

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung in partielle Differentialgleichungen</b>	<b>5</b>
1.1	Terminologie und Typeneinteilung skalarer Differentialgleichungen . . . . .	5
1.2	Beispiele . . . . .	7
1.2.1	Elliptische PDEs . . . . .	7
1.2.2	Parabolische PDEs . . . . .	7
1.2.3	Hyperbolische PDEs . . . . .	8
1.3	Darstellung der Numerik in der Simulation . . . . .	8
1.4	Korrekte Stellung . . . . .	9
<b>1</b>	<b>FEM in 1D</b>	<b>1</b>
1.1	Variationsformulierung . . . . .	1
1.2	Klassische FEM in 1D . . . . .	3
1.3	Analyse der 1D FEM . . . . .	5
1.4	Beispiele andere Variationsformulierungen . . . . .	6
1.4.1	wesentliche Randbedingungen (Dirichletbedingungen) . . . . .	6
1.4.2	nichtsymmetrische Bilinearformen . . . . .	7
1.4.3	natürliche Randbedingungen (Neumannproblem) . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Abstrakte FEM</b>	<b>9</b>
2.1	Funktionalanalytische Grundbegriffe . . . . .	9
2.2	Variationsprobleme: Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	11
2.3	Abstrakte FEM . . . . .	14
2.3.1	Der koerzive, symmetrische Fall . . . . .	15
2.3.2	Bemerkungen zur Realisierung . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Sobolevräume</b>	<b>17</b>
3.1	Sobolevräume und schwache Ableitungen . . . . .	17
3.2	Lipschitzgebiete und Sobolevräume auf Lipschitzgebieten . . . . .	19
3.3	Einbettungssätze . . . . .	21
3.3.1	Sobolevsche Einbettungssätze . . . . .	21
3.3.2	Kondrachovsche Einbettungssätze . . . . .	22
3.4	Spursatz . . . . .	23
3.5	Gaußscher Satz — partielle Integration . . . . .	25
<b>4</b>	<b>konforme FEM in 2D</b>	<b>26</b>
4.1	Variationsformulierung beim homogenen Dirichletproblem . . . . .	26
4.2	Variationsformulierung bei gemischten Randbedingungen . . . . .	27
4.3	FEM in 2D: Dreiecksgitter . . . . .	28
4.3.1	Dreiecksgitter und Basisfunktionen . . . . .	28
4.3.2	Assemblieren . . . . .	29
4.3.3	Anmerkungen zum Assemblieren . . . . .	31
4.4	FEM in 2D: Vierecksgitter . . . . .	32
4.5	Elemente höherer Ordnung . . . . .	33
4.5.1	Elemente höherer Ordnung in 1D . . . . .	33

4.5.2	Elemente höherer Ordnung in 2D . . . . .	34
4.6	Gekrümmte Elemente . . . . .	38
4.7	Hängende Knoten . . . . .	41
4.8	inhomogene Dirichlet Randbedingungen . . . . .	42
4.8.1	Variationsformulierung . . . . .	42
4.8.2	abstrakte FEM . . . . .	42
4.8.3	konkrete Realisierung von Dirichletrandbedingungen . . . . .	43
4.9	Neumannproblem ohne Absolutterm . . . . .	45
4.9.1	Implementierung von Neumannproblemen . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Konvergenzanalyse der FEM</b> . . . . .	<b>47</b>
5.1	Formreguläre Gitter . . . . .	47
5.2	Regularitätsaussagen für das elliptische Modellproblem . . . . .	49
5.2.1	1D . . . . .	49
5.2.2	2D glatte Ränder oder konvexe Gebiete . . . . .	50
5.2.3	Regularitätsaussagen in Polygonen . . . . .	50
5.3	Approximation auf angepaßten Gittern . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Fehlerschätzung und Adaptivität</b> . . . . .	<b>59</b>
6.1	Notation und der Clémentinterpolant . . . . .	59
6.2	Ein residualer Fehlerschätzer . . . . .	62
6.3	Ein adaptiver Algorithmus . . . . .	67
6.3.1	Weitere Verfeinerungsalgorithmen . . . . .	69
6.4	Ein äquilibrierter Fehlerschätzer . . . . .	72
6.4.1	Fehlerschätzer . . . . .	72
6.4.2	Wahl der Flußfunktionen $g_K$ . . . . .	74
6.5	Mittelungsbasierte Fehlerschätzer . . . . .	78
6.6	Konvergenz von adaptiven Verfahren . . . . .	83
<b>7</b>	<b>FEM für gemischte Probleme</b> . . . . .	<b>87</b>
7.1	Variationsformulierungen . . . . .	87
7.2	FEM: Petrov-Galerkin Methoden . . . . .	90
7.3	Sattelpunktprobleme . . . . .	92
7.3.1	Motivation . . . . .	92
7.3.2	abstrakte Existenztheorie für Sattelpunktprobleme . . . . .	93
7.3.3	FEM für Sattelpunktprobleme (gemischte Methoden) . . . . .	95
7.4	Stokesproblem . . . . .	98
7.4.1	setting . . . . .	98
7.4.2	FEM . . . . .	99
7.5	weitere Bemerkungen zu gemischten Methoden . . . . .	104
7.6	Probleme mit Gårding-Ungleichung . . . . .	104
7.7	$H(\text{div})$ -konforme Elemente . . . . .	108
7.7.1	Der Raum $H(\text{div})$ . . . . .	108
7.7.2	Ein einfaches Modellproblem . . . . .	109
7.7.3	Raviart-Thomas Elemente . . . . .	110
7.7.4	Interpolationsfehler und Piolatransformation . . . . .	112
7.7.5	Konvergenz . . . . .	113
7.7.6	Raviart-Thomas Elemente höherer Ordnung . . . . .	114
<b>8</b>	<b>DG-FEM</b> . . . . .	<b>118</b>
8.1	Motivation . . . . .	118
8.2	DG für Transportprobleme . . . . .	119
8.3	DG für elliptische Probleme . . . . .	122
8.4	DG für singular gestörte Probleme . . . . .	125

<b>9</b>	<b>Eigenwertprobleme</b>	<b>127</b>
9.0.1	FEM Diskretisierung . . . . .	133
9.0.2	Konvergenz der Eigenwerte . . . . .	134
9.0.3	Konvergenz der Eigenvektoren . . . . .	136
9.0.4	Bemerkungen . . . . .	139
9.0.5	ein operatortheoretischer Zugang . . . . .	139
9.1	Weyl's asymptotische Formel . . . . .	142
9.1.1	Rechtecke . . . . .	142
9.1.2	Monotonieeigenschaften . . . . .	142
9.1.3	Beweis des Satzes von Weyl . . . . .	144
9.1.4	Can you hear the shape of a drum? . . . . .	145
9.2	Bemerkungen zum Lösen von algebraischen EWP's . . . . .	147
9.2.1	klassische Techniken . . . . .	147
9.2.2	vorkonditionierte Gradientenverfahren . . . . .	148
<b>10</b>	<b>parabolische Probleme</b>	<b>149</b>
10.1	Variationsformulierung im Ort . . . . .	150
10.2	Semidiskretisierung im Ort . . . . .	152
10.3	Volldiskrete Verfahren . . . . .	155
10.3.1	das implizite Eulerverfahren . . . . .	156
10.3.2	das $\theta$ -Schema . . . . .	160
10.3.3	Stabilität des $\theta$ -Schemas—die CFL-Bedingung . . . . .	160
10.4	Bemerkungen zum Lösungsbegriff . . . . .	164
10.5	Variationelle Formulierungen parabolischer AWP's . . . . .	166
10.5.1	Das Bochnerintegral . . . . .	166
10.5.2	Die Räume $H^1(a, b; X)$ und $W(a, b; X; Y)$ . . . . .	168
10.5.3	Evolutionstripel—Gelfand Dreier . . . . .	169
10.5.4	Die Wärmeleitungsgleichung als Evolutionsgleichung . . . . .	171
10.6	nichtglatte Anfangsdaten . . . . .	176
10.6.1	Glättungseigenschaft . . . . .	176
10.6.2	Reduktion auf die Analyse von $\rho$ . . . . .	178
10.6.3	Semidiskrete Konvergenzresultate mit kompatiblen Anfangsdaten . . . . .	180
10.6.4	Zeitdiskretisierung . . . . .	182
10.7	Discontinuous Galerkin . . . . .	186
<b>11</b>	<b>lineare hyperbolische Gleichungen</b>	<b>191</b>
11.0	hyperbolische Gleichungen . . . . .	191
11.1	klassische Differenzenverfahren am Beispiel der Advektionsgleichung . . . . .	193
11.1.1	Vorbemerkungen zu finiten Differenzenverfahren . . . . .	193
11.1.2	FD für die Advektionsgleichung . . . . .	193
11.1.3	Upwinding . . . . .	195
11.2	von Neumann-Analyse . . . . .	199
11.2.1	Stabilitätsanalyse des Leap Frog Verfahrens . . . . .	201
11.3	Dissipative Verfahren . . . . .	202
11.3.1	Vorbetrachtung: . . . . .	202
11.3.2	Dissipative Verfahren . . . . .	204
11.4	Splittingmethoden/fractional step methods . . . . .	208
11.4.1	Einführung: der ODE-Fall . . . . .	208
11.4.2	Beispiele . . . . .	209
11.4.3	IMEX . . . . .	210
11.5	Raum-Zeit-DG . . . . .	212
11.6	DG und Finite Volumenmethoden im Ort—RK in der Zeit . . . . .	216
11.7	klassische finite Volumenverfahren . . . . .	219
11.7.1	Godunov-Verfahren . . . . .	221
11.7.2	Approximative Riemannlöser . . . . .	223
11.7.3	verbesserte Roe-Löser . . . . .	224

11.7.4	Lineare Systeme . . . . .	227
11.7.5	Roe-Löser für nichtlineare Probleme . . . . .	229
11.7.6	Monotone Verfahren und der Satz von Lax-Wendroff . . . . .	230
<b>A</b>	<b>Lebesgueintegration</b>	<b>235</b>
<b>B</b>	<b>Sobolevsche Einbettungssätze</b>	<b>237</b>
<b>C</b>	<b>Satz von Rellich: <math>H^1</math> kompakt in <math>L^2</math></b>	<b>239</b>
<b>D</b>	<b>Äquivalenz von Spurnorm <math>H^{1/2}</math> und Aronstein-Slobodeckij-Norm</b>	<b>240</b>
<b>E</b>	<b>Sattelpunktprobleme und inf-sup Bedingung</b>	<b>241</b>
E.1	Beweise . . . . .	243
E.2	Bemerkungen zum Clémentinterpolanten . . . . .	245
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>248</b>

# Kapitel 1

## Einführung in partielle Differentialgleichungen

### 1.1 Terminologie und Typeneinteilung skalarer Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung, bei der eine *Funktion*  $u$  gesucht wird. Dabei können neben  $u$  auch Ableitungen von  $u$  auftauchen. Ist  $u$  eine Funktion *einer* Veränderlichen  $t$ , so spricht man von einer *gewöhnlichen Differentialgleichung* („ODE“). Die Aufgabe lautet dann:

Finde  $u : t \mapsto u(t)$  so daß

$$\Phi(t, u, u', \dots, u^{(k)}) = 0. \quad (1.1)$$

Die höchste Ableitungsordnung  $k \in \mathbb{N}_0$  heißt die *Ordnung* der Differentialgleichung. Die Differentialgleichung (1.1) heißt *linear*, falls die Funktion  $\Phi$  linear in den Argumenten  $u, u', \dots, u^{(k)}$  ist.

