

Kapitel 5

Konvergenzanalyse der FEM

5.1 Formreguläre Gitter

Bei zahlreichen Problemen haben wir ein Quasioptimalitätsresultat für die FEM von der Form $\|u - u_N\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{v \in V_N} \|u - v\|_{H^1(\Omega)}$. Es ist deshalb von Interesse, dieses Infimum zu quantifizieren. In der Praxis geschieht das dadurch, daß man ein konkretes $v \in V_N$ wählt, das gute Approximationseigenschaften hat. Wir werden im folgenden Satz den stückweise linearen Interpolanten untersuchen.

Satz 5.1 *Sei \mathcal{T} eine reguläre, γ -formreguläre, affine Triangulierung eines Polygons $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sei $u \in C(\overline{\Omega})$ und $u|_K \in H^2(K)$ für jedes $K \in \mathcal{T}$. Sei $Iu \in S^{1,1}(\mathcal{T})$ der stückweise lineare Interpolant von u , d.h. $(Iu)(x_i) = u(x_i)$ für alle Knoten x_i . Dann existiert ein $C > 0$, welches nur von γ abhängt, so daß*

$$\begin{aligned} \|u - Iu\|_{L^2(K)} &\leq Ch_K^2 |u|_{H^2(K)} & \forall K \in \mathcal{T} \\ |u - Iu|_{H^1(K)} &\leq Ch_K |u|_{H^2(K)} & \forall K \in \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Inbesondere ist $Iu \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})$ falls $u \in C(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$.

Beweis: Die Beweistechnik, die wir hier vorstellen ist fundamental in der FEM und läuft in der Literatur oft unter dem Namen "Bramble-Hilbert-Lemma" oder "Skalierungsargument".

1. *Schritt:* Wir zeigen: setzt man für eine Funktion v , die auf K definiert ist, $\hat{v} := v \circ F_K$, so gilt

$$|\hat{v}|_{H^k(\hat{K})} \leq C_k h_K^{k-1} |v|_{H^k(K)} \quad (5.1)$$

$$|v|_{H^k(K)} \leq C_k h_K^{-(k-1)} |\hat{v}|_{H^k(\hat{K})}; \quad (5.2)$$

die Konstante C_k hängt von $k \in \mathbb{N}_0$ und von der Formregularitätskonstante γ ab.

Um (5.1), (5.2) zu zeigen, überlegt man sich zuerst die Existenz von $C > 0$, welches nur von γ abhängt, so daß (vgl. Lemma 4.6)

$$\|F'_K\|_2 \leq Ch_K, \quad \|(F'_K)^{-1}\|_2 \leq Ch_K^{-1}, \quad \forall K \in \mathcal{T}. \quad (5.3)$$

Mit diesen Abschätzungen lassen sich (5.1), (5.2) wie folgt beweisen: Für $k = 0$ drücken (5.1), (5.2) einfach nur die Substitutionsregel aus. Für $k = 1$ ergibt die Kettenregel $(\nabla \hat{v})^\top = ((\nabla v)^\top \circ F_K) \cdot F'_K$ und damit mit der Substitutionsregel

$$\|\nabla \hat{v}\|_{L^2(\hat{K})} \leq \|F'_K\|_2 \|(\nabla v)^\top \circ F_K\|_{L^2(\hat{K})} \leq Ch_K h_K^{-1} \|\nabla v\|_{L^2(K)}.$$

Für $k = 2$ nutzt man wesentlich aus, daß F'_K eine konstante Matrix ist. Schreibt man $F_K = (F_1, F_2)^\top$, so ist F'_K die konstante Matrix $(F'_K)_{ij} = F_{i,j} = \partial_j F_i$; aufgrund von (5.3) können wir die Einträge durch $|F_{i,j}| \leq Ch_K$ abschätzen. Also ist mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \hat{v} &= \partial_{\alpha_1} \sum_{k_1=1}^2 ((\partial_{k_1} v) \circ F_K) \frac{\partial F_{k_1}}{\partial x_{\alpha_2}} = \sum_{k_1=1}^2 F_{k_1, \alpha_2} \partial_{\alpha_1} (\partial_{k_1} v \circ F_K) \\ &= \sum_{k_1=1}^2 \sum_{k_2=1}^2 F_{k_1, \alpha_2} ((\partial_{k_1} \partial_{k_2} v) \circ F_K) \frac{\partial F_{k_2}}{\partial x_{\alpha_2}} = \sum_{k_1=1}^2 \sum_{k_2=1}^2 F_{k_1, \alpha_2} F_{k_2, \alpha_1} (\partial_{k_1} \partial_{k_2} v) \circ F_K \end{aligned}$$

woraus sich aus der Substitutionsregel dann die Behauptung (5.1) ergibt.

2. *Schritt:* Sei $\widehat{I} : C(\widehat{K}) \rightarrow \mathcal{P}_1$ der Interpolationsoperator, der in den drei Eckpunkten von \widehat{K} interpoliert. Wir beobachten, daß $\widehat{K} : C(\widehat{K}) \rightarrow \mathcal{P}_1$ ein stetiger linearer Operator ist mit $\|\widehat{I}u\|_{C(\widehat{K})} \leq \|u\|_{C(\widehat{K})}$, der zudem Polynome vom Grad 1 reproduziert:

$$\widehat{I}\pi = \pi \quad \forall \pi \in \mathcal{P}_1. \quad (5.4)$$

Nach dem 1. Schritt ergibt sich nun

$$\|u - Iu\|_{L^2(K)} \leq Ch_K \|\widehat{u} - \widehat{I}\widehat{u}\|_{L^2(\widehat{K})} = Ch_K \|\widehat{u} - \widehat{I}\widehat{u}\|_{L^2(\widehat{K})} = Ch_K \|\widehat{u} - \pi - \widehat{I}(\widehat{u} - \pi)\|_{L^2(\widehat{K})} \quad \forall \pi \in \mathcal{P}_1.$$

Nun nutzen wir den Sobolev'schen Einbettungssatz $H^2(\widehat{K}) \subset C(\widehat{K})$ aus, d.h. $\|w\|_{C(\widehat{K})} \leq C\|w\|_{H^2(\widehat{K})}$ für alle $w \in H^2(\widehat{K})$, um weiter schließen zu können:

$$\begin{aligned} \|u - Iu\|_{L^2(K)} &\leq Ch_K \inf_{\pi \in \mathcal{P}_1} \|\widehat{u} - \pi - \widehat{I}(\widehat{u} - \pi)\|_{L^2(\widehat{K})} \leq Ch_K \inf_{\pi \in \mathcal{P}_1} \left(\|\widehat{u} - \pi\|_{C(\widehat{K})} + \underbrace{\|\widehat{I}(\widehat{u} - \pi)\|_{C(\widehat{K})}}_{\leq \|\widehat{u} - \pi\|_{C(\widehat{K})}} \right) \\ &\leq Ch_K \inf_{\pi \in \mathcal{P}_1} \|\widehat{u} - \pi\|_{C(\widehat{K})} \leq Ch_K \inf_{\pi \in \mathcal{P}_1} \|\widehat{u} - \pi\|_{H^2(\widehat{K})} \end{aligned}$$

Das Lemma von Deny-Lions (Satz 3.30) erlaubt uns nun, die volle H^2 -Norm durch die H^2 -Seminorm zu ersetzen, und wir erhalten

$$\|u - Iu\|_{L^2(K)} \leq Ch_K |\widehat{u}|_{H^2(\widehat{K})} \leq Ch_K h_K |u|_{H^2(K)};$$

im letzten Schritt wurde dabei (5.2) für $k = 2$ verwendet. Damit erhalten wir die gewünschte Aussage für $\|u - Iu\|_{L^2(K)}$.

