Übungsblatt 7

Diskussion des Blattes: Do., 24.11.2022

1. Erstellen Sie ein 1D-FEM Program in MATLAB zum Lösen von

$$-u'' + u = 2\sin x \qquad \text{auf } (0,\pi), \qquad u(0) = 0, \qquad u'(\pi) = -1.$$

Das Programm soll für beliebiges $p \in \mathbb{N}$ und beliebiges Gitter $\mathcal{T}$ (gegeben als Knotenliste) die FEM basierend auf dem Raum $S^{p,1}(\mathcal{T})$ realisieren. Anschließend soll für jedes $p \in \{1,2,3,4\}$ die Konvergenz bei uniformer Verfeinerung des Gitter untersucht werden. (D.h.: Plotten Sie den Energienormfehler gegen die Gitterweite h für die vier Fälle von p.) Vervollständigen Sie hierzu die Routinen in
`http://www.math.tuwien.ac.at/~melenk/teach/fem_WS2223/blatt7_1D_FEM_empty_shell.m`

Bei der "reinen" p-Methode wird Konvergenz dadurch erzielt, daß auf einem *festen* Gitter der Polynomgrad p erhöht wird. Plotten Sie für den Fall, daß das Gitter aus einem einzigen Element besteht den Fehler gegen $p \in \{1,\ldots,15\}$ semilogarithmisch (`semilogy`).

2. In Aufg. 1 sieht man (super-)exponentielle Konvergenz der reinen p-Methode. Zeigen Sie dies, indem Sie für die Lösung u zeigen: Für jedes $b > 0$ existiert ein $C_b > 0$ so daß

$$\inf_{v \in \mathcal{P}_p} \|u - v\|_{L^\infty(0,\pi)} + \|(u-v)'\|_{L^\infty(0,\pi)} \le C_b e^{-bp} \qquad \forall p \in \mathbb{N}_0.$$

Gilt die (super-)exponentielle Konvergenz immer noch, wenn man die Randbedingungen in Aufg. 1 zu homogenen Dirichletbedingungen ändert?

3. ("Aubin-Nitsche Trick") Betrachten Sie

$$-\Delta u = f \in L^2(\Omega) \qquad \text{auf } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Sei $u_h \in S_0^{1,1}(\mathcal{T})$ die FEM-Approximation an u basierend auf einem formregulären Gitter $\mathcal{T}$ mit Gitterweite h.

a) Zeigen Sie: falls die Lösung $\psi \in H_0^1(\Omega)$ des Problems

$$a(v,\psi) := \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \psi = \int_\Omega v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

die Regularitätsbedingung $\psi \in H^2(\Omega)$ erfüllt, dann gilt

$$\left| \int_\Omega u - u_h \right| \le Ch \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$$

d.h. im Falle von $u \in H^2(\Omega)$ konvergieren die Mittelwerte $|\Omega|^{-1} \int_\Omega u_h$ gegen $|\Omega|^{-1} \int_\Omega u$ wie $O(h^2)$.

b) Sei nun Ω konvex und $f \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie: für den L^2-Fehler gilt $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \le Ch^2$.

4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon mit Ecke $0 \in \partial\Omega$. Sei die Funktion u in Polarkoordinaten gegeben durch $u(r,\varphi) = r^\alpha \Phi(\varphi)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ und eine glatte Funktion Φ. Sei $\mathcal{T}$ eine reguläre, affine, γ-formreguläre Triangulierung von Ω mit folgender Quasiuniformitätseigenschaft:

$$h_K \leq \max_{K\in\mathcal{T}} h_K =: h \leq c_1 h_K \qquad \forall K \in \mathcal{T}.$$

a) Zeigen Sie: Es existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von γ, c_1 und α, Φ, Ω abhängt, so daß der stückweise lineare Interpolant $Iu \in S^{1,1}(\mathcal{T})$ die Abschätzung

$$\|\nabla(u - Iu)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^\alpha$$

erfüllt. *Hinweise:* Betrachten Sie die Elemente K mit $0 \in \overline{K}$ und die Elemente mit $0 \notin \overline{K}$ getrennt. Für die Elemente K mit $0 \notin \overline{K}$ gilt zusätzlich $\operatorname{dist}(K,0) \geq ch$ für ein geeignetes $c > 0$ (welches von c_1 und γ abhängt). Verwenden Sie, daß $|\partial^\beta u| \leq r^{\alpha-2}$ für $\beta \in \mathbb{N}_0^2$ mit $|\beta| = 2$.

b) Zeigen Sie für den Fall $\Phi(\varphi) = 1$

$$\inf_{v\in S^{1,1}(\mathcal{T})} \|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)} \geq ch^\alpha.$$

Hinweis: Betrachten Sie ein Element K mit $0 \in \overline{K}$ und eine geeignete Menge $K' \subset K$. Überlegen Sie sich

$$\inf_{v\in S^{1,1}(\mathcal{T})} \|\nabla u - \nabla v\|_{L^2(K)} \geq \inf_{a\in\mathbb{R}} \|\partial_r u - a\|_{L^2(K)} \geq \inf_{a\in\mathbb{R}} \|\partial_r u - a\|_{L^2(K')} \geq ch_K^\alpha.$$