Lineare Differentialgleichungen erfüllen das Superpositionsprinzip:

**Lemma 1.1** Sei  $\Phi$  linear. Falls  $u, v$  Lösungen von (1.1) sind, dann sind auch  $u + \lambda v$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  Lösungen von (1.1).

**Beweis:** Übung ■

Ist  $u$  eine Funktion mehrerer Veränderlicher  $x_1, \dots, x_n$ , so kann man Gleichungen für die unbekannte Funktion  $u$  formulieren, in denen  $u$  und ihre partiellen Ableitungen

$$\partial_i u := \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \partial_{ij} u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \partial_{ijk} u := \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \quad (1.2)$$

auftreten. man spricht dann von den *partiellen Differentialgleichungen* („PDE“)

$$\Phi(\underline{x}, \partial_1 u, \dots, \partial_n u, \partial_{11} u, \dots) = 0, \quad (1.3)$$

wobei die maximale auftretende Ableitungsordnung wieder die *Ordnung der Differentialgleichung* angibt. Ist  $\Phi$  linear in den Argumenten  $u, \partial_1 u, \dots$ , so heißt (1.3) *lineare partielle Differentialgleichung*. Die allgemeiner PDE zweiter Ordnung hat die Form

$$\Phi(\underline{x}, \partial_i u, \partial_{ij} u) = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\underline{x}) \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^n b_i(\underline{x}) \partial_i u + c(\underline{x}) u - f(\underline{x}). \quad (1.4)$$

Der Operator

$$\Phi_2(\underline{x}, \partial_{ij} u) = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\underline{x}) \partial_{ij} u \quad (1.5)$$

heißt *Hauptteil* der PDE (1.4).

Ist  $u \in C^2$ , so gilt nach dem Satz von Schwarz

$$\partial_{ij}u = \partial_{ji}u. \quad (1.6)$$

Somit nehmen wir im folgenden an, daß die Koeffizienten  $a_{ij}$  in (1.4) die Bedingung

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, n\}, \text{ für alle } x \quad (1.7)$$

erfüllen.

**Übung 1.2** Zeigen Sie unter der Annahme  $u \in C^2$ , daß (1.7) o. B. d. A. angenommen werden kann.  $\square$

Die symmetrische Matrix  $A(x)$  mit den Einträgen  $A_{ij}(x) := a_{ij}(x)$  hat damit  $n$  reelle Eigenwerte  $\lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \dots \leq \lambda_n(x)$ .

Entscheidend für die Eigenschaften wie Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, korrekte Stellung und für die Wahl von numerischen Verfahren ist der Typ der PDE.

**Definition 1.3** Die lineare PDE (1.4) heißt

1. elliptisch im Punkt  $\underline{x}$ , falls alle Eigenwerte  $\lambda_i(\underline{x}) \neq 0$  und das gleiche Vorzeichen haben (d.h.  $0 < \lambda_1(\underline{x}) \leq \dots \leq \lambda_n(\underline{x})$  oder  $\lambda_1(\underline{x}) \leq \dots \leq \lambda_n(\underline{x}) < 0$ ),
2. hyperbolisch im Punkt  $\underline{x}$ , falls alle Eigenwerte  $\lambda_i(\underline{x}) \neq 0$  und genau  $n - 1$  Eigenwerte dasselbe Vorzeichen haben (d.h.  $\lambda_1(\underline{x}) < 0 < \lambda_2(\underline{x}) \leq \dots \leq \lambda_n(\underline{x})$  oder  $\lambda_1(\underline{x}) \leq \dots \leq \lambda_{n-1}(\underline{x}) < 0 < \lambda_n(\underline{x})$ ),
3. parabolisch im Punkt  $\underline{x}$ , falls genau ein Eigenwert gleich Null ist, alle anderen Eigenwerte das gleiche Vorzeichen haben und  $\text{rang}(A(x), b(x)) = n$  ist.

Die PDE (1.4) heißt elliptisch/hyperbolisch/parabolisch in  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , falls sie es für jedes  $\underline{x} \in \Omega$  ist.

**Bemerkung 1.4** 1. Eine allgemeine PDE zweiter Ordnung muß nicht unbedingt einen der drei Typen haben.

2. Der Typ der Gleichung hängt vom betrachteten Punkt  $\underline{x}$  ab.
3. Der Typ ist invariant unter Koordinatenwechsel.

**Übung 1.5** Zeigen Bemerkung 1.4 3.

**Beweis:** Gehen Sie wie folgt vor:

Sei  $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  die Transformation glatt und invertierbar (d.h.  $\varphi$  ist bijektiv;  $S(x) := \frac{\partial \varphi}{\partial x} \in C^1$  und  $S(x)$  ist invertierbar). Definieren Sie  $\tilde{u}(\tilde{x}) := (u \circ \varphi^{-1})(\tilde{x})$ , d.h.  $\tilde{u} \circ \varphi = u$ . Rechnen Sie nach:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k} \tilde{u} S_{ki}$$

und damit

$$\sum_{i,j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) a_{ij} = \sum_{k,l} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_l} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k} \tilde{u} \right) \tilde{a}_{kl}$$

mit  $\tilde{a}_{kl}$  gegeben durch  $\tilde{A} = SAS^T$ . ■

## 1.2 Beispiele

### 1.2.1 Elliptische PDEs

Typischer Vertreter der elliptischen PDEs ist die *Poisson'sche Gleichung*

$$-\Delta u = f, \quad \Delta := \sum_{i=1}^n \partial_{ii} \quad (1.8)$$

sowie der allgemeine Fall

$$-\nabla \cdot (A(x)\nabla u) = f, \quad (1.9)$$

falls  $A(x)$  für jedes  $x$  symmetrisch und positiv definit ist.

**Bemerkung 1.6** Man sagt: (1.9) ist eine Gleichung in Divergenzform.  $\square$

**Übung 1.7** Prüfen Sie, daß (1.9) elliptisch im Sinne von Definition 1.3 ist, falls  $A \in C^1$ .  $\square$

Elliptische Differentialgleichungen haben eindeutige Lösungen, falls zusätzlich zur Gleichung noch Randbedingungen gestellt werden.

**Beispiel 1.8** Das elliptische Randwertproblem:

Finde  $u$ , so daß

$$\begin{aligned} -u'' &= f \quad \text{auf } (0, 1) \\ u(0) &= g_0, \quad u(1) = g_1 \end{aligned}$$

hat für  $f \in C([0, 1])$ ,  $g_0, g_1 \in \mathbb{R}$  eine eindeutige Lösung.  $\square$

**Übung 1.9** Können die Randwertprobleme

$$\begin{array}{ll} -u'' = f & \text{und} \quad -u'' = f \\ u(0) = g_0, \quad u'(1) = g_1 & u'(0) = g_0, \quad u'(1) = g_1 \end{array}$$

für jedes  $f \in C([0, 1])$  und  $g_0, g_1 \in \mathbb{R}$  eindeutig gelöst werden?  $\square$

### 1.2.2 Parabolische PDEs

Bei parabolischen und hyperbolischen Gleichungen ist eine Veränderliche herausgehoben — sie hat bei Gleichungen, die aus der Physik oder den Ingenieurwissenschaften kommen, meist die Rolle der Zeit und wird deshalb mit  $t$  bezeichnet.

Typischer Vertreter der parabolischen Gleichungen ist die *Wärmeleitungsgleichung*. Sei  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $t \in (0, T)$

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{auf } (0, T) \times \Omega. \quad (1.10)$$

Parabolische Gleichungen werden typischer als Anfangsrandwertproblem gestellt, d.h.

- es wird für  $t = 0$  gefordert:

$$u(0, x) = u_0(x) \quad u_0 \text{ gegeben}$$

- für alle  $t > 0$  werden Randbedingungen für  $u(t, \cdot)$  gefordert, z.B.  $u(t, x) = 0$  für alle  $t > 0$  und alle  $x \in \partial\Omega$ .