Für $\|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(K)}$ gehen wir analog vor.

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(K)} &\stackrel{1. \text{ Schritt}}{\leq} C |\widehat{u} - \widehat{I}\widehat{u}|_{H^1(\widehat{K})} \leq C \inf_{\pi \in \mathcal{P}_1} |\widehat{u} - \pi - \widehat{I}(\widehat{u} - \pi)|_{H^1(\widehat{K})} \\ &\leq C \inf_{\pi \in \mathcal{P}_1} \left(\|\widehat{u} - \pi\|_{H^1(\widehat{K})} + \|\widehat{I}(\widehat{u} - \pi)\|_{H^1(\widehat{K})} \right). \end{aligned}$$

Weil $\widehat{I}(\widehat{u} - \pi) \in \mathcal{P}_1$ und auf dem endlich-dimensionalen Raum \mathcal{P}_1 alle Normen äquivalent sind, gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß

$$\|\widehat{I}(\widehat{u} - \pi)\|_{H^1(\widehat{K})} \leq C \|\widehat{I}(\widehat{u} - \pi)\|_{C(\widehat{K})} \leq C \|\widehat{u} - \pi\|_{C(\widehat{K})} \leq C \|\widehat{u} - \pi\|_{H^2(\widehat{K})}.$$

Damit erhalten wir wieder mit dem Lemma von Deny-Lions (Satz 3.30)

$$\|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(K)} \leq C \inf_{\pi \in \mathcal{P}_1} \|\widehat{u} - \pi\|_{H^2(\widehat{K})} \leq C |\widehat{u}|_{H^2(\widehat{K})} \leq Ch_k |u|_{H^2(K)},$$

was den Beweis abschließt. \square

Korollar 5.2 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon, \mathcal{T} eine reguläre, γ -formreguläre, affine Triangulierung von Ω . Dann existiert ein $C > 0$, welches nur von γ abhängt, so daß für $u \in H^2(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \|u - Iu\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^2 |u|_{H^2(\Omega)}, \\ |u - Iu|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch |u|_{H^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei $h := \max_{K \in \mathcal{T}} h_K$.

Beweis: Man summiere die elementweisen Abschätzungen aus Satz 5.1. \square

Interessant ist auch die Frage, wie sich höhere Regularität der zu approximierenden Funktion u oder Verwendung eines höheren Polynomgrades auswirken:

Satz 5.3 Sei \mathcal{T} reguläre, γ -formreguläre, affine Triangulierung eines Polygons Ω . Sei $k > 1$. Dann existiert $C > 0$ (welches nur von γ und k abhängt), so daß folgendes gilt: Für jedes $u \in H^k(\Omega)$ existiert ein $v \in S^{p,1}(\mathcal{T})$ derart, daß

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left(\frac{h}{p}\right)^{\min\{k,p+1\}} \|u\|_{H^k(\Omega)}, \\ \|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left(\frac{h}{p}\right)^{\min\{k,p+1\}-1} \|u\|_{H^k(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei $h = \max_{K \in \mathcal{T}} h_K$. Falls $u \in H^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, so kann $v \in S^{p,1}(\mathcal{T}) \cap H_0^1(\Omega)$ gewählt werden.

Beweis: Die etwas einfacheren Abschätzungen

$$\|u - v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{k,\gamma,p} h^{\min\{k,p+1\}} \|u\|_{H^k(\Omega)}, \quad \|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{k,\gamma,p} h^{\min\{k,p+1\}-1} \|u\|_{H^k(\Omega)},$$

bei denen die p -Abhängigkeit *nicht* explizit ist, ergeben sich analog zum Vorgehen in Satz 5.1 (Übung). Die explizite p -Abhängigkeit folgt aus feineren Untersuchungen über Approximationseigenschaften von Polynomen und kann z.B. in [15] gefunden werden. \square

finis 18.Stunde
finis 19.Stunde

Bemerkung 5.4 1. Satz 5.3 zeigt sogar, daß für festes Gitter \mathcal{T} und $p \rightarrow \infty$ gilt: $\inf_{v \in S^{p,1}(\mathcal{T})} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$. Dies impliziert die Konvergenz der sog. p -FEM.

2. Wahl von p : Falls p fest gewählt wird, d.h. eine h -FEM gemacht wird, dann sollte $p \in \mathbb{N}$ so gewählt werden, daß die Bedingung $p + 1 \geq k$ erfüllt ist. Dies liefert nämlich die maximal erreichbare Konvergenzrate. \blacksquare

Übung 5.5 Bestimmen Sie die Konvergenzrate der h -FEM auf quasi-uniformen Gittern für festes p und k in Abhängigkeit von der Problemgröße N . Überzeugen Sie sich davon, daß—falls man N als (zugegebenermaßen grobes) Maß für die Kosten der FEM ansieht—der Einsatz von Ansatzräumen höherer Ordnung (d.h. $p \geq k - 1$) effizienter ist als der Einsatz von $S^{1,1}(\mathcal{T})$. \blacksquare

Um Satz 5.3 anwenden zu können, müssen wir Regularitätsaussagen für die gesuchte Lösung u haben, d.h. wir müssen wissen, in welchem Sobolevraum u ist.

5.2 Regularitätsaussagen für das elliptische Modellproblem

5.2.1 1D

Satz 5.6 Sei $u \in H^1(\Omega)$ schwache Lösung von $-u'' + c(x)u = f$ auf einem Intervall $\Omega \subset \mathbb{R}$. Sei $c \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $f \in H^k(\Omega)$ für ein $k \geq 0$. Dann gilt: $u \in H^{k+2}(\Omega)$ und es existiert $C > 0$, welches von Ω, c, k abhängt, so daß

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C [\|f\|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}].$$

Beweis: Wir zeigen nur den Fall $k = 0$ —der Rest geht mit Induktion. Um $u \in H^2(\Omega)$ zu zeigen, müssen wir zeigen, daß die zweite schwache Ableitung der Lösung $u \in H^1(\Omega)$ existiert und in $L^2(\Omega)$ ist. Der Kandidat ist $v := -f + cu$, welcher offensichtlich in $L^2(\Omega)$ ist. Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ berechnen wir unter Berücksichtigung der Tatsache, daß u eine schwache Lösung ist

$$\int_{\Omega} v\varphi \stackrel{\text{Def.}}{=} \int_{\Omega} (-f + cu)\varphi = - \int_{\Omega} u'\varphi' \stackrel{u \in H^1}{=} \int_{\Omega} u\varphi''$$

Also ist v die zweite schwache Ableitung von u . Die Abschätzung für $\|u\|_{H^2(\Omega)}$ ergibt sich aus

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} = \|-f + cu\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

\square

Bemerkung 5.7 Analoge Aussagen ergeben sich für Gleichungen der Form $-u'' + bu' + cu = f$. ■

Satz 5.6 ist ein Beispiel eines *Shift-Theorems*: $f \in H^k(\Omega) \implies u \in H^{k+2}(\Omega)$. Notwendig ist jedoch die hinreichende Differenzierbarkeit des Koeffizienten $x \mapsto c(x)$.

