma$  hängt vom Material, nicht vom Koordinatensystem ab.“) fordert damit

$$\sigma(d_{\hat{x}}\hat{v}) = Q(t) \cdot \sigma(d_x v) \cdot Q(t)^T.$$

#### 3.6.1 Bemerkung. (Beobachterunabhängigkeit des Reibungsgesetzes)

Setzt man nun obige Darstellung von  $d_{\hat{x}}\hat{v}$  ein, so erhält man die Forderung, dass für alle  $Q : \mathbb{R} \rightarrow O(3)$  gelten soll:

$$\forall A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \quad \sigma(Q'(t) \cdot Q(t)^T + Q(t) \cdot A \cdot Q(t)^T) = Q(t) \cdot \sigma(A) \cdot Q(t)^T.$$

#### 3.6.2 Bemerkung.

Die obige Forderung impliziert schon, dass  $\sigma$  nur vom symmetrischen Anteil des Arguments abhängt:

$$\forall A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \quad \sigma(A) = \sigma\left(\frac{1}{2} \cdot (A + A^T)\right).$$

### 3.7 A-priori-Abschätzungen für Navier-Stokes-Gleichungen

Wir werden später das folgende Lemma benötigen:

#### 3.7.1 Lemma. (Gronwall)

Sei  $y \in C^1([0, T], \mathbb{R})$  mit  $y \geq 0$ . Seien weiters  $\alpha, \beta \in C([0, T], \mathbb{R})$  ebenfalls mit  $\alpha, \beta \geq 0$ . Hat man eine Abschätzung der Ableitung von  $y$  von der Form

$$\forall t \in [0, T] : \quad y'(t) \leq \alpha(t) \cdot y(t) + \beta(t),$$

dann erhält man auch eine Abschätzung für  $y$  selbst:

$$y(t) \leq e^{\int_0^t \alpha(s) \, ds} \cdot \left[ y(0) + \int_0^t \beta(s) \, ds \right].$$

Wir werden uns in diesem Unterkapitel mit diesen vereinfachten Navier-Stokes-Gleichungen beschäftigen:

### 3.7.2 Gleichung.

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet, in dem sich ein inkompressibles, homogenes Fluid bewegt:

$$\operatorname{div}_x(v) = 0, \quad \rho \equiv 1.$$

Wir versehen die zugehörigen Navier-Stokes-Gleichungen mit sog. *no-slip*-Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x(v) &= 0, \\ \partial_t v + (d_x v) \cdot v + \nabla_x p &= f + \mu \cdot (\Delta_x v), \\ v|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

### 3.7.3 Satz. (Energieabschätzung)

Für eine glatte Lösung  $v$  des obigen Problems gilt die folgende *Energieabschätzung*:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v\|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} \mu \cdot \|d_x v\|_Z^2 dx ds \leq C(t) \cdot \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v(0, x)\|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} \|f\|^2 dx ds \right].$$

Dabei ist die Zeilensummennorm gegeben durch  $\|M\|_Z^2 = \sum_i \|(M_{ij})_j\|^2$ . Die Funktion  $C(t)$  ist unabhängig von  $v$  und  $f$ .

### Beweis.

Wir multiplizieren die zweite Gleichung des obigen Problems mit  $v$  und integrieren über  $\Omega$ . Das erste Integral berechnet sich zu

$$\int_{\Omega} \langle \partial_t v, v \rangle dx = \partial_t \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v\|^2 dx \right).$$

Für das zweite Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle (d_x v) \cdot v, v \rangle dx &= \int_{\Omega} \sum_{i,j} v_i \cdot (\partial_j v_i) \cdot v_j dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} \int_{\Omega} \partial_j (v_i^2) \cdot v_j dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j} \int_{\Omega} v_i^2 \cdot (\partial_j v_j) dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} \|v\|^2 \cdot (\operatorname{div}_x v) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das dritte Integral ergibt

$$\int_{\Omega} \langle \nabla_x p, v \rangle dx = \sum_i \int_{\Omega} (\partial_i p) \cdot v_i dx = - \int_{\Omega} p \cdot (\operatorname{div}_x v) dx = 0.$$

Das vierte Integral lässt sich nicht weiter vereinfachen. Das fünfte ergibt

$$\int_{\Omega} \langle \mu \cdot (\Delta_x v), v \rangle dx = \mu \cdot \sum_{i,j} \int_{\Omega} (\partial_{jj} v_i) \cdot v_i dx = -\mu \cdot \int_{\Omega} \sum_i \|\nabla_x v_i\|^2 dx = - \int_{\Omega} \mu \cdot \|d_x v\|_Z^2 dx.$$

Wir haben also

$$\partial_t \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v\|^2 dx \right) + \int_{\Omega} \mu \cdot \|d_x v\|_Z^2 dx = \int_{\Omega} \langle f, v \rangle dx.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Tatsache, dass für  $a, b \in \mathbb{R}$  stets  $a \cdot b \leq \frac{1}{2} \cdot (a^2 + b^2)$  gilt, folgt nun

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v\|^2 dx \right] \leq \int_{\Omega} |\langle f, v \rangle| dx \leq \int_{\Omega} \|f\| \cdot \|v\| dx \leq \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|f\|^2 dx}_{=:\beta(t)} + \underbrace{\int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v\|^2 dx}_{=:\gamma(t)}.$$

Das Lemma von Gronwall liefert uns

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v\|^2 \, dx \leq e^t \cdot \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v(0, x)\|^2 \, dx + \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|f\|^2 \, dx \, ds \right].$$

Insbesondere gilt diese Ungleichung auch für  $t = 0$ . Es folgt also

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} \mu \cdot \|d_x v\|_Z^2 \, dx \, ds &= \int_0^t \int_{\Omega} \langle f, v \rangle \, dx \, ds - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v\|^2 \, dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v(0, x)\|^2 \, dx \\ &\leq \left[ \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|f\|^2 \, dx \, ds + \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v(0, x)\|^2 \, dx \, ds \right] \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v\|^2 \, dx + \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v(0, x)\|^2 \, dx \, ds \\ &\leq \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|f\|^2 \, dx \, ds + t \cdot \int_{\Omega} \|v(0, x)\|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Addiert man diese und die vorhergegangene Ungleichungen, so ergibt sich genau die Behauptung:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v\|^2 \, dx + \int_0^t \int_{\Omega} \mu \cdot \|d_x v\|_Z^2 \, dx \, ds \leq \max\{e^t + 2 \cdot t, e^t + 1\} \cdot \left[ \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v(0, x)\|^2 \, dx + \int_0^t \int_{\Omega} \|f\|^2 \, dx \, ds \right].$$

■

### 3.7.4 Satz. (Eindeutigkeit von glatten Lösungen)

Es existiert höchstens eine  $C^2$ -Lösung des obigen Problems. Dies gilt sogar für inhomogene Dirichlet-Randbedingungen.

#### Beweis.

Seien  $v, p$  und  $w, q$  glatte Lösungen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_t v + (d_x v) \cdot v + \nabla_x p &= f + \mu \cdot (\Delta_x v), \\ \partial_t w + (d_x w) \cdot w + \nabla_x q &= f + \mu \cdot (\Delta_x w). \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die beiden Gleichungen mit  $(v - w)$  skalar, integrieren über  $\Omega$  und subtrahieren.

Das erste Integral berechnet sich zu

$$\int_{\Omega} \langle \partial_t(v - w), v - w \rangle \, dx = \int_{\Omega} \partial_t \left( \frac{1}{2} \cdot \|v - w\|^2 \right) \, dx.$$

Die Zeilensummennorm erfüllt für jede Matrix  $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$  und jeden Vektor  $a \in \mathbb{R}^d$  die Abschätzung

$$\|M \cdot a\|^2 = \sum_i \langle (M_{ij})_j, a \rangle^2 \leq \sum_i \|(M_{ij})_j\|^2 \cdot \|a\|^2 = \|M\|_Z^2 \cdot \|a\|^2.$$

Außerdem gilt für beliebige  $\epsilon > 0$  und  $a, b \in \mathbb{R}$ , dass  $0 \leq (2 \cdot \epsilon \cdot a - b)^2 = 4 \cdot \epsilon^2 \cdot a^2 - 4 \cdot \epsilon \cdot a \cdot b + b^2$  und somit

$$a \cdot b \leq \epsilon \cdot a^2 + \frac{1}{4 \cdot \epsilon} \cdot b^2.$$

Mit diesen beiden Ungleichungen kann man das zweite Integral abschätzen:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \langle (d_x v) \cdot v - (d_x w) \cdot w, v - w \rangle dx &= \int_{\Omega} \langle d_x(v - w) \cdot v + (d_x w) \cdot (v - w), v - w \rangle dx \\
&\leq \int_{\Omega} \|d_x(v - w) \cdot v\| \cdot \|v - w\| + \|(d_x w) \cdot (v - w)\| \cdot \|v - w\| dx \\
&\leq \|v\|_{L^\infty} \cdot \int_{\Omega} \|d_x(v - w)\|_Z \cdot \|v - w\| dx \\
&\quad + \left( \sup_{x \in \Omega} \|(d_x w)(x)\|_Z \right) \cdot \int_{\Omega} \|v - w\|^2 dx \\
&\leq \epsilon \cdot \int_{\Omega} \|d_x(v - w)\|_Z^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{4 \cdot \epsilon} \cdot \|v\|_{L^\infty}^2 \cdot \int_{\Omega} \|v - w\|^2 dx \\
&\quad + \left( \sup_{x \in \Omega} \|(d_x w)(x)\|_Z \right) \cdot \int_{\Omega} \|v - w\|^2 dx \\
&= \epsilon \cdot \int_{\Omega} \|d_x(v - w)\|_Z^2 dx \\
&\quad + \left( \frac{1}{4 \cdot \epsilon} \cdot \|v\|_{L^\infty}^2 + \sup_{x \in \Omega} \|(d_x w)(x)\|_Z \right) \cdot \int_{\Omega} \|v - w\|^2 dx
\end{aligned}$$

Das dritte Integral wird mit partieller Integration vereinfacht. Das Randintegral verschwindet, da  $v$  und  $w$  den gleichen Randbedingungen unterliegen. Dieser Schritt funktioniert auch noch für inhomogene Dirichlet-Randbedingungen. Das verbleibende Volumenintegral verschwindet aufgrund der Divergenzfreiheit von  $v$  und  $w$ :

$$\int_{\Omega} \langle \nabla_x(p - q), v - w \rangle dx = - \int_{\Omega} (p - q) \cdot \operatorname{div}_x(v - w) dx = 0.$$

Das vierte Integral kürzt sich weg. Das fünfte Integral wird wieder mittels partieller Integration vereinfacht. Es ergibt sich

$$\int_{\Omega} \langle \mu \cdot \Delta_x(v - w), v - w \rangle dx = - \int_{\Omega} \mu \cdot \|d_x(v - w)\|_Z^2 dx.$$

Nun setzen wir alles zusammen:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \partial_t \left( \frac{1}{2} \cdot \|v - w\|^2 \right) dx + \int_{\Omega} \mu \cdot \|d_x(v - w)\|_Z^2 dx &= - \int_{\Omega} \langle (d_x v) \cdot v - (d_x w) \cdot w, v - w \rangle dx \\
&\leq \epsilon \cdot \int_{\Omega} \|d_x(v - w)\|_Z^2 dx \\
&\quad + \left( \frac{1}{4 \cdot \epsilon} \cdot \|v\|_{L^\infty}^2 + \sup_{x \in \Omega} \|(d_x w)(x)\|_Z \right) \cdot \int_{\Omega} \|v - w\|^2 dx
\end{aligned}$$

Setzt man  $\epsilon := \frac{\mu}{2}$  und  $C := \frac{1}{2\mu} \cdot \|v\|_{L^\infty}^2 + \sup_{x \in \Omega} \|(d_x w)(x)\|_Z$ , so haben wir gerade gezeigt, dass

$$\partial_t \left( \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v - w\|^2 dx \right) \leq C \cdot \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v - w\|^2 dx.$$

Das Lemma von Gronwall liefert nun

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v - w\|^2 dx \leq e^{Ct} \cdot \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \|v(0, x) - w(0, x)\|^2 dx = 0.$$

Wegen der Nichtnegativität des Integranden gilt schon punktweise  $\|v - w\| = 0$ . Das zeigt  $v = w$ . ■

### 3.8 Grenzschichten für Navier-Stokes-Gleichungen

Betrachte die inkompressiblen, homogenen Navier-Stokes-Gleichungen mit no-slip-Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_x(v) &= 0, \\
\partial_t v + (d_x v) \cdot v + \nabla_x p &= f + \mu \cdot (\Delta_x v), \\
v|_{\partial\Omega} &= 0.
\end{aligned}$$

Im Inneren von  $\Omega$  ist der Reibungsterm  $\mu \cdot (\Delta_x v)$  oft klein gegenüber dem konvektiven Term  $(d_x v) \cdot v$ . Lässt man ihn also einfach weg, so vereinfachen sich die Gleichungen zu den Euler-Gleichungen. In der Nähe des Randes von  $\Omega$  ist  $v$  wegen den no-slip-Randbedingungen jedoch verhältnismäßig klein. Dort darf man den Reibungsterm also keinesfalls vernachlässigen.

Es stellt sich die Frage, ob wir im Inneren von  $\Omega$  nicht einfach die Eulergleichungen verwenden können und nur am Rand tatsächlich die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen lösen müssen.

Um das später verwendete Prinzip der *asymptotischen Entwicklung* zu erläutern, betrachten wir das folgende Problem:

### 3.8.1 Gleichung.

Gleichung für  $y = y(x)$  auf  $\Omega := (0, 1)$  mit festem  $\epsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} \epsilon \cdot y'' + 2 \cdot y' + 2 \cdot y &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ y(0) &= 0, \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

Die exakte Lösung ist gegeben durch<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}} \cdot (e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}) \approx e \cdot \left( e^{-x} - e^{-\frac{2x}{\epsilon}} \right), \\ \lambda_1 &:= \frac{-1 + \sqrt{1 - 2 \cdot \epsilon}}{\epsilon} \approx -1, \quad \lambda_2 := \frac{-1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \epsilon}}{\epsilon} \approx -\frac{2}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Für  $x \gg \epsilon$  ist  $y$  eine approximative Lösung der reduzierten Gleichung  $2 \cdot y' + 2 \cdot y = 0$ . Für  $x \in (0, \delta(\epsilon))$  mit einem  $\delta(\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon)$  variiert die Lösung stark, um die Randbedingung  $y(0) = 0$  zu erfüllen.

Die Idee der asymptotischen Entwicklung ist es nun, die Lösung der vollständigen Gleichung separat auf  $(0, \delta(\epsilon))$  und  $(\delta(\epsilon), 1)$  zu approximieren.

Wir gehen in mehreren Schritten vor:

- 1. Schritt: Äußere Entwicklung: Die äußere Entwicklung soll die Lösung auf  $(\delta(\epsilon), 1)$  approximieren. Wir machen den formalen Ansatz

$$y(x) = y_0(x) + \epsilon \cdot y_1(x) + \epsilon^2 \cdot y_2(x) + \dots$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\epsilon^0 \cdot [2 \cdot y_0' + 2 \cdot y_0] + \epsilon^1 \cdot [y_0'' + 2 \cdot y_1' + 2 \cdot y_1] + \epsilon^2 \cdot [y_1'' + 2 \cdot y_2' + 2 \cdot y_2] + \dots = 0 = \epsilon^0 \cdot 0 + \epsilon^1 \cdot 0 + \epsilon^2 \cdot 0 + \dots$$

Ein Koeffizientenvergleich suggeriert die Bedingungen

$$\begin{aligned} 2 \cdot y_0' + 2 \cdot y_0 &= 0, & y_0(1) &= 1, \\ y_0'' + 2 \cdot y_1' + 2 \cdot y_1 &= 0, & y_1(1) &= 0, \\ y_1'' + 2 \cdot y_2' + 2 \cdot y_2 &= 0, & y_2(1) &= 0, \\ & & \vdots & \end{aligned}$$

Die Randbedingungen sind so gewählt, dass wir eine „gute“ Approximation nahe 1 erhalten. Die erste Gleichung lässt sich explizit lösen:

$$y_0(x) = e \cdot e^{-x}.$$

- 2. Schritt: Innere Entwicklung: Die innere Entwicklung soll die Lösung auf  $(0, \delta(\epsilon))$  approximieren. Wir setzen

$$\xi := \frac{x}{\epsilon}, \quad Y(\xi) := y(\xi \cdot \epsilon).$$

Die Funktion  $Y = Y(\xi)$  erfüllt

$$\frac{1}{\epsilon} \cdot Y'' + \frac{1}{\epsilon} \cdot 2 \cdot Y' + 2 \cdot Y = 0.$$

Wir machen wieder einen Entwicklungsansatz:

$$Y(\xi) = Y_0(\xi) + \epsilon \cdot Y_1(\xi) + \epsilon^2 \cdot Y_2(\xi) + \dots$$

<sup>8</sup>Die Näherungswerte für die  $\lambda_i$  erhält man durch Taylor-Entwicklung der Funktion  $x \mapsto \sqrt{x}$  um die Stelle  $x_0 := 1$ .



Einsetzen in die Differentialgleichung für  $Y$  liefert

$$\epsilon^{-1} \cdot [Y_0'' + 2 \cdot Y_0'] + \epsilon^0 \cdot [Y_1'' + 2 \cdot Y_1' + 2 \cdot Y_0] + \epsilon^1 \cdot [Y_2'' + 2 \cdot Y_2' + Y_1] + \epsilon^2 \cdot [Y_3'' + 2 \cdot Y_3' + Y_2] + \dots = 0.$$

Ein Koeffizientenvergleich suggeriert

$$\begin{aligned} Y_0'' + 2 \cdot Y_0' &= 0, & Y_0(0) &= 0, \\ Y_1'' + 2 \cdot Y_1' + 2 \cdot Y_0 &= 0, & Y_1(0) &= 0, \\ Y_2'' + 2 \cdot Y_2' + Y_1 &= 0, & Y_2(0) &= 0, \\ & & \vdots & \end{aligned}$$

Die Randbedingungen sind nun so gewählt, dass wir eine „gute“ Approximation nahe 0 erhalten. Als Lösung für  $Y_0$  erhalten wir

$$Y_0(\xi) = a \cdot (1 - e^{-2\xi})$$

mit einem noch zu bestimmenden  $a \in \mathbb{R}$ .

- **3. Schritt: Matching:** Der Koeffizient  $a$  in der Formel für  $Y_0$  ergibt sich aus der Bedingung, dass  $y_0$  und  $Y_0$  zusammenpassen sollten:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y_0(x) \stackrel{!}{=} \lim_{\xi \rightarrow \infty} Y_0(\xi).$$

Daraus erhält man  $a = e$ .

- **4. Schritt: Zusammenfassung der Approximation:** Eine Approximation der Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon)$  an die exakte Lösung  $\hat{y}$  ist gegeben durch

$$\hat{y}(x) := \begin{cases} Y_0\left(\frac{x}{\epsilon}\right), & x \in (0, \delta(\epsilon)), \\ y_0(x), & x \in (\delta(\epsilon), 1). \end{cases}$$

Die behauptete Approximationsordnung folgt aus den Ansätzen für  $y$  und  $Y$  und der Tatsache, dass die  $y_i$  und  $Y_i$  für  $i \geq 1$  keine Ausdrücke der Form  $\frac{1}{\epsilon}$  (o.Ä.) enthalten.

- **5. Schritt: Uniforme Approximation:** In der Praxis möchte man keine abschnittsweise definierten Approximationen. Da  $y_0$  und  $Y_0$  Approximationen der Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon)$  sind, ist auch

$$\hat{y}(x) := Y_0\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + y_0(x) - \lim_{x \rightarrow 0} y_0(x)$$

eine Approximation der Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon)$ :

$$\forall x \in (0, \delta(\epsilon)) : \quad |y(x) - \hat{y}(x)| \leq \left| y(x) - Y_0\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right| + \left| y_0(x) - \lim_{x \rightarrow 0} y_0(x) \right| = \mathcal{O}(\epsilon),$$

$$\forall x \in (\delta(\epsilon), 1) : \quad |y(x) - \hat{y}(x)| \leq |y(x) - y_0(x)| + \left| Y_0\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \lim_{x \rightarrow 0} y_0(x) \right| = \mathcal{O}(\epsilon).$$

Wir nennen daher  $\hat{y}$  eine *uniforme* Approximation.

