Kapitel 8

$H(\mathrm{div})$-konforme Elemente

8.1 $H(\mathrm{div})$-konforme Elemente

Ausgangspunkt: Bei zahlreichen Randwertproblemen mit vektorwertigen Funktionen basieren die natürlichen Funktionenräume auf $H(\mathrm{div}) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega) \mid \mathrm{div}\,\mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}$ und $H(\mathrm{curl}) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega) \mid \mathrm{curl}\,\mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}$.

Ziel: geeignete FEM für solche Probleme.

8.1.1 Der Raum $H(\mathrm{div})$

Definition 8.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Sei $\boldsymbol{\sigma} \in (L^1_{loc}(\Omega))^d$. Eine Funktion $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt* schwache Divergenz *von $\boldsymbol{\sigma}$, falls*

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\varphi = -\int_\Omega v\varphi \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wir schreiben $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}$ *für die*[1] *schwache Divergenz. Der Raum $H(\mathrm{div},\Omega) := \{\boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega) \mid \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)\}$ wird mit der Norm*

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|^2_{H(\mathrm{div},\Omega)} := \|\boldsymbol{\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

versehen.

Übung 8.2 $H(\mathrm{div},\Omega)$ ist ein Hilbertraum. ■

Satz 8.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Dann ist ist $(C^\infty(\overline{\Omega}))^d$ dicht in $H(\mathrm{div},\Omega)$.*

Beweis: Literatur □

Für den folgenden Satz benötigen wir den Raum $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, welchen wir als den Dualraum von $H^{1/2}(\partial\Omega)$ definieren:

$$H^{-1/2}(\partial\Omega) := \Big(H^{1/2}(\partial\Omega)\Big)'. \tag{8.1}$$

Mit Hilfe von Satz 8.3 zeigt man nun, daß $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ als Element von $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ interpretiert werden kann:

Satz 8.4 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitzgebiet. Dann kann für jedes $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div},\Omega)$ die Normalkomponente $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ als Element von $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ durch folgende Zuweisung definiert werden:*

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \varphi\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)} := \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}\varphi \qquad \forall \boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div},\Omega), \quad \varphi \in H^1(\Omega). \tag{8.2}$$

Insbesondere ist für hinreichend glatte $\boldsymbol{\sigma}$ und φ

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \varphi\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\varphi.$$

[1] man überzeugt sich davon, daß die schwache Divergenz eindeutig ist

Beweis: Wir zeigen, daß die rechte Seite der Gleichung (8.2) als Definition der rechte Seite verwendet werden kann:

1. für festes $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$ ist die rechte Seite von (8.2) ein stetiges lineares Funktional auf $H^1(\Omega)$
2. für festes $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$ gilt

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} = 0 \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega):$$

   Dies folgt aus Dichtheit: Für $\boldsymbol{\sigma} \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^d$ und $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ folgt dies durch partielle Integration. Mittels der Dichtheitsaussage von Satz 8.3 und der Dichtheit von $C_0^\infty(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$ folgt dann die Aussage.
3. Punkte 1. und 2. zeigen, daß die rechte Seite für festes $\boldsymbol{\sigma}$ ein stetiges lineares Funktional auf $H^{1/2}(\partial\Omega)$ definieren, d.h. ein Element von $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

□

Übung 8.5 Sei $\boldsymbol{\sigma}$ stückweise C^1, d.h. $\boldsymbol{\sigma}|_{\Omega_i} \in C^1(\overline{\Omega_i})$, $i = 1, \ldots, N$. Dann gilt: $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$, falls für alle i, j gilt:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^{\Omega_i} = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^{\Omega_j} \qquad \text{auf } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j;$$

hier ist $\mathbf{n}^{\Omega_i}$ die äußere Normale des Teilgebietes Ω_i. Insbesondere ist die (schwache) Divergenz von $\boldsymbol{\sigma}$ gegeben durch $(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma})|_{\Omega_i} = \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}|_{\Omega_i})$ für alle i. ■

Bemerkung 8.6 Da für $\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$ der Ausdruck $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ sinnvoll (als Element von $H^{-1/2}(\partial\Omega)$) definiert werden kann, kann man den Raum $H_0(\mathrm{div}, \Omega) := \{\boldsymbol{\sigma} \in H(\mathrm{div}, \Omega) \,|\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0\}$ definieren. Für Lipschitzgebiete gilt, daß $(C_0^\infty(\Omega))^d$ dicht in $H_0(\mathrm{div}, \Omega)$ ist. ■

8.1.2 Ein einfaches Modellproblem

Betrachte

$$-\Delta u = f \quad \text{auf } \Omega, \qquad u|_{\Gamma_D} = g, \qquad \partial_n u|_{\Gamma_N} = h. \tag{8.3}$$

Führe den *Fluß* $\boldsymbol{\sigma} := \nabla u$ ein. Dann führt (8.3) auf

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma} &= -f \quad \text{auf } \Omega, && (8.4a)\\
\boldsymbol{\sigma} - \nabla u &= 0 \quad \text{auf } \Omega, && (8.4b)\\
u|_{\Gamma_D} &= g, && (8.4c)\\
\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= h \quad \text{auf } \Gamma_N. && (8.4d)
\end{aligned}$$

Eine schwache Formulierung ergibt sich durch Multiplikation von (8.4a) mit v und (8.4b) mit $\boldsymbol{\tau}$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} - \int_\Omega \nabla u \cdot \boldsymbol{\tau} &= 0 \qquad \forall \boldsymbol{\tau}\\
\int_\Omega \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma} v &= \int_\Omega f v \qquad \forall v.
\end{aligned}$$

Es ist geschickt, den Term $\int_\Omega \nabla u \cdot \boldsymbol{\tau}$ partiell zu integrieren, um in beiden Gleichungen die gleiche Bilinearform zu haben. Berücksichtigung der Randbedingung (8.4c) führt auf: Finde $(u, \boldsymbol{\sigma})$, so daß

