axiomatischer Zugang zum Spannungstensor [1]

- Für einen "Körper"[2] $\omega \subset \mathbb{R}^d$, ist die auf ihn wirkende *Volumenkraft* definiert als

$$F_{vol} = \int_\omega \rho(x)\mathbf{f}(x)\,dx,$$

wobei ρ die Dichte und $\mathbf{f}$ die (massebezogene) Kraftdichte ist.

- Kraftübertragung über die Oberfläche von ω wird mittels eine Dichte $\mathbf{b}_{\partial\omega}$ beschrieben:

$$F_{surface} = \int_{\partial\omega} \mathbf{b}_{\partial\omega}(x)\,ds_x,$$

- Gesamtkraft:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{vol} + \mathbf{F}_{surface} = \int_\omega \rho(x)\mathbf{f}(x)\,dx + \int_{\partial\omega} \mathbf{b}_{\partial\omega}(x)\,ds_x.$$

- Kräfte innerhalb eines Körpers Ω müssen modelliert werden. Man nimmt an, daß das *nur* über Oberflächen geschieht, d.h. für einen einen *beliebigen* Teilbereich $\omega \subset \Omega$ ist die Wirkung von $\Omega \setminus \omega$ auf ω gegeben durch

$$\mathbf{F}_{\Omega\setminus\omega\to\omega} = \int_{\partial\omega} \mathbf{b}_{\partial\omega}(x)\,ds_x,$$

für eine geeignete Kraftdichte $\mathbf{b}_{\partial\omega}$.

- **Cauchy Axiom:** für die Funktion $\mathbf{b}_{\partial\omega}$ (die ja vom Teilgebiet ω abhängt!) macht man die *Strukturannahme*

$$\mathbf{b}_{\partial\omega}(x) = \mathbf{b}(x, \mathbf{n}(x)), \qquad \text{wobei } \mathbf{n}(x) = \text{ äußere Normale von } \partial\omega$$

- der Impulserhaltungssatz[3] impliziert dann, daß $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x, \mathbf{n}(x))$ *linear* in $\mathbf{n}(x)$ ist:

$$\mathbf{b}(x, \mathbf{n}(x)) = \sigma(x)\mathbf{n}(x), \qquad \sigma(x) \in \mathbb{R}^{d\times d} \quad \text{ist der } \textit{Spannungstensor}$$

- der Drehimpulserhaltungssatz[4] impliziert dann, daß $\sigma(x) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch ist.

- Es ergibt sich damit mittels des Spannungstensors σ für beliebige Teilmengen $\omega \subset \mathbb{R}^d$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{vol} + \mathbf{F}_{surface} = \int_\omega \rho(x)\mathbf{f}(x)\,dx + \int_\omega \operatorname{Div}\sigma(x)\,dx,$$

wobei Div der auf einer Matrix *zeilenweise* agierende Divergenzoperator ist: $\operatorname{Div}\mathbf{A}(x) = (\sum_j \partial_{x_j}\mathbf{A}_{ij}(x)$.

[1]The method of postulating what we want has many advantages; they are the same as the advantages of theft over honest toil. (B. Russell 1919)

[2]das kann hier auch ein Teilbereich eines Fluids wie einer Flüssigkeit oder eines Gases sein

[3]das *fordert* man typischerweise

[4]auch ist eine Forderung