### 3.8.2 Bemerkung.

Bei der äußeren Entwicklung spielt der Term  $\epsilon y''$  aus der Differentialgleichung für  $y$  keine Rolle. Die Umskalierung  $\xi := \frac{x}{\epsilon}$  bei der inneren Entwicklung führt dazu, dass der entsprechende Term in der Differentialgleichung für  $Y$ , nämlich  $\frac{1}{\epsilon} \cdot Y''$ , dies sehrwohl tut.

Unser nächstes Ziel ist es, eine Approximation der Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  zu berechnen. Dazu nehmen wir einfach die Terme  $\epsilon \cdot y_1(x)$  und  $\epsilon \cdot Y_1(\xi)$  aus den Ansätzen für  $y$  und  $Y$  mit in die Approximation.

- **1. Schritt: Äußere und innere Entwicklung:** Die Funktion  $y_1$  aus der äußeren Entwicklung erfüllt die Differentialgleichung

$$y_1' + y_1 = -\frac{1}{2} \cdot y_0'' = -\frac{1}{2} \cdot e^{1-x}, \quad y_1(1) = 0.$$

Die homogene Lösung ist  $y_{1,\text{hom}}(x) = 0$ . Der Ansatz  $y_{1,\text{part}}(x) = c_1 \cdot e^{1-x} + c_2 \cdot x \cdot e^{1-x}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  für eine Partikulärlösung führt auf die Gesamtlösung

$$y_1(x) = y_{1,\text{hom}}(x) + y_{1,\text{part}}(x) = \frac{1}{2} \cdot (1-x) \cdot e^{1-x}.$$

Die Funktion  $Y_1$  aus der inneren Entwicklung erfüllt die Differentialgleichung

$$Y_1'' + 2 \cdot Y_1' = -2 \cdot Y_0 = -2 \cdot e \cdot (1 - e^{-2\xi}), \quad Y_1(0) = 0.$$

Die homogene Lösung ist  $Y_{1,\text{hom}}(\xi) = \tilde{a} \cdot (1 - e^{-2\xi})$  mit einem noch zu bestimmenden  $\tilde{a} \in \mathbb{R}$ . Der Ansatz  $Y_{1,\text{part}}(\xi) = C_1 \cdot \xi + C_2 \cdot \xi \cdot e^{-2\xi}$  mit  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  für eine Partikulärlösung führt auf die Gesamtlösung

$$Y_1(\xi) = Y_{1,\text{hom}}(\xi) + Y_{1,\text{part}}(\xi) = \tilde{a} \cdot (1 - e^{-2\xi}) - e \cdot \xi \cdot (1 + e^{-2\xi}).$$

- **2. Schritt: Verallgemeinertes Matching:** Der Parameter  $\tilde{a}$  in der Formel für  $Y_1$  sollte sich wieder aus einem Matching-Prozess ergeben. Waren es vorher einfach nur die Funktionen  $y_0$  und  $Y_0$ , die zusammenpassen sollten, so sind es diesmal  $y_0 + \epsilon \cdot y_1$  und  $Y_0 + \epsilon \cdot Y_1$ .

Wir betrachten nun auf einer Skala „zwischen“  $\mathcal{O}(1)$  und  $\mathcal{O}(\epsilon)$ . Sei dazu

$$\zeta := \frac{x}{\eta(\epsilon)}$$

mit  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta(\epsilon) = 0$  und  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon} = \infty$ .<sup>9</sup> Dann gilt insbesondere auch  $\mathcal{O}(\epsilon \cdot \eta) \subseteq \mathcal{O}(\eta^2)$ . Hält man  $\zeta$  fest, so ergibt sich für  $y_0 + \epsilon \cdot y_1$  mittels Taylor-Entwicklung von  $z \mapsto e^z$  um die Stelle  $z_0 := 1$  schon

$$\begin{aligned} y_0(x) + \epsilon \cdot y_1(x) &= e^{1-\zeta\eta} + \epsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \zeta \cdot \eta) \cdot e^{1-\zeta\eta} \\ &= \left[ 1 + \epsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \zeta \cdot \eta) \right] \cdot e^{1-\zeta\eta} \\ &= \left[ 1 + \epsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \zeta \cdot \eta) \right] \cdot e \cdot (1 - \zeta \cdot \eta + \mathcal{O}(\eta^2)) \\ &= e + \frac{\epsilon}{2} \cdot \epsilon - e \cdot \zeta \cdot \eta + \mathcal{O}(\eta^2). \end{aligned}$$

Für  $Y_0 + \epsilon \cdot Y_1$  ergibt sich

$$\begin{aligned} Y_0(\xi) + \epsilon \cdot Y_1(\xi) &= (e + \epsilon \cdot \tilde{a}) \cdot \left( 1 - \exp\left(-2 \cdot \frac{\zeta \cdot \eta}{\epsilon}\right) \right) - e \cdot \zeta \cdot \eta \cdot \left( 1 + \exp\left(-2 \cdot \frac{\zeta \cdot \eta}{\epsilon}\right) \right) \\ &= (e + \epsilon \cdot \tilde{a} + e \cdot \zeta \cdot \eta) \cdot \left( 1 - \exp\left(-2 \cdot \frac{\zeta \cdot \eta}{\epsilon}\right) \right) - 2 \cdot e \cdot \zeta \cdot \eta \\ &= e + \tilde{a} \cdot \epsilon - e \cdot \zeta \cdot \eta + \mathcal{O}(\eta^2). \end{aligned}$$

Wenn also  $y_0 + \epsilon \cdot y_1$  und  $Y_0 + \epsilon \cdot y_2$  zusammenpassen sollen, dann suggeriert das  $\tilde{a} = \frac{\epsilon}{2}$ .

- **4. Schritt: Zusammenfassung der Approximation:** Eine Approximation der Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  an die exakte Lösung  $y$  ist gegeben durch

$$\hat{y}(x) := \begin{cases} Y_0\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon \cdot Y_1\left(\frac{x}{\epsilon}\right), & x \in (0, \delta(\epsilon)), \\ y_0(x) + \epsilon \cdot y_1(x), & x \in (\delta(\epsilon), 1). \end{cases}$$

- **5. Schritt: Uniforme Approximation:** Die uniforme Approximation ist wieder gegeben durch Addition der beiden Teilapproximationen und Subtraktion des „gemeinsamen Teils“:

$$\hat{y}(x) = Y_0\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon \cdot Y_1\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + y_0(x) + \epsilon \cdot y_1(x) - \left[ e + \frac{\epsilon}{2} \cdot \epsilon - e \cdot x \right].$$

### 3.8.3 Bemerkung. (Uniforme Approximation)

Die uniforme Approximation ist so gemacht, dass sie sowohl die Differentialgleichung als auch die Randbedingung mit kleinem Residuum erfüllt.

### 3.8.4 Bemerkung. (Innere Entwicklung)

Die Substitution  $\xi := \frac{x}{\epsilon}$  bei der inneren Entwicklung muss sich aus physikalischer Einsicht ergeben. Allgemeiner sollte man eher von  $\xi := \frac{x}{\epsilon^\alpha}$  mit einem noch zu bestimmenden  $\alpha > 0$  ausgehen. Der Ansatz für  $Y$  wird verallgemeinert zu

$$Y(\xi) = Y_0(\xi) + \epsilon^\beta \cdot Y_1(\xi) + \epsilon^{2\beta} \cdot Y_2(\xi) + \dots$$

mit einem noch zu bestimmenden  $\beta > 0$ . Die konkrete Form des Gleichungssystems für die  $Y_i$  hängt davon ab, welcher Term nach dem Einsetzen in die Differentialgleichung führend in Potenzen von  $\epsilon$  ist. Mittels Fallunterscheidung kann man dann ein plausibles  $\alpha$  herausfinden.

<sup>9</sup>Man kann konkret  $\eta(\epsilon) := \epsilon^\beta$  für ein  $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$  setzen.

Nun möchten wir das soeben vorgestellte Prinzip der asymptotischen Entwicklung verwenden, um die *Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen* herzuleiten.

Dazu betrachten wir eine 2-dimensionale, inkompressible, homogene Strömung über eine ebene Platte. Die Platte wird dabei repräsentiert durch die  $x$ -Achse in der  $x$ - $y$ -Ebene. Wir nehmen weiters an, dass die Scherviskosität klein ist, i.e.  $\mu := \epsilon > 0$ . Die Navier-Stokes-Gleichungen mit no-slip-Randbedingung und  $f = 0$  haben also die Form<sup>10</sup>

$$\begin{aligned}\partial_x v + \partial_y w &= 0, \\ \partial_t v + (\partial_x v) \cdot v + (\partial_y v) \cdot w + \partial_x p &= \epsilon \cdot \Delta v, \\ \partial_t w + (\partial_x w) \cdot v + (\partial_y w) \cdot w + \partial_y p &= \epsilon \cdot \Delta w, \\ v|_{y=0} = w|_{y=0} &= 0.\end{aligned}$$

Wir gehen wieder in mehreren Schritten vor:

- 1. Schritt: Äußere Entwicklung: Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned}v &= v_0 + \epsilon \cdot v_1 + \epsilon^2 \cdot v_2 + \dots, \\ w &= w_0 + \epsilon \cdot w_1 + \epsilon^2 \cdot w_2 + \dots, \\ p &= p_0 + \epsilon \cdot p_1 + \epsilon^2 \cdot p_2 + \dots.\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichungen liefert in niedrigster  $\epsilon$ -Potenz:

$$\begin{aligned}\partial_x v_0 + \partial_y w_0 &= 0, \\ \partial_t v_0 + (\partial_x v_0) \cdot v_0 + (\partial_y v_0) \cdot w_0 + \partial_x p_0 &= 0, \\ \partial_t w_0 + (\partial_x w_0) \cdot v_0 + (\partial_y w_0) \cdot w_0 + \partial_y p_0 &= 0.\end{aligned}$$

- 2. Schritt: Innere Entwicklung: Wir erwarten große Variation der Lösung in  $y$ -Richtung, nicht aber in  $x$ -Richtung. Daher substituieren wir wie folgt:

$$T := t, \quad X := x, \quad Y := \frac{y}{\epsilon^\alpha},$$

mit einem noch zu bestimmenden  $\alpha > 0$ . Wir setzen weiters

$$V(T, X, Y) := v(t, x, Y \cdot \epsilon^\alpha), \quad W(T, X, Y) := w(t, x, Y \cdot \epsilon^\alpha), \quad P(T, X, Y) := p(t, x, Y \cdot \epsilon^\alpha).$$

Das liefert

$$\begin{aligned}\partial_X V + \epsilon^{-\alpha} \cdot (\partial_Y W) &= 0, \\ \partial_T V + (\partial_X V) \cdot V + \epsilon^{-\alpha} \cdot (\partial_Y V) \cdot W + \partial_X P &= \epsilon \cdot [\partial_{XX} V + \epsilon^{-2\alpha} \cdot (\partial_{YY} V)], \\ \partial_T W + (\partial_X W) \cdot V + \epsilon^{-\alpha} \cdot (\partial_Y W) \cdot W + \epsilon^{-\alpha} \cdot (\partial_Y P) &= \epsilon \cdot [\partial_{XX} W + \epsilon^{-2\alpha} \cdot (\partial_{YY} W)], \\ V|_{Y=0} = W|_{Y=0} &= 0.\end{aligned}$$

Wir machen für  $V, W$  und  $P$  den Ansatz

$$\begin{aligned}V &= V_0 + \epsilon^\beta \cdot V_1 + \epsilon^{2\beta} \cdot V_2 + \dots, \\ W &= W_0 + \epsilon^\beta \cdot W_1 + \epsilon^{2\beta} \cdot W_2 + \dots, \\ P &= P_0 + \epsilon^\beta \cdot P_1 + \epsilon^{2\beta} \cdot P_2 + \dots,\end{aligned}$$

mit einem noch zu bestimmenden  $\beta > 0$ . Setzt man diesen Ansatz in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$\left[ \partial_X V_0 + \epsilon^\beta \cdot (\partial_X V_1) + \epsilon^{2\beta} \cdot (\partial_X V_2) + \dots \right] + \frac{1}{\epsilon^\alpha} \cdot \left[ \partial_Y W_0 + \epsilon^\beta \cdot (\partial_Y W_1) + \epsilon^{2\beta} \cdot (\partial_Y W_2) + \dots \right] = 0.$$

Der Term in führender  $\epsilon$ -Potenz ist  $\partial_Y W_0$ . Wir nehmen also an, dass

$$\partial_Y W_0 = 0, \quad W_0(T, X, 0) = 0.$$

Da die Randbedingung für alle  $T$  und  $X$  gilt, folgt daraus schon

$$W_0 = 0.$$

Eine sinnvolle Balance der Terme für die nächsthöhere Ordnung ergibt sich mit  $\beta = \alpha$ . Man erhält

$$\partial_X V_0 + \partial_Y W_1 = 0.$$

<sup>10</sup>Die Geschwindigkeitskomponente in  $x$ -Richtung wird mit  $v$  und jene in  $y$ -Richtung mit  $w$  bezeichnet.

Setzt man den Ansatz für  $V, W$  und  $P$  in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 = & (\partial_T V_0 + \epsilon^\beta \cdot (\partial_T V_1) + \epsilon^{2\beta} \cdot (\partial_T V_2) + \dots) \\
& + (\partial_X V_0 + \epsilon^\beta \cdot (\partial_X V_1) + \epsilon^{2\beta} \cdot (\partial_X V_2) + \dots) \cdot (V_0 + \epsilon^\beta \cdot V_1 + \epsilon^{2\beta} \cdot V_2 + \dots) \\
& + \frac{1}{\epsilon^\alpha} \cdot (\partial_Y V_0 + \epsilon^\beta \cdot (\partial_Y V_1) + \epsilon^{2\beta} \cdot (\partial_Y V_2) + \dots) \cdot (0 + \epsilon^\beta \cdot W_1 + \epsilon^{2\beta} \cdot W_2 + \dots) \\
& + (\partial_X P_0 + \epsilon^\beta \cdot (\partial_X P_1) + \epsilon^{2\beta} \cdot (\partial_X P_2) + \dots) \\
& - \epsilon \cdot \left[ (\partial_{XX} V_0 + \epsilon^\beta \cdot (\partial_{XX} V_1) + \epsilon^{2\beta} \cdot (\partial_{XX} V_2) + \dots) + \frac{1}{\epsilon^{2\alpha}} \cdot (\partial_{YY} V_0 + \epsilon^\beta \cdot (\partial_{YY} V_1) + \epsilon^{2\beta} \cdot (\partial_{YY} V_2) + \dots) \right].
\end{aligned}$$

Eine plausible Wahl für  $\alpha$  ist  $1 - 2 \cdot \alpha = 0$ , denn bei  $1 - 2 \cdot \alpha > 0$  wird der Reibungsterm  $\partial_{YY} V_0$  im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  nicht berücksichtigt und bei  $1 - 2 \cdot \alpha < 0$  würde in führender Ordnung  $\partial_{YY} V_0 = 0$  gelten. Wegen  $V_0(T, X, 0) = 0$  wäre dann jedoch  $V_0(T, X, Y) = \tilde{V}_0(T, X) \cdot Y$  und das Matching würde nicht funktionieren. Wir gehen ab jetzt also von  $\beta = \alpha = \frac{1}{2}$  aus. Als Grenzschichtdicke ergibt sich

$$\delta(\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^\alpha) = \mathcal{O}(\sqrt{\epsilon}).$$

In führender Ordnung erhalten wir

$$\partial_T V_0 + (\partial_X V_0) \cdot V_0 + (\partial_Y V_0) \cdot W_1 + \partial_X P_0 = \partial_{YY} V_0.$$

Nun setzen wir den Ansatz für  $V, W$  und  $P$  in die dritte Gleichung ein:

$$\begin{aligned}
0 = & (0 + \epsilon^\beta \cdot (\partial_T W_1) + \epsilon^{2\beta} \cdot (\partial_T W_2) + \dots) \\
& + (0 + \epsilon^\beta \cdot (\partial_X W_1) + \epsilon^{2\beta} \cdot (\partial_X W_2) + \dots) \cdot (V_0 + \epsilon^\beta \cdot V_1 + \epsilon^{2\beta} \cdot V_2 + \dots) \\
& + \frac{1}{\epsilon^\alpha} \cdot (0 + \epsilon^\beta \cdot (\partial_Y W_1) + \epsilon^{2\beta} \cdot (\partial_Y W_2) + \dots) \cdot (0 + \epsilon^\beta \cdot W_1 + \epsilon^{2\beta} \cdot W_2 + \dots) \\
& + \frac{1}{\epsilon^\alpha} \cdot (\partial_Y P_0 + \epsilon^\beta \cdot (\partial_Y P_1) + \epsilon^{2\beta} \cdot (\partial_Y P_2) + \dots) \\
& - \epsilon \cdot \left[ (0 + \epsilon^\beta \cdot (\partial_{XX} W_1) + \epsilon^{2\beta} \cdot (\partial_{XX} W_2) + \dots) + \frac{1}{\epsilon^{2\alpha}} \cdot (0 + \epsilon^\beta \cdot (\partial_{YY} W_1) + \epsilon^{2\beta} \cdot (\partial_{YY} W_2) + \dots) \right].
\end{aligned}$$

In führender Ordnung ergibt sich hier nur

$$\partial_Y P_0 = 0.$$

- **3. Schritt: Matching:** Als Matching-Bedingungen verwenden wir

$$\begin{aligned}
\lim_{Y \rightarrow \infty} V_0(T, X, Y) & \stackrel{!}{=} \lim_{y \rightarrow 0} v_0(t, x, y), \\
\lim_{Y \rightarrow \infty} W_0(T, X, Y) & \stackrel{!}{=} \lim_{y \rightarrow 0} w_0(t, x, y), \\
\lim_{Y \rightarrow \infty} P_0(T, X, Y) & \stackrel{!}{=} \lim_{y \rightarrow 0} p_0(t, x, y).
\end{aligned}$$

Die zweite Bedingung und die Tatsache  $W_0 = 0$  ergeben die Randbedingung  $w_0|_{y=0} = 0$ . Mit den Gleichungen für  $v_0, w_0, p_0$  der äußeren Entwicklung lässt sich damit die „Außenströmung“ berechnen. Die dritte Bedingung und die Tatsache  $\partial_Y P_0 = 0$  liefern

$$P_0(T, X, Y) = p_0(t, x, 0)$$

für alle  $T, X, Y$ . Der Druck in der Grenzschicht ist also gegeben durch den Druck der Außenströmung.

Gesamt haben wir gerade die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen hergeleitet:

### 3.8.5 Gleichung. (Prandtl'sche Grenzschichtgleichungen)

Für die obig eingeführten Funktionen  $V_0, W_1$  und  $v_0$  gilt

$$\begin{aligned}
\partial_X V_0 + \partial_Y W_1 & = 0, \\
\partial_T V_0 + (\partial_X V_0) \cdot V_0 + (\partial_Y V_0) \cdot W_1 + \partial_X (p_0|_{Y=0}) & = \partial_{YY} V_0, \\
V_0|_{Y=0} = W_1|_{Y=0} & = 0, \\
\lim_{Y \rightarrow \infty} V_0(T, X, Y) & = \lim_{y \rightarrow 0} v_0(t, x, y).
\end{aligned}$$

Bei konkreten Beispielen muss also zuerst die Außenströmung mit Hilfe der Eulergleichungen berechnet werden. Mit Hilfe der dabei berechneten  $v_0$  und  $p_0$  können dann die Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen gelöst werden.

# 4 Elastizitätstheorie

## 4.1 Notation

Wir möchten in diesem Kapitel ein Modell dafür erstellen, wie sich ein Körper unter Krafteinwirkung deformiert. Dazu führen wir die folgende Notation ein:

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ : Jenes Gebiet, das momentan vom Körper ausgefüllt wird.
- $x \in \Omega$ : Ein Materiepunkt.
- $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ : Eine die Deformation beschreibende Funktion. Der Materiepunkt  $x$  wird durch die Deformation nach  $\phi(x)$  verschoben.
- $d\phi \in \mathbb{R}^{d \times d}$ : Der sog. *Deformationsgradient*. Wir werden nur orientierungserhaltende Deformationen betrachten, i.e.  $\det d\phi > 0$ .
- $u(x) := \phi(x) - x$ : Verschiebungsvektor.