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega u \,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\tau} &= \int_{\Gamma_D} g \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_N\\
\int_\Omega \mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma} v &= \int_\Omega f v \qquad \forall v,\\
\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= h \quad \text{auf } \Gamma_N.
\end{aligned}$$

Man erkennt, daß diese Variationsformulierung bereits sinnvoll formuliert werden kann, wenn u, $v \in L^2(\Omega)$ und $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$. Weiters haben wir gesehen, daß man die Normalkomponenten $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ und $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}$ sinnvoll definieren kann. Unsere neue Formulierung von (8.3) ist deshalb: Find $(u, \boldsymbol{\sigma}) \in L^2(\Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega)$, so daß

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_\Omega u \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = \int_{\Gamma_D} g \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \qquad \forall \boldsymbol{\tau} \in H_0(\operatorname{div}, \Gamma_N) := \{\boldsymbol{\tau} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \,|\, \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_N\} \tag{8.5a}$$

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} v = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in L^2(\Omega), \tag{8.5b}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = h \quad \text{auf } \Gamma_N. \tag{8.5c}$$

Bemerkung 8.7 Die Lösbarkeit von (8.5) ergibt sich aus der Sattelpunkttheorie. Wir haben:

- (inf-sup) die Bilinearform $(\boldsymbol{\sigma}, u) \mapsto b(\boldsymbol{\sigma}, u) = \int_\Omega u \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}$ erfüllt die inf-sup Bedingung. Betrachte hierzu den einfacheren Fall $\Gamma_N = \emptyset$, so daß b auf $H(\operatorname{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)$ betrachet wird. Wegen Dichtheit reichtes, $u \in C_0^\infty(\Omega)$ zu betrachten. Setze $\boldsymbol{\sigma} := \nabla z$, wobei $z \in H_0^1(\Omega)$ die Gleichung $-\Delta z = -u$ erfüllt, d.h.
$$(\nabla z, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)} = -(u, \varphi)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$
Dann ist $\boldsymbol{\sigma} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ denn $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega) = -u \in L^2(\Omega)$: für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt
$$\langle \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}, \varphi \rangle \stackrel{def.}{=} -(\boldsymbol{\sigma}, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)} = -(\nabla z, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)} = (u, \varphi)_{L^2(\Omega)}.$$
Damit ist $b(\boldsymbol{\sigma}, u) = \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$ und $\|\boldsymbol{\sigma}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} \sim \|\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|u\|_{L^2(\Omega)}$.
Im Fall $|\Gamma_N| > 0$ geht man ähnlich vor, indem man z als die Lösung von
$$-\Delta z = -u, \quad z|_{\Gamma_D} = 0, \quad \partial_n z|_{\Gamma_N} = 0$$
wählt. Man kann dann zeigen, daß $\boldsymbol{\sigma} := \nabla z$ die Bedingungen $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = u$ und $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$ auf Γ_N erfüllt.
Ein Alternativbeweis (Übung!) für den Fall $\Gamma_N = \emptyset$ zeigt, daß man sogar $\boldsymbol{\sigma} \in (H^1(\Omega))^2$ erhalten kann: Überlegen Sie sich mittels des Satz von deRham (Satz 7.26) und dem Vorgehen wie beim Beweis der Stabilität des Taylor-Hood-Elementes folgende inf-sup-Bedingung:
$$\inf_{u \in L^2(\Omega)} \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in H(\operatorname{div}, \Omega)} \frac{b(\boldsymbol{\sigma}, u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} \geq \inf_{u \in L^2(\Omega)} \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in H^1(\Omega))^2} \frac{b(\boldsymbol{\sigma}, u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{H^1(\Omega)}} \geq \gamma. \tag{8.6}$$
- Die Bilinearform $a : H(\operatorname{div}, \Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega) : (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) \mapsto a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}$ ist koerziv auf $\operatorname{Ker} \mathbf{B}$: Hierzu überlegt man sich, daß $\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)$, und für $\boldsymbol{\sigma} \in \operatorname{Ker} \mathbf{B}$ gilt dann
$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) = \|\boldsymbol{\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\boldsymbol{\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

■

Bemerkung 8.8 Die Formulierung (8.5) unterscheidet sich in folgenden Punkten von der Formulierung für (8.3), die wir bisher kennengelernt haben:

- Während bisher die Dirichletdaten g in den Ansatzraum H^1 eingebaut wurden ("wesentliche Randbedingungen") und die Neumanndaten h in der Variationsformulierung berücksichtigt wurden ("natürliche Randbedingungen") ist es nun umgekehrt: die Dirichletdaten sind "natürlich" (also in der Variationsformulierung) und die Neumanndaten "wesentlich". Das Vorgehen so weit ist formal, weil der Raum $H_0(\operatorname{div}, \Gamma_N)$ nicht ganz sauber eingeführt ist und nicht gesagt wird, in welchen Räumen die Daten g, h liegen. Unter Zuhilfenahme der (bisher nicht eingeführten) Räume $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_N) := \gamma H^1(\Omega; \Gamma_D)$, $H^{-1/2}(\Gamma_N) := \left(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)\right)'$ sagen wir, daß $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0$ gilt, falls $\langle \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}, \varphi \rangle = 0$ gilt für alle $\varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_N)$. Die "wesentliche" Randbedingung $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = h \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$ wird erzwungen, indem man ein "Lifting" $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ mit $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} - h = 0$ auf Γ_N wählt. (Das kann gefunden werden, weil ein $h \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$ zu einem Element aus $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ fortgesetzt werden kann, weil $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_D) := \gamma H^1(\Omega; \Gamma_D)$ ein abgeschlossener Unterraum von $H^{1/2}(\partial\Omega)$ ist.) Die Dirichletdaten g kann man in $H^{1/2}(\Gamma_D) := (\gamma H^1(\Omega))|_{\Gamma_D}$ fordern, denn damit die Linearform $\boldsymbol{\tau} \mapsto \langle g, \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \rangle$ sinnvoll definiert ist, muß für die Testfunktion gelten: $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)$, d.h. $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0$ auf $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$, was für $\boldsymbol{\tau} \in H_0(\operatorname{div}, \Gamma_N)$ gewährleistet ist.