5.2.2 2D glatte Ränder oder konvexe Gebiete

Für das Modellproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (5.5)$$

gilt:

- Falls $\partial\Omega$ glatt berandet ist, dann gilt wieder das Shifttheorem $f \in H^k(\Omega) \implies u \in H^{k+2}(\Omega)$ zusammen mit der a priori Abschätzung $\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C_{\Omega,k} \|f\|_{H^k(\Omega)}$, wobei $C_{\Omega,k}$ nur von Ω und k abhängt.
- Falls Ω ist konvex ist, so gilt $f \in L^2(\Omega) \implies u \in H^2(\Omega)$ zusammen mit $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$ für eine Konstante $C > 0$, die nur von Ω abhängt.

Wesentlich für diese beiden Aussagen ist jedoch die Glattheit von $\partial\Omega$ bzw. die Konvexität von Ω wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5.8 Sei $\omega \in (0, 2\pi)$ mit $\pi/\omega \notin \mathbb{N}$ und definiere den Sektor $S_R(\omega) := \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \mid 0 < r < R, 0 < \varphi < \omega\}$. Sei $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $\text{supp } \chi \subset B_{R/2}(0)$ und $\chi|_{B_{R/4}(0)} \equiv 1$. Definiere die Funktion u_0 in Polarkoordinaten durch $u_0(r, \varphi) := r^{\pi/\omega} \sin(\pi/\omega \varphi)$ (d.h. $u_0 = \text{Im} z^{\pi/\omega}$) und definiere u durch $u := u_0 \chi$ sowie $f := -\Delta u$. Dann gilt (Übung):

- (i) $u|_{\partial S_R(\omega)} = 0$
- (ii) $u \in H_0^1(S_R(\omega))$
- (iii) $f \in C^\infty(\overline{S_R(\omega)})$ und $f \equiv 0$ auf $B_{R/4}(0)$
- (iv) $u \notin H^k(S_R(\omega))$ falls $k > \pi/\omega + 1$

Dieses Beispiel zeigt, daß in Gebieten mit Ecken ein Shift-theorem nicht uneingeschränkt gelten kann: Obwohl die Koeffizienten der Differentialgleichung und die rechte Seite C^∞ sind, äußern sich die mangelnden Differenzierbarkeitseigenschaften der Geometrie dahingehend, daß die Lösung nicht in Sobolevräumen beliebiger Ordnung ist. Wir werden unten ein modifiziertes Shift-theorem kennenlernen, das diese Problematik angemessen widerspiegelt. ■

5.2.3 Regularitätsaussagen in Polygonen

Wie wir in Beispiel 5.8 gesehen haben, gilt das Shift-theorem nicht uneingeschränkt in Polygonebenen aufgrund der Nichtglattheit der Geometrie. Es gilt jedoch ein modifiziertes Shift-theorem, bei dem für $f \in H^k(\Omega)$ die Lösung u als Summe von *endlich vielen Singularitätenfunktionen* und einer Funktion $\tilde{u} \in H^{k+2}(\Omega)$ geschrieben wird.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon mit Ecken \mathbf{A}_j , $j = 1, \dots, J$ und Innenwinkeln $\omega_j \in (0, 2\pi)$. Für jede Ecke \mathbf{A}_j führen wir lokale Polarkoordinaten (r_j, φ_j) ein. Weiter benötigen wir für jede Ecke \mathbf{A}_j eine Abschneidefunktion $\chi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit

- (i) $\chi_j \equiv 1$ in einer Umgebung von \mathbf{A}_j
- (ii) $\mathbf{A}_m \notin \text{supp } \chi_j$ für $j \neq m$.

Wir definieren für jede Ecke \mathbf{A}_j und jedes $k \in \mathbb{N}$ die Singularitätenfunktion

$$S_{jk}(r, \varphi) := \begin{cases} r^{\pi/\omega_j k} \sin(\frac{\pi}{\omega_j} k \varphi) & \text{falls } \frac{\pi}{\omega_j} k \notin \mathbb{N} \\ r^{\pi/\omega_j k} \left[\ln r \sin(\frac{\pi}{\omega_j} k \varphi) + \varphi \cos(\frac{\pi}{\omega_j} k \varphi) \right] & \text{falls } \frac{\pi}{\omega_j} k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (5.6)$$

Damit gilt für die Lösung u von (5.5) folgendes:

Satz 5.9 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Polygongebiet, $s \geq 1$. Sei $\frac{\omega_j}{\pi} s \notin \mathbb{N}$ für alle $j \in \{1, \dots, J\}$. Dann läßt sich die variationelle Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (5.5) mit $f \in \dot{H}^{-1+s}(\Omega)$ darstellen als

$$u = \tilde{u} + \sum_{j=1}^J \chi_j \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \frac{\pi}{\omega_j} < s}} a_{jk} S_{jk}(r_j, \varphi_j),$$

wobei $\tilde{u} \in H^{s+1}(\Omega)$ und die $a_{jk} \in \mathbb{R}$. Zudem existiert ein $C > 0$, welches nur von Ω und s abhängt, so daß

$$\|\tilde{u}\|_{H^{s+1}(\Omega)} + \sum_{j=1}^J \sum_{k: \frac{\pi}{\omega_j} k < s} |a_{jk}| \leq C \|f\|_{\dot{H}^{-1+s}(\Omega)}.$$

- Bemerkung 5.10**
1. die Singularitätenfunktionen S_{jk} erfüllen $-\Delta S_{jk} = 0$ und die Randbedingungen bei \mathbf{A}_j .
 2. für $s = 1$ tragen in der Summe nur die Ecken \mathbf{A}_j bei, für die $\omega_j > \pi$ gilt (die sog. "einspringenden Ecken"). Sie tragen genau einen Term bei. Für $s = 1$ ist insbesondere die Lösung u in H^2 in der Nähe der konvexen Ecken \mathbf{A}_j mit $\omega_j < \pi$.
 3. Resultate analog zu Satz 5.9 existieren auch für andere Differentialgleichungen und andere Randbedingungen.

■
finis 20.Stunde

Eine etwas andere Beschreibung der Regularität ergibt sich aus der Verwendung gewichteter Sobolevräume.