Sei nun  $\Delta x \in \mathbb{R}^d$  eine kleine Verschiebung. Dann gilt

$$\frac{\|\phi(x + \Delta x) - \phi(x)\|^2}{\|(x + \Delta x) - x\|^2} = \frac{\left\| d\phi(x) \cdot \Delta x + \mathcal{O}(\|\Delta x\|^2) \right\|^2}{\|\Delta x\|^2} = \frac{(\Delta x)^T \cdot (d\phi(x))^T \cdot (d\phi(x)) \cdot \Delta x}{\|\Delta x\|^2} + \mathcal{O}(\|\Delta x\|).$$

Die Matrix

$$C := d\phi^T \cdot d\phi = (du + I)^T \cdot (du + I),$$

der sog. *Cauchy-Green'sche Verzerrungstensor*, gibt also Auskunft über die lokale, relative Längenänderung im Körper. Es gilt<sup>11</sup>

$$C = I \iff \exists Q \in O(d), b \in \mathbb{R}^d : \phi(x) = Q \cdot x + b,$$

Der *Green'sche Verzerrungstensor* wird definiert als

$$E := \frac{1}{2} \cdot (C - I) = \frac{1}{2} \cdot (du^T + du + du^T \cdot du) \approx \frac{1}{2} \cdot (du^T + du) =: \epsilon.$$

Die Matrix  $\epsilon$  heißt *linearisierter Verzerrungstensor*.

## 4.2 Hyperelastische Materialien

Ein Körper wird unter Krafteinwirkung deformiert. Die verrichtete Arbeit wird als Deformationsenergie gespeichert. Ein *elastischer* Körper gibt diese Energie bei Wegnahme der Kraft vollständig zurück. Ein Material heißt *hyperelastisch*, falls die Deformationsenergiedichte punktweise vom Cauchy-Green'schen Verzerrungstensor  $C$  abhängt:

$$E_{\text{Deformation}} = \int_{\Omega} W(C) \, dx.$$

Dabei ist  $W : \{ A \in \mathbb{R}^{d \times d} \mid A = A^T \} \rightarrow \mathbb{R}$  die Energiedichte<sup>12</sup>.

Ein Material heißt *isotrop*, falls die Materialeigenschaften in alle Richtungen gleich sind. Insbesondere bleibt dann die Energiedichte  $W$  gleich, wenn ein euklidischer Koordinatenwechsel gemacht wird. Das gibt Bedingungen an  $W$ , die wir nun herleiten möchten.

Wir fixieren uns dafür einen festen Punkt im Inneren des Körpers, beispielsweise seinen Massenmittelpunkt. Nun legen wir zwei unterschiedliche, cartesische Koordinatensysteme über den Körper. Der ausgezeichnete Punkt hat im einen System die Koordinaten  $x$  und im anderen die Koordinaten  $\hat{x}$ . Da je zwei cartesische Koordinatensystem im  $\mathbb{R}^d$  über eine euklidische Bewegung zusammenhängen, gibt es eine orthogonale Matrix  $Q \in SO(d)$  und einen Vektor  $a \in \mathbb{R}^d$ , sodass gilt

$$\hat{x} = Q \cdot x + a.$$

Die Deformation des Körpers wird im einen System durch die Funktion  $\phi$  und im zweiten durch  $\hat{\phi}$  beschrieben. Es gilt der Zusammenhang

$$\hat{\phi}(\hat{x}) = Q \cdot \phi(Q^T \cdot (\hat{x} - a)) + a.$$

<sup>11</sup>D.h.  $\phi$  ist eine Starrkörperbewegung.

<sup>12</sup>Etwas allgemeiner kann man  $W = W(x, C)$  ansetzen, um auch inhomogene Materialien zu beschreiben.

Insbesondere erhalten wir mittels Kettenregel

$$(\mathrm{d}_{\hat{x}}\hat{\phi})(\hat{x}) = Q \cdot (\mathrm{d}_x\phi)(Q^T \cdot (\hat{x} - a)) \cdot Q^T = Q \cdot (\mathrm{d}_x\phi)(x) \cdot Q^T.$$

Die beiden Cauchy-Green'schen Verzerrungstensoren haben demnach die Form  $C(x) = \mathrm{d}_x\phi(x)^T \cdot \mathrm{d}_x\phi(x)$  und

$$\hat{C}(\hat{x}) = \mathrm{d}_{\hat{x}}\hat{\phi}(\hat{x})^T \cdot \mathrm{d}_{\hat{x}}\hat{\phi}(\hat{x}) = Q \cdot C(x) \cdot Q^T.$$

Die Forderung an die Energiedichte  $W$ , unabhängig vom Koordinatensystem zu sein, lautet also

$$\forall Q \in SO(d) : \quad W(C) \stackrel{!}{=} W(\hat{C}) = W(Q \cdot C \cdot Q^T).$$

Da  $W$  nur auf der Menge aller symmetrischen (!) Matrizen agiert und jede symmetrische Matrix orthogonal ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist, kann  $W$  nur von den Eigenwerten von  $C$  abhängen. Da die Eigenwerte von  $C$  und  $E = \frac{1}{2} \cdot (C - I)$  ebenfalls zusammenhängen, hängt die Funktion

$$\tilde{W}(E) := W(I + 2 \cdot E)$$

nur von den Grundinvarianten von  $E$  ab. Das sind die Werte

$$\begin{aligned} i_1(E) &:= \text{spur} E, \\ i_2(E) &:= \frac{1}{2} \cdot [(\text{spur } E)^2 - \text{spur}(E^2)], \\ i_3(E) &:= \det E. \end{aligned}$$

Für  $\tilde{W}$  gilt das sog. *Hooke'sche Gesetz*:

#### 4.2.1 Gleichung. (Hooke'sches Gesetz)

Ist  $E = 0$  ein lokales Minimum von  $\tilde{W}$ , dann gilt in quadratischer Näherung

$$\tilde{W}(E) = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot (\text{spur } E)^2 + \mu \cdot \text{spur}(E^2),$$

mit Konstanten  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

#### Beweis.

Sei  $\hat{W} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit

$$\tilde{W}(E) = \hat{W}(\text{spur } E, \text{spur}(E^2), \det E).$$

Ist  $E = 0$  ein lokales Minimum von  $\tilde{W}$ , so gilt nach Taylor

$$\tilde{W}(E) = \tilde{W}(0) + \frac{1}{2} \cdot (\partial_{11}\hat{W})(0, 0, 0) \cdot (\text{spur } E)^2 + (\partial_2\hat{W})(0, 0, 0) \cdot \text{spur}(E^2) + \mathcal{O}(\|E\|^3).$$

O.B.d.A. gilt  $\tilde{W}(0) = 0$  und es folgt die Behauptung. ■

### 4.3 Variationsformulierung

Wir teilen nun den Rand des Körpers auf den Dirichlet- und den Neumann-Rand auf:

$$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N.$$

Der Körper sei bei  $\Gamma_D$  fest eingespannt und auf  $\Gamma_N$  wirke eine äußere Oberflächenkraft  $b$ . Weiters wirke auf  $\Omega$  eine Volumskraft  $f$ , z.B. die Gravitation. Die von den Kräften verursachte Verschiebung  $u$  impliziert eine Gesamtenergie:

$$E_{\text{Gesamt}}(u) = \underbrace{\int_{\Omega} W(C) \, dx}_{\text{Deformations-Energie}} - \underbrace{\int_{\Omega} \langle f, u \rangle \, dx}_{\text{Arbeit der Volumskraft}} - \underbrace{\int_{\Gamma_N} \langle b, u \rangle \, d\mu}_{\text{Arbeit der Oberflächenkraft}}.$$

Die Gleichung für die gesuchte Verschiebung  $u$  ergibt sich aus dem Prinzip der Minimierung der Gesamtenergie. Es soll jene Verschiebung  $u$  mit  $u|_{\Gamma_D} = 0$  gefunden werden, für die  $E_{\text{Gesamt}}(u)$  minimal wird.

Sei nun  $u$  die minimierende Verschiebung und  $v$  eine weitere zulässige Verschiebung, also  $v|_{\Gamma_D} = 0$ . Dann hat die Funktion

$$\Pi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & E_{\text{Gesamt}}(u + t \cdot v) \end{cases}$$

bei  $t = 0$  ein Minimum. Mit dem *Frobenius-Skalarprodukt* für Matrizen,  $A : B := \sum_{i,j} A_{ij} \cdot B_{ij}$ , lässt sich dann schreiben:

$$0 = \Pi'(0) = \int_{\Omega} \left[ \frac{dW}{dC}(C) \right] : \left[ \frac{dC}{du}(v) \right] dx - \int_{\Omega} \langle f, v \rangle dx - \int_{\Gamma_N} \langle b, v \rangle d\mu.$$

Die Matrizen  $\frac{dW}{dC}(C)$  und  $\frac{dC}{du}(v)$  sind dabei definiert durch:

$$\forall \text{kleinen, symmetrischen } \Delta \in \mathbb{R}^{d \times d} : \quad W(C + \Delta) = W(C) + \left[ \frac{dW}{dC}(C) \right] : \Delta + \mathcal{O}(\|\Delta\|^2),$$

$$\forall \text{kleinen } t > 0 : \quad C(u + t \cdot v) = C(u) + \left[ \frac{dC}{du}(v) \right] \cdot t + \mathcal{O}(t^2).$$

Wegen

$$\begin{aligned} C(u) &= (du + I)^T \cdot (du + I), \\ C(u + t \cdot v) &= (du + t \cdot dv + I)^T \cdot (du + t \cdot dv + I) = C(u) + t \cdot [(du + I)^T \cdot dv + dv^T \cdot (du + I)] + \mathcal{O}(t^2) \end{aligned}$$

ergibt sich schon

$$\frac{dC}{du}(v) = (du + I)^T \cdot dv + dv^T \cdot (du + I).$$

#### 4.3.1 Definition. (2. Piola-Kirchhoff'scher Spannungstensor)

Der 2. Piola-Kirchhoff'sche Spannungstensor wird definiert als

$$\Sigma := 2 \cdot \frac{dW}{dC}(C).$$

Da  $\Sigma$  eine symmetrische Matrix ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \langle f, v \rangle dx + \int_{\Gamma_N} \langle b, v \rangle d\mu &= \int_{\Omega} \left[ \frac{dW}{dC}(C) \right] : \left[ \frac{dC}{du}(v) \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \cdot \Sigma \right] : [(du + I)^T \cdot dv + dv^T \cdot (du + I)] dx \\ &= \int_{\Omega} \Sigma : [(du + I)^T \cdot dv] dx \\ &= \int_{\Omega} [(du + I) \cdot \Sigma] : dv dx \\ &= - \int_{\Omega} \langle \text{Div}((du + I) \cdot \Sigma), v \rangle dx + \int_{\Gamma_N} \langle (du + I) \cdot \Sigma \cdot n, v \rangle d\mu. \end{aligned}$$

Da  $v$  beliebig war, erhalten wir eine punktweise Aussage:

#### 4.3.2 Gleichung. (Gleichungen der Elastizitätstheorie)

Unter den oben gemachten Voraussetzungen gelten die *Gleichungen der Elastizitätstheorie*:

$$\begin{aligned} -\text{Div}((du + I) \cdot \Sigma) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ (du + I) \cdot \Sigma \cdot n &= b \quad \text{auf } \Gamma_N. \end{aligned}$$

## 4.4 Linearisierte Elastizitätstheorie

Klassische Annahmen für die *linearisierte* Elastizitätstheorie lauten:

- Kleine Verschiebungen  $u$ .
- Kleine Verzerrungen,  $E = \epsilon$ .
- Es gilt das Hooke'sche Gesetz:  $W(C) = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot (\text{spur } \epsilon)^2 + \mu \cdot \epsilon : \epsilon$ .

Wir wollen also folgende Minimierungsaufgabe lösen:

**4.4.1 Problem. (Minimierungsaufgabe der linearisierten Elastizitätstheorie)**

Finde eine zulässige Verschiebung  $u$ , d.h.  $u|_{\Gamma_D} = 0$ , sodass

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot (\text{spur } \epsilon)^2 + \mu \cdot \epsilon : \epsilon - \langle f, u \rangle \, dx - \int_{\Gamma_N} \langle b, u \rangle \, d\mu$$

minimal wird. Dabei ist wie bisher  $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot (du + du)^T$ . Wir nehmen außerdem  $\lambda, \mu > 0$  an.

Mit

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot (\text{spur } \epsilon(u)) \cdot (\text{spur } \epsilon(v)) + \mu \cdot \epsilon(u) : \epsilon(v) \, dx,$$

$$l(u) := \int_{\Omega} \langle f, u \rangle \, dx + \int_{\Gamma_N} \langle b, u \rangle \, d\mu$$

entspricht das genau der Minimierung von

$$J(u) := a(u, u) - l(u).$$

Wir möchten nun zeigen, dass die Bilinearform  $a$  koerziv auf dem Raum der zulässigen Verschiebungen ist. Dazu werden wir die sog. *Korn'sche Ungleichung* benötigen:

**4.4.2 Satz. (Korn'sche Ungleichung)**

Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand. Dann existiert ein  $C > 0$ , sodass

$$\forall u \in (H^1(\Omega))^d : \int_{\Omega} \epsilon(u) : \epsilon(u) \, dx \geq C \cdot \sum_i \|u_i\|_{H^1}^2.$$

**Beweis.**

Wir beschränken uns auf den Beweis für glatte  $u$  mit  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . Es gilt die Formel

$$2 \cdot \epsilon(u) : \epsilon(u) - du : du - (\text{div } u)^2 = \text{div}(du \cdot u - \text{div}(u) \cdot u).$$

Da  $u$  am Rand verschwindet, folgt schon

$$\int_{\Omega} 2 \cdot \epsilon(u) : \epsilon(u) - du : du - (\text{div } u)^2 \, dx = \int_{\Omega} \text{div}(du \cdot u - \text{div}(u) \cdot u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle du \cdot u - \text{div}(u) \cdot u, n \rangle \, dx = 0.$$

Aus der Poincaré'schen Ungleichung erhalten wir

$$2 \cdot \int_{\Omega} \epsilon(u) : \epsilon(u) \, dx \geq \int_{\Omega} du : du \, dx = \sum_i \|\nabla u_i\|_{L^2}^2 \geq C_P \cdot \sum_i \|u_i\|_{H^1}^2,$$

mit einer Konstanten  $C_P > 0$ . ■

Nun lässt sich die eindeutige Existenz einer Lösung der obigen Minimierungsaufgabe zeigen:

**4.4.3 Satz. (Eindeutige Existenz eines Minimierers)**

Hat  $\Omega$  einen stückweise glatten Rand, dann gibt es eine eindeutige Funktion  $u$ , die das Minimierungsproblem löst.

**Beweis.**

Die Funktion  $a$  von oben ist wegen der Korn'schen Ungleichung eine symmetrische, koerzive Bilinearform auf  $H_D^1 := \{u \in (H^1(\Omega))^d \mid u|_{\Gamma_D} = 0\}$ . Damit folgt die Behauptung aus einer Variante des Lemma von Lax-Milgram. ■



## 5 Homogenisierung

Viele Materialien haben eine Mikrostruktur auf einer sehr kleinen Skalar, d.h. eigentlich variieren die Materialparameter sehr stark. Es stellt sich nun die Frage, ob man anstelle des echten Materials nicht einfach ein idealisiertes, homogenes Material im Modell verwenden kann und die zugehörigen Gleichungen als Approximation an die Realität „gut“ sind.

### 5.1 Modellproblem

Als Einführung betrachten wir das folgende Modellproblem:

#### 5.1.1 Problem. (Modellproblem)

Sei  $\epsilon > 0$  fest,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet,  $Y := [0, 1]^d$  ein Einheitswürfel und die Funktion  $A \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d \times d})$  punktweise SPD und  $Y$ -periodisch. Finde  $u_\epsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left( A \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla u_\epsilon \right) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u_\epsilon &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die schwache Formulierung dieses Problems lautet: Finde  $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$  mit

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \left\langle A \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla u_\epsilon, \nabla v \right\rangle dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx.$$

Nach dem Lemma von Lax-Milgram gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  eine eindeutige Lösung  $u_\epsilon$ .

#### 5.1.2 Problem. (Homogenisiertes Modellproblem)

Wir werden später sehen, dass für  $\epsilon \rightarrow 0$  die Folge  $(u_\epsilon)_\epsilon$  in  $H_0^1$  gegen ein  $u_0 \in H_0^1$  konvergiert. Das Problem besteht nun darin, dieses  $u_0$  und eine konstante Matrix  $A_0$  zu finden, sodass gilt:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} (A_0 \cdot \nabla u_0) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u_0 &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Wir erinnern an den Begriff der schwachen Konvergenz:

#### 5.1.3 Definition. (Schwache Konvergenz)

Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein Banachraum. Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$  konvergiert schwach gegen ein  $x \in X$ , falls gilt:

$$\forall F \in X' : F(x_n) \rightarrow F(x).$$

In diesem Fall schreiben wir  $x_n \rightharpoonup x$ . In Hilberträumen  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist dies äquivalent zu:

$$\forall h \in H : \langle x_n, h \rangle \rightarrow \langle x, h \rangle.$$

Wir werden gleich das folgende Lemma brauchen:

#### 5.1.4 Lemma.

Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  ein beschränktes Gebiet,  $Y := [0, 1]^d$  ein Einheitswürfel und  $a \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  eine  $Y$ -periodische Funktion. Sei weiters für jedes  $\epsilon > 0$

$$a_\epsilon := a \left( \frac{\cdot}{\epsilon} \right) \in L^\infty(\Omega).$$

Dann konvergiert  $(a_\epsilon)_\epsilon$  schwach in  $L^2(\Omega)$  gegen den  $Y$ -Mittelwert von  $a$ :

$$a_\epsilon \rightharpoonup \langle a \rangle_Y.$$

Der  $Y$ -Mittelwert von  $a$  wird dabei definiert als

$$\langle a \rangle_Y := \frac{1}{|Y|} \int_Y a dx.$$

Gehen wir einmal davon aus, schon die Existenz von  $u_0$  bewiesen zu haben. Dann bleibt aber immer noch ein Problem: Da der  $H_0^1$  kompakt in den  $L^2$  eingebettet ist, gibt es eine Teilfolge  $(u_{\epsilon'})_{\epsilon'}$  mit

$$\nabla u_{\epsilon'} \rightharpoonup \nabla u_0.$$

Wegen dem gerade erwähnten Lemma gilt auch

$$A_{\epsilon'} \rightharpoonup \langle A \rangle_Y.$$

Man könnte also hoffen, dass die gewünschte Gleichung für  $u_0$  gegeben ist durch

$$\forall v \in H_0^1 : \int_{\Omega} \langle \langle A \rangle_Y \cdot \nabla u_0, \nabla v \rangle \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx.$$

Unglücklicherweise konvergiert aber das Produkt von schwach konvergenten Folgen im Allgemeinen *nicht* gegen das Produkt der Limiten. Daher muss diese Gleichung nicht zwingen korrekt sein.