- Die Annahmen an die Daten wie z.B. f sind andere: in (8.5) muß $f \in L^2(\Omega)$ angenommen werden. Bei den bisherigen Formulierungen konnte f sogar in $(H^1(\Omega))'$ angenommen werden. ∎

8.1.3 Raviart-Thomas Elemente

Für (konforme) FEM-Diskretisierungen von $H(\mathrm{div}, \Omega)$ brauchen wir Teilräume. Eine klassische Wahl ist der sog. BDM[2]-Raum für $p \geq 1$

$$BDM_p(\mathcal{T}) := \{\boldsymbol{\sigma} \in (L^2(\Omega))^2 \,|\, \boldsymbol{\sigma}|_K \in \mathcal{P}_p^2 \quad \forall K \in \mathcal{T} \text{ und } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ ist stetig über Elementkanten hinweg } \} \tag{8.7}$$

$$\overset{\text{Übung 8.5}}{\subset} H(\mathrm{div}, \Omega)$$

(Stetigkeit über Kante hinweg zu verstehen als: falls e gemeinsame Kante von K und K' ist, dann ist $\boldsymbol{\sigma}|_K \cdot \mathbf{n}^K = -\boldsymbol{\sigma}|_{K'} \cdot \mathbf{n}^{K'}$.) Eine weitere klassische Wahl, welche wir genauer betrachten ist der Raviart-Thomas-Raum für $p \geq 0$:

$$RT_p(K) := \mathcal{P}_p^2 + \mathcal{P}_p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{8.8}$$

$$RT_p(\mathcal{T}) := \{\boldsymbol{\sigma} \in (L^2(\Omega))^2 \,|\, \boldsymbol{\sigma}|_K \in RT_p(K) \quad \forall K \in \mathcal{T} \text{ und } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ ist stetig über Elementkanten hinweg}\}. \tag{8.9}$$

Der Fall niedrigster Ordnung ist der Raum $RT_0(\mathcal{T})$, bei dem auf jedem Element K die Funktionen die Form

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{8.10}$$

haben. Wir beobachten, daß für solche Funktionen auf den drei Kanten von K gilt: $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_e = \text{const}$. Man kann für jede Kante $e_i \in \mathcal{E}(K)$, $i = 1, \ldots, 3$, den Freiheitsgrad

$$\psi_{e_i}(\boldsymbol{\sigma}) := \int_{e_i} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

definieren. Diese drei linearen Funktionale sind linear unabhängig auf $RT_0(K)$, d.h. für jedes Tripel $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathbb{R}^3$ exist ein eindeutiges $\boldsymbol{\sigma}$ von der Form (8.10) mit $\psi_{e_i}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_i$, $i = 1, 2, 3$.

Übung 8.9 Geben Sie für das Referenzdreieck $\widehat{K}$ die "nodale" Basis $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3\}$ von $RT_0(\widehat{K})$ an, d.h. es gilt für die drei Kanten e_i, $i = 1, 2, 3$ von $\widehat{K}$

$$\psi_{e_i}(\boldsymbol{\sigma}_j) = \delta_{ij}.$$

∎

Damit können wir den Interpolanten $I_h^{RT}\boldsymbol{\varphi} \in RT_0(\mathcal{T})$ definieren durch die Bedingungen $(I_h^{RT}\boldsymbol{\varphi})|_K := I_K^{RT}\boldsymbol{\varphi}$ mit

$$\int_e (I_K^{RT}\boldsymbol{\varphi}) \cdot \mathbf{n}^K = \int_e \boldsymbol{\varphi}|_K \cdot \mathbf{n}^K \qquad \forall e \in \mathcal{E}(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}. \tag{8.11}$$

Dieser Operator ist wohldefiniert, d.h. er bildet in den Raum $RT_0(\mathcal{T})$ ab, denn:

(a) Der Interpolant $I_h^{RT}\boldsymbol{\varphi}$ kann nach Obigem *elementweise* definiert werden durch $(I_h^{RT}\boldsymbol{\varphi})|_K \in RT_0(K)$ für alle $K \in \mathcal{T}$.

(b) Nach Obigem ist $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ konstant auf jeder Kante für $\boldsymbol{\sigma} \in RT_0(K)$. Diese Konstante wird in (8.11) fixiert, und hängt (für hinreichend glatte $\boldsymbol{\varphi}$) nur von $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi}|_e$ ab. Damit hat die elementweise definierte Funktion stetige Normalkomponenten über Elementkanten.

Übung 8.10 Sei $\mathcal{E}(\mathcal{T})$ die Menge der Kanten von $\mathcal{T}$. Überlegen Sie sich, daß eine Basis $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{\varphi}_e \,|\, e \in \mathcal{E}(\mathcal{T})\}$ von $RT_0(\mathcal{T})$ gibt, welche folgende Bedingung erfüllt:

[2] Brezzi-Douglas-Marini

(i) $\operatorname{supp} \boldsymbol{\varphi}_e \subset \overline{\omega_e}$ für alle Kanten $e \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$. Insbesondere ist $\boldsymbol{\varphi}_e = 0$ auf Kanten e' mit $e' \cap \omega_e = \emptyset$.