Lemma 5.11 Die Funktionen S_{jk} aus (5.6) erfüllen:

- (i) $\forall \delta > 0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \forall j \forall s \geq 0 : \|S_{jk}\|_{H^s(\Omega \setminus B_\delta(\mathbf{A}_j))} < \infty$
- (ii) falls $\frac{\pi}{\omega_j} k > s$, dann ist $S_{jk} \in H^{s+1}(\Omega)$
- (iii) falls $\frac{\pi}{\omega_j} < 1$, dann ist $S_{jk} \notin H^2(\Omega)$ aber $\|S_{jk}\|_{H^1(\Omega)} < \infty$ sowie

$$\|r_j^{\beta_j} D^\alpha S_{jk}\|_{L^2(\Omega)} < \infty, \quad |\alpha| = 2, \quad \beta_j > 1 - \frac{\pi}{\omega_j} \text{ beliebig};$$

hier ist wieder $r_j = \text{dist}(x, \mathbf{A}_j)$.

Beweis: Nachrechnen. □

Aus der Kombination von Satz 5.9 und Lemma 5.11 ergibt sich, daß die Lösung u von (5.5) in einem gewichteten Sobolevraum ist. Der Einfachheit halben beschränken wir uns auf den Fall $s = 1$, d.h. $f \in L^2(\Omega)$:

Korollar 5.12 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Für jede Ecke \mathbf{A}_j , $j = 1, \dots, J$, wähle¹ $\beta_j \in [0, 1)$ so, daß $\beta_j > 1 - \frac{\pi}{\omega_j}$. Dann gilt für die variationelle Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (5.5):

- (i) Für jedes $\delta > 0$ erfüllt für $\Omega' := \Omega \setminus (\cup_{j=1}^J B_\delta(\mathbf{A}_j))$ die Funktion u die Abschätzung $\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C_\delta \|f\|_{L^2(\Omega)}$.
- (ii) Für $0 < \delta < \min_{j,m: j \neq m} \text{dist}(\mathbf{A}_j, \mathbf{A}_m)$ erfüllt auf $B_\delta(\mathbf{A}_j) \cap \Omega$ die Lösung u für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$ mit $|\alpha| = 2$ die Abschätzung $\|r_j^{\beta_j} D^\alpha u\|_{L^2(B_\delta(\mathbf{A}_j) \cap \Omega)} \leq C_\delta \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

¹für $\omega_j < \pi$ wird man immer $\beta_j = 0$ wählen

5.3 Approximation auf angepaßten Gittern

Quasi-uniform Gitter sind reguläre, γ -formreguläre, affine Gitter mit $h_K \sim h$ für alle Elemente $K \in \mathcal{T}$. Bei dem Modellproblem (5.5) können wir im Fall von Polygonen, die einspringende Ecken haben, *nicht* erwarten, daß $u \in H^2(\Omega)$. Damit ist Korollar 5.2 *nicht* anwendbar, und wir können nicht $O(h)$ -Konvergenz erwarten. In der Tat:

Lemma 5.13 Sei $u = r^\alpha \sin \alpha \varphi$ für ein $0 < \alpha < 1$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon mit $0 \in \partial\Omega$ und \mathcal{T} ein quasi-uniformes Gitter auf Ω . Dann gilt: Es existieren $C, C' > 0$ unabhängig von h , so daß

$$(i) \|u - Iu\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^\alpha, \text{ wobei } I : C(\overline{\Omega}) \rightarrow S^{1,1}(\mathcal{T}) \text{ der stückweise lineare Interpolant ist}$$

$$(ii) \inf_{v \in S^{1,1}(\mathcal{T})} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} \geq C'h^\alpha.$$

Beweis: Übung. (siehe Appendix) □

Der Beweis des Lemmas (siehe auch das Vorgehen in Beispiel 5.14 unten) zeigt, daß die verschlechterte Konvergenzordnung an den Elementen an der Singularität liegt. Es liegt deshalb nahe, die Elemente dort klein zu wählen. Andererseits will man den Rechenaufwand, d.h. die Gesamtanzahl Elemente kontrollieren. Dies führt uns darauf, die Elemente an den Ecken klein zu wählen und dort zu verdichten, während sie zum Ausgleich im Inneren des Gebietes etwas größer gewählt werden. Wir führen das zunächst in 1D vor.

Beispiel 5.14 Sei $\Omega = (0, 1)$, $\alpha \in (1/2, 1)$, $u(x) = x^\alpha$. Wir betrachten Gitter $\mathcal{T} = \{K_i \mid i = 0, \dots, N-1\}$ mit N Elementen; $K_i = (x_i, x_{i+1})$. Dann gilt:

(i) Sei \mathcal{T} uniformes Gitter, d.h. $x_i = \frac{i}{N}$, $i = 0, \dots, N$. D.g.:

$$\inf_{v \in S^{1,1}(\mathcal{T})} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} \geq \inf_{v \in S^{1,1}(\mathcal{T})} \|u' - v'\|_{L^2(K_0)} \geq \inf_{a \in \mathbb{R}} \|u' - a\|_{L^2(K_0)} \geq Ch^{\alpha-1+1/2} = CN^{-(\alpha-1/2)}.$$

(ii) das optimale Konvergenzverhalten $O(N^{-1})$ kann nur auf nicht-uniformen Gittern erreicht werden. Hierzu definieren wir für ein $\beta > 1$ (welches weiter unten in Abhängigkeit von α gewählt wird)

$$\begin{aligned} \Gamma : \Omega &\rightarrow \Omega, & \xi &\mapsto \xi^\beta, & \beta &> 1 \\ \xi_i &:= \frac{i}{N}, & i &= 0, \dots, N. \end{aligned}$$

Das uniforme Gitter, welches durch die Punkte ξ_i beschrieben wird, erzeugt nun mittels der Funktion Γ die Gitterpunkte $x_i := \Gamma(\xi_i)$ eines nichtuniformen Gitters. Wegen $\beta > 1$ sind die Punkte x_i bei $x = 0$ stärker verdichtet. Für die Elementgröße $h_i = x_{i+1} - x_i$ gilt

$$\begin{aligned} h_0 &= x_1 - x_0 = N^{-\beta} \\ h_i &= x_{i+1} - x_i = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \Gamma'(\xi) d\xi = \beta \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \xi^{\beta-1} d\xi = \beta \int_{i/N}^{(i+1)/N} \xi^{\beta-1} d\xi = \beta N^{-\beta} \int_i^{i+1} \xi^{\beta-1} d\xi \\ &= \beta N^{-\beta} (i+1)^{\beta-1} \leq \beta N^{-\beta} \left(\frac{i+1}{i}\right)^{\beta-1} i^{\beta-1} \leq \beta N^{-1} x_i^{(\beta-1)/\beta} \underbrace{\sup_{j \in \mathbb{N}} \left(\frac{j+1}{j}\right)^{\beta-1}}_{\leq 2^{\beta-1}} \\ &\leq 2^{\beta-1} \beta N^{-1} x_i^{1-1/\beta}. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$h_i \leq CN^{-1} |\text{dist}(K_i, 0)|^{1-1/\beta} \quad \text{für } i \geq 1.$$

analog sieht man

$$N^{-1} |\text{dist}(K_i, 0)|^{1-1/\beta} \leq Ch_i \quad \text{für } i \geq 1,$$