**Übung 1.10** Betrachte das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{auf } (0, T) \times (0, 1) \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{für alle } x \in (0, 1) \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & \text{für alle } t \in (0, T) \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, daß  $u_t - u_{xx}$  parabolisch ist.  
 (b) Lösen Sie das ARWP für  $u_0(x) := \sin(n\pi x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  
 (c) Geben Sie eine Lösungsformel für allgemeine  $u_0$  an (Hinweis: Fourierreihe).  
 (d) Wiederholen Sie (a)-(c) für die „Rückwärtswärmeleitungsgleichung“:

$$\begin{cases} u_t + u_{xx} = 0 & \text{auf } (0, T) \times (0, 1) \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{für alle } x \in (0, 1) \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 & \text{für alle } t \in (0, T) \end{cases}$$

□

### 1.2.3 Hyperbolische PDEs

Typischer Vertreter ist die *Wellengleichung*

$$u_{tt} - c\Delta u = f \quad \text{auf } (0, T) \times \Omega. \quad (1.11)$$

Übliche Formulierungen als Randwertproblem sind

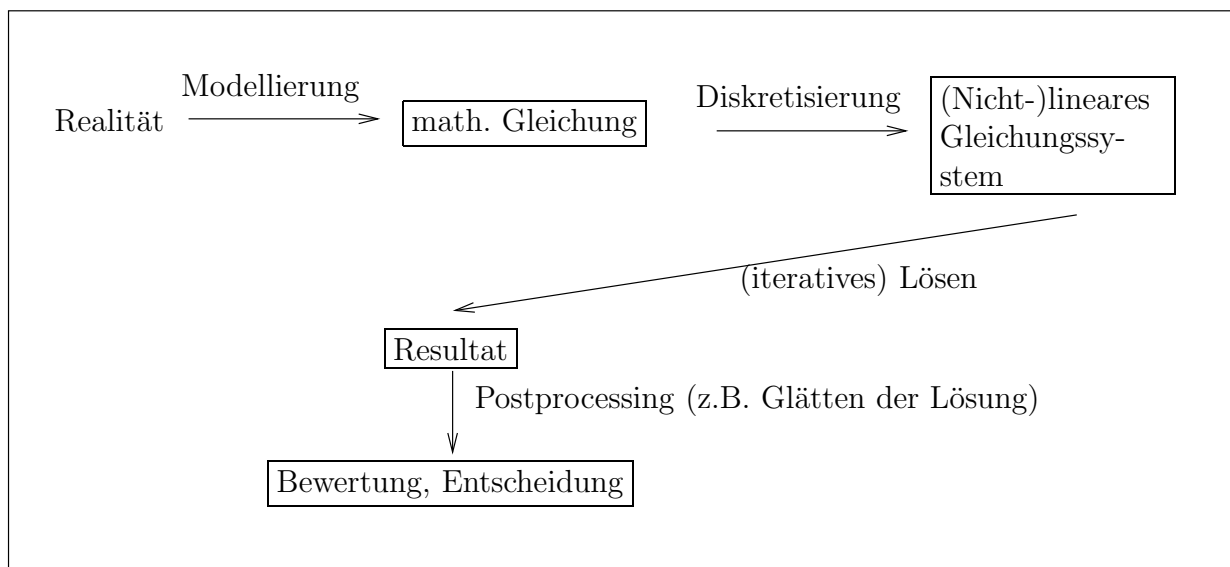
- für  $t = 0$  und gegebene  $u_0, v$  fordern wir

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) &= v(x) \end{aligned}$$

- für alle  $t > 0$  werden Randbedingungen für  $(t, \cdot)$  gefordert, z.B.

$$u(t, x) = 0 \quad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \partial\Omega.$$

## 1.3 Darstellung der Numerik in der Simulation



In jedem Schritt („Modellierung“, „Diskretisierung“, „iterativ Lösen“, „Postprocessing“) werden Fehler gemacht, die kontrolliert werden sollten. In der Numerik werden typischerweise nur die Fehler untersucht, die durch „Diskretisierung“ und „iterativ Lösen“ gemacht werden.



## 1.4 Korrekte Stellung

Angesichts der vielen „Fehler“, die im Simulationsprozess

Realität → Bewertung

auftreten, kann man vernünftige Ergebnisse nur erwarten, wenn „kleine Veränderungen/ Störungen in den Eingabedaten kleine Änderungen im Ergebnisse erzeugen“, d.h. die Lösung hängt stetig von den Eingabedaten ab. Erfüllt das Problem diese Forderungen, so heißt es *korrekt gestellt* (im Sinne von Hadamard).

# Einführung in FEM

- FEM ist die meistverwendete Diskretisierungstechnik für (elliptische) PDEs
- Einsatzgebiete:
  - lineare Festkörpermechanik (Elastizitätstheorie)
  - nichtlineare Festkörpermechanik und Bruchmechanik
  - Strömungsmechanik
  - Resonanzprobleme (Eigenfrequenzen von Körpern)
  - Elektrostatik und -dynamik
- es gibt *vielen* kommerziellen FEM-Codes
- Gründe für Popularität von FEM:
  - geometrische Flexibilität: auch komplexe Geometrien können behandelt werden
  - basiert auf Variationsformulierungen/Minimierungstechniken → ist “physikalisch”
  - mathematisch fundiert für vergleichsweise realistische Szenarien

## ein 1D Modellproblem

*Ziel:* bestimme Gleichung für die Deformation eines Stabes unter (Längs-)kräften (vgl. Fig. 1.1).

- die Deformation wird durch die *Verschiebung*  $u(x)$  beschrieben: der gesamte Querschnitt bei  $x$  wird durch die Krafteinwirkungen an die Stelle  $x + u(x)$  verschoben
- $A(x)$  = Querschnittsfläche bei  $x$
- an der Stelle  $x$  wirkt eine (längenbezogene) Volumen- (oder Oberflächen-)kraft  $T(x)$
- an der Stelle  $x$  wirkt außerdem eine (längebezogene) Rückstellkraft von der Art einer Feder:  $T_R(x) = -c(x)u(x)$ , ( $c(x)$  = längenbezogene Federkonstante, Kraft proportional zu Auslenkung  $u(x)$ )
- an der Stelle  $x$  wirken elastische Kräfte  $F(x)$  des Materials (s.u.)

das “klassische” Vorgehen verwendet 2 Zutaten: Grundgleichungen (“first principles”) und “konstitutive Gesetze” (Materialgesetze). Die Grundgleichung hier ist das Prinzip des Kräftegleichgewichtes, das konstitutive Gesetz das Hookesche Gesetz.

Kräftegleichgewicht fordert für ein kleines Kontrollvolumen beschrieben durch  $(x, x + \Delta x)$ :

$$F(x + \Delta x) - F(x) + T(x)\Delta x - c(x)u(x)\Delta x + \text{Terme höherer Ordnung in } \Delta x = 0$$

Im Limes  $\Delta x \rightarrow 0$  erhält man damit

$$-F'(x) + c(x)u(x) = T(x)$$

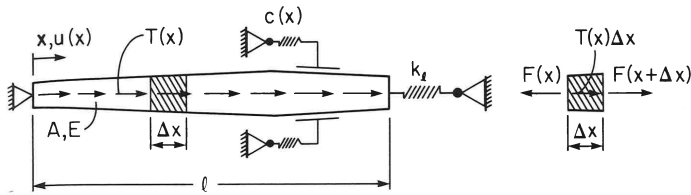


Abbildung 1.1: Stabmodell

Das konstitutive Gesetz legt eine Beziehung zwischen  $F(x)$  und  $u(x)$  fest. Das Hookesche Gesetz besagt:

$$F(x) = \sigma(x)A(x)$$

mit der *Spannung*  $\sigma(x)$  und der Querschnittsfläche  $A(x)$  (hier wird angenommen, dass die Spannung auf dem Querschnitt konstant bleibt...). Weiters gilt mit der *Dehnung*  $\varepsilon(x) := u'(x)$  und dem *Young-Modul*  $E > 0$  das Hookesche Gesetz

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x) = Eu'(x)$$

Damit ergibt sich die Gleichung

$$-(A(x)Eu'(x))' + c(x)u(x) = T(x)$$

Im Fall eines eingespannten Stabes ist  $u(0) = u(1) = 0$ .

Für  $c \equiv 0$  und  $A(x) = \text{const.}$  ergibt sich damit

$$-u'' = f \quad \text{auf } \Omega = (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

# Kapitel 1

## FEM in 1D

Um die die FEM (Finite Element Method) einzuführen, betrachten wir das Modellproblem

$$-u'' = f \quad \text{auf } \Omega := (0, 1) \quad (1.1a)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (1.1b)$$

### 1.1 Variationsformulierung

Eine klassische Lösung von (1.1) würde fordern:  $u \in C^2(0, 1) \cap C([0, 1])$ . Jedoch ist es zweckmäßig, den Lösungsbegriff für (1.1) zu erweitern. Einige Gründe hierfür sind:

- praktisch relevant sind z.B. *stückweise* stetige rechte Seiten  $f$ ; dann kann  $u$  nicht in  $C^2$  sein
- (1.1) ist die Euler-Lagrange Gleichung einer Minimierungsaufgabe, bei der nur  $u' \in L^2(\Omega)$  gefordert werden muß, um sinnvoll gestellt zu sein. Für viele physikalischen Probleme, die auf elliptische Probleme führen, ist die Minimierungsaufgabe die "natürliche" und die Euler-Lagrange Gleichungen werden nur aus diesen (unter Regularitätsannahmen) hergeleitet.

*Variationsformulierung:* Sei  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ . Dann folgt für eine klassische Lösung  $u$  von (1.1):

$$\int_{\Omega} -u''v = \int_{\Omega} fv$$

und durch partielle Integration

$$\int_{\Omega} u'v' = \int_{\Omega} fv.$$

Da  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  beliebig gewählt war, erhalten wir, daß  $u$  folgende Bedingung erfüllt:

$$\int_{\Omega} u'v' =: B(u, v) = l(v) := \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.2)$$

Wir beobachten, daß  $B$  eine *Bilinearform* ist und  $l$  eine *Linearform* (siehe Def. 2.4, 2.3). Weiter bemerken wir:

1. Während die klassische Formulierung  $u \in C^2(\Omega)$  fordert, ist (1.2) bereits sinnvoll definiert, wenn z.B.  $u' \in L^2(\Omega)$ . Dies motiviert, den Raum

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid u' \in L^2(\Omega)\} \quad (1.3)$$

zu definieren (genauere Definition des Ableitungsbegriffs und von  $H^1$  folgt unten). Wir nennen dann ein  $u \in H^1(\Omega)$ , welches (1.2) erfüllt, eine *schwache Lösung*.

2. Damit die Linearform  $l(\cdot)$  sinnvoll definiert ist, reicht bereits  $f \in L^2(\Omega)$

3. (1.2) wurde nur aus (1.1a) hergeleitet. Um die Randbedingung (1.1b) zu berücksichtigen, wird der Raum

$$H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) \mid u(0) = u(1) = 0\} \quad (1.4)$$

eingeführt.

Damit erfüllt eine klassische Lösung  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  von (1.1) folgende Aufgabe:

$$\text{Finde } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.d. } \quad B(u, v) = l(v) \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.5)$$

Wie wir unten (Satz 1.6) sehen werden, ist  $C_0^\infty(\Omega)$  dicht im Raum  $H_0^1(\Omega)$ , so daß sich (1.5) sogar auf alle Testfunktionen  $v \in H_0^1(\Omega)$  ausdehnen läßt<sup>1</sup>, d.h. eine klassische Lösung  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  erfüllt die sog. *schwache Formulierung* von (1.1):

$$\text{Finde } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.d. } \quad B(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.6)$$

(1.2) bzw. (1.6) stellt eine Verallgemeinerung des Lösungsbegriffs für (1.1) dar, denn es gilt

**Proposition 1.1** *Sei  $u$  Lösung von (1.6) und gelten zusätzlich die Regularitätsannahmen  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  und  $f \in C(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ . Dann löst  $u$  auch (1.1) im klassischen Sinn.*

**Beweis:** Übung. □

Wir klären nun den Ableitungsbegriff.