## 5.2 Das 1-dimensionale Modellproblem

Wir müssen also einen anderen Weg einschlagen. Betrachte als Motivation den folgenden, 1-dimensionalen Sonderfall:

### 5.2.1 Beispiel.

Sei  $\epsilon > 0$  fest,  $\Omega := (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $Y := [0, 1)$  und  $a \in C^1(\mathbb{R})$  eine  $Y$ -periodische Funktion mit  $a > 0$ . Finde  $u_{\epsilon} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} \left(-a\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \cdot u'_{\epsilon}\right)' &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u_{\epsilon}(0) = u_{\epsilon}(1) &= 0. \end{aligned}$$

Mit der Stammfunktion

$$F(x) := \int_0^x f(t) \, dt$$

ergibt sich für  $u_{\epsilon}$  durch mehrmaliges Integrieren und Einsetzen der Randbedingungen schon

$$u_{\epsilon}(x) = - \int_0^x \frac{F(t)}{a(t/\epsilon)} \, dt + C_{\epsilon} \cdot \int_0^x \frac{1}{a(t/\epsilon)} \, dt, \quad \text{wobei } C_{\epsilon} := \frac{\int_0^1 \frac{F(t)}{a(t/\epsilon)} \, dt}{\int_0^1 \frac{1}{a(t/\epsilon)} \, dt}.$$

Sei nun  $x \in \Omega$  fest. Da die Funktion  $s \mapsto \frac{1}{a(s)}$  in  $L^{\infty}(\mathbb{R})$  liegt und  $Y$ -periodisch ist, konvergiert die Folge  $\left(\frac{1}{a(t/\epsilon)}\right)_{\epsilon > 0}$  in  $L^2((0, x))$  schwach gegen  $\langle \frac{1}{a} \rangle_Y$ . Ist  $f$  hinreichend glatt, dann liegt  $F$  in  $L^2((0, x))$ . Die schwache Konvergenz impliziert also

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{F(t)}{a(t/\epsilon)} \, dt &= \left\langle \frac{1}{a(\cdot/\epsilon)}, F \right\rangle_{L^2((0, x))} \xrightarrow{\mathbb{R}} \left\langle \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle_Y, F \right\rangle_{L^2((0, x))} = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle_Y \cdot \int_0^x F(t) \, dt, \\ \int_0^x \frac{1}{a(t/\epsilon)} \, dt &= \left\langle \frac{1}{a(\cdot/\epsilon)}, 1 \right\rangle_{L^2((0, x))} \xrightarrow{\mathbb{R}} \left\langle \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle_Y, 1 \right\rangle_{L^2((0, x))} = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle_Y \cdot \int_0^x 1 \, dt. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} C_{\epsilon} &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} C_0 := \int_0^1 F(t) \, dt, \\ \forall x \in \Omega : \quad u_{\epsilon}(x) &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} u_0(x) := - \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle_Y \cdot \int_0^x F(t) \, dt + C_0 \cdot \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle_Y \cdot \int_0^x 1 \, dt. \end{aligned}$$

Man kann nun nachrechnen, dass für dieses  $u_0$  und für  $a_0 := \frac{1}{\langle \frac{1}{a} \rangle_Y}$  gilt:

$$\begin{aligned} (-a_0 \cdot u'_0)' &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u_0(0) = u_0(1) &= 0. \end{aligned}$$

Wir haben also das homogenisierte Modellproblem für  $d := 1$  und  $\Omega := (0, 1)$  gelöst. Um für den mehrdimensionalen Fall besser gewappnet zu sein, untersuchen wir  $u_{\epsilon}$  noch ein wenig genauer. Falls  $f$  hinreichend glatt ist, gilt:

$$\begin{aligned} u_{\epsilon}(x) - u_0(x) &= - \int_0^x \underbrace{\left[ \frac{1}{a(t/\epsilon)} - \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle_Y \right]}_{=: g(t/\epsilon)} \cdot F(t) \, dt + C_{\epsilon} \cdot \int_0^x \frac{1}{a(t/\epsilon)} \, dt - C_0 \cdot \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle_Y \cdot \int_0^x 1 \, dt \\ &= - \int_0^x g(t/\epsilon) \cdot F(t) \, dt + C_{\epsilon} \cdot \int_0^x g(t/\epsilon) \, dt + (C_{\epsilon} - C_0) \cdot \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle_Y \cdot x. \end{aligned}$$

Mit der Stammfunktion  $G(x) := \int_0^x g(t) dt$  gilt

$$\begin{aligned} \int_0^x g(t/\epsilon) \cdot F(t) dt &\stackrel{\text{p.I.}}{=} \epsilon \cdot G(x/\epsilon) \cdot F(x) - \epsilon \cdot \int_0^x G(t/\epsilon) \cdot F'(t) dt \\ &= \underbrace{\epsilon \cdot [G(x/\epsilon) - \langle G \rangle_Y]}_{=: p(x/\epsilon)} \cdot \underbrace{F(x)}_{=: q(x)} - \epsilon \cdot \underbrace{\int_0^x [G(t/\epsilon) - \langle G \rangle_Y] \cdot F'(t) dt}_{=: I} \\ &= \epsilon \cdot p(x/\epsilon) \cdot q(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Die Abschätzung  $\mathcal{O}(\epsilon)$  für  $I$  erhält man, indem man die gleiche Rechnung noch einmal für  $I$  macht. Wegen  $\int_0^x g(t/\epsilon) dt \in \mathcal{O}(\epsilon)$  und auch  $(C_\epsilon - C_0) \in \mathcal{O}(\epsilon)$  haben wir also

$$u_\epsilon(x) = u_0(x) + \epsilon \cdot r(x/\epsilon) \cdot s(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

mit einer  $Y$ -periodischen Funktion  $r$  und einer glatten Funktion  $s$ . Der Ansatz für  $u_\epsilon$  wird also auch für mehrdimensionale Probleme von dieser Bauart sein.

### 5.3 Das mehrdimensionale Modellproblem

Wir kommen wieder zum allgemeinen, mehrdimensionalen Modellproblem zurück,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ . Wir suchen also eine Funktion  $u_\epsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left( A \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla u_\epsilon \right) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u_\epsilon &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Das 1-dimensionale Problem suggeriert den Mehrskalensatz

$$u_\epsilon(x) = u_0(x, x/\epsilon) + \epsilon \cdot u_1(x, x/\epsilon) + \epsilon^2 \cdot u_2(x, x/\epsilon) + \dots,$$

wobei die Funktionen  $u_i : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto u_i(x, y)$  im zweiten Argument  $Y$ -periodisch sein sollen.

Wir definieren nun einen linearen Operator  $L$ :

$$L := -\operatorname{div} \left( A(x/\epsilon) \cdot \nabla(\cdot) \right).$$

Ist  $\phi = \phi(x, y)$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} L(\phi(x, x/\epsilon)) &= -\operatorname{div} \left( A(x/\epsilon) \cdot [(\nabla_x \phi)(x, x/\epsilon) + (1/\epsilon) \cdot (\nabla_y \phi)(x, x/\epsilon)] \right) \\ &= -\operatorname{div}_x \left( A(y) \cdot (\nabla_x \phi)(x, y) \right) - \frac{1}{\epsilon} \cdot \operatorname{div}_y \left( A(y) \cdot (\nabla_x \phi)(x, y) \right) \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon} \cdot \operatorname{div}_x \left( A(y) \cdot (\nabla_y \phi)(x, y) \right) - \frac{1}{\epsilon^2} \cdot \operatorname{div}_y \left( A(y) \cdot (\nabla_y \phi)(x, y) \right) \\ &= +\frac{1}{\epsilon^2} \cdot \underbrace{\left[ -\operatorname{div}_y \left( A(y) \cdot \nabla_y \phi \right) \right]}_{=: L_0(\phi)} + \frac{1}{\epsilon} \cdot \underbrace{\left[ -\operatorname{div}_y \left( A(y) \cdot \nabla_x \phi \right) - \operatorname{div}_x \left( A(y) \cdot \nabla_y \phi \right) \right]}_{=: L_1(\phi)} + \underbrace{\left[ -\operatorname{div}_x \left( A(y) \cdot \nabla_x \phi \right) \right]}_{=: L_2(\phi)} \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir den Ansatz für  $u_\epsilon$  ein und nutzen die Linearität der Operatoren  $L_0, L_1, L_2$  aus:

$$f \stackrel{!}{=} L(u_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} \cdot [L_0(u_0)] + \frac{1}{\epsilon} \cdot [L_0(u_1) + L_1(u_0)] + 1 \cdot [L_0(u_2) + L_1(u_1) + L_2(u_0)] + \epsilon \cdot [\dots] + \dots$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} L_0(u_0) &= 0, \\ L_0(u_1) &= -L_1(u_0), \\ L_0(u_2) &= f - L_1(u_1) - L_2(u_0), \\ L_0(u_3) &= -L_1(u_2) - L_2(u_1), \\ &\vdots \\ L_0(u_{i+2}) &= -L_1(u_{i+1}) - L_2(u_i), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Man sieht, dass immer das folgende Hilfsproblem auftritt:

**5.3.1 Problem. (Hilfsproblem)**

Finde eine  $Y$ -periodische Funktion  $v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto v(y)$  mit

$$-\operatorname{div}_y \left( A(y) \cdot \nabla_y v \right) = g(y).$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} H_{\text{per}}^1(Y) &:= \{v \in H^1(Y) \mid v \text{ erfüllt period. Randb.}\}, \\ H_{\text{per,M}}^1(Y) &:= \{v \in H^1(Y) \mid v \text{ erfüllt period. Randb., } \langle v \rangle_Y = 0\}. \end{aligned}$$

Dann lautet eine schwache Formulierung dieses Problems:

**5.3.2 Problem. (Hilfsproblem, schwache Formulierung)**

Finde  $v \in H_{\text{per}}^1(Y)$  mit

$$\forall w \in H_{\text{per}}^1(Y) : \int_Y \langle A(y) \cdot \nabla v, \nabla w \rangle \, dy = \int_Y g(y) \cdot w(y) \, dy.$$

Eine schwache Lösung  $v$  kann nicht eindeutig sein, da  $v + \text{const.}$  ebenfalls eine Lösung ist. Es gilt jedoch das folgende Lemma:

**5.3.3 Lemma.**

Sei  $g \in L^2(Y)$  mit  $\langle g \rangle_Y = 0$ . Dann gibt es ein eindeutiges  $v \in H_{\text{per,M}}^1(Y)$  mit

$$\forall w \in H_{\text{per,M}}^1(Y) : \int_Y \langle A(y) \cdot \nabla v, \nabla w \rangle \, dy = \int_Y g(y) \cdot w(y) \, dy.$$

**5.3.4 Korollar.**

Sei  $g \in L^2(Y)$  mit  $\langle g \rangle_Y = 0$ . Dann ist die schwache Formulierung des Hilfsproblems bis auf eine Konstante eindeutig lösbar.

Dieses Korollar hilft uns bei der Berechnung der  $u_i$  und der homogenisierten Matrix  $A_0$ :

- 1. Schritt:  $u_0$ : Die erste Gleichung des Gleichungssystems für die  $u_i$  lautete

$$L_0(u_0(x, y)) = 0.$$

Für festes  $x$  ist die Funktion  $y \mapsto u_0(x, y) := \text{const.}$  eine und somit *die* schwache Lösung des Hilfsproblems. Damit kann  $u_0$  nicht von  $y$  abhängen und wir erhalten

$$u_0(x, y) = u_0(x).$$

- 2. Schritt:  $u_1$ : Wegen  $\nabla_y u_0(x, y) = 0$  vereinfacht sich die zweite Gleichung des Systems:

$$-\operatorname{div}_y \left( A(y) \cdot \nabla_y u_1(x, y) \right) = L_0(u_1) = -L_1(u_0) = \operatorname{div}_y \left( A(y) \cdot \nabla_x u_0(x) \right) = \sum_{i,j} \partial_{y_i} (A_{ij}(y)) \cdot \partial_{x_j} (u_0(x)).$$

Macht man für  $u_1$  den Ansatz

$$u_1(x, y) = - \sum_j \chi_j(y) \cdot \partial_{x_j} (u_0(x))$$

mit noch zu bestimmenden  $\chi_j$ , dann erhält man

$$\sum_j \partial_{x_j} (u_0(x)) \cdot \left[ \operatorname{div}_y \left( A(y) \cdot \nabla_y \chi_j(y) \right) \right] = \sum_j \partial_{x_j} (u_0(x)) \cdot \left[ \sum_i \partial_{y_i} (A_{ij}(y)) \right].$$

Sind die partiellen Ableitungen von  $u_0$  linear unabhängig, so ergibt sich

$$\forall j: \quad -\operatorname{div}_y \left( A(y) \cdot \nabla_y \chi_j(y) \right) = - \sum_i \partial_{y_i} (A_{ij}(y)) =: g_j(y).$$

Die  $\chi_j$  erfüllen also die Gleichung des Hilfsproblems von weiter oben. Da man  $g_j \in L^2(Y)$  und  $\langle g_j \rangle_Y = 0$  zeigen kann, gibt es laut obigem Korollar schwache Lösungen für die  $\chi_j$ . Damit haben wir  $u_1$ .

- **3. Schritt:  $A_0$ :** Die dritte Gleichung des Systems lautet nun

$$-\operatorname{div}_y \left( A(y) \cdot \nabla_y u_2(x, y) \right) = f + \operatorname{div}_y \left( A(y) \cdot \nabla_x u_1(x, y) \right) + \operatorname{div}_x \left( A(y) \cdot \nabla_y u_1(x, y) \right) + \operatorname{div}_x \left( A(y) \cdot \nabla_x u_0(x) \right).$$

Um nach  $u_2$  lösen zu können, fordern wir

$$\forall x: \quad \langle f - L_1(u_1) - L_2(u_0) \rangle_Y = 0.$$

Da für festes  $x$  die Funktion  $y \mapsto A(y) \cdot \nabla_x u_1(x, y)$  periodisch ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_Y L_1(u_1) + L_2(u_0) \, dy \\ &= - \underbrace{\int_Y \operatorname{div}_y \left( A(y) \cdot \nabla_x u_1(x, y) \right) \, dy}_{=0} - \int_Y \operatorname{div}_x \left( A(y) \cdot \nabla_y u_1(x, y) \right) \, dy \\ &\quad - \int_Y \operatorname{div}_x \left( A(y) \cdot \nabla_x u_0(x) \right) \, dy \\ &= -\operatorname{div}_x \left( \int_Y A(y) \cdot \nabla_x u_0(x) - A(y) \cdot d_y \chi(y)^T \cdot \nabla_x u_0(x) \, dy \right) \\ &= -\operatorname{div}_x \left( \underbrace{\int_Y A(y) \cdot [I - d_y \chi(y)^T] \, dy}_{=: A_0} (\nabla_x u_0(x)) \right). \end{aligned}$$

Dabei wurde  $\chi(y) := (\chi_j(y))_j$  gesetzt und

$$\nabla_y u_1(x, y) = \nabla_y [-\langle \chi(y), \nabla_x u_0(x) \rangle] = -d_y \chi(y)^T \cdot \nabla_x u_0(x) + 0$$

verwendet. Wir haben also die gesuchte Matrix  $A_0$  des homogenisierten Modellproblems gefunden:

$$-\operatorname{div}_x \left( A_0 \cdot \nabla_x u_0(x) \right) = f.$$

Es stellt sich heraus, dass die Matrix  $A_0$  ebenfalls SPD ist.

Wir haben also eine formale Approximation an  $u_\epsilon$  gefunden:

$$u_\epsilon \approx u_0(x) + \epsilon \cdot u_1(x, x/\epsilon) = u_0(x) - \epsilon \cdot \sum_j \chi_j(x/\epsilon) \cdot \partial_{x_j} (u_0(x)).$$

Dass dies tatsächlich eine gute Approximation ist, zeigt der folgende Satz:

**5.3.5 Satz.**

Sei  $f$  glatt und  $A$  derart, dass  $\chi_j \in C^1(Y)$ . Dann gibt es ein  $C > 0$  mit

$$\left\| u_\epsilon - \left[ u_0 - \epsilon \cdot \sum_j \chi_j(\cdot/\epsilon) \cdot \partial_{x_j} u_0 \right] \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \cdot \sqrt{\epsilon}.$$

**Beweis.**

Idee: Man rechnet nach, dass die Approximation  $v := u_0 - \epsilon \cdot \sum_j \chi_j(\cdot/\epsilon) \cdot \partial_{x_j} u_0$  ein kleines Residuum hat, d.h. die Funktionen  $v_\Omega, v_{\partial\Omega}$ , definiert durch

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left( A(\cdot/\epsilon) \cdot \nabla (u_\epsilon - v) \right) &= v_\Omega, \\ (u_\epsilon - v)|_{\partial\Omega} &= v_{\partial\Omega}, \end{aligned}$$

sind in geeigneten Normen klein. Dann folgt die Aussage aus dem Lemma von Lax-Milgram. ■

## 5.4 Der Konvergenzbeweis von Luc Tartar mit oszillierenden Testfunktionen

Sei für jedes  $\epsilon > 0$  die Funktion  $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$  die schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left( A \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla u_\epsilon \right) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u_\epsilon &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Das bedeutet:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \left\langle A \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla u_\epsilon, \nabla v \right\rangle dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx.$$

Sei weiters  $A_0 := \int_Y A(y) \cdot [I - d_y \chi(y)^T] dy$  die homogenisierte Matrix<sup>13</sup> und  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  die schwache Lösung<sup>14</sup> von

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A_0 \cdot \nabla u_0) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u_0 &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Das bedeutet:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \langle A_0 \cdot \nabla u_0, \nabla v \rangle dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx.$$

Dann gilt der folgende Satz:

### 5.4.1 Satz. (Tartar)

Unter den obigen Voraussetzungen gilt

$$\begin{aligned} u_\epsilon &\rightharpoonup u_0 \quad \text{in } H^1(\Omega), \\ u_\epsilon &\rightarrow u_0 \quad \text{in } L^2(\Omega), \\ A(\cdot/\epsilon) \cdot \nabla u_\epsilon &\rightharpoonup A_0 \cdot \nabla u_0 \quad \text{in } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

### Beweis.

Schritt 1: Übergang zu Teilfolgen

Durch Übergang zu Teilfolgen erhält man die Existenz eines  $\tilde{u}_0 \in H_0^1(\Omega)$  und eines  $\xi_0 \in L^2(\Omega)$  mit

$$\begin{aligned} u_{\epsilon'} &\xrightarrow{H^1} \tilde{u}_0, \\ u_{\epsilon'} &\xrightarrow{L^2} \tilde{u}_0, \\ \xi_{\epsilon'} := A(\cdot/\epsilon') \cdot \nabla u_{\epsilon'} &\xrightarrow{L^2} \xi_0, \\ \forall v \in H_0^1 : \int_{\Omega} \langle \xi_{\epsilon'}, \nabla v \rangle dx &= \int_{\Omega} f \cdot v dx, \\ \forall v \in H_0^1 : \int_{\Omega} \langle \xi_0, \nabla v \rangle dx &= \int_{\Omega} f \cdot v dx. \end{aligned}$$

Wenn wir  $\xi_0 = A_0 \cdot \nabla \tilde{u}_0$  zeigen können, dann folgt aus der Eindeutigkeit der schwachen Lösung der letzten Gleichung schon  $\tilde{u}_0 = u_0$ . Außerdem lässt sich zeigen, dass dann die drei Konvergenzen schon für die gesamte Folge  $(u_\epsilon)_\epsilon$  gelten, d.h. genau die Behauptung.

Wir müssen also noch zeigen:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^d : \langle \xi_0, \lambda \rangle = \langle A_0 \cdot \nabla \tilde{u}_0, \lambda \rangle.$$

□

Schritt 2: Definition und Eigenschaften von  $\chi_\lambda, \omega_\lambda^\epsilon, \eta_\lambda^\epsilon$

Mit  $\chi$  so wie bisher definieren wir für alle  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ :

$$\begin{aligned} \chi_\lambda(y) &:= \langle \chi(y), \lambda \rangle, \\ \omega_\lambda^\epsilon(x) &:= \langle x, \lambda \rangle - \epsilon \cdot \chi_\lambda(x/\epsilon), \\ \eta_\lambda^\epsilon(x) &:= A(x/\epsilon) \cdot \nabla \omega_\lambda^\epsilon(x) = A(x/\epsilon) \cdot [\lambda - (\nabla_y \chi_\lambda)(x/\epsilon)] = A(x/\epsilon) \cdot [I - (d_y \chi)(x/\epsilon)^T] \cdot \lambda. \end{aligned}$$

<sup>13</sup>Die  $\chi_j$  sind wie zuvor definiert und allein durch  $A$  bestimmt.