woraus sich

$$h_i \sim \begin{cases} N^{-\beta} & \text{für } i = 0 \\ N^{-1} |\text{dist}(K_i, 0)|^{1-1/\beta} & \text{für } i \geq 1 \end{cases} \quad (5.7)$$

ergibt. Auf dem so erzeugten Gitter können wir nun den Fehler $\|(u - Iu)'\|_{L^2(\Omega)}$ abschätzen, wobei $I : C(\overline{\Omega}) \rightarrow S^{1,1}(\mathcal{T})$ wiederum der stückweise lineare Interpolationsoperator ist. Wir haben für das Element K_0 :

$$\begin{aligned} \|(u - Iu)'\|_{L^2(K_0)}^2 &\leq 2\|u'\|_{L^2(K_0)}^2 + 2\|(Iu)'\|_{L^2(K_0)}^2 \leq Ch_0^{2(\alpha-1)+1} + Ch_0^{2(\alpha-1)+1} \leq Ch_0^{2\alpha-1} \\ &= C(N^{-1})^{\beta(2\alpha-1)} = CN^{-\beta(2\alpha-1)}. \end{aligned}$$

Für die Elemente K_i mit $i \geq 1$ folgt aus Satz 5.1²

$$\begin{aligned} \|(u - Iu)'\|_{L^2(K_i)}^2 &\leq Ch_i^2 \|u''\|_{L^2(K_i)}^2 \leq CN^{-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} x_i^{2(1-1/\beta)} |u''|^2 \\ &\stackrel{\beta > 1}{\leq} CN^{-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} x^{2(1-1/\beta)} |u''|^2 \leq CN^{-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} x^{2(1-1/\beta)} x^{2(\alpha-2)} dx \end{aligned}$$

Also folgt

$$\sum_{i=1}^{N-1} \|(u - Iu)'\|_{L^2(K_i)}^2 \leq CN^{-2} \int_{x_1}^1 x^{2-2/\beta+2\alpha-4} dx$$

Fordert man nun $2 - 2/\beta + 2\alpha - 4 > -1$, was äquivalent ist zu

$$\beta > \frac{2}{2\alpha - 1}, \quad (5.8)$$

so können wir abschätzen

$$\sum_{i=1}^{N-1} \|(u - Iu)'\|_{L^2(K_i)}^2 \leq CN^{-2} \int_{x_1}^1 x^{2-2/\beta+2\alpha-4} dx \leq CN^{-2}.$$

Zusammenfassend ergibt sich damit für $\beta > \max\{1, \frac{2}{2\alpha-1}\}$

$$\|(u - Iu)'\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left[N^{-\beta(2\alpha-1)/2} + N^{-1} \right] \leq CN^{-1}, \quad (5.9)$$

d.h. die optimale Konvergenzrate. ■

Beispiel 5.15 Wir illustrieren das Verhalten numerisch in Fig. 5.1. Hierzu wird mittels der FEM (basierend auf $S^{1,1}(\mathcal{T})$) das Randwertproblem

$$-u'' = f \quad \text{auf } \Omega = (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

betrachtet. Die exakte Lösung ist als $u(x) = x^\alpha(1-x)$ für $\alpha = 3/4$ gewählt. Wir betrachten zwei Gitter:

1. das uniforme Gitter $\mathcal{T}^{uniform}$ mit Knoten $x_i = \frac{i}{N}$, $i = 0, \dots, N$
2. das gradierte Gitter \mathcal{T}^{graded} mit $x_i = \xi_i^\beta$, wobei $\xi = \frac{i}{N}$, $i = 0, \dots, N$ und $\beta > \frac{1}{\alpha-1/2}$.

Es folgt dann:

$$\begin{aligned} \inf_{v \in S^{1,1}(\mathcal{T}^{uniform})} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch^{\alpha-1/2} = cN^{-(\alpha-1/2)} \\ \inf_{v \in S^{1,1}(\mathcal{T}^{graded})} \|u - v\|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch = CN^{-1}. \end{aligned}$$

Dieses Konvergenzverhalten ist in Fig. 5.1 in der Tat sichtbar.

Beispiel 5.14 zeigt folgendes:

- durch geeignete Wahl des Gitters kann $\|u - Iu\|_{H^1(\Omega)} \leq CN^{-1}$ erreicht werden. Das ist die gleiche (optimale) Konvergenzrate, die für die Approximation von H^2 -Funktionen erreicht wird; entscheidend ist die Eigenschaft (5.8) des Gitters, welche in analoger Form auch in 2D verwendet werden kann.

²Satz 5.1 ist für 2D formuliert—die entsprechende 1D Aussage wird jedoch völlig analog gezeigt.

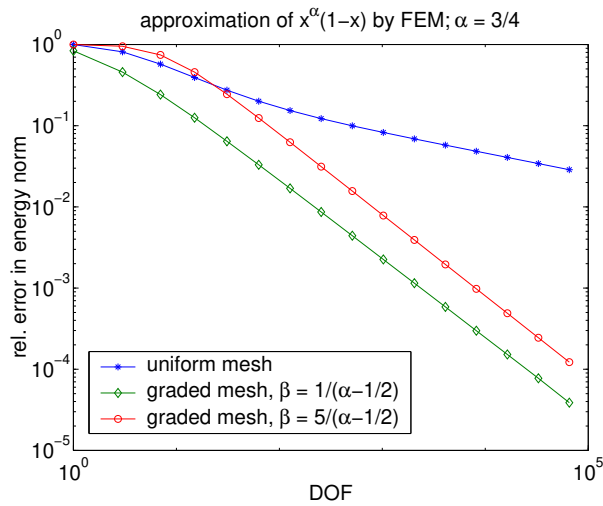


Abbildung 5.1: Konvergenzverhalten der 1D-FEM auf uniformen und graduierten Gitter—vgl. Beispiel 5.15

- Das Gitter ist so, daß der Fehler in allen Elementen ungefähr gleich groß ist: $\|(u - Iu)'\|_{L^2(K)}^2 \sim N^{-3}$ für alle $i = 0, \dots, N - 1$. Diese Beobachtung motiviert das “Fehlerrückverteilungsprinzip” bei adaptiven Algorithmen (siehe später).
- Um Konvergenz $O(N^{-1})$ zu erzielen, muß $\beta > 2/(2\alpha - 1)$ sein. Die Wahl $\beta \gg 2/(2\alpha - 1)$ erzielt zwar extrem kleine Elemente bei $x = 0$, dafür sind die Elemente bei $x = 1$ “zu groß”—es ergibt sich keine Verbesserung gegenüber der Wahl $\beta \approx 2/(2\alpha - 1)$ —vgl. die Numerik in Beispiel 5.15.

clearpage!!