(ii) sei $K \in \mathcal{T}$ mit $K \subset \omega_e$. Dann gilt für alle Kanten $e' \in \mathcal{E}(K)$

$$\int_{e'} \boldsymbol{\varphi}_e|_K \cdot \mathbf{n}^K = \delta_{e,e'}.$$

Überlegen Sie sich, wie $I_h^{RT}\boldsymbol{\varphi}$ mittels der Basis $\{\boldsymbol{\varphi}_e \,|\, e \in \mathcal{E}\}$ ausgedrückt werden kann. ∎

I_h^{RT} ist eine Projektion auf $RT_0(\mathcal{T})$. Zusätzlich erhält I_h^{RT} die Divergenz im Mittel:

Lemma 8.11

$$\int_K \operatorname{div} I_h^{RT}\boldsymbol{\sigma} = \int_K \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}.$$

Beweis:

$$\int_K \operatorname{div} I_h^{RT}\boldsymbol{\sigma} = \sum_{e\in\mathcal{E}(K)} \int_e (I_h^{RT}\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} = \sum_{e\in\mathcal{E}(K)} \int_e \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \int_K \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}.$$

□

Bezeichnet $\Pi_h^{L^2} : L^2(\Omega) \to S^{0,0}(\mathcal{T})$ die L^2-Projektion auf den Raum der stückweise konstanten Funktionen, dann läßt sich die Aussage von Lemma 8.11 auch als *kommutatives Diagramm* darstellen:

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Omega) & \xrightarrow{\operatorname{div}} & L^2(\Omega) \\ \big\downarrow{\scriptstyle I_h^{RT}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \Pi_h^{L^2}} \\ RT_0(\mathcal{T}) & \xrightarrow{\operatorname{div}} & S^{0,0}(\mathcal{T}) \end{array} \tag{8.12}$$

8.1.4 Interpolationsfehler und Piolatransformation

Fehlerabschätzungen für $\boldsymbol{\sigma} - I_h^{RT}\boldsymbol{\sigma}$ erhält man mittels Skalierungsargumenten. Man beachte, daß bei Koordinatenwechsel $x = F(\widehat{x})$ der Normalenvektor auf eine Kante typischerweise nicht auf den Normalenvektor der transformierten Kante abgebildet wird. Damit ist z.B. $(I_K^{RT}\boldsymbol{\sigma})|_K \circ F_K \neq I_{\widehat{K}}^{RT}(\boldsymbol{\sigma} \circ F_K)$. Die *Piolatransformation* leistet dies:

Definition 8.12 (Piolatransformation) *Sei $F_K : \widehat{K} \to K$ die Elementabbildung. Sei $\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \in L^2(\widehat{K})$. Dann ist die* Piolatransformation $\mathcal{P} : \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \mapsto \boldsymbol{\sigma} := \mathcal{P}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ *definiert durch die Beziehung*

$$\boldsymbol{\sigma} \circ F_K = |\det F_K'|^{-1} F_K' \widehat{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{8.13}$$

Die Rolle der (kontravarianten) Piolatransformation wird ersichtlich, wenn man danach fragt, wie der Divergenzoperator unter Koordinatenwechseln transformiert:

Lemma 8.13 *Sei $\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \in H(\operatorname{div}, \widehat{K})$ und $\boldsymbol{\sigma} := \mathcal{P}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$. Dann gilt:*

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \circ F_K = \frac{1}{|\det F_K'|} \operatorname{div} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{8.14}$$

Falls $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ hinreichend glatt ist, dann gilt für jede Kante $\widehat{e}$ von $\widehat{K}$ mit $e = F_K(\widehat{e})$

$$\int_e \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \int_{\widehat{e}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \widehat{\mathbf{n}}. \tag{8.15}$$

Weiters ist $RT_p(K) = \mathcal{P}RT_p(\widehat{K})$.

Beweis: Man könnte (8.14) (für hinreichend glatte $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$) direkt mit der Kettenregel nachrechnen. Einfacher ist es, wie folgt vorzugehen. Sei $\widehat{\varphi} \in C_0^\infty(\widehat{K})$ und φ gegeben durch $\varphi \circ F_K = \widehat{\varphi}$. Es ist[3]

$$\begin{aligned}
-\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \varphi = \int_K \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \varphi = \int_{\widehat{K}} (\boldsymbol{\sigma} \circ F_K) \cdot ((F_K')^{-\top} \nabla \widehat{\varphi}) |\det F_K'| = \int_{\widehat{K}} (|\det F_K'| {F_K'}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \circ F_K) \cdot \nabla \widehat{\varphi} \\
= \int_{\widehat{K}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \nabla \widehat{\varphi} = -\int_{\widehat{K}} \operatorname{div} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \widehat{\varphi} = -\int_K (\operatorname{div} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}) \circ F_K^{-1} \frac{1}{|\det F_K'|} \varphi,
\end{aligned}$$

woraus (8.14) mittels der Dichtheit von $C_0^\infty(K)$ in $L^2(K)$ folgt. Für (8.15) betrachten wir $\varphi \in C^\infty(\overline{K})$. Dann folgt

$$\int_{\partial K} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \varphi = \int_K \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \varphi) \overset{(8.14)}{=} \int_{\widehat{K}} \operatorname{div}(\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \widehat{\varphi}) = \int_{\partial \widehat{K}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \widehat{\mathbf{n}} \widehat{\varphi}.$$

Betrachtet man Funktionen φ mit $\varphi|_{\partial K} \overset{L^2(\partial\Omega)}{\to} \chi_e$ folgt die Behauptung.

Für die Aussage $RT_p(K) = \mathcal{P} RT_p(\widehat{K})$: wir betrachten nur den Fall $p = 0$. Für ein $\boldsymbol{\sigma} \in RT_p(K)$ gilt dann $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a} + b\mathbf{x}$ und mit der Elementabbildung $F(\widehat{\mathbf{x}}) = \mathbf{b} + F'\mathbf{x}$ folgt

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = |\,\mathrm{F}'\,| {F'}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \circ F = |\,\mathrm{F}'\,| {F'}^{-1} (\mathbf{a} + +bF'\widehat{\mathbf{x}}) == |\,\mathrm{F}'\,| \left({F'}^{-1} (\mathbf{a} + +b\widehat{\mathbf{x}}) \right) \in RT_p(\widehat{K}),$$

d.h. $\mathcal{P}^{-1} RT_p(K) \subset RT_p(\widehat{K})$. Analog zeigt man $\mathcal{P} RT_p(\widehat{K}) \subset RT_p(K)$. □