**Definition 1.2** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  ein (offenes) Intervall. Sei  $u \in L^2(\Omega)$ . Falls es ein  $v \in L_{loc}^1(\Omega)$  gibt, s.d.*

$$\int_{\Omega} u\varphi' = - \int_{\Omega} v\varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.7)$$

so heißt  $v$  die schwache (distributionelle) Ableitung von  $u$ . Wir schreiben  $u' = v$ .

**Satz 1.3** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  offenes Intervall. D.g.:*

- (i) *Falls  $u \in L^2(\Omega)$  eine schwache Ableitung hat, dann ist sie eindeutig.*
- (ii)  *$u \in C^1(\overline{\Omega}) \implies$  die schwache Ableitung  $u'$  existiert und stimmt mit der klassischen Ableitung überein.*
- (iii) *Falls  $u \in C_{stückw.}^1 \cap C(\overline{\Omega})$ , d.h. existiert eine Zerlegung  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  mit  $\Omega = (x_0, x_n)$  und  $u|_{(x_i, x_{i+1})} \in C^1([x_i, x_{i+1}])$  für alle  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . D.g.: die schwache Ableitung  $u'$  existiert und stimmt auf jedem Teilintervall  $(x_i, x_{i+1})$  mit der klassischen Ableitung überein.*

**Beweis:** Übung □

Damit ist  $H^1(\Omega)$  sinnvoll definiert als der Teilraum von  $L^2(\Omega)$ , dessen Elemente schwache Ableitungen haben, die ebenfalls in  $L^2(\Omega)$  sind. Wir versehen den Vektorraum  $H^1(\Omega)$  mit der Norm

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 := \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u'\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (1.8)$$

Weiters führen wir die  $H^1$ -Seminorm  $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$  ein:

$$|u|_{H^1(\Omega)} := \|u'\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.9)$$

Um den Raum  $H_0^1(\Omega)$  richtig zu definieren, müssen wir wissen, daß (im vorliegenden 1D-Fall) Funktionen aus dem Raum  $H^1(\Omega)$  stetig auf  $\overline{\Omega}$  sind:

**Satz 1.4** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  offenes, beschränktes Intervall. D.g.:  $H^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ . Zudem existiert eine Konstante  $C > 0$  s.d.*

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (1.10)$$

---

<sup>1</sup>man führe die Argumente aus!

**Beweis:** Siehe [5, Prop. 1.4.6]. Siehe auch Theorem 1.6. □

**Bemerkung 1.5**  $H^1$ -Funktionen sind eigentlich  $L^2$ -“Funktionen”, d.h. Äquivalenzklassen von Funktionen. Satz 1.4 ist so zu verstehen, daß es in der Äquivalenzklasse einen stetigen Repräsentanten gibt. Im vorliegenden 1D Fall ist dieser Repräsentant sogar absolutstetig.

**Satz 1.6** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  offenes, beschränktes Intervall. D.g.:

(i)  $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$  ist ein abgeschlossener Teilraum.

(ii)  $\forall x, y \in \Omega$  gilt  $|u(x) - u(y)| \leq \sqrt{|x - y|} \|u'\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\text{diam } \Omega} \|u'\|_{L^2(\Omega)}$

(iii)  $\exists C_\Omega > 0$  s.d.

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Inbesondere ist die  $H^1$ -Seminorm eine (zur  $H^1$ -Norm) äquivalente Norm auf  $H_0^1(\Omega)$

(iv)  $C^\infty(\bar{\Omega})$  ist dicht in  $H^1(\Omega)$

(v)  $C_0^\infty(\bar{\Omega})$  ist dicht in  $H_0^1(\Omega)$

(vi)  $H^1(\Omega)$  und  $H_0^1(\Omega)$  sind vollständige Räume.

**Beweis:** (iv): Übung. (i)–(iii): ebenfalls Übung (Hinweis: verwenden Sie (iv)). □

**Bemerkung 1.7** •  $H^1(\Omega)$  ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle u, v \rangle_{H^1} := \int_\Omega u'v' + \int_\Omega uv$ .

•  $H_0^1(\Omega)$  ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$  oder  $\langle u, v \rangle_{H_0^1} := \int_\Omega u'v'$ .

## 1.2 Klassische FEM in 1D

Existenz und Eindeutigkeit der Lösung  $u$  von (1.6) werden noch sehen<sup>2</sup>. Die FEM ist eine Approximationstechnik, um diese Lösung zu approximieren.

Sei  $\Omega = (0, 1)$  unterteilt in  $M$  Intervalle  $K_i = (x_i, x_{i+1})$ ,  $i = 0, \dots, M - 1$ , wobei natürlich  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = 1$ . Die Intervalle  $K_i$  heißen *Elemente*, die Punkte  $x_i$  *Knoten*. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{T} := \{K_i \mid i = 0, \dots, M - 1\}$  das *Gitter* und  $h_i := x_{i+1} - x_i = \text{diam } K_i$  ist die Elementgröße. Wir setzen

$$S^{1,1}(\mathcal{T}) := \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_K \in \mathcal{P}_1 \quad \forall K \in \mathcal{T}\} \quad (1.11)$$

$$S_0^{1,1}(\mathcal{T}) := S^{1,1}(\mathcal{T}) \cap H_0^1(\Omega) \quad (1.12)$$

**Bemerkung 1.8** Da  $H^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$  ist, ist  $S^{1,1}(\mathcal{T})$  gerade der Raum der stetigen Funktionen, die auf jedem Teilintervall ein Polynom vom Grad 1 sind. Weiters ist  $S_0^{1,1}(\mathcal{T})$  gerade der Raum derjenigen  $S^{1,1}(\mathcal{T})$ -Funktionen, die in den Endpunkten  $x_0, x_M$  verschwinden.

Die Standardbasis des  $S^{1,1}(\mathcal{T})$  wird von den “Hutfunktionen” gebildet:

$$S^{1,1}(\mathcal{T}) = \text{span}\{\varphi_i \mid i = 0, \dots, M\} \quad (1.13)$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_i} & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.14)$$

Offensichtlich ist  $\dim S^{1,1}(\mathcal{T}) = M + 1$  und eine Basis des Raums  $S_0^{1,1}(\mathcal{T})$  ist  $\{\varphi_i \mid i = 1, \dots, M - 1\}$  mit  $\dim S_0^{1,1}(\mathcal{T}) = M - 1 =: N$ .

---

<sup>2</sup>im konkreten Fall folgt dies sofort aus dem Rieszschen Darstellungssatz:  $B(\cdot, \cdot)$  ist gerade das  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1}$  Skalarprodukt auf dem Hilbertraum  $H_0^1(\Omega)$  und für  $f \in L^2(\Omega)$  ist  $l(\cdot)$  ein stetiges lineares Funktional auf  $H_0^1(\Omega)$

In der klassischen FEM wird die Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  von (1.6) durch die Lösung  $u_N \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})$  der folgende Aufgabe approximiert:

$$\text{Finde } u_N \in S_0^{1,1}(\mathcal{T}) \text{ s.d. } B(u_N, v) = l(v) \quad \forall v \in S_0^{1,1}(\mathcal{T}). \quad (1.15)$$

(1.15) stellt ein lineares Gleichungssystem dar: entwickelt man die Funktion  $u_N \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})$  in der Basis  $\{\varphi_i \mid i = 1, \dots, M-1\}$ , so hat es die Form  $u_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \varphi_i$  mit einem Vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ , der zu bestimmen ist. Da jedes  $v \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})$  analog als  $v = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \varphi_i$  geschrieben werden kann, so ist (1.15) äquivalent zu

$$\text{Finde } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N \text{ s.d. } B\left(\sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j \varphi_j, \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \varphi_i\right) = l\left(\sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \varphi_i\right) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N.$$

Aufgrund des Linearitätseigenschaften von  $B$  von  $l$  folgt dann, daß dies äquivalent ist mit

$$\text{Finde } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N \text{ s.d. } \sum_{i,j} \mathbf{u}_j \mathbf{v}_i B(\varphi_j, \varphi_i) = \sum_i \mathbf{v}_i l(\varphi_i).$$

Führen wir nun die *Steifigkeitsmatrix*  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  und den *Lastvektor*  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^N$  ein durch

$$\mathbf{B}_{ij} := B(\varphi_j, \varphi_i), \quad \mathbf{l}_i = l(\varphi_i) \quad (1.16)$$

so erhalten wir, daß (1.15) äquivalent ist zu

$$\text{Finde } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N \text{ s.d. } \mathbf{v}^\top \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{v}^\top \mathbf{l} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N \quad (1.17)$$

was wiederum äquivalent ist zum folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\text{Finde } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N \text{ s.d. } \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{l} \quad (1.18)$$

**Bemerkung 1.9** Das lineare Gleichungssystem (1.18) hat eine eindeutige Lösung, weil die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{B}$  SPD ist:

- $\mathbf{B}$  symmetrisch, denn die Bilinearform  $B$  ist symmetrisch:  $\mathbf{B}_{ij} = B(\varphi_j, \varphi_i) = B(\varphi_i, \varphi_j) = \mathbf{B}_{ji}$ .
- $\mathbf{B}$  ist positiv definit: Für  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$  definieren wir die zugehörige Funktion  $u := \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \varphi_i$ . D.g.:

$$\mathbf{u}^\top \mathbf{B} \mathbf{u} = \sum_{i,j} \mathbf{u}_j \mathbf{B}_{ij} \mathbf{u}_i = \sum_{i,j} \mathbf{u}_j B(\varphi_j, \varphi_i) \mathbf{u}_i = B(u, u) = \|u'\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0.$$

Damit ist  $\mathbf{u}^\top \mathbf{B} \mathbf{u} = 0$  genau dann, wenn  $\|u'\|_{L^2(\Omega)} = 0$ . Die Funktion  $u \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})$  muß  $u$  konstant sein; weil  $u$  in den Endpunkten von  $\Omega$  verschwindet, muß also  $u = 0$  sein.

Die klassische FEM ergibt sich dann aus folgenden Schritten:

1. Aufstellen des LGS (1.18) ("Assemblieren")
2. Lösen von (1.18)
3. Nachlaufrechnung (typischerweise ist nicht  $u_N$  von Interessen sondern Größen, die von  $u_N$  abhängen.)