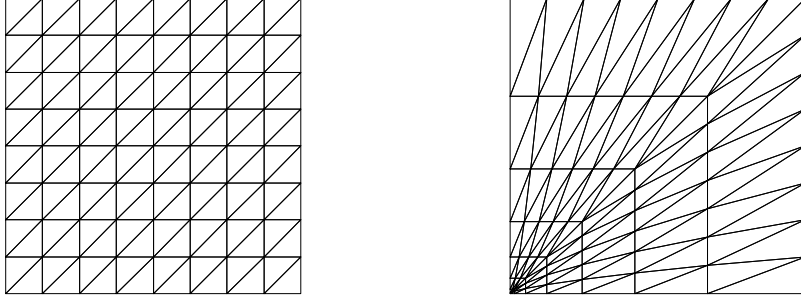


Abbildung 5.2: Graduiertes Gitter (rechts) entsteht aus uniformem Gitter (links) mittels der Abbildung $x \mapsto x||x||_\infty^{\beta-1}$; hier ist $\beta = 3$.

Der 1D-Fall, insbesondere die Bedingung (5.7) an das Gitter, motiviert uns, folgende *graduierte Gitter* in 2D einzuführen:

Definition 5.16 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Polygon mit Ecken \mathbf{A}_j , $j = 1, \dots, J$. Wähle $\beta \in \mathbb{R}^J$ mit $\beta_j \geq 1$, $j = 1, \dots, J$. Für jedes $h \in (0, 1]$ sei $\mathcal{T}(h)$ eine reguläre, γ -formreguläre, affine Triangulierung von Ω . Dann heißt $(\mathcal{T}(h))_{h \in (0, 1]}$ ein Familie von graduierten Gittern (mit Graduierungsexponent $\underline{\beta}$), falls es eine Konstante $C > 0$ und Umgebungen \mathcal{U}_j , $j = 1, \dots, J$, gibt, so daß für jedes $K \in \mathcal{T}(h)$ gilt:

- (i) $K \cap (\Omega \setminus \cup_{j=1}^J \mathcal{U}_j) \neq \emptyset \implies C^{-1}h_K \leq h \leq Ch_K$
- (ii) $K \subset \mathcal{U}_j$ und $\mathbf{A}_j \notin \overline{K} \implies C^{-1}h_K \leq h |\text{dist}(K, \mathbf{A}_j)|^{1-1/\beta_j} \leq Ch_K$
- (iii) $K \subset \mathcal{U}_j$ und $\mathbf{A}_j \in \overline{K} \implies C^{-1}h^{\beta_j} \leq h_K \leq Ch^{\beta_j}$.

Bemerkung 5.17 • im “Inneren” von Ω (d.h. außerhalb der Umgebungen \mathcal{U}_j) ist $\mathcal{T}(h)$ ein quasi-uniformes Gitter mit Gitterweite h

- die Wahl $\beta_j = 1$ führt zu einem quasi-uniformen Gitter in der Nähe von \mathbf{A}_j .

■

Beispiel 5.18 Graduierte Gitter wie in Def. 5.16 definiert, könnten z.B. wie in 1D mittels einer Transformation aus regelmäßigen Gittern erzeugt werden. In Fig. 5.2 entstehen die Knoten des rechten Gitters mit der Abbildung $x \mapsto x||x||_\infty^{\beta-1}$.

■

Wir zeigen nun, daß die Approximationseigenschaften von graduierten Gittern denen von quasi-uniformen Gittern ähneln, wenn (hinreichend) glatte Funktionen approximiert werden:

Satz 5.19 Sei $\mathcal{T}(h)$, $h \in (0, 1]$ eine Familie von graduierten Gittern im Sinn von Def. 5.16. Dann existieren $C_1, C_2 > 0$, welche nur von den Konstanten aus Def. 5.16 abhängen, so daß:

- (i) $\dim S^{1,1}(\mathcal{T}(h)) \leq 3 \sum_{K \in \mathcal{T}(h)} 1 \leq C_1 h^{-2}$
- (ii) für $u \in H^2(\Omega)$ erfüllt der nodale Interpolant $Iu \in S^{1,1}(\mathcal{T}(h))$

$$\|u - Iu\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 h^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}, \quad \|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 h \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

Beweis: Die Abschätzungen in (ii) folgen aus Satz 5.1.

Wir zeigen nun (i) und gehen in mehreren Schritten vor.

1. *Schritt:* Die Elemente von $\mathcal{T}(h)$ sind γ -formregulär. Also existiert ein Winkel $\alpha > 0$ (welcher nur von γ abhängt), so daß alle Dreieckswinkel $\geq \alpha > 0$ sind. Damit können an jedem Knoten höchstens $[2\pi/\alpha] + 1$ Elemente zusammenstoßen. Insbesondere ist damit die Anzahl Elemente, die an eine Ecke \mathbf{A}_j anstoßen durch $[2\pi/\alpha] + 1$ beschränkt:

$$\#\{K \in \mathcal{T}(h) \mid \mathbf{A}_j \in \overline{K}\} \leq [2\pi/\alpha] + 1 \quad \text{für jedes } j = 1, \dots, J \text{ und } h \in (0, h]. \quad (5.10)$$

2. Schritt: (Elemente im “Inneren”). Nach Bedingung (i) aus Def. 5.16 folgt

$$\sum_{K:K \cap (\Omega \setminus \cup_{j=1}^J \mathcal{U}_j) \neq \emptyset} 1 \leq C \sum_K \frac{h_K^2}{h^2} \leq Ch^{-2} \sum_K \int_K 1 = Ch^{-2} \int_{\Omega} 1 \leq Ch^{-2} \quad (5.11)$$

3. Schritt: (Elemente an der Ecke \mathbf{A}_j , die die Ecke nicht berühren). Wir behaupten: Für $K \in \mathcal{T}(h)$ mit $K \subset \mathcal{U}_j$ und $\mathbf{A}_j \notin \overline{K}$ gilt für $d_j(x) := \text{dist}(\mathbf{A}_j, x)$

$$C^{-1}h_K \stackrel{(5.12.a)}{\leq} \inf_{x \in K} |d_j(x)|^{1-1/\beta_j} \stackrel{(5.12.b)}{\leq} Ch \sup_{x \in K} |d_j(x)|^{1-1/\beta_j} \stackrel{(5.12.c)}{\leq} Ch_K. \quad (5.12)$$

Die Ungleichung (5.12.a) folgt aus Def. 5.16; (5.12.b) ist trivial. Für (5.12.c) beobachten wir

$$\begin{aligned} h \sup_{x \in K} |d_j(x)|^{1-1/\beta_j} &\leq h |\text{dist}(K, \mathbf{A}_j) + h_K|^{1-1/\beta_j} \stackrel{(ii), \text{Def. 5.16}}{\leq} Ch \left[\left(\frac{h_K}{h} \right)^{\beta_j/(\beta_j-1)} + h_K \right]^{1-1/\beta_j} \\ &\leq C \left[h_K^{\beta_j/(\beta_j-1)} + h^{\beta_j/(\beta_j-1)} h_K \right]^{1-1/\beta_j} \end{aligned}$$

Weiter ist für Elemente K mit $\mathbf{A}_j \notin \overline{K}$

$$\text{dist}(K, \mathbf{A}_j) \geq Ch^{\beta_j},$$

denn die unmittelbar an \mathbf{A}_j anstoßenden Elemente haben Größe $\sim h^{\beta_j}$. Also gilt wiederum wegen Def. 5.16, (ii)

$$h_K \geq Ch |\text{dist}(K, \mathbf{A}_j)|^{1-1/\beta_j} \geq Ch |h^{\beta_j}|^{1-1/\beta_j} = Ch^{\beta_j},$$

was uns auf

$$h \sup_{x \in K} |d_j(x)|^{1-1/\beta_j} \leq C \left[h_K^{\beta_j/(\beta_j-1)} + h^{\beta_j/(\beta_j-1)} h_K \right]^{1-1/\beta_j} \leq C \left[h_K^{\beta_j/(\beta_j-1)} + h_K^{1/(\beta_j-1)} h_K \right]^{1-1/\beta_j} \leq Ch_K$$

führt.