Allgemeiner gilt:

Übung 8.14 Seien $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$, $\widehat{v}$ hinreichend glatt. Definiere $\boldsymbol{\sigma} := \mathcal{P}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ und v durch $v \circ F_K = \widehat{v}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_K \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla v &= \int_{\widehat{K}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \nabla \widehat{v} \\
\int_K \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} v &= \int_{\widehat{K}} \operatorname{div} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \widehat{v} \\
\int_{\partial K} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} v &= \int_{\partial \widehat{K}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \widehat{\mathbf{n}} \widehat{v}
\end{aligned}$$

■

Die Eigenschaft (8.15) impliziert:

Lemma 8.15 *Das $RT_0(K)$ und $RT_0(\widehat{K})$-Element sind interpolationsäquivalent, d.h.*

$$\mathcal{P}(I_{\widehat{K}}^{RT} \widehat{\boldsymbol{\varphi}}) = I_K^{RT} \mathcal{P} \widehat{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{8.16}$$

Wir erhalten insgesamt folgende Fehlerabschätzung:

Lemma 8.16 *Sei $\mathcal{T}$ affine, formreguläre Triangulierung. D.g. für alle $K \in \mathcal{T}$*

$$\|\boldsymbol{\varphi} - I_K^{RT} \boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)} \le C h_K \|\nabla \boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)} \tag{8.17}$$

$$\|\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi} - I_K^{RT} \boldsymbol{\varphi})\|_{L^2(K)} \le C h_K \|\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)}. \tag{8.18}$$

Beweis: Im Folgenden verwenden wir $\widehat{\ }$, um folgende Beziehung zu beschreiben: $\boldsymbol{\varphi} = \mathcal{P}\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$.

1. Schritt: Weil F_K' konstant ist, ergibt sich

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)} \sim \frac{\|F_K'\|}{|\det F_K'|} \sqrt{|\det F_K'|} \|\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|_{L^2(\widehat{K})}, \tag{8.19}$$

$$\|\nabla \boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)} \sim \frac{\|F_K'\|}{|\det F_K'|} \sqrt{|\det F_K'|} \frac{1}{h_K} \|\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|_{L^2(\widehat{K})}. \tag{8.20}$$

[3] man beachte, daß $\cdot$ hier konsequent das Skalarprodukt bezeichnet und nicht eine Matrix-Matrix-Multiplikation

2. Schritt: (Stetigkeit von $I^{RT}_{\widehat{K}}$) Auf dem Referenzelement liefert der Spursatz

$$\|I^{RT}_{\widehat{K}}\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(\widehat{K})} \leq C\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\widehat{K})}.$$

3. Schritt: Es ist

$$\|\boldsymbol{\varphi} - I^{RT}_K\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)} = \|\mathcal{P}\widehat{\boldsymbol{\varphi}} - \mathcal{P}I^{RT}_{\widehat{K}}\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|_{L^2(K)} \overset{(8.19)}{\sim} \frac{\|F'_K\|}{|\det F'_K|}\sqrt{|\det F'_K|}\|\widehat{\boldsymbol{\varphi}} - I^{RT}_{\widehat{K}}\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|_{L^2(\widehat{K})}. \tag{8.21}$$

Nun verwenden wir, daß $I^{RT}_{\widehat{K}}$ konstante Vektorfelder reproduziert. Damit

$$\begin{aligned}\|\widehat{\boldsymbol{\varphi}} - I^{RT}_{\widehat{K}}\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|_{L^2(\widehat{K})} &= \inf_{\mathbf{c}\in\mathbb{R}^2}\|\widehat{\boldsymbol{\varphi}} - \mathbf{c} - I^{RT}_{\widehat{K}}(\widehat{\boldsymbol{\varphi}} - \mathbf{c})\|_{L^2(\widehat{K})} \leq C\inf_{\mathbf{c}\in\mathbb{R}^2}\|\widehat{\boldsymbol{\varphi}} - \mathbf{c}\|_{H^1(\widehat{K})} \leq C\|\nabla\widehat{\boldsymbol{\varphi}}\|_{L^2(\widehat{K})}\\ &\overset{(8.20)}{\sim} \frac{|\det F'_K|}{\|F'_K\|\sqrt{|\det F'_K|}}h_K\|\nabla\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)}.\end{aligned}$$

Setzt man dies in (8.21) ein, ergibt sich die Behauptung (8.17).

Der Beweis von (8.18) beruht auf dem kommutativen Diagramm (8.12):

$$\|\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi} - I^{RT}_K\boldsymbol{\varphi})\|_{L^2(K)} = \|\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} - \Pi^{L^2}_h\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)} \leq Ch_K\|\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)}.$$

□

Der Operator I^{RT}_h ist *nicht* auf $H(\operatorname{div},\Omega)$ definiert, jedoch auf Räumen von Funktionen mit etwas mehr Regularität:

Übung 8.17 Zeigen Sie folgende Stetigkeitseigenschaften von I^{RT}_K:

$$\begin{aligned}\|I^{RT}_K\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)} &\leq \|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(K)}\\ \|\operatorname{div}I^{RT}_K\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)} &\leq \|\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)}.\end{aligned}$$

8.1.5 Konvergenz

Wir betrachten (8.5) für den Fall $\Gamma_N = \emptyset$. Die Diskretisierung von (8.3) lautet: Finde $(u_h, \boldsymbol{\sigma}_h) \in S^{0,0}(\mathcal{T})\times RT_0(\mathcal{T})$, so daß

$$a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, u_h) = l(\boldsymbol{\tau}) = \int_{\partial\Omega} g_D\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{n} \qquad \forall\boldsymbol{\tau}\in RT_0(\mathcal{T}), \tag{8.22a}$$

$$b(\boldsymbol{\sigma}_h, v) = \int_\Omega fv \qquad \forall v\in S^{0,0}(\mathcal{T}). \tag{8.22b}$$

Satz 8.18 *Sei $(u,\boldsymbol{\sigma}) \in L^2(\Omega)\times H(\operatorname{div},\Omega)$ Lösung von (8.3) und $(u_h,\boldsymbol{\sigma}_h)$ Lösung von (8.22). Dann gilt:*

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{H(\operatorname{div},\Omega)} + \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\left[\|\boldsymbol{\sigma}\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{H^1(\Omega)}\right].$$

Beweis: Schreibe $X_h = RT_0(\mathcal{T})$ und $M_h := S^{0,0}(\mathcal{T})$.