Für die Auswertung des Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{B}$  und des Lastvektors  $\mathbf{l}$  müssen Integrale ausgewertet werden. Da die Integranden auf den *Elementen* glatt sind, bietet es sich an, die Integral als Summen von Integralen über Elemente zu schreiben:

$$\mathbf{B}_{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \varphi_j' \varphi_i', \quad \mathbf{l}_i = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K f \varphi_i. \quad (1.19)$$

Damit ergibt sich als Algorithmus zum Aufstellen des LGS (1.18) wie in Alg. 1) dargestellt.

**Bemerkung 1.10** Algorithmus 1 wird in der Praxis erheblich anders realisiert:

finis 1.Stunde  
finis 2.Stunde

---

**Algorithm 1** Rohfassung des Assemblierens

---

```
1:  $\mathbf{B} := 0 \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{l} := 0 \in \mathbb{R}^N$ 
2: for  $K \in \mathcal{T}$  do
3:   for  $i = 1 : N$  do
4:     for  $j = 1 : N$  do
5:        $\mathbf{B}_{ij} = \mathbf{B}_{ij} + \int_K \varphi'_j \varphi'_i$ 
6:     end for
7:      $\mathbf{l}_i = \mathbf{l}_i + \int_K f \varphi_i$ 
8:   end for
9: end for
```

---

1.  $\mathbf{B}$  is symmetrisch und sogar ein Tridiagonalmatrix:  $\mathbf{B}_{ij} = 0$  für  $|i - j| > 1$ . Dies macht man sich zur Speichersparnis zunutze (der Speicherbedarf reduziert sich von  $N^2$  auf ca.  $2N!$ ).
2. Wegen der Tägereigenschaften der Hutfunktionen  $\varphi_j$  kann die Schleife über  $j$  abgekürzt werden: Es genügt die  $j \in \{1, \dots, N\}$  zu betrachten, für die  $|i - j| \leq 1$  ist.
3. wegen der Trägereigenschaften der Hutfunktionen, müssen in der Schleife über  $i$  auch nur die Indizes  $i$  betrachtet werden, für die gilt:  $K \subset \text{supp } \varphi_i$ . Das sind im vorliegenden 1D Fall höchstens 2.
4. Die Integrale für die Auswertung der Einträge des Lastvektors  $\mathbf{l}_i$  werden typischerweise mit Quadraturformeln berechnet.
5. Im Wesentlichen besteht Alg. 1 aus 3 geschachtelten Schleifen, die in jeder Reihenfolge ausgeführt werden könnten. Der Vorteil der “elementbasierten” Fassung (d.h. der vorliegenden Fassung, bei der die Schleife über die Elemente die äußerste Schleife ist) ergibt sich insbesondere bei Differentialgleichungen mit “komplizierten” Koeffizienten, also z.B. nichtlineare Probleme oder bei komplizierten Geometrien in 2D oder 3D

### 1.3 Analyse der 1D FEM

Wir untersuchen den Fehler  $e_N := u - u_N$ , wobei  $u \in H_0^1(\Omega)$  die Lösung von (1.6) und  $u_N \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})$  (1.15) löst. Wir leiten zunächst die *Galerkinorthogonalität* her. Die Funktionen  $u$  und  $u_N$  erfüllen:

$$\begin{aligned} B(u, v) &= l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ B(u_N, v) &= l(v) \quad \forall v \in S_0^{1,1}(\mathcal{T}) \subset H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Betrachtet man in der ersten Gleichung lediglich  $v \in S_0^{1,1}(\mathcal{T}) \subset H_0^1(\Omega)$  und bildet dann die Differenz der beiden Gleichungen, so entsteht

$$B(u, v) - B(u_N, v) = 0 \quad \forall v \in S_0^{1,1}(\mathcal{T});$$

aufgrund der Linearität von  $B$  im ersten Argument sodann:

$$B(u - u_N, v) = 0 \quad \forall v \in S_0^{1,1}(\mathcal{T}). \quad (1.20)$$

Diese Galerkinorthogonalität führt auf eine *Bestapproximationseigenschaft* der FEM-Lösung  $u_N$ : Wir haben nämlich für beliebiges  $v \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})$

$$\begin{aligned} \|(u - u_N)'\|_{L^2(\Omega)}^2 &= B(u - u_N, u - u_N) \stackrel{(1.20)}{=} B(u - u_N, u - v) = \int_{\Omega} (u - u_N)'(u - v)' \\ &\stackrel{C.S.}{\leq} \|(u - u_N)'\|_{L^2(\Omega)} \|(u - v)'\|_{L^2(\Omega)}; \end{aligned}$$

also  $\|(u - u_N)'\|_{L^2(\Omega)} \leq \|(u - v)'\|_{L^2(\Omega)}$ . Da  $v \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})$  beliebig war, ergibt sich die Bestapproximationseigenschaft

$$\|(u - u_N)'\|_{L^2(\Omega)} \leq \inf_{v \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})} \|(u - v)'\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.21)$$

Wir müssen nun dieses Infimum abschätzen. Dies geschieht dadurch, daß ein konkretes  $v \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})$  konstruiert wird. Im nächsten Satz zeigen wir, daß für hinreichend glatte Lösungen  $u$  der stückweise lineare Interpolant das Gewünschte leistet:



**Satz 1.11** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Sei  $\mathcal{T}$  ein Gitter auf  $\Omega$  mit Knoten  $x_0 < x_1 < \dots < x_M$ . Sei  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  und  $Iu \in S^{1,1}(\mathcal{T})$  der stückweise lineare Interpolant (d.h.  $Iu \in S^{1,1}(\mathcal{T})$  ist durch die Bedingung  $(Iu)(x_i) = u(x_i)$  für  $i = 0, \dots, M$  gekennzeichnet). Dann existiert ein  $C > 0$ , welches nur von  $\Omega$  abhängt, so daß

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \|u - Iu\|_{L^2(K)}^2 + h_K^2 \|(u - Iu)'\|_{L^2(K)}^2 \leq Ch^4 \|u''\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Hier ist  $h := \max_{K \in \mathcal{T}} h_K$ .

**Beweis:** Wir werden ein analoges Resultat in 2D später mit Techniken beweisen, die auch in 1D anwendbar sind. Ein einfacher Beweis im vorliegenden 1D-Fall kann mithilfe des Satzes von Rolle geführt werden. Sei  $(a, b) = K \in \mathcal{T}$  ein Element der Länge  $h_K$ . Wegen  $(u - Iu)(a) = (u - Iu)(b) = 0$  existiert nach dem Satz von Rolle ein  $\xi \in K$  derart, daß  $(u - Iu)'(\xi) = 0$ . Also erhalten wir für jedes  $x \in K$  die Darstellung

$$(u - Iu)'(x) = \int_{\xi}^x (u - Iu)''(t) dt = \int_{\xi}^x u''(t) dt = \int_{\xi}^x 1 \cdot u''(t) dt,$$

weil  $(Iu)|_K \in \mathcal{P}_1$ . Aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt dann

$$\|(u - Iu)'\|_{L^\infty(K)} \leq h_K^{1/2} \|u''\|_{L^2(K)}$$

und weiter  $\|(u - Iu)'\|_{L^2(K)} \leq h_K \|u''\|_{L^2(K)}$ . Aus  $(u - Iu)(a) = 0$  erhalten wir mit der Darstellung  $(u - Iu)(x) = \int_a^x (u - Iu)'(t) dt$  die Abschätzung

$$\|u - Iu\|_{L^\infty(K)} \leq h_K \|(u - Iu)'\|_{L^\infty(K)} \leq h_K^{3/2} \|u''\|_{L^2(K)}$$

und damit  $\|u - Iu\|_{L^2(K)} \leq h_K^2 \|u''\|_{L^2(K)}$ . Durch Summation über alle Elemente ergibt sich dann die gewünschte Behauptung, wenn  $C = 2$  gewählt wird.  $\square$

Die Bestapproximationseigenschaft (1.21) zusammen mit Satz 1.11 erlaubt uns, den FEM-Fehler abzuschätzen, falls die gesuchte exakte Lösung gewisse Regularitätseigenschaften hat:

**Korollar 1.12** Sei  $u$  Lösung von (1.6) und erfülle die Regularitätsannahme  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ . Sei  $u_N \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})$  die Lösung von (1.15). D.g.:

$$\|u - u_N\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(\Omega)},$$

wobei  $h := \max_{K \in \mathcal{T}} h_K$  und die Konstante  $C > 0$  nur von  $\Omega$  abhängt.

**Beweis:** (1.21) zusammen mit Satz 1.11 ergeben  $\|(u - u_N)'\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(\Omega)}$ . Weil  $u - u_N \in H_0^1(\Omega)$  ergibt sich aus Satz 1.6, (iii), daß  $\|u - u_N\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|(u - u_N)'\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|u''\|_{L^2(\Omega)}$ .  $\square$

## 1.4 Beispiele andere Variationsformulierungen

Die FEM basiert auf einer Variationsformulierung einer Differentialgleichung. Für das Dirichletproblem (1.1) haben wir oben mit (1.6) eine geeignete Variationsformulierung hergeleitet. In diesem Abschnitt sprechen wir kurz weitere Variationsformulierungen für verwandte Problem an.