4. Schritt: Wir werten nun $\sum_{K \in \mathcal{T}(h): \mathbf{A}_j \notin \overline{K}, K \subset \mathcal{U}_j} 1$ aus. Aus (5.12) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}(h) \\ K \subset \mathcal{U}_j \\ \mathbf{A}_j \notin \overline{K}}} 1 &\leq C \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}(h) \\ K \subset \mathcal{U}_j \\ \mathbf{A}_j \notin \overline{K}}} \frac{1}{h_K^2} \int_K 1 \stackrel{(5.12)}{\leq} C \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}(h) \\ K \subset \mathcal{U}_j \\ \mathbf{A}_j \notin \overline{K}}} h^{-2} \int_K \left(\frac{1}{\sup_{x \in K} d_j(x)} \right)^{2(1-1/\beta_j)} \leq C \sum_{\substack{K \in \mathcal{T}(h) \\ K \subset \mathcal{U}_j \\ \mathbf{A}_j \notin \overline{K}}} h^{-2} \int_K \left(\frac{1}{d_j(x)} \right)^{2(1-1/\beta_j)} \\ &\leq Ch^{-2} \int_{\Omega} d_j^{-2(1-1/\beta_j)} \leq Ch^{-2} \int_{r=0}^{\text{diam} \Omega} r^{-2(1-1/\beta_j)} r \, dr = Ch^{-2} r^{2/\beta_j} \Big|_{r=0}^{r=\text{diam} \Omega} \leq Ch^{-2}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Zusammenfassen von (5.10), (5.11), (5.13) ergibt dann die gewünschte Behauptung (i). \square

Satz 5.19 zeigt, daß die Anzahl Elemente in graduierten Gittern immer noch $O(h^{-2})$ ist. Wir zeigen nun, daß die Tatsache, daß die Elemente an den Ecken \mathbf{A}_j wesentlich kleiner als $O(h)$ sind uns hilft, die Singularitätenfunktionen S_{jk} aus (5.6) gut zu approximieren.

Satz 5.20 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{A}_1 = \mathbf{0}$. Sei u in Polarkoordinaten gegeben durch $u(r, \varphi) = r^\alpha \Phi(r, \phi)$ für ein $\alpha \in (0, 1)$ und ein glattes Φ . Sei $(\mathcal{T}(h))_{h \in (0, 1]}$ eine Familie von graduierten Gittern mit $\beta_1 > 1/\alpha$. Dann existiert ein $C > 0$ unabhängig von h , so daß für den nodalen Interpolanten Iu gilt:

$$\|u - Iu\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2, \quad \|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch.$$

Beweis: Wir betrachten nur die Approximation auf \mathcal{U}_1 , d.h.

$$\sum_{K:K \subset \mathcal{U}_1} \|u - Iu\|_{L^2(K)}^2 \quad \text{und} \quad \sum_{K:K \subset \mathcal{U}_1} \|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(K)}^2$$

Wir betrachten die Fälle $\mathbf{A}_1 \in \overline{K}$ und $\mathbf{A}_1 \notin \overline{K}$ getrennt.

1. *Fall:* Betrachte ein Element K mit $\mathbf{A}_1 \in \overline{K}$. Dann ist $h_K \leq Ch^{\beta_1}$. Definiere $\hat{u} := u|_K \circ F_K$. Dann folgt

$$\|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(K)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(K)} + \|\nabla(Iu)\|_{L^2(K)}.$$

Der erste Term wird wie folgt abgeschätzt:

$$\|\nabla u\|_{L^2(K)}^2 \leq C \int_{r=0}^{h_K} r^{2(\alpha-1)} r dr \leq Ch_K^{2\alpha} \leq Ch^{2\alpha\beta_1} \leq Ch^2,$$

weil $\beta_1 > 1/\alpha$. Auch der zweite Term, $\|\nabla(Iu)\|_{L^2(K)}$, läßt sich direkt abschätzen. Bezeichnet man wieder mit $\hat{I} : C(\overline{K}) \rightarrow \mathcal{P}_1$ den Interpolationsoperator, der in den drei Eckpunkten von \hat{K} interpoliert, dann gilt

$$\|\nabla(Iu)\|_{L^2(K)}^2 \leq C \|\nabla \hat{I} \hat{u}\|_{L^2(\hat{K})}^2 \leq C \|\hat{I} \hat{u}\|_{L^\infty(\hat{K})}^2 \leq C \|\hat{u}\|_{L^\infty(\hat{K})}^2 \leq C \|u\|_{L^\infty(K)}^2 \leq Ch_K^{2\alpha} = Ch^{2\alpha\beta_1} \leq Ch^2.$$

Zusammenfassend erhalten wir $\|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(K)} \leq Ch$. Analog bemerken wir

finis 23.Stunde

$$\|u - Iu\|_{L^2(K)} \leq \|u\|_{L^2(K)} + \|Iu\|_{L^2(K)} \leq 2\|u\|_{L^\infty(K)} \sqrt{|K|} \leq Ch_K^\alpha h_K = Ch_K^{\alpha+1} \leq Ch^{(1+\alpha)\beta_1} \leq Ch^2,$$

weil $\alpha\beta_1 \geq 1$ und $\beta_1 \geq 1$. Weil die Anzahl Elemente, die an \mathbf{A}_1 anstoßen, beschränkt ist (die Schranke hängt nur von der Formregularitätskonstante γ ab—siehe (5.10)), erhalten wir also

$$\sum_{K:\mathbf{A}_1 \in \overline{K}} \|u - Iu\|_{L^2(K)}^2 \leq Ch^4, \quad \sum_{K:\mathbf{A}_1 \in \overline{K}} \|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(K)}^2 \leq Ch^2, \quad (5.14)$$

wobei die Konstante $C > 0$ nur von α und γ abhängt.