<sup>14</sup>Das  $u_0$  aus diesem Unterkapitel und das  $u_0$  aus dem vorigen Unterkapitel haben nichts miteinander zu tun. Sind sind Lösungen von unterschiedlichen Differentialgleichungen (homogen vs. inhomogen). Insbesondere ist der letzte Satz aus dem vorigen Unterkapitel kein Ersatz für den Konvergenzbeweis von Tartar.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\omega_\lambda^\epsilon &\xrightarrow{L^2} \langle x, \lambda \rangle, \\ \omega_\lambda^\epsilon &\xrightarrow{H^1} \langle x, \lambda \rangle, \\ \eta_\lambda^\epsilon &\xrightarrow{L^2} A_0 \cdot \lambda.\end{aligned}$$

Die erste Konvergenz folgt aus der Tatsache, dass die  $\|\chi_j(\cdot/\epsilon)\|_{L^2(\Omega)}$  gleichmäßig in  $\epsilon$  beschränkt sind.

Die zweite Konvergenz folgt aus der ersten Konvergenz und der Tatsache, dass die Funktion  $\lambda - (\nabla_y \chi_\lambda)(\cdot)$  sicher  $Y$ -periodisch ist und dem ersten Lemma in diesem Kapitel:

$$\nabla \omega_\lambda^\epsilon = \lambda - (\nabla_y \chi_\lambda)(\cdot/\epsilon) \xrightarrow{L^2} \langle \lambda - (\nabla_y \chi_\lambda) \rangle_Y = \lambda = \nabla \langle x, \lambda \rangle.$$

Die dritte Konvergenz folgt aus der Tatsache, dass die Funktion  $A(\cdot) \cdot [\lambda - (\nabla_y \chi_\lambda)(\cdot)]$  sicher  $Y$ -periodisch ist und dem ersten Lemma in diesem Kapitel:

$$\eta_\lambda^\epsilon = A(\cdot/\epsilon) \cdot [\lambda - (\nabla_y \chi_\lambda)(\cdot/\epsilon)] \xrightarrow{L^2} \langle A(\cdot) \cdot [\lambda - (\nabla_y \chi_\lambda)(\cdot)] \rangle_Y = A_0 \cdot \lambda.$$

□

Schritt 3:  $\operatorname{div}_y(A(y) \cdot [I - d_y \chi(y)^T] \cdot \lambda) = 0$   
Wegen

$$d_y \chi(y)^T \cdot \lambda = \sum_j (\nabla_y \chi_j(y)) \cdot \lambda_j$$

und der die  $\chi_j$  definierenden Differentialgleichung haben wir

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_y(A(y) \cdot [I - d_y \chi(y)^T] \cdot \lambda) &= \operatorname{div}_y(A(y) \cdot \lambda) + \sum_j \left[ -\operatorname{div}_y(A(y) \cdot \nabla_y \chi_j(y)) \right] \cdot \lambda_j \\ &= \sum_i \partial_{y_i} \left( \sum_j A_{ij}(y) \cdot \lambda_j \right) + \sum_j \left[ -\sum_i \partial_{y_i} (A_{ij}(y)) \right] \cdot \lambda_j \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Schritt 4:  $\forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \langle \eta_\lambda^\epsilon, \nabla v \rangle \, dx = 0$

Es reicht, die Behauptung für  $v \in C_{00}^\infty(\Omega)$  zu zeigen. Sei  $v_\epsilon$  so, dass  $v_\epsilon(x/\epsilon) = v(x)$ . Dann folgt mit dem Transformationssatz für Integrale

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle \eta_\lambda^\epsilon(x), \nabla v(x) \rangle \, dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \langle A(x/\epsilon) \cdot [I - (d_y \chi)(x/\epsilon)^T] \cdot \lambda, (1/\epsilon) \cdot (\nabla v_\epsilon)(x/\epsilon) \rangle \, dx \\ &= \epsilon^{d-1} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \langle A(y) \cdot [I - (d_y \chi)(y)^T] \cdot \lambda, (\nabla v_\epsilon)(y) \rangle \, dy \\ &= -\epsilon^{d-1} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\operatorname{div}_y(A(y) \cdot [I - (d_y \chi)(y)^T] \cdot \lambda)}_{=0} v_\epsilon(y) \, dy \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Schritt 5:  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^d : \langle \xi_0, \lambda \rangle = \langle A_0 \cdot \nabla u_0, \lambda \rangle$

Sei nun  $\phi \in C_{00}^\infty(\Omega)$  eine Testfunktion. Setzt man in die erste Integralgleichung aus Schritt 1 die Funktion  $v := \phi \cdot \omega_\lambda^\epsilon \in H_0^1$  ein, so erhält man aufgrund der Selbstadjungiertheit von  $A$ :

$$\begin{aligned}\int_\Omega f \cdot \phi \cdot \omega_\lambda^\epsilon \, dx &= \int_\Omega \langle \xi_{\epsilon'}, (\nabla \phi) \cdot \omega_\lambda^\epsilon \rangle \, dx + \int_\Omega \langle \xi_{\epsilon'}, \phi \cdot (\nabla \omega_\lambda^\epsilon) \rangle \, dx \\ &= \int_\Omega \langle \xi_{\epsilon'}, (\nabla \phi) \cdot \omega_\lambda^\epsilon \rangle \, dx + \int_\Omega \langle \nabla u_{\epsilon'}, A(\cdot/\epsilon') \cdot (\nabla \omega_\lambda^\epsilon) \rangle \cdot \phi \, dx \\ &= \int_\Omega \langle \xi_{\epsilon'}, (\nabla \phi) \cdot \omega_\lambda^\epsilon \rangle \, dx + \int_\Omega \langle \eta_\lambda^{\epsilon'}, \phi \cdot (\nabla u_{\epsilon'}) \rangle \, dx\end{aligned}$$

Nun setzen wir  $v := \phi \cdot u_{\epsilon'} \in H_0^1$  in die in Schritt 4 gezeigte Gleichung ein:

$$\int_\Omega \langle \eta_\lambda^{\epsilon'}, (\nabla \phi) \cdot u_{\epsilon'} \rangle \, dx + \int_\Omega \langle \eta_\lambda^{\epsilon'}, \phi \cdot (\nabla u_{\epsilon'}) \rangle \, dx = 0.$$

Addiert man diese beiden Gleichungen miteinander, so folgt

$$\int_{\Omega} f \cdot \phi \cdot \omega_{\lambda}^{\epsilon'} dx + \int_{\Omega} \langle \eta_{\lambda}^{\epsilon'}, (\nabla \phi) \cdot u_{\epsilon'} \rangle dx = \int_{\Omega} \langle \xi_{\epsilon'}, (\nabla \phi) \cdot \omega_{\lambda}^{\epsilon'} \rangle dx.$$

Nun treten nur mehr Produkte von schwach konvergenten und konvergenten Folgen auf. Hier dürfen Limesbildung und Multiplikation vertauscht werden und wir erhalten für  $\epsilon' \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \cdot \phi \cdot \langle x, \lambda \rangle dx + \int_{\Omega} \langle A_0 \cdot \lambda, (\nabla \phi) \cdot \tilde{u}_0 \rangle dx &= \int_{\Omega} \langle \xi_0, (\nabla \phi) \cdot \langle x, \lambda \rangle \rangle dx \\ &= \int_{\Omega} \langle \xi_0, \nabla(\phi \cdot \langle x, \lambda \rangle) \rangle dx - \int_{\Omega} \langle \xi_0, \phi \cdot \lambda \rangle dx. \end{aligned}$$

Augrund der zweiten Integralgleichung in Schritt 1 sind das erste Integral der linken Seite und das erste Integral der rechten Seite gleich. Das zeigt

$$\int_{\Omega} \langle \xi_0, \lambda \rangle \cdot \phi dx = - \int_{\Omega} \langle (A_0 \cdot \lambda) \cdot \tilde{u}_0, \nabla \phi \rangle dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}((A_0 \cdot \lambda) \cdot \tilde{u}_0) \cdot \phi dx = \int_{\Omega} \langle A_0 \cdot \nabla \tilde{u}_0, \lambda \rangle \cdot \phi dx.$$

Durch Variation von  $\phi$  folgt nun die Behauptung. □

■

#### 5.4.2 Bemerkung. (Zusammenfassung)

Wir haben die Gleichung

$$-\operatorname{div}(A(x/\epsilon) \cdot \nabla u_{\epsilon}) = f$$

im Unterkapitel *Das mehrdimensionale Modellproblem* approximativ nach  $u_{\epsilon}$  gelöst. Es stellte sich heraus, dass unsere Approximation von der Ordnung  $\mathcal{O}(\epsilon)$  war. Das war mit relativ viel Aufwand verbunden, da  $A$  ja noch von  $x$  abhängte. Der Konvergenzbeweis von Tartar rechtfertigt es nun, stattdessen die einfachere Gleichung

$$-\operatorname{div}(A_0 \cdot \nabla u_0) = f$$

mit der homogenisierten Matrix  $A_0$  nach  $u_0$  zu lösen und diese Lösung  $u_0$  als Approximation an das exakte  $u_{\epsilon}$  der obigen Gleichung zu verwenden.



## 6 Reaktions-Diffusions-Gleichungen und Musterbildung

Musterbildung tritt in der Natur häufig auf, z.B. in 2-Phasen-Gemischen (Öl und Wasser), auf Tierfellen oder Blättern. In diesem Kapitel werden wir einige Gleichungen herleiten, die solche Phänomene zulassen.

### 6.1 Reaktions-Diffusions-Gleichungen

Wir betrachten folgende Größen:

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ : Von einer Substanz eingenommenes Gebiet.
- $c(x, t) \in \mathbb{R}$ : Konzentration. Einheit „Menge pro Volumen“.
- $J(x, t, c) \in \mathbb{R}^d$ : Flussfunktion. Einheit „Menge pro Fläche pro Zeit“.
- $f(x, t, c) \in \mathbb{R}$ : Produktionsrate. Einheit „Menge pro Volumen pro Zeit“.

Wir stellen nun eine Bilanzgleichung für ein Kontrollvolumen  $\omega \subseteq \Omega$  auf:

$$\int_{\omega} c(x, t + \Delta t) \, dx - \int_{\omega} c(x, t) \, dx = - \int_{\partial\omega} \langle J(x, t, c), n(x) \rangle \cdot \Delta t \, dx + \int_{\omega} f(x, t, c) \cdot \Delta t \, dx.$$

Division durch  $\Delta t$  und Grenzwertbildung  $\Delta t \rightarrow 0$  liefern

$$\int_{\omega} \partial_t c \, dx = \int_{\omega} f - \operatorname{div}(J) \, dx.$$

Durch Variation von  $\omega$  erhalten wir die folgende Gleichung:

#### 6.1.1 Gleichung. (Erhaltungsgleichung)

Unter den obigen Voraussetzungen gilt die sog. *Erhaltungsgleichung*:

$$\partial_t c + \operatorname{div}(J) = f \quad \text{in } \Omega.$$

Nimmt man an, dass die Flussfunktion von der Form

$$J := -d \cdot \nabla c$$

für ein  $d \geq 0$  ist, so erhalten wir:

#### 6.1.2 Gleichung. (Reaktions-Diffusions-Gleichung)

Unter den obigen Voraussetzungen gilt die sog. *Reaktions-Diffusions-Gleichung*:

$$\partial_t c - d \cdot \Delta c = f.$$

Wir fragen nun nach Lösungen und Stabilität derer Stationärzustände.

### 6.2 Turing-Instabilität

Zur Motivation betrachten wir die folgenden Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} y' &= A \cdot y, \\ y' &= B \cdot y. \end{aligned}$$

Die Lösung  $y^* \equiv 0$  ist eine Ruhelage beider Systems. Falls für die Eigenwerte von  $A$  und  $B$  die Bedingungen

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}(\lambda_i(B)) < 0$$

gelten, dann ist  $y^*$  sogar eine *asymptotisch stabile* Ruhelage beider Systeme. Es stellt sich nun die Frage, ob  $y^*$  auch eine *asymptotisch stabile* Ruhelage des Systems

$$y' = (A + B) \cdot y$$

ist. Im Allgemeinen ist dies *nicht* der Fall.

Eine analoge Aussage gilt für Reaktions-Diffusions-Gleichungen. Wir betrachten das folgende System mit zwei Substanzen ( $u = c_1, v = c_2$ ):

**6.2.1 Gleichung. (System von RD-Gleichungen)**

Gleichungen für skalarwertige Funktionen  $u = u(x, t), v = v(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \gamma \cdot f(u, v) + \Delta u && \text{in } \Omega, \\ \partial_t v &= \gamma \cdot g(u, v) + d \cdot \Delta v && \text{in } \Omega, \\ \langle \nabla u, n \rangle &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \\ \langle \nabla v, n \rangle &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dabei sind  $\gamma, d > 0$  fest und  $f, g$  hinreichend glatt.

Das Ziel wird es jetzt sein, die linearisierte Instabilität des obigen Systems von RD-Gleichungen nachzuweisen. Zur Erinnerung:

**6.2.2 Definition. (Linearisierte Stabilität)**

Für ein autonomes, dynamisches System  $y' = F(y)$  heißt  $y^*$  ein *linearisiert stabiler Stationärpunkt*, falls  $F(y^*) = 0$  und alle Eigenwerte von  $dF(y^*)$  die Bedingung  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  erfüllen. Erfüllt ein Stationärpunkt die Bedingung nicht, so heißt er *linearisiert instabiler Stationärpunkt*.

Wir werden gleich das folgende Lemma brauchen:

**6.2.3 Lemma.**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  eine Matrix. Dann gilt für die Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ :

$$[\text{Re}(\lambda_1) < 0 \quad \wedge \quad \text{Re}(\lambda_2) < 0] \Leftrightarrow [\text{spur}(A) < 0 \quad \wedge \quad \det(A) > 0].$$

Damit lässt sich zeigen:

**6.2.4 Lemma.**

Sei  $(u^*, v^*) \in \mathbb{R}^2$  eine räumlich konstante (also nur von  $t$  abhängige) Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \gamma \cdot f(u, v), \\ \partial_t v &= \gamma \cdot g(u, v). \end{aligned}$$

Dann ist  $(u^*, v^*)$  ein (zeitlich) linearisiert stabiler Stationärpunkt dieses Systems, genau falls

$$\begin{aligned} f(u^*, v^*) = g(u^*, v^*) &= 0, \\ [\partial_u f + \partial_v g](u^*, v^*) &< 0, \\ [(\partial_u f) \cdot (\partial_v g) - (\partial_v f) \cdot (\partial_u g)](u^*, v^*) &> 0. \end{aligned}$$

Wir werden damit nun den folgenden Satz beweisen:

**6.2.5 Satz.**

Sei  $(u^*, v^*) \in \mathbb{R}^2$  ein räumlich konstanter, (zeitlich) linearisiert stabiler Stationärpunkt von

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \gamma \cdot f(u, v), \\ \partial_t v &= \gamma \cdot g(u, v). \end{aligned}$$

Ist  $(u^*, v^*)$  ein (zeitlich) linearisiert *instabiler* Stationärpunkt von

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \gamma \cdot f(u, v) + \Delta u, \\ \partial_t v &= \gamma \cdot g(u, v) + d \cdot \Delta v,\end{aligned}$$

dann gilt

$$\begin{aligned} [d \cdot (\partial_u f) + (\partial_v g)](u^*, v^*) &> 0, \\ [d \cdot (\partial_u f) + (\partial_v g)]^2(u^*, v^*) - 4 \cdot d \cdot [(\partial_u f) \cdot (\partial_v g) - (\partial_v f) \cdot (\partial_u g)](u^*, v^*) &\geq 0. \end{aligned}$$

### Beweis.

Schritt 1: Lösungsformel für linearisierte RD-Gleichungen

Linearisiert man das zweite System, also die RD-Gleichungen, so erhält man unter Verwendung von

$$w := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} (\partial_u f)(u^*, v^*) & (\partial_v f)(u^*, v^*) \\ (\partial_u g)(u^*, v^*) & (\partial_v g)(u^*, v^*) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

das System

$$\begin{aligned}\partial_t w &= \gamma \cdot A \cdot w + D \cdot \Delta w, \\ \langle \nabla w_1, n \rangle &= 0, \\ \langle \nabla w_2, n \rangle &= 0, \\ w(x, 0) &= w_0(x).\end{aligned}$$

Mittels Gronwall-Lemma lässt sich zeigen, dass klassische Lösungen dieses Systems eindeutig sind.

Um  $w$  zu ermitteln, betrachten wir das skalare Eigenwertproblem für eine Funktion  $z = z(x)$ :

$$\begin{aligned}-\Delta z - \mu^2 \cdot z &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \langle \nabla z, n \rangle &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Es existiert eine Folge  $(z_n, \mu_n^2)_{n \in \mathbb{N}} \in (H^1(\Omega) \times \mathbb{R}_0^+)^{\mathbb{N}}$  von Lösungen dieses Problems, wobei die  $z_n$  eine ONB des  $L^2(\Omega)$  sind.

Wir machen nun für  $w$  den Ansatz

$$w(x, t) = \sum_n z_n(x) \cdot e^{\lambda_n t} \cdot C_n$$

mit noch zu bestimmenden  $C_n \in \mathbb{C}^2$  und  $\lambda_n \in \mathbb{C}$ . Setzt man diesen Ansatz in das System für  $w$  ein, so erhält man unter Verwendung von  $\Delta z_n = -\mu_n^2 \cdot z_n$  die Identität

$$\sum_n z_n(x) \cdot \lambda_n \cdot e^{\lambda_n t} \cdot C_n = \sum_n z_n(x) \cdot e^{\lambda_n t} \cdot [\gamma \cdot A - \mu_n^2 \cdot D] \cdot C_n.$$

Da die  $z_n$  eine ONB sind, ergibt sich

$$\lambda_n \cdot C_n = [\gamma \cdot A - \mu_n^2 \cdot D] \cdot C_n.$$

Wir erhalten also, dass die  $(\lambda_n, C_n)$  Eigenpaare von  $[\gamma \cdot A - \mu_n^2 \cdot D]$  sind:

$$0 = \det(\lambda - [\gamma \cdot A - \mu_n^2 \cdot D]) = \lambda^2 - l(\mu_n^2) \cdot \lambda + k(\mu_n^2),$$

wobei

$$\begin{aligned} l(\mu_n^2) &:= \text{spur}([\gamma \cdot A - \mu_n^2 \cdot D]) = \gamma \cdot [\partial_u f + \partial_v g](u^*, v^*) - \mu_n^2 \cdot (1 + d), \\ k(\mu_n^2) &:= \det([\gamma \cdot A - \mu_n^2 \cdot D]) = d \cdot \mu_n^4 - \gamma \cdot [d \cdot (\partial_u f) + \partial_v g](u^*, v^*) \cdot \mu_n^2 + \gamma^2 \cdot \det(A).\end{aligned}$$

Damit haben wir die gesuchten  $\lambda_n$  und  $C_n$  gefunden.

Wir gehen nun davon aus, dass alle  $[\gamma \cdot A - \mu_n^2 \cdot D]$  auch tatsächlich diagonalisierbar sind und bezeichnen mit

$$\lambda_n^j \in \mathbb{C}, C_n^j \in \mathbb{C}^2 \quad \text{für } j \in \{1, 2\}$$

die beiden Eigenwerte und die beiden Eigenvektoren des  $n$ -ten Operators. Dann können wir  $w$  explizit angeben

$$w(x, t) = \sum_n z_n(x) \cdot [\alpha_n \cdot e^{\lambda_n^1 t} \cdot C_n^1 + \beta_n \cdot e^{\lambda_n^2 t} \cdot C_n^2].$$

Die Koeffizienten  $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$  sind durch  $w_0$  eindeutig bestimmt. □

Schritt 2: Die behaupteten Ungleichungen

Da  $(u^*, v^*)$  laut Voraussetzung ein linearisiert instabiler Stationärpunkt ist, folgt aus der Darstellung von  $w$  schon

$$\exists n \in \mathbb{N}, j \in \{1, 2\} : \operatorname{Re}(\lambda_n^j) \geq 0.$$

Aus dem Lemma über die Eigenwerte einer  $(2 \times 2)$ -Matrix erhalten wir

$$0 \geq \det([\gamma \cdot A - \mu_n^2 \cdot D]) = k(\mu_n^2) = \underbrace{d \cdot \mu_n^4}_{>0} + [d \cdot (\partial_u f) + \partial_v g](u^*, v^*) \cdot \underbrace{(-\gamma) \cdot \mu_n^2}_{<0} + \underbrace{\gamma^2 \cdot \det(A)}_{>0}.$$

Dabei haben wir die aus der Voraussetzung folgende Tatsache  $\det(A) > 0$  verwendet. Wir erhalten damit die erste Behauptung:

$$[d \cdot (\partial_u f) + \partial_v g](u^*, v^*) > 0.$$

Insbesondere kann das Minimum der Funktion  $\mu \mapsto k(\mu)$  nicht positiv sein. Eine Kurvendiskussion liefert die zweite Behauptung:

$$0 \geq \min_{\mu \geq 0} k(\mu) = k\left(\frac{\gamma}{2 \cdot d} \cdot [d \cdot (\partial_u f) + \partial_v g](u^*, v^*)\right) = \gamma^2 \cdot \left(\det(A) - \frac{1}{4 \cdot d} \cdot [d \cdot (\partial_u f) + \partial_v g]^2(u^*, v^*)\right).$$

□

■

### 6.2.6 Bemerkung. (Musterbildung durch Instabilität)

Für hinreichend große  $d$  lässt sich  $0 \geq k(\mu_n^2)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  auch tatsächlich erreichen. In diesem Fall treten also Instabilitäten auf. Stört man die räumlich homogene Lösung  $(u^*, v^*)$  dann ein wenig, so verstärkt sich diese Störung im Verlauf der Zeit und es treten räumlich inhomogene Stationärzustände auf. Es hat sich dann also ein Muster gebildet.