### 1.4.1 wesentliche Randbedingungen (Dirichletbedingungen)

Für  $g_0, g_1 \in \mathbb{R}$  betrachten wir

$$-u'' = f \quad \text{auf } \Omega = (0, 1) \tag{1.22a}$$

$$u(0) = g_0, \quad u(1) = g_1. \tag{1.22b}$$

Wie bei der Herleitung von (1.6) ergibt sich als eine Variationsformulierung

$$\text{Finde } u \in H_D^1 := \{u \in H^1(\Omega) \mid u(0) = g_0, \quad u(1) = g_1\} \text{ s.d. } \quad B(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.23}$$

Der Raum  $H_D^1$  ist nun ein *affiner* Raum. Für die Anwendung der allgemeinen Theorie sowie numerischen Approximation sind lineare Räume einfacher. Das Problem (1.23) wird deshalb typischerweise umformuliert. Hierbei macht man den Ansatz  $u = u_g + u_0$ , wobei  $u_g \in H_D^1$  (beliebig) gewählt wird und  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$

derart bestimmt wird, daß  $u$  die gesuchte Lösung ist. Einsetzen dieses Ansatzes in (1.23) liefert, daß  $u_0$  folgendes Problem löst:

$$\text{Finde } u_0 \in H_0^1(\Omega) \text{ s.d. } B(u_0, v) = l(v) - B(u_g, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.24)$$

Die Lösung  $u_0$  von (1.24) hängt natürlich von der Wahl der Funktion  $u_g$  ab—die Summe  $u = u_g + u_0$  ist jedoch eindeutig:

**Übung 1.13** Problem (1.23) hat höchstens eine Lösung. □

Die FEM für (1.22) basiert auf der Formulierung (1.24). Hierzu wird ein  $u_g \in H_D^1$  gewählt und dann die Funktion  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  approximiert durch  $u_{0,N} \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})$ , welches folgendes Problem löst:

$$\text{Finde } u_{0,N} \in S_0^{1,1}(\mathcal{T}) \text{ s.d. } B(u_{0,N}, v) = l(v) - B(u_g, v) \quad \forall v \in S_0^{1,1}(\mathcal{T}) \quad (1.25)$$

Genau wie in Bem. 1.9 sieht man, daß  $u_{0,N}$  existiert und eindeutig ist. Es bietet sich im vorliegenden 1D-Fall an, die Funktion  $u_g \in S^{1,1}(\mathcal{T}) \cap H_D^1$  zu wählen. In diesem Fall ist die Approximation  $u_N := u_g + u_{0,N} \in S^{1,1}(\mathcal{T})$  unabhängig von der konkreten Wahl von  $u_g \in S^{1,1}(\mathcal{T}) \cap H_D^1$  (man überzeuge sich davon!). Man wird deshalb  $u_g \in S^{1,1}(\mathcal{T}) \cap H_D^1$  so wählen, daß die Implementierung einfacher gestaltet wird. Naheliegender ist es,  $u_g$  als affine Funktion zu wählen, die die Randbedingungen erfüllt:  $u_g = g_0 + (g_1 - g_0)x$ . Numerisch wird jedoch meist  $u_g \in S^{1,1}(\mathcal{T}) \cap H_D^1$  so gewählt, daß der Träger von  $u_0$  sich auf die beiden Randelemente beschränkt, d.h.  $u_g \in S^{1,1}(\mathcal{T})$  ist durch die Interpolationsbedingungen

$$u_g(x_0) = g_0, \quad u_g(x_M) = g_1, \quad u_g(x_i) = 0 \quad i = 1, \dots, M-1$$

charakterisiert.

**Übung 1.14** Man schreibe ein Matlabprogramm, welches die obige FEM realisiert für das Problem (1.22). Eingabe ist ein Vektor  $\mathbf{x}$  sein, der die Knoten des zu verwendenden Gitters enthält. Die rechte Seite  $f$  sollte als Funktion realisiert sein; als Quadraturformel für die Bestimmung des Lastvektors kann die Mittelpunktsregel verwendet werden. Setzen Sie Alg. 1 ein, wobei Sie natürlich die in Bem. 1.10 diskutierten Beobachtungen umsetzen.

## 1.4.2 nichtsymmetrische Bilinearformen

Betrachte

$$-u'' + bu' + cu = f \quad \text{auf } \Omega = (0, 1) \quad (1.26a)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (1.26b)$$

für Konstanten  $b, c$ . Eine mögliche Variationsformulierung ist dann:

$$\text{Finde } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.d. } B(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (1.27)$$

wobei die Bilinearform  $B$  und die Linearform  $l$  gegeben sind durch

$$B(u, v) = \int_{\Omega} u'v' + \int_{\Omega} bu'v + \int_{\Omega} cuv, \quad l(v) = \int_{\Omega} fv \quad (1.28)$$

**Übung 1.15** Überlegen Sie sich eine weitere Variationsformulierung für (1.26), welche ebenfalls auf dem Raum  $H_0^1(\Omega)$  basiert.

## 1.4.3 natürliche Randbedingungen (Neumannproblem)

Betrachte

$$-u'' + u = f \quad \text{auf } \Omega = (0, 1) \quad (1.29a)$$

$$u'(0) = -g_0, \quad u'(1) = g_1 \quad (1.29b)$$

für gegebene  $g_0, g_1 \in \mathbb{R}$ . Wir suchen wieder eine schwache Lösung in  $H^1(\Omega)$ . Weil dann  $u' \in L^2(\Omega)$  können wir die Randbedingungen (1.29b) nicht stark erzwingen. Wir müssen (1.29b) deshalb in die Variationsformulierung einbauen, d.h. (1.29b) wird "schwach" realisiert (vgl. Bem. 1.17 unten). Hierzu sei  $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ . Dann folgt aus (1.29a) für eine klassische Lösung  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

$$\int_{\Omega} -u''v + uv = \int_{\Omega} fv.$$

Partielle Integration liefert

$$\int_{\Omega} u'v' + \int_{\Omega} uv - u'v'|_0^1 = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

Beobachtet man, daß  $u'$  an den Endpunkten durch (1.29b) gegeben ist, erhalten wir, daß eine klassische Lösung folgendes Problem löst:

$$\text{Finde } u \in H^1(\Omega) \text{ s.d. } B(u, v) = l(v) \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad (1.30)$$

wobei

$$B(u, v) = \int_{\Omega} u'v' + uv, \quad l(v) = \int_{\Omega} fv + g_1v(1) - g_0v(0) \quad (1.31)$$

In Hinblick auf Satz 1.4 ist  $l$  ein stetiges lineares Funktional auf  $H^1(\Omega)$ . Weiters nutzen wir aus, daß  $C^\infty(\overline{\Omega})$  dicht liegt in  $H^1(\Omega)$  (siehe Satz 1.6); also folgt durch ein Dichtheitsargument, daß (1.30) sich tatsächlich erweitern läßt zu

$$\text{Finde } u \in H^1(\Omega) \text{ s.d. } B(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (1.32)$$

Eine Lösung  $u$  von (1.32) heißt eine schwache Lösung von (1.29). (1.32) stellt eine Verallgemeinerung des klassischen Lösungsbegriffs für (1.29) dar, denn es wird lediglich  $u \in H^1(\Omega)$  gefordert und nicht  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ . Unter Regularitätsannahmen an die schwache Lösung ist sie wieder eine klassische Lösung:

**Übung 1.16** Sei  $u \in H^1(\Omega)$  eine Lösung von (1.32). Erfülle  $u$  die Regularitätsannahme  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ . Dann ist  $u$  eine klassische Lösung von (1.29).

**Bemerkung 1.17** Die Behandlung der Randbedingungen (1.29b) ist anders als bei den Dirichletproblemen (1.1) oder (1.22). Z.B. beim Problem (1.1) wurden die Randbedingungen "direkt" erzwungen: in der Variationsformulierung für (1.1) wurde die Lösung  $u$  in dem Teilraum von  $H^1(\Omega)$  gesucht, welcher die Randbedingungen erfüllt, d.h.  $H_0^1(\Omega)$ . Sucht man eine Variationsformulierung für (1.29), die auf  $H^1(\Omega)$  basiert, so kann die Randbedingung (1.29b) nicht direkt erzwungen werden, weil  $u' \in L^2(\Omega)$  und damit eine Punktauswertung an den Endpunkten von  $\Omega$  nicht sinnvoll definiert werden kann. Im obigen Vorgehen werden deshalb die Randbedingungen deshalb in die Variationsformulierung eingebaut (sie finden in der Definition des linearen Funktionals  $l$  ihren Niederschlag). Wie Übung 1.16 zeigt, werden die Randbedingungen (1.29b) in der Tat erfüllt, falls die Lösung  $u \in H^1(\Omega)$  der Variationsformulierung (1.32) hinreichend glatt ist.

# Kapitel 2

## Abstrakte FEM

### 2.1 Funktionalanalytische Grundbegriffe

**Definition 2.1 (Norm)** Eine Norm  $\|\cdot\|$  auf einem Vektorraum  $V$  über  $\mathbb{R}$  ist eine Abbildung:

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

1.  $\|x\| \geq 0$  für alle  $x \in V$ ,
2.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , (Definitheit)
3.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  für alle  $x \in V$ , (Homogenität)
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  für alle  $x, y \in V$ . (Dreiecksungleichung)

**Definition 2.2 (Banachraum)** Ein normierter Raum  $(V, \|\cdot\|)$  heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge in  $(V, \|\cdot\|)$  konvergiert. Vollständige, normierte Räume heißen Banachräume.

**Definition 2.3 (Linearform)** Sei  $V$  ein Vektorraum. Eine Abbildung  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Linearform oder lineares Funktional, falls

1.  $l(v + w) = l(v) + l(w)$  für alle  $v, w \in V$ ,
2.  $l(\lambda v) = \lambda l(v)$  für alle  $v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ .

**Definition 2.4 (Bilinearform)** Sei  $V$  ein Vektorraum. Eine Abbildung  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Bilinearform, falls für jedes  $w \in V$  die Abbildungen

$$v \mapsto B(w, v) \quad \text{und} \quad v \mapsto B(v, w)$$

Linearformen im Sinne von Definition 2.3 sind.  $B$  heißt symmetrisch, falls

$$B(u, v) = B(v, u) \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Eine symmetrische Bilinearform heißt Skalarprodukt oder Innenprodukt, falls sie

1.  $B(u, u) \geq 0$  für alle  $u \in V$ ,
2.  $B(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

erfüllt.

**Definition 2.5** Sei  $V$  ein Vektorraum,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf  $V$ . Dann definiert

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

eine Norm auf  $V$ . Der normierte Raum  $(V, \|\cdot\|)$  heißt Prä-Hilbertraum. Ist  $(V, \|\cdot\|)$  vollständig, so heißt  $(V, \|\cdot\|)$  ein Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Proposition 2.6** Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum  $V$ . Dann gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

**Beweis:** Übung ■

**Definition 2.7** Sei  $(V, \|\cdot\|)$ ,  $V \neq \{0\}$ , ein normierter Raum. Eine Linearform  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig, falls es eine Konstante  $C_l > 0$  gibt mit

$$|l(v)| \leq C_l \|v\| \quad \text{für alle } v \in V.$$

Die Menge aller stetigen Linearformen wird als Dualraum  $V'$  bezeichnet.

Für stetige Linearformen  $l$  ist die kleinste solche Konstante gegeben durch

$$\|l\|_{V'} := \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{|l(v)|}{\|v\|}. \quad (2.1)$$

Der Ausdruck (2.1) liefert auf  $V'$  eine Norm.

**Proposition 2.8** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Der Dualraum  $V'$  versehen mit der Norm  $\|\cdot\|_{V'}$  ist ein vollständiger normierter Raum.