2. *Fall:* Betrachte ein Element $K \subset \mathcal{U}_1$ mit $\mathbf{A}_1 \notin \overline{K}$. Nun ist $u|_K \in H^2(K)$, und die Abschätzung aus Satz 5.1 liefert

$$\|u - Iu\|_{L^2(K)} \leq Ch_K^2 |u|_{H^2(K)}, \quad \|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(K)} \leq Ch_K |u|_{H^2(K)}.$$

Damit ergibt sich durch Summation (und die Abkürzung $d_1(x) = \text{dist}(\mathbf{A}_1, x)$)

$$\sum_{\substack{K \subset \mathcal{U}_1 \\ \mathbf{A}_1 \notin \overline{K}}} \|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(K)}^2 \leq C \sum_{\substack{K \subset \mathcal{U}_1 \\ \mathbf{A}_1 \notin \overline{K}}} h_K^2 \sum_{|\alpha|=2} \int_K |D^\alpha u|^2 \leq C \sum_{\substack{K \subset \mathcal{U}_1 \\ \mathbf{A}_1 \notin \overline{K}}} h_K^2 \int_K |d_1(x)|^{2(\alpha-2)}$$

Aus (5.12) ergibt sich $h_K \leq Ch |d_1(x)|^{1-1/\beta_1}$ für alle $x \in K$ so daß

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{K \subset \mathcal{U}_1 \\ \mathbf{A}_1 \notin \overline{K}}} \|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(K)}^2 &\leq Ch^2 \sum_{\substack{K \subset \mathcal{U}_1 \\ \mathbf{A}_1 \notin \overline{K}}} \int_K |d_1(x)|^{2(1-1/\beta_1)+2(\alpha-2)} \leq Ch^2 \int_\Omega |d_1(x)|^{-2-2/\beta_1+2\alpha} \\ &\leq Ch^2 \int_{r=0}^{\text{diam } \Omega} r^{-2-2/\beta_1+2\alpha} r dr \leq Ch^2 r^{2(\alpha-1/\beta_1)} \Big|_0^{\text{diam } \Omega} \leq Ch^2, \end{aligned}$$

weil $\beta_1 > 1/\alpha$. Analog ergibt sich

$$\sum_{\substack{K \subset \mathcal{U}_1 \\ \mathbf{A}_1 \notin \overline{K}}} \|u - Iu\|_{L^2(K)}^2 \leq C \sum_{\substack{K \subset \mathcal{U}_1 \\ \mathbf{A}_1 \notin \overline{K}}} h_K^4 |u|_{H^2(K)}^2 \leq Ch^4 \sum_{\substack{K \subset \mathcal{U}_1 \\ \mathbf{A}_1 \notin \overline{K}}} \int_K |d_1(x)|^{4(1-1/\beta_1)+2(\alpha-2)} \leq Ch^4, \quad (5.15)$$

denn $\alpha\beta_1 > 1$ und $\beta_1 \geq 1$ implizieren $4(1 - 1/\beta_1) + 2(\alpha - 2) + 1 > -1$. \square

Bemerkung 5.21 Theorem 5.20 zeigt, daß die typischen Singularitätenfunktionen mit der optimalen Konvergenzrate

$$\|u - Iu\|_{H^1(\Omega)} \leq CN^{-1/2}, \quad N = \dim S^{1,1}(\mathcal{T}(h))$$

approximiert werden können, wenn nur der Gradierungsexponent β_1 hinreichend groß gewählt wird. Mit anderen Worten: Vom Standpunkt ‘Fehler gegen Problemgröße’ ist die Approximation von Singularitätenfunktionen auf graduierten Gittern so gut wie die Approximation von H^2 -Funktionen auf quasi-uniformen Gittern. \blacksquare

Korollar 5.22 Sei $u \in H^1(\Omega)$ von der Form wie in Satz 5.9 angegeben für ein $s \geq 1$. Sei $(\mathcal{T}(h))_{h \in (0,1]}$ eine Familie von graduierten Gittern. Dann gilt: Falls die Graduierungsexponenten $\beta_j \geq 1$ die Bedingung $\beta_j > \frac{\omega_j}{\pi}$ erfüllen, dann existiert ein $C > 0$, welches unabhängig von h ist, so daß

$$\|u - Iu\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2, \quad \|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch, \quad \dim S^{1,1}(\mathcal{T}(h)) \leq Ch^{-2}.$$

Beweis: Auf $\Omega \setminus (\cup_{j=1}^J \mathcal{U}_j)$ ist $u \in H^{s+1}$ mit $s \geq 1$ (nach Voraussetzung). Damit ist Satz 5.1 anwendbar. Für die Elemente K mit $K \subset \mathcal{U}_j$ für ein $j \in \{1, \dots, J\}$ schreiben wir nach Satz 5.9 $u = u_1 + u_2$, wobei $u_1 \in H^2(\Omega)$ und u_2 eine endliche Summe von Singularitätenfunktion vom Typ (5.6) ist. Für die Approximation von u_1 greift Satz 5.1, für u_2 Satz 5.20. \square

Analoge Aussagen für Elemente höherer Ordnung können bewiesen werden:

Satz 5.23 Sei für ein $s \geq 1$ die Funktion u von der Form wie in Satz 5.9 angegeben. Sei $(\mathcal{T}(h))_{h \in (0,1]}$ eine Familie von graduierten Gittern. Falls die Graduierungsexponenten β_j so gewählt sind, daß

$$\beta_j \geq 1, \quad \beta_j > p \frac{\omega_j}{\pi} \quad j \in \{1, \dots, J\},$$

dann existiert ein $C > 0$, welches nur von u, p, β, γ abhängt, mit folgenden Eigenschaften: Es existiert ein $v \in S^{p,1}(\mathcal{T}(h)) \cap H_0^1(\Omega)$ mit

$$\|u - v\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\min\{p,s\}+1}, \quad \|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\min\{p,s\}}, \quad \dim S^{p,1}(\mathcal{T}(h)) \leq Ch^{-2}.$$

Bemerkung 5.24 Satz 5.23 zeigt, daß auch bei Ansätzen höherer Ordnung die optimale Konvergenzrate erzielt werden kann, d.h. die Konvergenzrate (im Maß: "Fehler gegen Problemgröße") ist der Approximation einer Funktion $\tilde{u} \in H^{s+1}(\Omega)$ auf quasi-uniformen Gittern vergleichbar. \blacksquare

Zur Motivation des folgenden Kapitels machen wir noch folgende Beobachtungen:

- die Konstruktion eines graduierten Gitters ist nicht einfach
- wir benötigen (zumindest Schranken für) die Singularitätenexponenten, um die Graduierungsexponenten β_j richtig zu wählen. Im Fall des hier vorgestellten Poissonproblems ist dies einfach (im Fall des Dirichletproblems sind die Singularitätenfunktionen mit (5.6) explizit bekannt!)—in komplexeren Problemen, z.B. im Fall der Elastizitätsgleichungen, ist zwar die Struktur der Singularitätenfunktion (die Komponenten verhalten sich ebenfalls typischerweise wie $r^\alpha \Phi(r, \varphi)$), nicht aber der Parameter α (welcher ja wesentlich ist für die Wahl des Graduierungsexponenten).
- Graduierte Gitter liefern die optimale Konvergenzrate für eine ganze Klasse von Problemen—im konkret gestellten Einzelfall kann es natürlich sein, daß, um eine gegebene Genauigkeit zu erreichen, ein wesentlich gröberes Gitter ausreicht. M.a.W.: Es ist von Interesse, Strategien zu entwickeln, die die möglichst effiziente Gitter für ein gegebenes Problem erzeugen. Adaptive Algorithmen, die dies leisten, werden im folgenden Kapitel diskutiert.