## 6.3 Cahn-Hilliard-Gleichung

Die *Cahn-Hilliard-Gleichung* beschreibt Phasentrennung in binären Flüssigkeiten (z.B. Wasser und Öl) unter dominanter Diffusion.

Wir betrachten die folgenden Größen:

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ : Von zwei Substanzen eingenommenes Gebiet.
- $c_1(x, t), c_2(x, t) \in \mathbb{R}$ : Konzentrationen. Einheit „Menge pro Volumen“.
- $J_1(x, t, c_1), J_2(x, t, c_2) \in \mathbb{R}^d$ : Flussfunktionen. Einheit „Menge pro Fläche pro Zeit“.

Wir nehmen dabei die folgenden Zusammenhänge an:

- $c_1 + c_2 = 1$ .
- $J_1 + J_2 = 0$ .

Wir setzen

$$c := c_1 - c_2, \quad J := J_1 - J_2.$$

Geht man von  $c_1, c_2 \in [0, 1]$  aus, so bedeutet  $c(x) = 1$ , dass sich an der Stelle  $x$  nur der erste Stoff befindet. Andererseits bedeutet  $c(x) = -1$  maximale Konzentration von Stoff 2. Es gilt die Erhaltungsgleichung:

$$\partial_t c + \operatorname{div}(J) = 0.$$

Wir werden nun das *Fick'sche Gesetz* erläutern, demnach  $J = -L \cdot \nabla \mu$  ist. Die Konstante  $L \geq 0$  heißt *Mobilität* und  $\mu$  heißt *chemisches Potential*. Das chemische Potential wird als variationelle Ableitung der *freien Energie* definiert:

Die freie Energie ist nach Cahn und Hilliard von der Form

$$E(c) = \int_{\Omega} f(c) + \frac{\gamma}{2} \cdot \|\nabla c\|^2 \, dx,$$

wobei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine gegebene Funktion ist und  $\gamma \geq 0$ . Typischerweise ist  $f$  instabil, d.h. sie besitzt zwei Minima:

$$f(c) = \alpha \cdot (c^2 - \alpha^2)^2.$$

Der Term  $\|\nabla c\|$  tritt auf, damit Phasenübergänge<sup>15</sup> energetisch schlecht bewertet werden. Wir berechnen nun die variationelle Ableitung des Energiefunktionals  $E$ . Sei dazu  $\phi \in C_{00}^\infty(\Omega$  eine Testfunktion:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot [E(c + h \cdot \phi) - E(c)] &= \lim_h \frac{1}{h} \cdot \int_{\Omega} [f(c + h \cdot \phi) - f(c)] + \frac{\gamma}{2} \cdot [\|\nabla(c + h \cdot \phi)\|^2 - \|\nabla c\|^2] \, dx \\ &= \int_{\Omega} f'(c) \cdot \phi \, dx + \lim_h \frac{\gamma}{2} \cdot \int_{\Omega} 2 \cdot \langle \nabla c, \nabla \phi \rangle + h \cdot \|\nabla \phi\|^2 \, dx \\ &= \int_{\Omega} f'(c) \cdot \phi \, dx + \int_{\Omega} \gamma \cdot \langle \nabla c, \nabla \phi \rangle \, dx \\ &= \int_{\Omega} [f'(c) - \gamma \cdot \Delta c] \cdot \phi \, dx \end{aligned}$$

Die  $L^2$ -Darstellung von  $\mu$  ist also  $f'(c) - \gamma \cdot \Delta c$ .

Wir erhalten das Fick'sche Gesetz:

### 6.3.1 Gleichung. (Fick'sches Gesetz)

Die Flussfunktion  $J$  ist von der Form

$$J = -L \cdot \nabla(f'(c) - \gamma \cdot \Delta c).$$

Dabei sind  $\gamma, L \geq 0$  Konstanten und  $f$  von der Form  $f(c) = \alpha \cdot (c^2 - \alpha^2)^2$  mit einer Konstante  $\alpha > 0$ .

Setzt man das Fick'sche Gesetz in die Erhaltungsgleichung für  $c$  und  $J$  ein, so erhält man:

### 6.3.2 Gleichung. (Cahn-Hilliard-Gleichung)

Unter den Voraussetzungen des Fick'schen Gesetzes gilt die *Cahn-Hilliard-Gleichung*:

$$\begin{aligned} \partial_t c - L \cdot \Delta(f'(c) - \gamma \cdot \Delta c) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \langle \nabla c, n \rangle &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ \langle J, n \rangle &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

### 6.3.3 Bemerkung. (Periodische Randbedingungen)

Im Falle eines würfelförmigen  $\Omega$  kann man alternativ auch periodische Randbedingungen für  $c$  und  $J$  verwenden.

Nun möchten wir räumlich konstante Lösungen der Cahn-Hilliard-Gleichung auf (zeitlich) linearisierte Stabilität untersuchen. Jedes  $c_h \in \mathbb{R}$  ist eine räumlich konstante Lösung. Wir betrachten nun

$$c := c_h + u$$

mit einer „kleinen Störung“  $u$ , die  $\int_{\Omega} u \, dx = 0$  erfüllt (Massenerhaltung). Sei weiters  $L := 1$  und  $\Omega := (0, l)^d$  für ein  $l > 0$ . Die Linearisierung der Cahn-Hilliard-Gleichung mit periodischen Randbedingungen lautet dann:

$$\partial_t u = \partial_t c = \Delta(f'(c_h) + f''(c_h) \cdot u + f'''(c_h) \cdot u/2 + \dots - \gamma \cdot \Delta u) \approx \Delta(f''(c_h) \cdot u - \gamma \cdot \Delta u).$$

Wir betrachten also das folgende Problem:

### 6.3.4 Gleichung. (Linearisierung der Cahn-Hilliard-Gleichung)

Finde eine skalarwertige Funktion  $u$  mit

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta(f''(c_h) \cdot u - \gamma \cdot \Delta u) \quad \text{in } \Omega, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned}$$

die periodische Randbedingungen erfüllt.

<sup>15</sup>Das ist ein Wechsel von einer Substanz zur anderen.

Eine Lösungsformel für  $u$  ergibt sich aus den Eigenwerten des Operators  $u \mapsto \Delta(f''(c_h)u - \gamma \Delta u)$ . Ein Separationsansatz für  $u$  liefert, dass die Eigenfunktionen die Form

$$u_k(x) = e^{i\langle k, x \rangle (2\pi)/l}, \quad k \in \mathbb{Z}^d,$$

haben. Die zugehörigen Eigenwerte sind

$$\lambda_k = - \left( \frac{2 \cdot \pi}{l} \right)^2 \cdot \|k\|^2 \cdot \left[ f''(c_h) + \gamma \cdot \left( \frac{2 \cdot \pi}{l} \right)^2 \cdot \|k\|^2 \right].$$

Damit hat  $u$  die Form

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \alpha_k \cdot e^{i\langle k, x \rangle (2\pi)/l} \cdot e^{\lambda_k t},$$

wobei die Koeffiziente  $\alpha_k \in \mathbb{C}$  eindeutig durch  $u_0$  gegeben sind. Aus der Forderung  $\int_{\Omega} u \, dx = 0$  folgt  $\alpha_0 = 0$ .

Linearisierte Instabilität tritt nur auf, falls  $\operatorname{Re}(\lambda_k) \geq 0$  für ein  $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$  gilt. Wenn also

$$f''(c_h) + \gamma \cdot \left( \frac{2 \cdot \pi}{l} \right)^2 > 0$$

gilt, dann ist die Lösung  $u_h$  linearisiert stabil.

Wir werden später den folgenden Satz brauchen:

### 6.3.5 Satz.

Sei  $c$  eine klassische Lösung der Cahn-Hilliard-Gleichung. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \, dx &= 0, \\ \frac{d}{dt} E(c) &\leq 0. \end{aligned}$$

Beide Aussagen stimmen auch für periodische Randbedingungen.

### Beweis.

Die Gleichung folgt mit dem Integralsatz von Gauß:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \, dx = \int_{\Omega} L \cdot \Delta(f'(c) - \gamma \Delta c) \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(J) \, dx = - \int_{\partial\Omega} \langle J, n \rangle \, dx = 0.$$

Die Ungleichung sieht man durch mehrfache, partielle Integration:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(c) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(c) + \frac{\gamma}{2} \cdot \|\nabla c\|^2 \, dx \\ &= \int_{\Omega} f'(c) \cdot (\partial_t c) + \gamma \cdot \langle \nabla c, \nabla(\partial_t c) \rangle \, dx \\ &= \int_{\Omega} [f'(c) - \gamma \cdot \Delta c] \cdot (\partial_t c) \, dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \gamma \cdot \langle \nabla c, n \rangle \cdot (\partial_t c) \, d\mu}_{=0} \\ &= \int_{\Omega} [f'(c) - \gamma \cdot \Delta c] \cdot [L \cdot \Delta(f'(c) - \gamma \Delta c)] \, dx \\ &= -L \cdot \int_{\Omega} \|\nabla(f'(c) - \gamma \Delta c)\|^2 \, dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \langle -J, n \rangle \cdot (f'(c) - \gamma \Delta c) \, d\mu}_{=0} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

■

### 6.3.6 Bemerkung.

Wegen  $c_1 + c_2 = 1$  folgt folgt aus der ersten Gleichung des vorigen Satzes schon

$$\int_{\Omega} c_1 \, dx = \text{const.} \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} c_2 \, dx = \text{const.}$$

Zum Abschluss dieses Kapitels zeigen wir noch den folgenden Satz:

**6.3.7 Satz.**

Sei  $\Omega := (0, l) \subseteq \mathbb{R}$  und  $c$  eine für alle  $t > 0$  existierende, klassische Lösung der Cahn-Hilliard-Gleichung mit Null-Fluss-Randbedingungen. Es bezeichne  $c_0 := c(\cdot, 0)$  die Anfangsverteilung und  $\langle c_0 \rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \cdot \int_\Omega c_0 \, dx$  ihren  $\Omega$ -Mittelwert. Betrachte die folgenden beiden Aussagen:

- $\|c_0\|_{L^2(\Omega)}$  ist hinreichend klein und  $\gamma > \frac{l^2}{\pi^2}$ .
- Für die beiden lokalen Minima  $c_{\min} \in \mathbb{R}$  der Funktion  $f$  gilt  $f(c_0) \geq f(c_{\min})$  und der Ausdruck

$$\int_\Omega f(c_0) - f(c_{\min}) \, dx + \frac{\gamma}{2} \cdot \|\partial_x c_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + |c_{\min} - \langle c_0 \rangle_\Omega|^2 \, dx$$

ist hinreichend klein.

Jede dieser Bedingungen impliziert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|c(\cdot, t) - \langle c_0 \rangle_\Omega\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

**Beweis.**

Wir werden nur die zweite Aussage betrachten.

Schritt 1: Definition von  $\epsilon$

Der vorige Satz zeigt, dass die Masse erhalten bleibt und dass  $E$  monoton fallend in  $t$  ist. Es gilt also

$$\int_\Omega c - \langle c_0 \rangle_\Omega \, dx = 0 \quad \text{und} \quad \forall t \geq 0: \quad E(c(t)) \leq E(c_0).$$

Der Sobolev'sche Einbettungssatz und die erste und zweite Poincaré-Ungleichung liefern

$$\begin{aligned} \forall u \in H^1: \quad \|v\|_{L^\infty} &\leq C_S \cdot \|v\|_{H^1}, \\ \forall u \in H_0^1: \quad \|v\|_{L^2} &\leq C_{P_1} \cdot \|\partial_x v\|_{L^2}, \\ \forall u \in H^1: \quad \|v - \langle v \rangle_\Omega\|_{L^2} &\leq C_{P_2} \cdot \|\partial_x v\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\|c - \langle c_0 \rangle_\Omega\|_{L^\infty}^2 \leq C_S^2 \cdot \|c - \langle c_0 \rangle_\Omega\|_{H^1}^2 \leq \underbrace{C_S^2 \cdot (1 + C_{P_2}^2)}_{=: C} \cdot \|\partial_x c\|_{L^2}^2.$$

Setzt man das alles zusammen, so zeigt sich:

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(c) - f(c_{\min}) \, dx + \frac{\gamma}{2 \cdot C} \cdot \|c - \langle c_0 \rangle_\Omega\|_{L^\infty}^2 &\leq \int_\Omega f(c) - f(c_{\min}) \, dx + \frac{\gamma}{2} \cdot \|\partial_x c\|_{L^2}^2 \\ &= E(c(t)) - \int_\Omega f(c_{\min}) \, dx \\ &\leq E(c_0) - \int_\Omega f(c_{\min}) \, dx \\ &= \int_\Omega f(c_0) - f(c_{\min}) \, dx + \frac{\gamma}{2} \cdot \|\partial_x c_0\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Wegen  $\frac{1}{2} \|c - c_{\min}\|_{L^\infty}^2 \leq \|c - \langle c_0 \rangle_\Omega\|_{L^\infty}^2 + \|c_{\min} - \langle c_0 \rangle_\Omega\|_{L^\infty}^2$  folgt aus der gerade gezeigten Ungleichung schon

$$\int_\Omega f(c) - f(c_{\min}) \, dx + \frac{\gamma}{4 \cdot C} \cdot \|c - c_{\min}\|_{L^\infty}^2 \leq \underbrace{\int_\Omega f(c_0) - f(c_{\min}) \, dx + \frac{\gamma}{2} \cdot \|\partial_x c_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{4 \cdot C} \cdot |c_{\min} - \langle c_0 \rangle_\Omega|^2 \, dx}_{=: \epsilon}.$$

Wegen  $f(c_0) \geq f(c_{\min})$  ist  $\epsilon \geq 0$ . □

Schritt 2: Wahl von  $\epsilon$

Da  $c_{\min}$  ein lokales Minimum von  $f$  ist, gibt es eine Umgebung von  $c_{\min}$  und ein  $c_b$  darin, auf der  $f'' > 0$  gilt. Wir nennen diese Umgebung

$$I := (-|c_{\min} - c_b| + c_{\min}, c_{\min} + |c_{\min} - c_b|) \subseteq \mathbb{R}.$$

Sei nun  $\epsilon > 0$  so, dass

$$\epsilon < \frac{\gamma}{2 \cdot C} \cdot \frac{1}{4} \cdot (c_{\min} - c_b)^2.$$

□

Schritt 3:  $\forall t \geq 0 : \|c - c_{\min}\|_{L^\infty} < |c_{\min} - c_b|$

Für  $t = 0$  ist  $f(c(0)) = f(c_0) \geq f(c_{\min})$  nach Voraussetzung und damit<sup>16</sup>

$$\frac{\gamma}{4 \cdot C} \cdot \|c_0 - c_{\min}\|_{L^\infty}^2 \leq \epsilon \leq \frac{\gamma}{2 \cdot C} \cdot \frac{1}{4} \cdot (c_{\min} - c_b)^2.$$

Es folgt

$$\|c_0 - c_{\min}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |c_{\min} - c_b| < |c_{\min} - c_b|.$$

Da  $c$  stetig ist, existiert ein eindeutiges, maximales Zeitintervall  $[0, t^*)$  mit

$$\forall t \in [0, t^*) : \|c(t) - c_{\min}\|_{L^\infty} < |c_{\min} - c_b|.$$

Wir zeigen nun  $t^* = \infty$  mit einem Widerspruchsbeweis: Nehmen wir an, dass  $t^* < \infty$ . Es gilt für alle  $x \in \Omega$  und  $t \in [0, t^*)$  wegen der letzten Ungleichung stets

$$c(x, t) \in I$$

und daher auch  $f(c(x, t)) \geq f(c_{\min})$ . Jene Ungleichung, in der  $\epsilon$  definiert wurde, liefert analog zu vorher

$$\forall t \in [0, t^*) : \|c(\cdot, t) - c_{\min}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |c_{\min} - c_b|.$$

Das liefert uns

$$\|c(\cdot, t^*) - c_{\min}\|_{L^\infty} < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |c_{\min} - c_b|.$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zur Maximalität von  $t^*$ , da wir nun  $t^*$  echt größer als zuvor wählen können und die Eigenschaft  $[\forall t \in [0, \tilde{t}^*) : \|c(t) - c_{\min}\|_{L^\infty} < |c_{\min} - c_b|]$  noch immer gilt. □

Schritt 4: Die behauptete Konvergenz

Wegen Schritt 3 gilt für alle Zeiten  $t > 0$  stets  $c(t) \in I$ . Da  $f$  auf ganz  $I$  konvex ist, haben wir

$$\forall t > 0 : f''(c(t)) > 0.$$

Die Cahn-Hilliard-Gleichung

$$\partial_t c = \partial_{xx}(f'(c) - \gamma \cdot (\partial_{xx} c))$$

liefert uns

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot (c - \langle c_0 \rangle_{\Omega})^2 dx &= \int_{\Omega} [c - \langle c_0 \rangle_{\Omega}] \cdot [\partial_{xx}(f'(c) - \gamma \cdot (\partial_{xx} c))] dx \\ &= - \int_{\Omega} (\partial_x c) \cdot [\partial_x(f'(c) - \gamma \cdot (\partial_{xx} c))] dx \\ &= - \int_{\Omega} (\partial_x c)^2 \cdot f''(c) dx + \gamma \cdot \int_{\Omega} (\partial_x c) \cdot (\partial_{xxx} c) dx \\ &= - \int_{\Omega} \underbrace{(\partial_x c)^2 \cdot f''(c)}_{\geq 0} dx - \gamma \cdot \int_{\Omega} (\partial_{xx} c)^2 dx \\ &\leq -\gamma \cdot \|\partial_{xx} c\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Die beiden Poincaré-Ungleichungen zeigen

$$\|c - \langle c_0 \rangle_{\Omega}\|_{L^2} \leq C_{P_2} \cdot \|\partial_x c\|_{L^2} \leq C_{P_1} \cdot C_{P_2} \cdot \|\partial_{xx} c\|_{L^2},$$

was zusammen mit der obigen Ungleichungskette

$$\frac{d}{dt} \left[ \|c - \langle c_0 \rangle_{\Omega}\|_{L^2}^2 \right] \leq -\frac{2 \cdot \gamma}{C_{P_1}^2 \cdot C_{P_2}^2} \cdot \|c - \langle c_0 \rangle_{\Omega}\|_{L^2}^2$$

ergibt. Das Lemma von Gronwall zeigt genau das behauptete Konvergenzverhalten:

$$\|c - \langle c_0 \rangle_{\Omega}\|_{L^2}^2 \leq \|c_0 - \langle c_0 \rangle_{\Omega}\|_{L^2}^2 \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot \gamma}{C_{P_1}^2 \cdot C_{P_2}^2} \cdot t\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

□

■

<sup>16</sup>Beachte jene Ungleichung, in der  $\epsilon$  definiert wurde.