**Beweis:** Übung ■

**Bemerkung 2.9** 1. Stetige Linearformen sind auch stetige Funktionen im Sinne der Topologie.

2. Üblicherweise wird der Dualraum  $V'$  mit der Norm  $\|\cdot\|_{V'}$  versehen, so daß die Sprechweise „der Dualraum  $V'$ “ impliziert, daß die Norm  $\|\cdot\|_{V'}$  verwendet wird. □

**Definition 2.10** Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Eine Bilinearform  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig, falls es ein  $M > 0$  gibt mit

$$|B(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Sie heißt koerziv oder  $V$ -elliptisch, falls es ein  $\alpha > 0$  gibt mit

$$\alpha \|u\|^2 \leq B(u, u) \quad \text{für alle } u \in V.$$

**Bemerkung 2.11** Eine Bilinearform  $B$ , die stetig im Sinne von Def. 2.10 ist, ist auch stetig im Sinne der Topologie ( $V \times V$  versehen mit der Produkttopologie). Außerdem: falls eine Bilinearform  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  stetig (im Sinn der Topologie) ist, dann ist sie stetig im Sinn von Def. 2.10. Weiter ist die Funktion  $V \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto B(u, u)$  stetig im Sinne der Topologie (Übung).

finis 3.Stunde  
finis 4.Stunde

## 2.2 Variationsprobleme: Existenz und Eindeutigkeit

Sei  $V$  ein Banachraum,  $B$  eine stetige Bilinearform und  $l \in V'$ . Betrachte:

$$\text{Finde } u \in V : \quad B(u, v) = l(v) \quad \text{für alle } v \in V. \quad (2.2)$$

Wir betrachten zuerst den Fall, daß die Bilinearform  $B$  symmetrisch ist und führen das Lösen von (2.2) auf ein Minimierungsproblem zurück:

**Satz 2.12** Sei  $V$  ein Vektorraum,  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform mit  $B(u, u) > 0$  für alle  $u \neq 0$ . Sei  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  eine Linearform. Definiere

$$J(u) := \frac{1}{2}B(u, u) - l(u).$$

Dann gilt:  $u \in V$  ist ein Minimierer von  $J$  genau dann, wenn

$$B(u, v) = l(v) \quad \text{für alle } v \in V. \quad (2.3)$$

Zudem hat (2.3) höchstens eine Lösung.

**Beweis:** Für  $v, w \in V$  und  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$J(w + tv) = \frac{1}{2}B(w + tv, w + tv) - l(w + tv) = J(w) + t[B(w, v) - l(v)] + \frac{1}{2}t^2B(v, v). \quad (2.4)$$

Für feste  $v, w \in V$  ist  $t \mapsto J(w + tv)$  ein quadratisches Polynom. Sei  $u$  ein Minimierer von  $J$ . Dann folgt aus (2.4) mit  $w = u$  und beliebiges  $v \in V$  für das quadratische Polynom  $Q : t \mapsto J(u + tv)$ , daß es ein Minimum bei  $t = 0$  hat, d.h.  $Q'(0) = 0$ . Also folgt  $B(u, v) - l(v) = 0$ . Da  $v$  beliebig, folgt „ $\Rightarrow$ “. Gelte nun (2.3). Dann folgt aus (2.4) mit  $t = 1$ :

$$J(u + v) = \underbrace{J(u) + \frac{1}{2}B(v, v)}_{> J(u) \quad \text{für alle } 0 \neq v \in V} \quad \text{für alle } v \in V,$$

also ist  $u$  Minimierer.

Eindeutigkeit: Seien  $u, \tilde{u}$  Lösungen von (2.2). Dann gilt

$$\left. \begin{array}{l} B(u, v) = l(v) \\ B(\tilde{u}, v) = l(v) \end{array} \right\} \Rightarrow B(u - \tilde{u}, v) = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

Die Wahl von  $v := u - \tilde{u}$  zeigt dann  $u - \tilde{u} = 0$ . ■

Das Funktional  $J$  aus Satz 2.12 hat unter geeigneten Annahmen ein Minimum:

**Satz 2.13** Sei  $V$  ein Hilbertraum,  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische, koerzive und stetige Bilinearform und  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Linearform. Sei  $\emptyset \neq U \subset V$  eine abgeschlossene, konvexe Menge. Dann gilt: Die Funktion

$$J : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \frac{1}{2}B(u, u) - l(u)$$

nimmt ihr Minimum an. Der Minimierer  $u \in U$  ist eindeutig.

**Beweis:** Es gilt für ein  $\alpha > 0$

$$\alpha \|v\|^2 \leq B(v, v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Es gilt daher

$$J(v) \geq \frac{1}{2}\alpha \|v\|^2 - \|l\|_{V'} \|v\| = \frac{1}{2\alpha} (\alpha \|v\| - \|l\|_{V'})^2 - \frac{\|l\|_{V'}^2}{2\alpha} \geq -\frac{\|l\|_{V'}^2}{2\alpha},$$

also ist  $J$  nach unten beschränkt und es existiert damit eine Minimalfolge, d.h.  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , mit  $v_n \in U$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$J(u_n) \rightarrow M := \inf_{v \in U} J(v).$$

Wir zeigen:  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchyfolge:

$$\begin{aligned} \alpha \|v_n - v_m\|^2 &\leq B(v_n - v_m, v_n - v_m) = 2B(v_n, v_n) + 2B(v_m, v_m) - B(v_n + v_m, v_n + v_m) \\ &= 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8J\left(\frac{v_n + v_m}{2}\right) \\ &\leq 4 \underbrace{J(v_n)}_{\rightarrow M} + 4 \underbrace{J(v_m)}_{\rightarrow M} - 8M \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } n, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Also ist  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge. Da  $V$  vollständig ist, folgt damit die Existenz von  $u \in V$  mit  $v_n \rightarrow u$ . Da  $v_n \in U$  und  $U$  abgeschlossen, ist  $u \in U$ . Weil  $J$  stetig ist (cf. Bem. 2.9, 2.11), gilt also

$$J(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = M = \inf_{v \in U} J(v).$$

Wir bemerken, daß die obigen Argumente sogar zeigen, daß für *jede* Minimalfolge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt: 1.) sie konvergiert, d.h. es existiert  $v \in V$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$  und 2.)  $M = \lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = J(v)$ . Eindeutigkeit: Seien  $u, \tilde{u}$  zwei Minimierer. Dann ist die Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegeben durch

$$v_n := \begin{cases} u & \text{für } n \text{ gerade} \\ \tilde{u} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

trivialerweise eine Minimalfolge. Nach Obigem muß die Folge konvergieren. Das impliziert  $u = \tilde{u}$ . ■

**Bemerkung 2.14** • Die Wahl  $U = V$  ist zugelassen.

- $B(\cdot, \cdot)$  erzeugt ein Skalarprodukt auf  $V$ , d.h.  $(V, B(\cdot, \cdot))$  ist wieder ein Hilbertraum. Zudem sind die erzeugten Normen äquivalent. □

Sätze 2.12, 2.13 implizieren den Rieszschen Darstellungssatz:

**Satz 2.15 (Rieszscher Darstellungssatz)** Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum. Dann gilt: für jedes  $l \in V'$  existiert ein eindeutiges  $u_l \in V$ , so daß

$$l(v) = \langle u_l, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Umgekehrt erzeugt jedes  $u \in V$  ein Element  $l_u \in V'$  durch die Vorschrift

$$l_u(v) := \langle u, v \rangle.$$

Damit ergibt sich, daß der Dualraum  $V'$  des Hilbertraums  $V$  mit  $V$  identifiziert werden kann.

**Korollar 2.16** Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum. Dann ist die lineare Abbildung

$$i : V \rightarrow V', \quad u \mapsto \langle u, \cdot \rangle$$

ein isometrischer Isomorphismus, d.h.

1.  $i$  ist bijektiv,
2.  $\|i(u)\|_{V'} = \|u\|_V$  für alle  $u \in V$ .

**Beweis:** Übung ■

Wir haben bis jetzt das Problem (2.2) unter der Zusatzannahme betrachtet, daß die Bilinearform  $B$  symmetrisch ist. Wir verwenden nun den Rieszschen Darstellungssatz, um diese Annahme abzuschwächen.

**Satz 2.17 (Lax-Milgram-Lemma)** Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum. Sei  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige, koerzive Bilinearform mit Koerzivitatskonstante  $\alpha > 0$ . Sei  $l \in V'$ . Dann gilt: Das Variationsproblem

$$\text{Finde } u \in V : \quad B(u, v) = l(v) \quad \text{für alle } v \in V \quad (2.5)$$

hat eine eindeutige Lösung. Zudem gilt

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|l\|_{V'},$$

d.h. stetige Abhängigkeit der Lösung von dem Datum  $l$ .

**Beweis:**

1. Die Bilinearform  $B$  ist stetig, d.h. es existiert  $M > 0$  mit

$$|B(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Für jedes  $u \in V$  ist  $v \mapsto B(u, v)$  also ein stetige Linearform. Definiere daher die lineare Abbildung

$$\mathbf{B} : V \rightarrow V', \quad u \mapsto \mathbf{B}u \quad (= v \mapsto B(u, v)).$$

Sei  $i : V \rightarrow V'$  der isometrische Isomorphismus aus Korollar 2.16. Dann gilt für  $\mathbf{B}u \in V'$ , daß  $i^{-1}\mathbf{B}u \in V$

$$\langle i^{-1}\mathbf{B}u, v \rangle = (\mathbf{B}u)(v) = B(u, v) \quad (2.6)$$

erfüllt. Dies gilt für alle  $u, v \in V$ .

2. Die Aufgabe (2.5) ist äquivalent zu:

$$\text{finde } u \in V : \quad i^{-1}\mathbf{B}u = i^{-1}l. \quad (2.7)$$

Äquivalent hierzu ist für jedes  $\rho > 0$  die folgende Fixpunktgleichung:

$$\text{finde } u \in V : \quad u = u - \rho (i^{-1}\mathbf{B}u - i^{-1}l). \quad (2.8)$$

3. Die Fixpunktgleichung (2.8) wird mit dem Banachschen Fixpunktsatz gelöst. Hierzu genügt es zu zeigen, daß bei geeigneter Wahl von  $\rho$  die Abbildung

$$T_\rho : V \rightarrow V : \quad u \mapsto u - \rho (i^{-1}\mathbf{B}u - i^{-1}l)$$

eine Kontraktion ist.

Behauptung: Für  $\rho \in (0, \frac{2\alpha}{M^2})$  gilt

$$\|T_\rho v - T_\rho w\| \leq q \|v - w\| \quad \text{für alle } v, w \in V,$$

wobei  $q := \sqrt{1 - 2\alpha\rho + \rho^2 M^2} < 1$ .