1. Schritt: (Koerzivität auf Kern) Definiere

$$\operatorname{Ker}\mathbf{B}_N := \{\boldsymbol{\sigma}\in X_h \,|\, b(\boldsymbol{\sigma}, v) = 0 \quad \forall v\in M_h\}$$

Weil $\operatorname{div}X_h \subset M_h$ ist (vgl. Übung 8.5), schließen wir

$$\boldsymbol{\sigma}\in\operatorname{Ker}\mathbf{B}_N \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{f.ü. auf } \Omega$$

und damit auch $\operatorname{Ker}\mathbf{B}_N \subset \operatorname{Ker}\mathbf{B} := \{\boldsymbol{\sigma}\in H(\operatorname{div},\Omega)\,|\, b(\boldsymbol{\sigma}, v) = 0 \quad \forall v\in L^2(\Omega)\}$. Somit

$$a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\sigma}_h) = \|\boldsymbol{\sigma}_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\boldsymbol{\sigma}_h\|^2_{H(\operatorname{div},\Omega)} \qquad \forall\boldsymbol{\sigma}_h\in\operatorname{Ker}\mathbf{B}_N.$$

2. Schritt: (diskrete inf-sup-Bedingung) Das kommutierende Diagram erlaubt uns, den Fortin-Trick zu verwenden. Sei $u \in S^{0,0}(\mathcal{T})$. Dann existiert nach (8.6) ein $\boldsymbol{\sigma} \in (H^1(\Omega))^2$ (beachte: $\boldsymbol{\sigma}$ ist nicht nur in $H(\operatorname{div}, \Omega)$ sondern sogar in $(H^1(\Omega))^2$!) mit

$$b(\boldsymbol{\sigma}, u) \geq \gamma \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Weil $\boldsymbol{\sigma} \in (H^1(\Omega))^2$ können wir I_h^{RT} anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} b(I_h^{RT}\boldsymbol{\sigma}, u) &= \int_\Omega (\operatorname{div} I_h^{RT}\boldsymbol{\sigma})u \overset{Lemma\ 8.11}{=} \int_\Omega (\Pi_h^{L^2} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma})u \overset{u \in S^{0,0}(\mathcal{T})}{=} \int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma})u = b(\boldsymbol{\sigma}, u) \\ &\geq \gamma \|\boldsymbol{\sigma}\|_{H^1} \|u\|_{L^2(\Omega)} \overset{\text{Übung } 8.17}{\geq} C \|I_h^{RT}\boldsymbol{\sigma}\|_{H(\operatorname{div},\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Damit folgt aus Satz 7.21

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{H(\operatorname{div},\Omega)} + \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \inf_{(\boldsymbol{\tau},v) \in X_h \times M_h} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}\|_{H(\operatorname{div},\Omega)} + \|u - v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Wir schätzen ab

$$\begin{aligned} \inf_{\boldsymbol{\tau} \in X_h} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}\|_{H(\operatorname{div},\Omega)} &\leq \|\boldsymbol{\sigma} - I_h^{RT}\boldsymbol{\sigma}\|_{H(\operatorname{div},\Omega)} \lesssim \|\boldsymbol{\sigma} - I_h^{RT}\boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \Pi_h^{L^2} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim h\|\boldsymbol{\sigma}\|_{H^1(\Omega)} + h\|\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}\|_{H^1(\Omega)} = h\|\boldsymbol{\sigma}\|_{H^1(\Omega)} + h\|f\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Weiters schätzen wir ab

$$\inf_{v \in M_h} \|u - v\|_{L(\Omega)} \lesssim h\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Zusammen erhalten wir die gewünschte Aussage. □

Bemerkung 8.19 Auch die $S^{1,1}(\mathcal{T})$-basierte FEM liefert Konvergenz $O(h)$. Im besten Fall sind für die $S^{1,1}(\mathcal{T})$-basierte FEM die Annahmen an die Daten geringer: $f \in L^2(\Omega)$ versus $f \in H^1(\Omega)$ in Satz 8.18. Andererseits ist die Konvergenz in Satz 8.18 stärker, weil sie auch $\|\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)\|_{L^2(\Omega)} = O(h)$ liefert. ■

8.1.6 Raviart-Thomas Elemente höherer Ordnung

Der Raum $RT_p(K)$ wurde bereits in (8.8) eingeführt. Es ist besser, ihn wie folgt zu definieren:

$$RT_p(K) := \mathcal{P}_p^2 + \widetilde{\mathcal{P}}_p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{8.23}$$

wobei $\widetilde{\mathcal{P}}_p$ der Raum der *homogenen* Polynome vom Grad p ist:

$$\widetilde{\mathcal{P}}_p = \operatorname{span}\{x^i y^j \mid i + j = p\}. \tag{8.24}$$

Man kann nachzählen, daß im vorliegenden Fall $d = 2$ gilt[4]

$$\dim RT_p(K) = (p+1)(p+3).$$

Das folgende Lemma zeigt, welche Freiheitsgrade linear unabhängig sind:

Lemma 8.20 *Sei $\boldsymbol{\sigma} \in RT_p(K)$. Dann implizieren folgende $(p+1)(p+3)$ Bedingungen, daß $\boldsymbol{\sigma} = 0$ ist:*

$$\int_e \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\pi = 0 \quad \forall \pi \in \mathcal{P}_p \quad \forall e \in \mathcal{E}(K), \tag{8.25}$$

$$\int_K \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{P}_{p-1}^2. \tag{8.26}$$

[4] für $d = 3$ gilt analog $\dim RT_p(K) = \frac{1}{2}(p+1)(p+2)(p+4)$

Beweis: Wir betrachten den Fall des Referenzelementes $\widehat{K}$. Sei $\boldsymbol{\sigma} \in RK_p(\widehat{K})$.