## 7 Das Stefan-Problem

Wir möchten in diesem Kapitel den Phasenübergang zwischen flüssig und fest modellieren, z.B. das Schmelzen von Eis.

### 7.1 Notation

Der Phasenwechsel selbst, z.B. Schmelzen von Eis, benötigt Energie, die sog. *latente Wärmemenge*. Die innere Energie eines Stoffes hängt demnach nicht nur von der Temperatur, sondern auch von dieser latenten Wärmemenge ab:

$$e(T) = \begin{cases} c_v \cdot T & , \text{ in fester Phase,} \\ c_v \cdot T + L & , \text{ in flüssiger Phase.} \end{cases}$$

Dabei bezeichnet  $T$  die Temperatur,  $c_v$  die spezifische Wärmemenge,  $L$  die latente Wärmemenge und  $e$  die innere Energie pro Masse in einer Substanz, die das Gebiet  $\Omega$  einnimmt. Mit der als konstant vorausgesetzten Dichte  $\rho$  (Masse pro Volumen) und dem Wärmefluss  $q$  über den Rand bedeutet Energieerhaltung gerade, dass

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} e \cdot \rho \, dx \right] + \int_{\partial\Omega} \langle q, n \rangle \, d\mu = 0.$$

So wie bereits im Kapitel über Strömungsmechanische Modelle fordern wir auch hier wieder das *Fourier'sche Gesetz*:

$$q = -\lambda \cdot \nabla T.$$

Dabei ist  $\lambda > 0$  eine von der Substanz abhängige Konstante. Mit dem Satz von Gauß erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} e \cdot \rho \, dx \right] - \int_{\Omega} \lambda \cdot \Delta T \, dx = 0.$$

Nun zerlegen wir das Gebiet  $\Omega$  in den festen, den flüssigen und den von der Übergangsschicht eingenommenen Teil:

$$\Omega = \Omega_l(t) \cup \Omega_s(t) \cup \Gamma(t).$$

Wir nehmen an, dass die Übergangsschicht  $\Gamma(t)$  eine  $(d-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, also nur der Rand der festen Phase. Da die Energieerhaltung auch für alle Teilmengen  $\omega \subseteq \Omega_l(t)$  und alle Teilmengen  $\omega \subseteq \Omega_s(t)$  gilt, erhalten wir:

#### 7.1.1 Gleichung. (Energieerhaltung in $\Omega_l(t) \cup \Omega_s(t)$ )

Unter den obigen Voraussetzungen gilt

$$\rho \cdot c_v \cdot (\partial_t T) - \lambda \cdot \Delta T = 0 \quad \text{in } \Omega_l(t) \cup \Omega_s(t).$$

Nun stellt sich natürlich die Frage, was an der Übergangsschicht passiert. Dazu sei  $x_0 \in \Gamma(t_0)$  ein fester Punkt an der Übergangsschicht und  $t \mapsto x(t) \in \Gamma(t)$  seine Trajektorie im Verlauf der Zeit. Bezeichne weiters  $n(x_0, t_0)$  den Normalvektor an  $\Gamma(t_0)$  im Punkt  $x_0$ , wobei wir annehmen, dass  $n$  immer von der festen in die flüssige Phase zeigt.

#### 7.1.2 Definition. (Normalgeschwindigkeit der Übergangsschicht)

Wir definieren die *Normalgeschwindigkeit der Übergangsschicht* an der Stelle  $x_0$  zum Zeitpunkt  $t_0$  durch

$$V_{\Gamma}(x_0, t_0) := \langle n(x_0, t_0), x'(t_0) \rangle.$$

Für ein festes  $\tau > 0$  setzen wir

$$\begin{aligned} Q &:= \Omega \times (0, \tau), \\ Q_l &:= \{(x, t) \in Q \mid x \in \Omega_l(t)\}, \\ Q_s &:= \{(x, t) \in Q \mid x \in \Omega_s(t)\}. \end{aligned}$$

## 7.2 Transporttheorem

Der folgende Satz wird sich später als nützlich erweisen:

### 7.2.1 Satz. (Transporttheorem)

Sei  $\tau > 0$  fest und  $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar bis zum Rand von  $Q_l$  und stetig differenzierbar bis zum Rand von  $Q_s$ . Sei  $t \mapsto \Gamma(t)$  hinreichend glatt und sei  $\Gamma(t)$  hinreichend glatt zu jedem Zeitpunkt. Mit dem *Sprung*

$$[u]_s^l(x, t) := \lim_{\substack{x_l \rightarrow x \\ x_l \in \Omega_l(t)}} u(x_l, t) - \lim_{\substack{x_s \rightarrow x \\ x_s \in \Omega_s(t)}} u(x_s, t)$$

gilt das folgende *Transporttheorem*:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \, dx = \int_{\Omega_l(t)} \partial_t u \, dx + \int_{\Omega_s(t)} \partial_t u \, dx - \int_{\Gamma(t)} [u]_s^l \cdot V_{\Gamma} \, d\mu.$$

### Beweis.

Wir zeigen

$$\int_{\Omega} u(x, t_2) \, dx - \int_{\Omega} u(x, t_1) \, dx = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Omega_l(t)} \partial_t u \, dx + \int_{\Omega_s(t)} \partial_t u \, dx - \int_{\Gamma(t)} [u]_s^l \cdot V_{\Gamma} \, d\mu \right] dt.$$

Die Behauptung folgt dann mittels Division durch  $(t_2 - t_1)$  und Limesbildung  $t_1 \rightarrow t_2$ .

Schritt 1: Vereinfachung von  $\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_s(t)} \partial_t u \, dx \, dt$

Sei

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_s &:= \{(x, t) \mid t \in (t_1, t_2), x \in \Omega_s(t)\}, \\ \Gamma_{t_1, t_2} &:= \{(x, t) \mid t \in (t_1, t_2), x \in \Gamma(t)\}. \end{aligned}$$

Der Satz von Gauß, angewendet auf die Funktion  $(0, \dots, 0, u)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$ , liefert dann<sup>17</sup>

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_s(t)} \partial_t u \, dx \, dt = \int_{\tilde{Q}_s} \operatorname{div}_{x,t} ((0, \dots, 0, u)^T) \, d\nu = \int_{\Omega_s(t_2)} u \, dx - \int_{\Omega_s(t_1)} u \, dx + \int_{\Gamma_{t_1, t_2}} u \cdot n_t \, d\chi.$$

Dabei ist  $n = (n_x, n_t) \in \mathbb{R}^{d+1}$  der Normalvektor an  $\Gamma_{t_1, t_2}$ . Wir untersuchen nun das letzte Integral genauer.  $\square$

Schritt 2: Vereinfachen des letzten Integrals

Wir nehmen an, dass  $\Gamma(t)$  und  $\Gamma_{t_1, t_2}$  als Graphen einer Funktion  $h : D \times (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$  dargestellt werden können:

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \{(\tilde{x}, h(\tilde{x}, t)) \mid \tilde{x} \in D\} \subseteq \mathbb{R}^d, \\ \Gamma_{t_1, t_2} &= \{(\tilde{x}, h(\tilde{x}, t), t) \mid \tilde{x} \in D, t \in (t_1, t_2)\} \subseteq \mathbb{R}^d \times [0, \infty). \end{aligned}$$

Die Normalvektoren an  $\Gamma(t)$  und  $\Gamma_{t_1, t_2}$  bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{\sqrt{\|\nabla_{\tilde{x}} h\|^2 + 1}} \cdot (-\nabla_{\tilde{x}} h, 1)^T, \\ n &= (n_x, n_t) = \frac{1}{\sqrt{\|\nabla_{\tilde{x}} h\|^2 + 1 + (\partial_t h)^2}} \cdot (-\nabla_{\tilde{x}} h, 1, -\partial_t h)^T. \end{aligned}$$

Die Vorzeichen sind so gewählt, dass die Normalvektoren von der festen in die flüssige Phase zeigen. Wählt man die Trajektorie eines Punktes  $\tilde{x}_0 \in D$  als  $(\tilde{x}_0, h(\tilde{x}_0, t))^T$ , dann ergibt sich für die Normalgeschwindigkeit der Übergangsschicht

$$V_{\Gamma} = \langle m, (0, \partial_t h)^T \rangle = \frac{1}{\sqrt{\|\nabla_{\tilde{x}} h\|^2 + 1}} \cdot (\partial_t h).$$

Außerdem berechnen sich Oberflächenintegrale von Funktionen  $f : \Gamma(t) \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \Gamma_{t_1, t_2} \rightarrow \mathbb{R}$  zu

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(t)} f \, d\mu &= \int_D f \cdot \sqrt{1 + \|\nabla_{\tilde{x}} h\|^2} \, d\tilde{x}, \\ \int_{\Gamma_{t_1, t_2}} g \, d\chi &= \int_{t_1}^{t_2} \int_D g \cdot \sqrt{1 + (\partial_t h)^2 + \|\nabla_{\tilde{x}} h\|^2} \, d\tilde{x} \, dt. \end{aligned}$$

<sup>17</sup> $\nu$  und  $\chi$  sind geeignete Maße.

Damit können wir das letzte Integral aus dem ersten Schritt vereinfachen:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_{t_1, t_2}} u \cdot n_t \, d\chi &= \int_{t_1}^{t_2} \int_D u \cdot \left( -\frac{\partial_t h}{\sqrt{\|\nabla_{\bar{x}} h\|^2 + 1 + (\partial_t h)^2}} \right) \cdot \sqrt{1 + (\partial_t h)^2 + \|\nabla_{\bar{x}} h\|^2} \, d\bar{x} \, dt \\
 &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_D u \cdot V_\Gamma \cdot \sqrt{\|\nabla_{\bar{x}} h\|^2 + 1} \, d\bar{x} \, dt \\
 &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma(t)} u_s \cdot V_\Gamma \, d\mu \, dt
 \end{aligned}$$

Hier ist

$$u_s(x, t) := \lim_{\substack{x_s \rightarrow x \\ x_s \in \Omega_s(t)}} u(x_s, t).$$

□

Schritt 3: Der flüssige Teil

Durch eine Zerlegung der Eins kann man die in Schritt 2 gezeigte Formel auch ohne der Strukturannahmen über  $h$  zeigen. Zuletzt kann man eine analoge Rechnung für den flüssigen Teil durchführen, womit die Behauptung dann vollständig gezeigt ist. □

■

### 7.3 Stefan-Problem

Aus der Energieerhaltung und dem Transporttheorem folgt

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} \left[ \int_\Omega e \cdot \rho \, dx \right] + \int_{\partial\Omega} \langle q, n \rangle \, d\mu \\
 &= \int_{\Omega_s(t) \cup \Omega_l(t)} \rho \cdot (\partial_t e) \, dx - \int_{\Gamma(t)} \rho \cdot [e]_s^l \cdot V_\Gamma \, d\mu + \int_\Omega \operatorname{div}(q) \, dx \\
 &= \int_{\Omega_s(t) \cup \Omega_l(t)} \underbrace{\rho \cdot (\partial_t e) + \operatorname{div}(q)}_{=0} \, dx + \int_{\Gamma(t)} -\rho \cdot [e]_s^l \cdot V_\Gamma + \langle [q]_s^l, n \rangle \, d\mu.
 \end{aligned}$$

Da diese Aussage auch für alle glatten Teilvolumina gilt, erhält man eine punktweise Aussage:

$$\rho \cdot L \cdot V_\Gamma = \rho \cdot [e]_s^l \cdot V_\Gamma = \langle [q]_s^l, n \rangle = -\lambda \cdot \langle [\nabla T]_s^l, n \rangle \quad \text{auf } \Gamma(t).$$

Als dritte Bedingung fordern wir, dass  $T$  auf  $\Gamma(t)$  den Wert  $T_m$  der Schmelztemperatur hat. Das klassische *Stefan-Problem* lautet nun:

#### 7.3.1 Problem. (Stefan-Problem)

Finde Temperatur  $T = T(x, t)$  und Phasengrenze  $\Gamma(t)$ , sodass

$$\begin{aligned}
 \rho \cdot c_v \cdot (\partial_t T) - \lambda \cdot \Delta T &= 0 && \text{in } \Omega_l(t) \cup \Omega_s(t), \\
 \rho \cdot L \cdot V_\Gamma &= -\lambda \cdot \langle [\nabla T]_s^l, n \rangle && \text{auf } \Gamma(t), \\
 T &= T_m && \text{auf } \Gamma(t).
 \end{aligned}$$

Zusätzlich sind noch Randbedingungen für  $T$  auf  $\partial\Omega$  zu stellen.

Wir möchten nun motivieren, dass die feste Phase nur in gekühlten Flüssigkeiten wachsen kann, d.h.  $T|_{\partial\Omega} < T_m$ . Wir betrachten dazu ein 1-dimensionales Problem mit

$$\begin{aligned}
 \Omega &:= (0, 1), \\
 \Omega_s(0) &:= (0, x_0) \quad \text{für ein } x_0 \in \Omega, \\
 \Omega_l(0) &:= (x_0, 1).
 \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass  $\frac{\rho c_v}{\lambda}$  klein ist. Dann erhalten wir weiters

$$\begin{aligned} u &:= T - T_m, \\ \partial_{xx} u &= 0 \quad \text{auf } \Omega_s(t) \cup \Omega_s(t), \\ \rho \cdot L \cdot \Gamma'(t) &= -\lambda \cdot [(\partial_x u)(\Gamma(t+0), t) - (\partial_x u)(\Gamma(t-0), t)], \\ u(\Gamma(t), t) &= 0, \\ (\partial_x u)(0, t) &= 0, \\ u(1, t) &= U \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir erhalten unmittelbar  $u(x, t) = 0$  für  $x \in (0, \Gamma(t))$  und  $u(x, t) = \frac{x - \Gamma(t)}{1 - \Gamma(t)} \cdot U$  für  $x \in (\Gamma(t), 1)$ . Damit erfüllt  $\Gamma$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\Gamma' = -\frac{\lambda}{\rho \cdot L \cdot (1 - \Gamma)} \cdot U, \quad \Gamma(0) = x_0.$$

Ist  $U = 0$ , dann bleibt die feste Phase für alle Zeiten gleich groß. Ist  $U > 0$ , dann schmilzt die feste Phase, ist  $U < 0$ , dann wächst sie. Das bedeutet aber genau  $T(1, t) < T_m$ .

## 7.4 Existenztheorie für das Ein-Phasen-Stefan-Problem

Wir betrachten in diesem Unterkapitel das 1-dimensionale Stefan-Problem mit  $\Omega := (0, \infty)$ ,  $\Omega_l(0) := (0, x_0)$ ,  $\Omega_s(0) := (x_0, \infty)$ ,  $t \in (0, t_{\text{end}})$  und  $s : (x_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass  $\Gamma(s(x)) = x$ .<sup>18</sup> Außerdem setzen wir die Konstanten alle auf 1.

### 7.4.1 Problem. (Ein-Phasen-Stefan-Problem)

Gesucht sind Temperatur  $T = T(x, t)$  und Phasengrenze  $s = s(x)$  mit

$$\begin{aligned} \partial_t T - \partial_{xx} T &= 0 \quad \text{in } \Omega_l(t) \cup \Omega_s(t), \\ (\partial_x T) \cdot s' &= -h_0 \quad \text{auf } \Gamma, \\ T &= 0 \quad \text{auf } \Gamma, \\ T(x, 0) &= h(x) \quad \text{in } \Omega_l(0), \\ T(0, t) &= g(t) \quad \text{in } (0, t_{\text{end}}). \end{aligned}$$

Hier sind  $g, h > 0$  glatte Funktionen und  $h_0 > 0$  fest. Wir möchten damit einen nach rechts unendlich lang ausgedehnten Eisblock modellieren, der bei  $x = 0$  durch Energiezufuhr geschmolzen wird. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist der Block im Bereich  $(0, x_0)$  bereits geschmolzen.

Wir fragen uns nun nach Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen dieses Problems. Dazu transformieren wir das Problem auf eine parabolische Variationsungleichung, in der  $s$  nicht mehr vorkommt.

Wir betrachten ein festes Ortsintervall  $(0, R) \subseteq \Omega$ , wobei  $R$  hinreichend groß ist und erst später konkret gewählt wird. Setze

$$\begin{aligned} A &:= \{(x, t) \mid x \in (0, x_0), t \in (0, t_{\text{end}})\}, \\ B &:= \{(x, t) \mid x \in (x_0, R), t \in (s(x), t_{\text{end}})\}, \\ C &:= \{(x, t) \mid x \in (x_0, R), t \in (0, s(x))\}, \\ D &:= (0, R) \times (0, t_{\text{end}}). \end{aligned}$$

Wir definieren eine Funktion  $u$  formal durch

$$u(x, t) := \begin{cases} \int_0^t T(x, \tau) \, d\tau & , (x, t) \in A, \\ \int_{s(x)}^t T(x, \tau) \, d\tau & , (x, t) \in B, \\ 0 & , (x, t) \in C. \end{cases}$$

Unter der Annahme, dass  $T$  und  $s$  glatt sind, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \forall (x, t) \in A: \quad \partial_{xx} u &= \int_0^t \underbrace{\partial_{xx} T}_{=\partial_\tau T} \, d\tau = T(x, t) - T(x, 0) = \partial_t u - h, \\ \forall (x, t) \in B: \quad \partial_{xx} u &= \int_{s(x)}^t \underbrace{\partial_{xx} T}_{=\partial_\tau T} \, d\tau - \underbrace{s'(x) \cdot (\partial_x T)(x, s(x))}_{=-h_0} = T(x, t) - \underbrace{T(x, s(x))}_{=0} + h_0 = \partial_t u + h_0, \\ \forall (x, t) \in C: \quad \partial_{xx} u &= 0. \end{aligned}$$

<sup>18</sup>Die Übergangsschicht wird also durch  $x$  und nicht wie bisher durch  $t$  parametrisiert.

Setzt man

$$f(x) := \begin{cases} h(x) & , x \in (0, x_0), \\ -h_0 & , x \in (x_0, R). \end{cases} \quad \text{und} \quad \psi(t) := \int_0^t g(\tau) \, d\tau,$$

dann erfüllt  $u$  das folgende System von Gleichungen<sup>19</sup>:

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{xx} u &= f & \text{in } A, \\ \partial_t u - \partial_{xx} u &= f & \text{in } B, \\ \partial_t u - \partial_{xx} u &= f + h_0 & \text{in } C, \\ u &> 0 & \text{in } A, \\ u &> 0 & \text{in } B, \\ u &= 0 & \text{in } C, \\ u(x, 0) &= 0, \\ u(0, t) &= \psi(t), \\ u(R, t) &\stackrel{!}{=} 0, \\ \partial_t u &\stackrel{!}{\geq} 0 & \text{in } D. \end{aligned}$$

Wir werden gleich das folgende Lemma brauchen:

**7.4.2 Lemma.**

Für beliebige Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:

$$[(a = 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \geq 0 \wedge b = 0)] \Leftrightarrow [b \geq 0 \wedge (\forall v \geq 0 : a \cdot (v - b) \geq 0)].$$

Dieses Lemma suggeriert, dass wir das folgende Problem untersuchen sollten:

**7.4.3 Problem. (Variationsungleichung)**

Sei  $\mathbb{K} := \{v \in L^2(D) \mid v \geq 0\}$ . Finde  $u \in L^2((0, t_{\text{end}}), H^2((0, R))) \cap \mathbb{K}$  mit

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathbb{K} : \quad (\partial_t u - \partial_{xx} u - f) \cdot (v - u) &\geq 0 & \text{in } D, \\ u(x, 0) &= 0, \\ u(0, t) &= \psi(t), \\ u(R, t) &= 0, \\ \partial_t u &\in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Um diese Variationsungleichung zu lösen, brauchen wir ein wenig Theorie zu parabolischen Gleichungen. Sei dazu  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  ein glatt berandetes Gebiet und  $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$ . Betrachte

**7.4.4 Gleichung. (Parabolische Gleichung)**

Finde  $u = u(x, t)$  mit

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f & \text{in } \Omega_T, \\ u &= 0 & \text{auf } (\partial\Omega) \times (0, T), \\ u(x, 0) &= g(x) & \text{auf } \Omega. \end{aligned}$$

Eine schwache Lösung ist ein  $u \in L^2((0, T), H_0^1(\Omega))$  mit  $\partial_t u \in L^2((0, T), (H_0^1(\Omega))')$  und

$$\begin{aligned} \forall v \in H_0^1(\Omega), t \in (0, T) : \quad \langle \partial_t u, v \rangle + \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2} &= \langle f, v \rangle_{L^2}, \\ u(x, 0) &= g(x). \end{aligned}$$

Es gilt das folgende Lemma:

<sup>19</sup>Wir fordern die letzten beiden Eigenschaften.