Beweis dazu:

$$\begin{aligned} \|T_\rho v - T_\rho w\|^2 &= \|v - w - \rho (i^{-1}\mathbf{B}v - i^{-1}\mathbf{B}w)\|^2 \\ &\stackrel{z:=v-w}{=} \|z - \rho i^{-1}\mathbf{B}z\|^2 \\ &= \langle z, z \rangle - 2\rho \langle i^{-1}\mathbf{B}z, z \rangle + \rho^2 \langle i^{-1}\mathbf{B}z, i^{-1}\mathbf{B}z \rangle. \end{aligned}$$

Nun gilt wegen (2.6)

$$\begin{aligned} \langle i^{-1}\mathbf{B}z, z \rangle &= B(z, z) \\ \|i^{-1}\mathbf{B}z\|^2 &= \langle i^{-1}\mathbf{B}z, i^{-1}\mathbf{B}z \rangle = B(z, i^{-1}\mathbf{B}z) \leq M \|z\| \|i^{-1}\mathbf{B}z\|, \end{aligned}$$



also  $\|i^{-1}\mathbf{B}z\| \leq M\|z\|$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \|T_\rho v - T_\rho w\|^2 &\leq \|z\|^2 - 2\rho B(z, z) + M^2 \rho^2 \|z\|^2 \\ &\leq \|z\|^2 (1 - 2\rho\alpha + M^2 \rho^2) \\ &= \|v - w\| (1 - 2\rho\alpha + M^2 \rho^2). \end{aligned}$$

Elementare Überlegungen zeigen, daß für  $\rho \in (0, \frac{2\alpha}{M^2})$  gilt:  $q := \sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M^2} < 1$ . ■

## 2.3 Abstrakte FEM

Die Variationsaufgabe (2.2) ist typischerweise nicht explizit lösbar, und man ist deshalb an Approximationen interessiert. Hierzu sei eine Folge  $(V_N)_{N \in \mathbb{N}}$  von abgeschlossenen Räumen mit

1.  $\overline{V_N} = V_N$  für alle  $N \in \mathbb{N}$ ,
2.  $V_N \subset V$  für alle  $N \in \mathbb{N}$ ,
3.  $\forall x \in V$  gilt  $\lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{v \in V_N} \|x - v\| = 0$

Die Galerkinapproximation zu (2.2) ist dann:

$$\text{Finde } u_N \in V_N : \quad B(u_N, v) = l(v) \quad \text{für alle } v \in V_N. \quad (2.9)$$

Wegen der Abgeschlossenheit von  $V_N$  folgt die Existenz und Eindeutigkeit von (2.9) aus der allgemeinen Theorie:

**Satz 2.18** *Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum,  $B$  eine stetige, koerzive Bilinearform,  $l \in V'$ . Sei  $V_N \subset V$  abgeschlossener Teilraum. Dann gilt: (2.9) hat eine eindeutige Lösung  $u_N \in V_N$ .*

**Beweis:** Weil  $V_N$  abgeschlossen ist, ist  $(V_N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum. Die Aussage folgt dann aus dem Lax-Milgram-Lemma. ■

Die Elemente der so konstruierten Folge  $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$  stellen Approximationen an die exakte Lösung  $u$  des Problems (2.2) dar. Fundamental für Konvergenzaussagen ist die folgende Betrachtung, die *Galerkinorthogonalität* genannt wird:

$$B(u - u_N, v) = 0 \quad \text{für alle } v \in V_N \quad (2.10)$$

**Beweis:** Es gelten

$$\begin{aligned} B(u, v) &= l(v) \quad \text{für alle } v \in V, \\ B(u_N, v) &= l(v) \quad \text{für alle } v \in V_N. \end{aligned}$$

Subtraktion liefert die Aussage. ■

Die Galerkinorthogonalität ist die Grundlage der folgenden, fundamentalen Fehlerabschätzung:

**Satz 2.19 (Céa's Lemma (1964), Quasioptimalität)** *Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum,  $B$  eine stetige, koerzive Bilinearform mit*

$$|B(u, v)| \leq M\|u\|\|v\| \quad \text{für alle } u, v \in V \quad \text{und} \quad \alpha\|u\|^2 \leq |B(u, u)| \quad \text{für alle } u \in V$$

*Sei  $l \in V'$ . Sei  $V_N \subset V$  abgeschlossener Unterraum. Sei  $u$  durch (2.2) und  $u_N$  durch (2.9) gegeben. Dann gilt:*

$$\|u - u_N\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in V_N} \|u - v\|.$$

**Beweis:** Unter Ausnutzung der Galerkinorthogonalität erhalten wir für jedes  $v \in V_N$ :

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_N\|^2 &\leq B(u - u_N, u - u_N) \stackrel{(2.10)}{=} B(u - u_N, u) \stackrel{(2.10)}{=} B(u - u_N, u - v) \\ &\leq M \|u - u_N\| \|u - v\|, \end{aligned}$$

also  $\|u - u_N\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v\|$ . Da  $v \in V_N$  beliebig, folgt die Behauptung. ■

**Bemerkung 2.20 (Quasioptimalität)** Der Fehler  $\|u - u_N\|$  ist bis auf den Faktor  $\frac{M}{\alpha}$  so klein, wie durch Approximation mit Elementen aus  $V_N$  überhaupt möglich ist. □

**Korollar 2.21** Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum,  $B, l$  mögen die Bedingungen aus Satz 2.19 erfüllen. Sei  $(V_N)_{N \in \mathbb{N}}$  eine Folge von abgeschlossenen Unterräumen, so daß

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{v \in V_N} \|x - v\| = 0 \quad \forall x \in V. \quad (2.11)$$

Dann gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u_N = u.$$

**Beweis:** Nach Satz 2.19 erfüllen die  $u_N$ :

$$0 \leq \|u - u_N\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in V_N} \|u - v\|.$$

Die Voraussetzung (2.11) impliziert dann

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{v \in V_N} \|u - v\| = 0.$$

■

**Bemerkung 2.22** Das „Galerkinverfahren“ (2.9) ist also ein konvergentes Verfahren.

### 2.3.1 Der koerzive, symmetrische Fall

Wir betrachten koerzive, symmetrische Bilinearformen  $B$ . Dann ist  $(V, B(\cdot, \cdot))$  ein Hilbertraum. Die vom Skalarprodukt  $B(\cdot, \cdot)$  erzeugte *Energienorm* ist

$$\|u\|_E = \sqrt{B(u, u)}.$$

Die Quasioptimalitätsaussage aus dem Satz 2.19 kann für diesen Fall verschärft werden:

**Satz 2.23** Es mögen die Annahmen von Satz 2.19 gelten. Zusätzlich sei  $B$  symmetrisch. Dann gilt:

$$\|u - u_N\|_E = \min_{v \in V_N} \|u - v\|_E \quad \text{und} \quad \|u - u_N\|_E^2 = \|u\|_E^2 - \|u_N\|_E^2.$$

**Beweis:** Übung ■

**Bemerkung 2.24** Im symmetrischen Fall ist die Galerkinapproximation also gerade die Bestapproximation.  $u_N$  kann geometrisch als die Orthogonalprojektion (bzgl.  $B(\cdot, \cdot)$ ) von  $u$  auf  $V_N$  gesehen werden. Diese Orthogonalprojektion ist ein stetiger linearer Operator, der als *Ritzprojektor* bekannt ist:

$$P : V \rightarrow V_N, \quad u \mapsto Pu \quad \text{mit} \quad B(Pu - u, v) = 0 \quad \text{für alle } v \in V_N.$$

Tatsächlich wird die Symmetrie von  $B$  für die Definition des Ritzprojektors nicht benötigt. Entsprechend heißt auch für nichtsymmetrische Probleme das oben definierte  $P$  der Ritzprojektor. □

**Bemerkung 2.25** Die Beziehung  $\|u - u_N\|_E^2 = \|u\|_E^2 - \|u_N\|_E^2$  wird in der Praxis oft ausgenutzt, um den Fehler abzuschätzen, insbesondere in Kombination mit der Monotonieaussage des folgenden Korollars.  $\square$

Sind die Räume  $V_N$  geschachtelt, kann im symmetrischen Fall die Konvergenzaussage aus Korollar 2.21 durch eine Monotonieaussage verschärft werden:

**Korollar 2.26** *Es mögen die Annahmen von Korollar 2.21 gelten. Zusätzlich sei  $B(\cdot, \cdot)$  symmetrisch und  $V_N \subset V_{N'}$  für alle  $N, N' \in \mathbb{N}$  mit  $N \leq N'$ . Dann gilt: Die Folge  $\|u - u_N\|_E$  konvergiert monoton gegen 0.*

**Beweis:** Übung ■

### 2.3.2 Bemerkungen zur Realisierung

In der Praxis sind die Räume  $V_N$  endlichdimensional. Die Bedingung (2.9) führt dann auf ein lineares Gleichungssystem: Sei  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  eine Basis von  $V_N$ . Dann ist die gesuchte Lösung  $u_N$  gegeben durch  $u_N = \sum_{i=1}^N \underline{u}_i \varphi_i$ , wobei der Vektor  $\underline{u} \in \mathbb{R}^N$  das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{B} \underline{u} = \underline{l} \tag{2.12}$$

löst. Dabei ist die *Steifigkeitsmatrix*  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  gegeben durch

$$\mathbf{B}_{ij} := B(\varphi_j, \varphi_i), \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, N\}$$

und der *Lastvektor*  $\underline{l} \in \mathbb{R}^N$  durch

$$\underline{l}_i := l(\varphi_i) \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, N\}.$$

Ist die Bilinearform  $B$  koerziv, so gilt

$$\underline{u}^T \mathbf{B} \underline{u} > 0 \quad \text{für alle } \underline{u} \in \mathbb{R}^N \text{ mit } \underline{u} \neq 0. \tag{2.13}$$

Ist  $B$  symmetrisch, so ist  $\mathbf{B}$  symmetrisch. Bei symmetrischen, koerziven Bilinearformen erhält man also lineare Gleichungssysteme mit symmetrischen, positiv definiten Matrizen.

**Bemerkung 2.27** Aus (2.12), (2.13) kann man für den Fall von endlich dimensionalen  $V_N$  die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung on (2.9) unmittelbar sehen. (2.9) ist durch die Wahl der Basis  $\{\varphi_i \mid i \in \{1, \dots, N\}\}$  äquivalent zu (2.12). Das lineare Gleichungssystem ist wegen (2.13) eindeutig lösbar.  $\square$