1. Schritt: Weil $(x,y)^\top \cdot \mathbf{n}$ konstant auf den Kanten ist, schließen wir aus (8.25), daß

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \partial\widehat{K}. \tag{8.27}$$

2. Schritt: Einsetzen von $\boldsymbol{\tau} := \nabla\pi$ für beliebiges $\pi \in \mathcal{P}_p$ in (8.26), partielle Integration und (8.27) liefern

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{auf } \widehat{K}. \tag{8.28}$$

3. Schritt: Wir schreiben $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varphi} + \pi\mathbf{x}$ mit $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{P}_p^2$ und $\pi \in \widetilde{\mathcal{P}}_p$. Weil π ein homogenes Polynom ist, erhalten wir

$$0 \overset{(8.28)}{=} \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} + \nabla\pi\cdot\mathbf{x} + \pi\operatorname{div}\mathbf{x} = \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} + \pi + 2\pi = \underbrace{\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}}_{\in\mathcal{P}_{p-1}} + \underbrace{2\pi}_{\in\widetilde{\mathcal{P}}_p}, \tag{8.29}$$

woraus sich $\pi = 0$ ergibt, d.h. $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{P}_p^2$. Wegen (8.27) ergibt sich auf dem Referenzelement $\widehat{K}$ die Darstellung

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varphi} = (y\phi_1(x,y), x\phi_2(x,y))$$

für $\phi_i \in \mathcal{P}_{p-1}$. Wählt man $\boldsymbol{\tau} = (\phi_1,\phi_2)^\top$ in (8.26) ergibt sich

$$0 = \int_{\widehat{K}} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\tau} = \int_{\widehat{K}} y\phi_1^2 + x\phi_2^2,$$

d.h. $\phi_1 = \phi_2 = 0$ und damit $\boldsymbol{\sigma} = 0$. □

Der Interpolationsoperator I_h^{RT} ergibt sich im Fall $p > 0$ analog durch elementweise Definition via: $(I_h^{RT}\boldsymbol{\varphi})|_K = I_K^{RT}\boldsymbol{\varphi}$ mit

$$\begin{aligned}\int_e I_K^{RT}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\pi &= \int_e \boldsymbol{\sigma}|_K\cdot\mathbf{n}\pi \qquad \forall e \in \mathcal{E}(K) \quad \forall\pi\in\mathcal{P}_p\\ \int_K I_K^{RT}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi} &= \int_K \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi} \qquad \forall\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{P}_{p-1}^2.\end{aligned}$$

und wie im Fall $p = 0$ überlegt man sich, daß die so elementweise definierte Funktion $I_h^{RT}\boldsymbol{\sigma}$ in $H(\operatorname{div},\Omega)$ ist. Das Analogon von Lemma 8.11 ist

Lemma 8.21

$$\int_K \operatorname{div} I_h^{RT}\boldsymbol{\sigma}\pi = \int_K \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}\pi \qquad \forall\pi\in\mathcal{P}_p$$

Beweis: Übung. □

Lemma 8.21 besagt, daß mit der $L^2(\Omega)$-Projektion $\Pi_h^{L^2} : L^2(\Omega) \to S^{p,0}(\mathcal{T})$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Omega) & \xrightarrow{\operatorname{div}} & L^2(\Omega) \\ \big\downarrow I_h^{RT} & & \big\downarrow \Pi_h^{L^2} \\ RT_p(\mathcal{T}) & \xrightarrow{\operatorname{div}} & S^{p,0}(\mathcal{T}) \end{array} \tag{8.30}$$

Tatsächlich ist es geschickter, den Operator I_K^{RT} auf dem Referenzelement zu definieren. Die entsprechende Definition auf dem Element K ergibt sich dann wie in der folgenden Übung beschrieben:

Übung 8.22 Zeigen Sie, daß (für affine Elementabbildungen F_K) der Raviart-Thomas-Interpolant äquivalent definiert werden kann durch

$$\int_e I_K^{RT}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\pi = \int_e \boldsymbol{\sigma}|_K\cdot\mathbf{n}\pi \qquad \forall e\in\mathcal{E}(K) \quad \forall\pi\in\mathcal{P}_p \tag{8.31}$$

$$\int_K I_K^{RT}\boldsymbol{\sigma}\cdot(F_K')^{-\top}\boldsymbol{\varphi} = \int_K \boldsymbol{\sigma}\cdot(F_K')^{-\top}\boldsymbol{\varphi} \qquad \forall\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{P}_{p-1}^2. \tag{8.32}$$

Definieren Sie auf dem Referenzelement $\widehat{K}$ den Raviart-Thomas Interpolant $I^{RT}_{\widehat{K}}$ durch

$$\int_{\widehat{e}} I^{RT}_{\widehat{K}}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\pi = \int_{\widehat{e}} \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\pi \qquad \forall e\in\mathcal{E}(\widehat{K}) \quad \forall \pi\in\mathcal{P}_p$$
$$\int_{\widehat{K}} I^{RT}_{\widehat{K}}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi} = \int_{\widehat{K}} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi} \qquad \forall\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{P}^2_{p-1}.$$

Zeigen Sie: $I^{RT}_K\mathcal{P}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{P}I^{RT}_{\widehat{K}}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$.

Lemma 8.23 *Sei $\boldsymbol{\sigma}\in RT_p(K)$. Dann ist*

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}\in\mathcal{P}_p \tag{8.33}$$
$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}|_e)\in\mathcal{P}_p \qquad \forall e\in\mathcal{E}(K). \tag{8.34}$$

Zudem ist der Operator $\operatorname{div}: RT_p(K)\to\mathcal{P}_p$ *surjektiv.*

Beweis: (8.34) folgt aus der Tatsache, daß $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}$ konstant auf Kanten ist.