**7.4.5 Lemma.**

Die parabolische Gleichung ist für  $f \in L^2((0, T), L^2(\Omega))$  und  $g \in L^2(\Omega)$  eindeutig lösbar und es gibt ein  $C > 0$  mit

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^2} + \|u\|_{L^2((0, T), H_0^1(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L^2((0, T), (H_0^1(\Omega))')} \leq C \cdot \left[ \|f\|_{L^2((0, T), L^2(\Omega))} + \|g\|_{L^2} \right].$$

Falls  $g \in H_0^1(\Omega)$ , dann ist  $u \in L^2((0, T), H^2(\Omega)) \cap L^\infty((0, T), H_0^1(\Omega))$  und  $\partial_t u \in L^2((0, T), L^2(\Omega))$ .

Mit einem Fixpunktargument kann man nichtlineare, parabolische Gleichungen vom „Reaktions-Diffusions-Typ“ behandeln:

**7.4.6 Gleichung. (Nichtlineare, parabolische Gleichung)**

Finde  $u = u(x, t)$  mit

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f(u) && \text{in } \Omega_T, \\ u &= 0 && \text{auf } (\partial\Omega) \times (0, T), \\ u(x, 0) &= g(x) && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Es gilt nämlich das folgende Lemma:

**7.4.7 Lemma.**

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  global Lipschitz-stetig. Dann hat die nichtlineare, parabolische Gleichung eine eindeutige, schwache Lösung.

**Beweis.**

Wir verwenden den Banach'schen Fixpunktsatz. Sei  $C_f$  die Lipschitz-Konstante von  $f$  und  $L : h \mapsto u$  der Lösungsoperator für das lineare Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= h && \text{in } \Omega_T, \\ u &= 0 && \text{auf } (\partial\Omega) \times (0, T), \\ u(x, 0) &= g(x) && \text{auf } \Omega. \end{aligned}$$

Sei  $X := C([0, T], L^2(\Omega))$  versehen mit der Norm

$$\|u\|_X := \sup_{t \in [0, T]} e^{-lt} \cdot \|u(t)\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei  $l \geq 0$  erst später gewählt wird. Die nichtlineare, parabolische Gleichung ist äquivalent zur Fixpunktgleichung

$$L(f(u)) = u.$$

Wenn wir nun zeigen können, dass  $u \mapsto A(f(u))$  für geeignetes  $l$  eine Kontraktion auf  $X$  ist, dann folgt die Behauptung aus dem Banach'schen Fixpunktsatz.

Seien also  $u_1, u_2 \in X$  und  $w_i := L(f(u_i))$  fest. Da das Bild von  $f(u_i)$  unter  $L$  genau die schwache Lösung der nichtlinearen Gleichung ist, gilt für die beiden  $w_i$  schon

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), t \in (0, T) : \quad \langle \partial_t w_i, v \rangle + \langle \nabla w_i, \nabla v \rangle_{L^2} = \langle f(u_i), v \rangle_{L^2}.$$

Insbesondere gilt das auch für  $v := w_1 - w_2$ :

$$\langle \partial_t (w_1 - w_2), w_1 - w_2 \rangle + \|\nabla (w_1 - w_2)\|_{L^2}^2 = \langle f(u_1) - f(u_2), w_1 - w_2 \rangle_{L^2}.$$

Daraus folgt wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, der Poincaré-Ungleichung und der Lipschitz-Stetigkeit von  $f$  schon

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \cdot \|w_1(t) - w_2(t)\|_{L^2}^2 \right] + \|\nabla (w_1 - w_2)\|_{L^2}^2 &\leq \|f(u_1) - f(u_2)\|_{L^2} \cdot \|w_1 - w_2\|_{L^2} \\ &\leq C_f \cdot C_P \cdot \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2} \cdot \|\nabla (w_1 - w_2)\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot (C_f \cdot C_P)^2 \cdot \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \cdot \|\nabla (w_1 - w_2)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass für ein geeignetes  $C > 0$  gilt:

$$\|w_1(t) - w_2(t)\|_{L^2}^2 \leq C \cdot \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2}^2 ds \leq C \cdot \int_0^t e^{2ls} \cdot \|u_1 - u_2\|_X^2 ds \leq \frac{C}{2l} \cdot \|u_1 - u_2\|_X^2 \cdot e^{2lt}.$$

Daraus folgt wiederum

$$\|w_1 - w_2\|_X \leq \tilde{C} \cdot \|u_1 - u_2\|_X.$$

für ein passendes  $\tilde{C}$ , das noch von  $l$  abhängt. Wählt man nun  $l$  so, dass  $\tilde{C} < 1$ , dann ist  $L$  eine Kontraktion. ■

Für skalare, parabolische Gleichungen gilt das Maximums-Prinzip:

#### 7.4.8 Lemma. (Maximums-Prinzip)

Sei der *parabolischen Rand* definiert als

$$\partial_P \Omega_T := (\Omega \times \{0\}) \cup \Omega_T.$$

Ist  $c \geq 0$ , so gelten die folgenden beiden Implikationen:

$$\begin{aligned} \left[ \partial_t u - \Delta u + c \cdot u \leq 0 \quad \text{auf } \Omega_T \right] &\Rightarrow \left[ \sup_{\Omega_T} u \leq \max\{0, \sup_{\partial_P \Omega_T} u\} \right]. \\ \left[ \partial_t u - \Delta u + c \cdot u \geq 0 \quad \text{auf } \Omega_T \right] &\Rightarrow \left[ \inf_{\Omega_T} u \leq \min\{0, \inf_{\partial_P \Omega_T} u\} \right]. \end{aligned}$$

Wir kommen nun zurück zur Lösung der Variationsungleichung von weiter oben. Dazu benötigen wir eine paar Funktionen: Für jedes  $\epsilon > 0$  sei  $\beta_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$  eine Funktion mit

$$\begin{aligned} \beta_\epsilon(0) &= -1, \\ \beta_\epsilon(t) &= 0 \quad \text{für } t \in [\epsilon, \infty), \\ \beta'_\epsilon(t) &> 0 \quad \text{für } t \in (-\infty, \epsilon), \\ \beta''_\epsilon(t) &\leq 0 \quad \text{für } t \in (-\infty, \epsilon). \end{aligned}$$

Seien weiters  $f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$  Funktionen mit<sup>20</sup>

$$\begin{aligned} \sup_\epsilon \|f_\epsilon\|_{L^\infty} &< \infty, \\ f_\epsilon &\searrow f \end{aligned}$$

und  $\eta \in C_{00}^\infty(\mathbb{R})$  eine Funktion mit

$$\begin{aligned} \eta &\in [0, 1], \\ \eta(x) &= 1 \quad \text{für } x \in (0, \frac{1}{3} \cdot x_0), \\ \eta(x) &= 0 \quad \text{für } x \in (\frac{2}{3} \cdot x_0, \infty). \end{aligned}$$

Betrachte das folgende Hilfsproblem:

#### 7.4.9 Gleichung. (Regularisiertes Gleichungssystem)

Finde  $u_\epsilon = u_\epsilon(x, t)$  mit

$$\begin{aligned} \partial_t u_\epsilon - \partial_{xx} u_\epsilon + h_0 \cdot \beta_\epsilon(u_\epsilon) &= f_\epsilon(x) \quad \text{in } D, \\ u_\epsilon(x, 0) &= \epsilon \cdot \eta(x), \\ u_\epsilon(0, t) &= \psi(t) + \epsilon \quad \text{für } t \in (0, t_{\max}), \\ u_\epsilon(R, t) &= 0 \quad \text{für } t \in (0, t_{\max}). \end{aligned}$$

Dieses nichtlineare, parabolische Problem hat laut obigem Lemma für jedes  $\epsilon > 0$  eine eindeutige, schwache Lösung. Tatsächlich ist wegen der Regularität der  $f_\epsilon, \beta_\epsilon, \eta$  sogar  $u_\epsilon \in C^\infty(D)$ . Wir zeigen jetzt, dass  $\partial_t u_\epsilon \geq 0$  auf  $D$  gilt:

<sup>20</sup>Dabei seien  $f$  und  $x_0$  so wie im Ein-Phasen-Stefan-Problem.

**7.4.10 Lemma.**

Es existieren  $\epsilon_0, M > 0$ , sodass für alle Lösungen  $u_\epsilon$  des regularisierten Systems mit  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$  gilt:

$$0 \leq \partial_t u_\epsilon \leq M \quad \text{auf } D.$$

**Beweis.**

Wir werden das Maximums-Prinzip auf die Funktion  $w := \partial_t u_\epsilon$  anwenden. Diese erfüllt nämlich eine lineare, parabolische Gleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t w - \partial_{xx} w + h_0 \cdot \beta'_\epsilon(u_\epsilon) \cdot w &= 0 \quad \text{in } D, \\ w(x, 0) &= f_\epsilon(x) + \epsilon \cdot \eta''(x) - h_0 \cdot \beta_\epsilon(\epsilon \cdot \eta(x)), \\ w(0, t) &= \psi'(t), \\ w(R, t) &= 0. \end{aligned}$$

Aus dem Maximums-Prinzip erhalten wir

$$\min\{0, \inf_{\partial_P D} w\} \leq w \leq \max\{0, \sup_{\partial_P D} w\}.$$

Der parabolische Rand besteht aus

$$\partial_P D = [(0, R) \times \{0\}] \cup [\{0\} \times (0, t_{\text{end}})] \cup [\{R\} \times (0, t_{\text{end}})].$$

Nach unten haben wir die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \forall x \in (0, R) : \quad w(x, 0) &= f_\epsilon(x) + \epsilon \cdot \eta''(x) - h_0 \cdot \beta_\epsilon(\epsilon \cdot \eta(x)) \geq 0, \\ \forall t \in (0, t_{\text{end}}) : \quad w(0, t) &= g(t) \geq 0, \\ \forall t \in (0, t_{\text{end}}) : \quad w(R, t) &= 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich  $w \geq 0$  auf  $D$ . Nach oben haben wir die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \forall x \in (0, R) : \quad |w(x, 0)| &\leq \sup_{\epsilon} \|f_\epsilon\|_{L^\infty} + \epsilon \cdot \|\eta''\|_{L^\infty} + h_0 \cdot 1 < \infty, \\ \forall t \in (0, t_{\text{end}}) : \quad |w(0, t)| &\leq \|\psi\|_{L^\infty} < \infty, \\ \forall t \in (0, t_{\text{end}}) : \quad |w(R, t)| &= 0 < \infty. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich  $w \leq M < \infty$  für ein passendes  $M$ . ■

**7.4.11 Lemma.**

Die Lösungen  $u_\epsilon$  mit  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$  der regularisierten Gleichung erfüllen

$$\begin{aligned} \|\beta_\epsilon(u_\epsilon)\|_{L^\infty} &\leq 1, \\ u_\epsilon &\geq 0 \quad \text{auf } D, \\ \sup_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)} \|u_\epsilon\|_{L^\infty} &< \infty. \end{aligned}$$

**Beweis.**

Es ist

$$u_\epsilon(x, t) = u_\epsilon(x, 0) + \int_0^t \partial_\tau u_\epsilon \, d\tau = \epsilon \cdot \eta(x) + \int_0^t \partial_\tau u_\epsilon \, d\tau.$$

Mit dem vorigen Lemma erhalten wir die Gültigkeit der zweiten und dritten Aussage. Wegen  $u_\epsilon \geq 0$  und  $\beta_\epsilon([0, \infty)) \subseteq [-1, 0]$  ergibt sich die erste Behauptung. ■

Wir kommen nun zurück zur Variationsungleichung von weiter oben. Zur Erinnerung: Finde  $u \in L^2((0, t_{\text{end}}), H^2((0, R))) \cap \mathbb{K}$  mit

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathbb{K} : \quad (\partial_t u - \partial_{xx} u - f) \cdot (v - u) &\geq 0 \quad \text{in } D, \\ u(x, 0) &= 0, \\ u(0, t) &= \psi(t), \\ u(R, t) &= 0, \\ \partial_t u &\in \mathbb{K}. \end{aligned}$$



Es gilt der folgende Satz:

**7.4.12 Satz. (Lösung der Variationsungleichung)**

Die Variationsungleichung hat eine eindeutige Lösung  $u$  mit  $u, \partial_x u, \partial_{xx} u, \partial_t u \in L^\infty(D)$ . Die Folge  $u_\epsilon$  der Lösungen der regularisierten Gleichung erfüllt

$$\begin{aligned} u_\epsilon & \xrightarrow{H^1(D)} u, \\ u_\epsilon & \xrightarrow{C(D)} u, \\ u_\epsilon & \xrightarrow{H^2((0,R))} u \quad \text{für jedes feste } t. \end{aligned}$$

**Beweis.**

Schritt 1:  $\sup_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)} \left[ \|\partial_t u_\epsilon\|_{L^\infty(D)} + \|\partial_x u_\epsilon\|_{L^\infty(D)} \right] < \infty.$

Es lässt sich zeigen, dass für jede glatte Funktion  $v$  auf  $(0, R)$  gilt:

$$\|v'\|_{L^\infty((0,R))} \leq C \cdot \left[ \|v\|_{L^\infty((0,R))} + \|v''\|_{L^\infty((0,R))} \right].$$

Damit erhalten wir für jedes feste  $t$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\partial_x u_\epsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty((0,R))} & \leq C \cdot \left[ \|u_\epsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty((0,R))} + \|\partial_{xx} u_\epsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty((0,R))} \right] \\ & \leq C \cdot \left[ \sup_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)} \|u_\epsilon\|_{L^\infty} + M + h_0 + \sup_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)} \|f_\epsilon\|_{L^\infty(D)} \right]. \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass  $\partial_x u_\epsilon$  gleichmäßig in  $\epsilon$  beschränkt ist. Mit der uniformen Abschätzung von  $\partial_t u_\epsilon$  aus einem der vorigen Lemmata erhalten wir genau die Behauptung:

$$\sup_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)} \left[ \|\partial_t u_\epsilon\|_{L^\infty(D)} + \|\partial_x u_\epsilon\|_{L^\infty(D)} \right] < \infty.$$

□

Schritt 2: Arzelà-Ascoli

Die Menge  $\{u_\epsilon \mid \epsilon \in (0, \epsilon_0)\} \subseteq C(\overline{D})$  ist punktwise beschränkt und gleichgradig stetig. Aus dem Satz von Arzelà-Ascoli folgt die Totalbeschränktheit. Somit gibt es eine Teilfolge  $u_{\epsilon'}$  und ein  $u \in C(\overline{D})$  mit

$$u_{\epsilon'} \xrightarrow{C(\overline{D})} u.$$

□

Schritt 3:  $u_{\epsilon'} \xrightarrow{H^1(D)} u$

Aus dem ersten Schritt folgt, dass  $(u_\epsilon)_\epsilon$  in  $H^1(D)$  beschränkt ist. Wir können also annehmen, dass

$$u_{\epsilon'} \xrightarrow{H^1(D)} u.$$

□

Schritt 4:  $\partial_{xx} u \in L^\infty(D)$  und für feste  $t$  gilt  $\partial_{xx} u_{\epsilon'}(\cdot, t) \xrightarrow{L^2((0,R))} \partial_{xx} u(\cdot, t)$

Wir identifizieren einen Kandidaten für  $\partial_{xx} u$ . Für festes  $t > 0$  und  $\phi \in C_{00}^\infty((0, R))$  gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^R (\partial_{xx} u) \cdot \phi \, dx \right| & = \left| \int_0^R u \cdot (\partial_{xx} \phi) \, dx \right| \\ & = \left| \lim_{\epsilon'} \int_0^R u_{\epsilon'} \cdot (\partial_{xx} \phi) \, dx \right| \\ & = \left| \lim_{\epsilon'} \int_0^R (\partial_{xx} u_{\epsilon'}) \cdot \phi \, dx \right| \\ & \leq \left[ M + h_0 + \sup_{\epsilon \in (0, \epsilon_0)} \|f_\epsilon\|_{L^\infty(D)} \right] \cdot \|\phi\|_{L^1((0,R))}. \end{aligned}$$

Weil  $C_{00}^\infty((0, R))$  dicht in  $L^1((0, R))$  liegt, folgt für festes  $t$  schon  $\partial_{xx}u(\cdot, t) \in L^\infty((0, R))$ . Diese, für jedes feste  $t$  definierte, Funktion ist tatsächlich die distributionelle Ableitung. Insbesondere folgt

$$\partial_{xx}u_{\epsilon'} \xrightarrow{L^2(D)} \partial_{xx}u.$$

□

**Schritt 5:**  $u$  löst die Variationsungleichung

Wegen  $u_\epsilon \geq 0, \partial_t u_\epsilon \geq 0$  auf  $D$  folgt  $u \geq 0, \partial_t u \geq 0$  auf  $D$ . Außerdem erfüllt  $u$  die Randbedingungen der Variationsungleichung. Sei nun  $v \in L^\infty(D)$  mit  $v \geq \delta > 0$  auf  $D$ . Dann gilt für alle  $\epsilon < \delta$

$$(\partial_t u_\epsilon - \partial_{xx} u_\epsilon) \cdot (v - u_\epsilon) - \underbrace{h_0 \cdot (\beta_\epsilon(v) - \beta_\epsilon(u_\epsilon))}_{\substack{=0 \\ \geq 0}} \cdot (v - u_\epsilon) = f_\epsilon \cdot (v - u_\epsilon).$$

Somit folgt

$$\int_D \underbrace{(\partial_t u_{\epsilon'} - \partial_{xx} u_{\epsilon'})}_{L^2(D)_{\partial_t u - \partial_{xx} u}} \cdot \underbrace{(v - u_{\epsilon'})}_{L^2(D)_{v-u}} \, dx \, dt \geq \int_D \underbrace{f_{\epsilon'}}_{L^2(D)_f} \cdot \underbrace{(v - u_{\epsilon'})}_{L^2(D)_{v-u}} \, dx \, dt.$$

Wir erhalten im Grenzwert

$$\int_D (\partial_t u - \partial_{xx} u) \cdot (v - u) \, dx \, dt \geq \int_D f \cdot (v - u) \, dx \, dt.$$

Lässt man die Voraussetzung  $v \geq \delta$  fallen und variiert  $v$ , dann ergibt sich

$$\forall v \in \mathbb{K} : \quad (\partial_t u - \partial_{xx} u) \cdot (v - u) \geq f \cdot (v - u).$$

□

**Schritt 6:** Konvergenz der gesamten Folge

Es lässt sich zeigen, dass die Lösungen der Variationsungleichung eindeutig sind. Damit gelten die gezeigten Konvergenzen sogar für die ganze Folge  $(u_\epsilon)_\epsilon$ . □

■

#### 7.4.13 Lemma.

Sei  $u \in C(\overline{D})$  die Lösung der Variationsungleichung. Definiere für jedes  $t$  die Menge

$$\Omega(t) := \{x \in (0, R) \mid u(x, t) > 0\}.$$

Dann gilt

$$\forall t' > t : \quad \Omega(t) \subseteq \Omega(t').$$

#### 7.4.14 Lemma.

Sei wieder  $u \in C(\overline{D})$  die Lösung der Variationsungleichung und  $\Omega(t) := \{x \in (0, R) \mid u(x, t) > 0\}$ . Sei weiters  $\Omega := \{(x, t) \in D \mid u(x, t) > 0\}$  und  $\Gamma := (\partial\Omega) \cap D$ . Dann hat  $\Gamma$  die Darstellung  $x = \sigma(t)$  für eine monotone, stetige Funktion  $\sigma$ .

#### 7.4.15 Satz.

$\Gamma$  ist tatsächlich eine  $C^\infty$ -Kurve. Die Lösung  $u$  ist stückweise glatt.