Die Aussage (8.33) folgt aus der Rechnung, die auf der rechten Seite von (8.29) durchgeführt wurde.

Für die Surjektivitätsaussage geben wir 2 Beweise an:

1. Beweis: Da $\operatorname{div} RT_p(K)\subset\mathcal{P}_p$, reicht es zu zeigen, daß $\dim(\operatorname{div} RT_p(K))\geq\dim\mathcal{P}_p$. Dazu genügt es zu zeigen, daß $\dim(\operatorname{div}(\mathbf{x}\mathcal{P}_p))=\dim\mathcal{P}_p$. Wir zeigen deshalb: die Abbildung $\pi\mapsto\operatorname{div}(\mathbf{x}\pi)$ ist injektiv. O.B.d.A. sei $(0,0)\in K$. Dann berechnen wir

$$\int_K \pi\operatorname{div}(\mathbf{x}\pi) = \int_{\partial K}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\pi^2 - \frac{1}{2}\int_K \mathbf{x}\cdot\nabla\pi^2 = \frac{1}{2}\int_{\partial K}\underbrace{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})}_{>0}\pi^2 + \int_K\underbrace{(\operatorname{div}\mathbf{x})}_{=2}\pi^2,$$

woraus wir schließen, daß die Abbildung $\pi\mapsto\operatorname{div}(\mathbf{x}\pi)$ injektiv ist.

2. Beweis: Wir konstruieren explizit eine Rechtinverse von div: Sei $(0,0)\in K$. Betrachte die Abbildung

$$\mathcal{L}_D : u\mapsto\mathbf{x}\int_{t=0}^1 tu(t\mathbf{x})\,dt.$$

Dann ist $\mathcal{L}_D\pi\in RT_p(K)$ für $\pi\in\mathcal{P}_p$ und

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathcal{L}_D u &= (\operatorname{div}\mathbf{x})\int_{t=0}^1 tu(t\mathbf{x})\,dt + \mathbf{x}\cdot\int_{t=0}^1 t^2\nabla u(t\mathbf{x})\,dt = 2\int_{t=0}^1 tu(t\mathbf{x})\,dt + \int_{t=0}^1 t^2\frac{d}{dt}u(t\mathbf{x})\,dt\\ &= 2\int_{t=0}^1 tu(t\mathbf{x})\,dt + t^2u(t\mathbf{x})|_{t=0}^1 - \int_{t=0}^1 2tu(t\mathbf{x})\,dt = u(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

□

Die zu Lemma 8.16 analoge Aussage ist

Lemma 8.24 *Sei $\mathcal{T}$ affine, formreguläre Triangulierung und $p\geq 0$. D.g. für alle $K\in\mathcal{T}$*

$$\|\boldsymbol{\varphi}-I^{RT}\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)}\leq Ch_K^{p+1}|\boldsymbol{\varphi}|_{H^{p+1}(K)}, \tag{8.35}$$
$$\|\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}-I^{RT}\boldsymbol{\varphi})\|_{L^2(K)}\leq Ch_K^{p+1}|\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}|_{H^{p+1}(K)}. \tag{8.36}$$

Übung 8.25 Zeigen Sie, analog zu Übung 8.17,

$$\|I^{RT}_K\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)}\leq\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(K)}$$
$$\|\operatorname{div} I^{RT}_K\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)}\leq\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^2(K)}.$$

Kapitel 9

DG-FEM

9.1 Motivation

Wir betrachten für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und hinreichend glatte Funktionen b, c und $\varepsilon > 0$ das Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon\Delta u + b(x)\cdot\nabla u + c(x)u &= f \quad \text{auf } \Omega &\quad (9.1a)\\
u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega &\quad (9.1b)
\end{aligned}
$$

Wir werden zudem an die Funktionen b und c die Bedingung

$$
c(x) - \frac{1}{2}\nabla\cdot b(x) \geq c_0 > 0 \quad \text{auf } \Omega \tag{9.2}
$$

fordern.

Uns interessiert hier der Fall von *kleinem* $\varepsilon > 0$. Es ist deshalb plausibel, numerische Verfahren zu erzeugen, die auch im Grenzfall $\varepsilon = 0$ gut funktionieren.

Die Grenzgleichung ist eine Gleichung *1. Ordnung*:

$$
b(x)\cdot\nabla u + c(x)u = f \quad \text{auf } \Omega. \tag{9.3}
$$

Bei dieser Gleichung kann nicht mehr eine Randbedingung auf dem gesamten Rand $\partial\Omega$ gefordert werden. Wir definieren den "Einströmrand", den "Ausströmrand" und den "charakteristischen Rand" durch

$$
\begin{aligned}
\Gamma^- &:= \{x \in \partial\Omega\colon b(x)\cdot n(x) < 0\} &\quad (9.4)\\
\Gamma^+ &:= \{x \in \partial\Omega\colon b(x)\cdot n(x) > 0\} &\quad (9.5)\\
\Gamma^= &:= \{x \in \partial\Omega\colon b(x)\cdot n(x) = 0\}. &\quad (9.6)
\end{aligned}
$$

Hier ist $n(x)$ der (äußere) Normalenvektor im Punkt $x \in \partial\Omega$. Tatsächlich können wir für (9.3) nur eine Randbedingung auf Γ^- oder Γ^+ fordern. Wir betrachten deshalb das Grenzproblem

$$
\begin{aligned}
b(x)\cdot\nabla u + c(x)u &= f \quad \text{auf } \Omega &\quad (9.7a)\\
u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma^-. &\quad (9.7b)
\end{aligned}
$$

Beispiel 9.1 Betrachten Sie das Problem

$$
-u' + u = f \quad \text{auf } (0,1),
$$

Überlegen Sie sich, daß man nicht sinnvollerweise $u(0) = 0 = u(1)$ fordern kann sondern nur $u(0) = 0$ *oder* $u(1) = 0$